This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

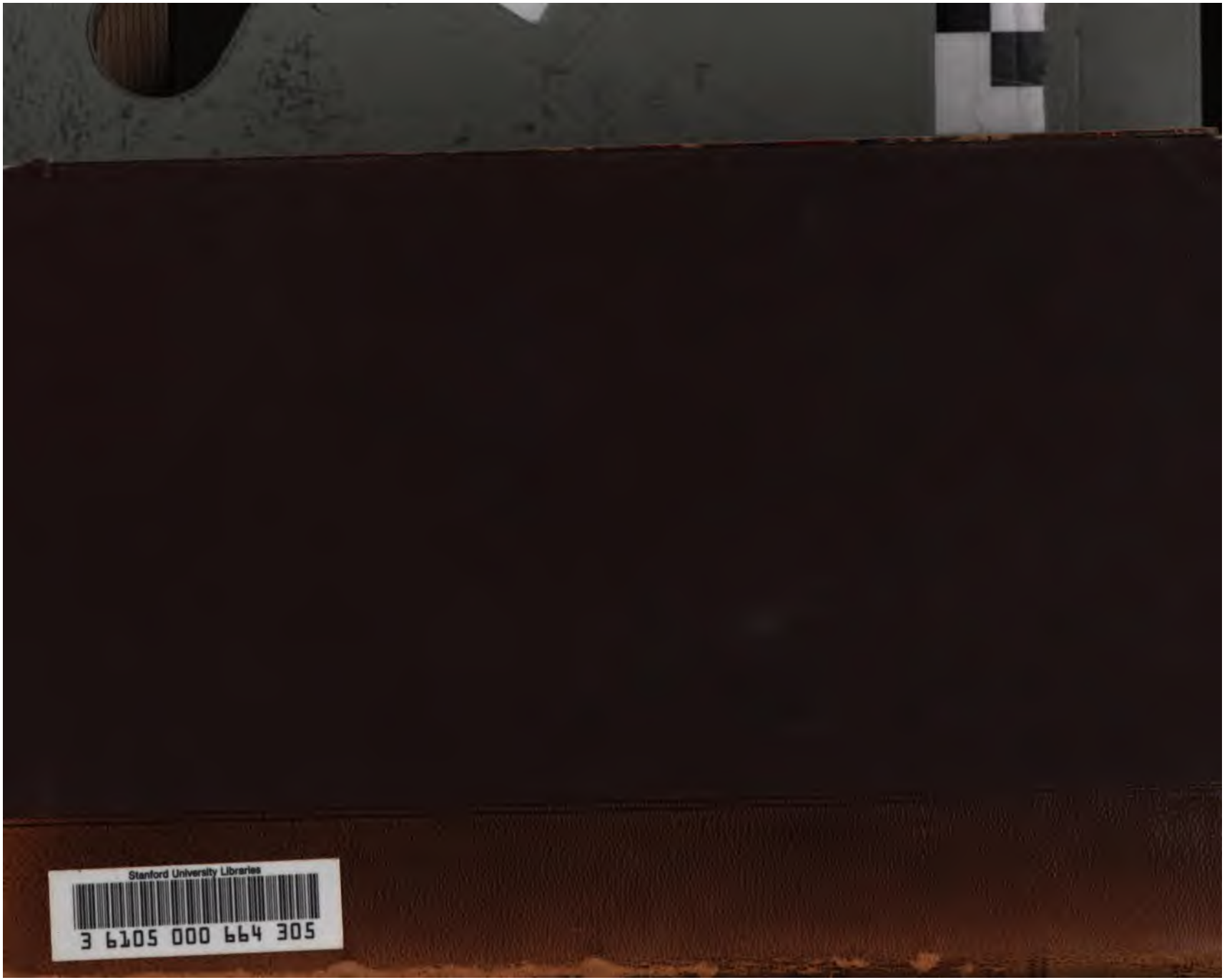
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

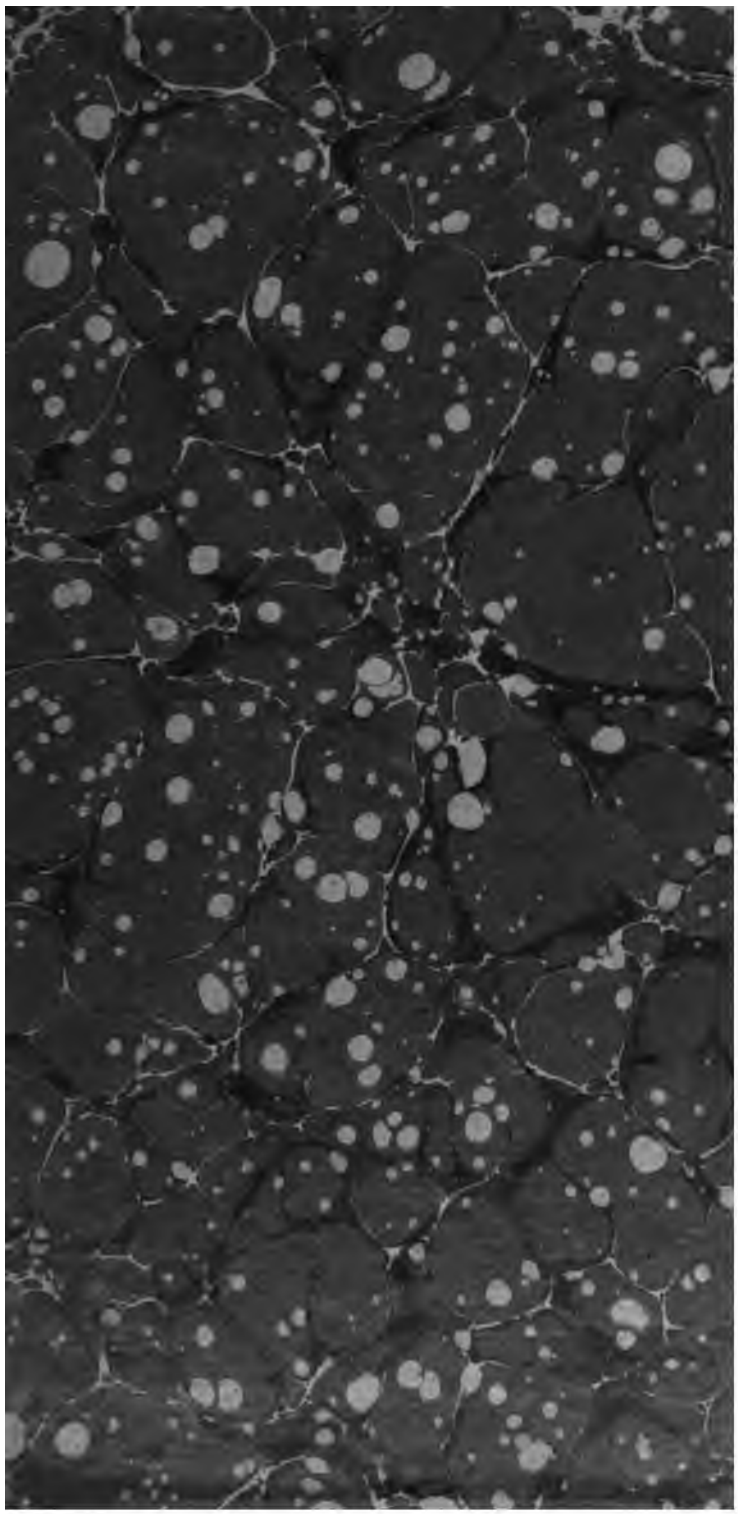
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

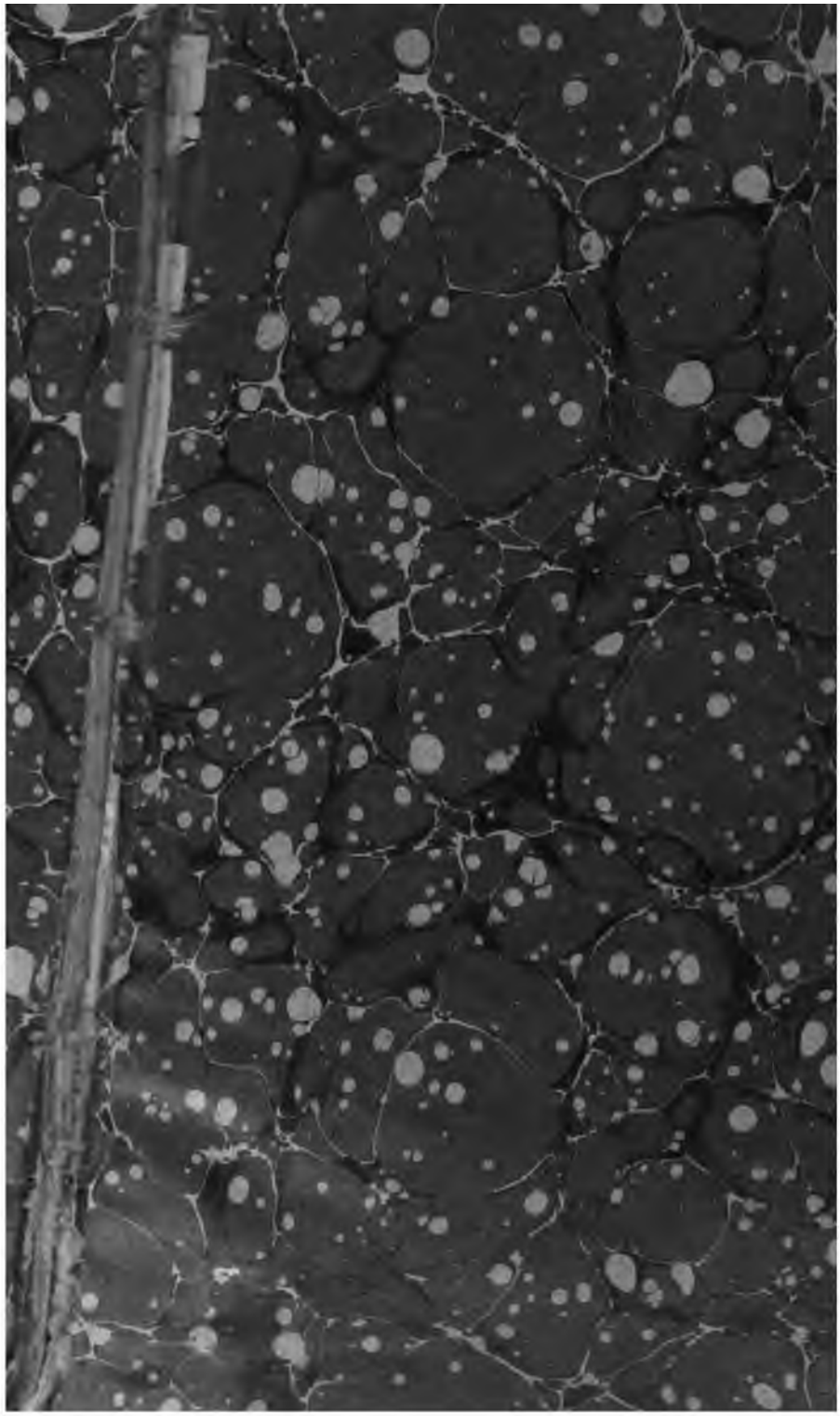
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

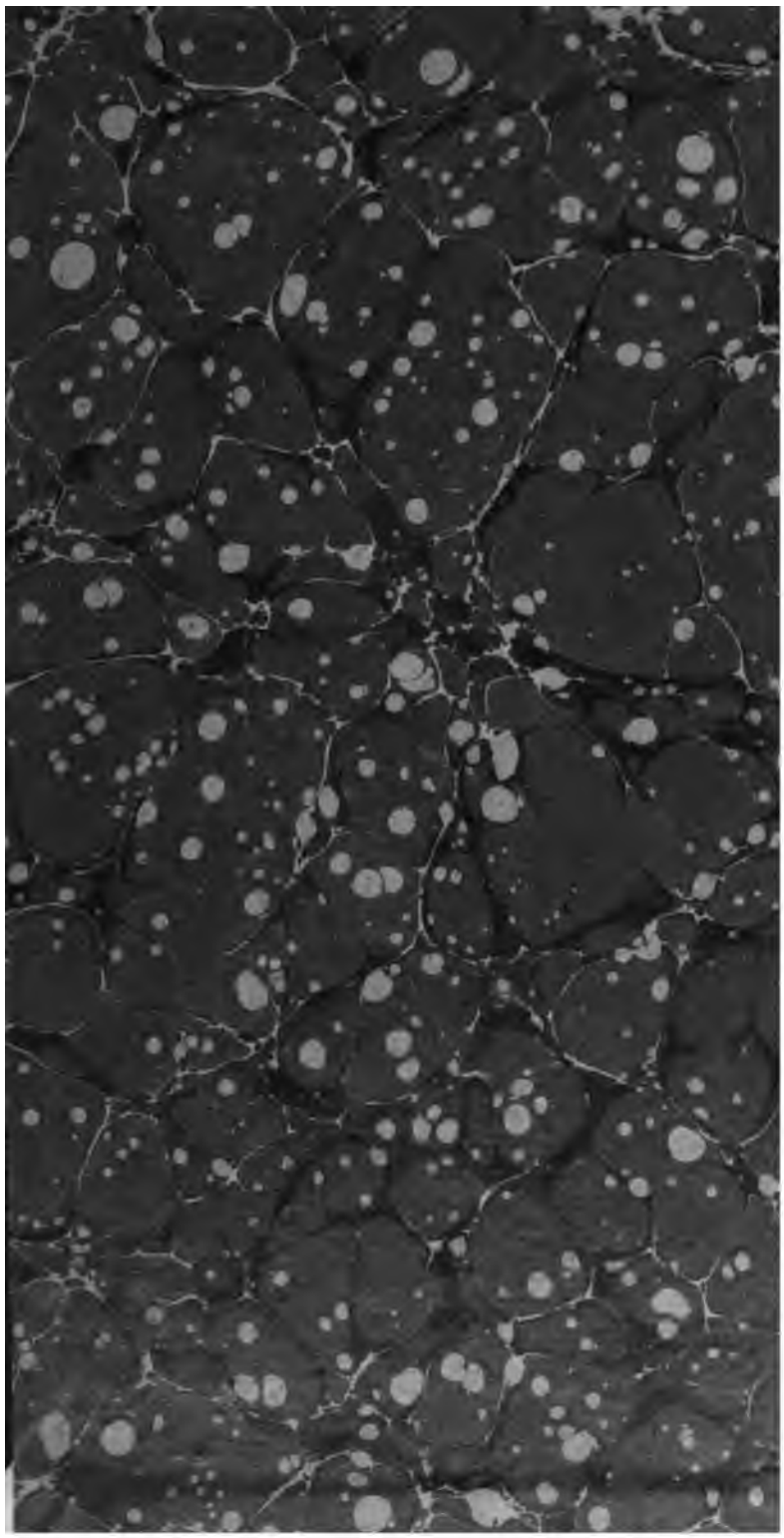
Über Google Buchsuche

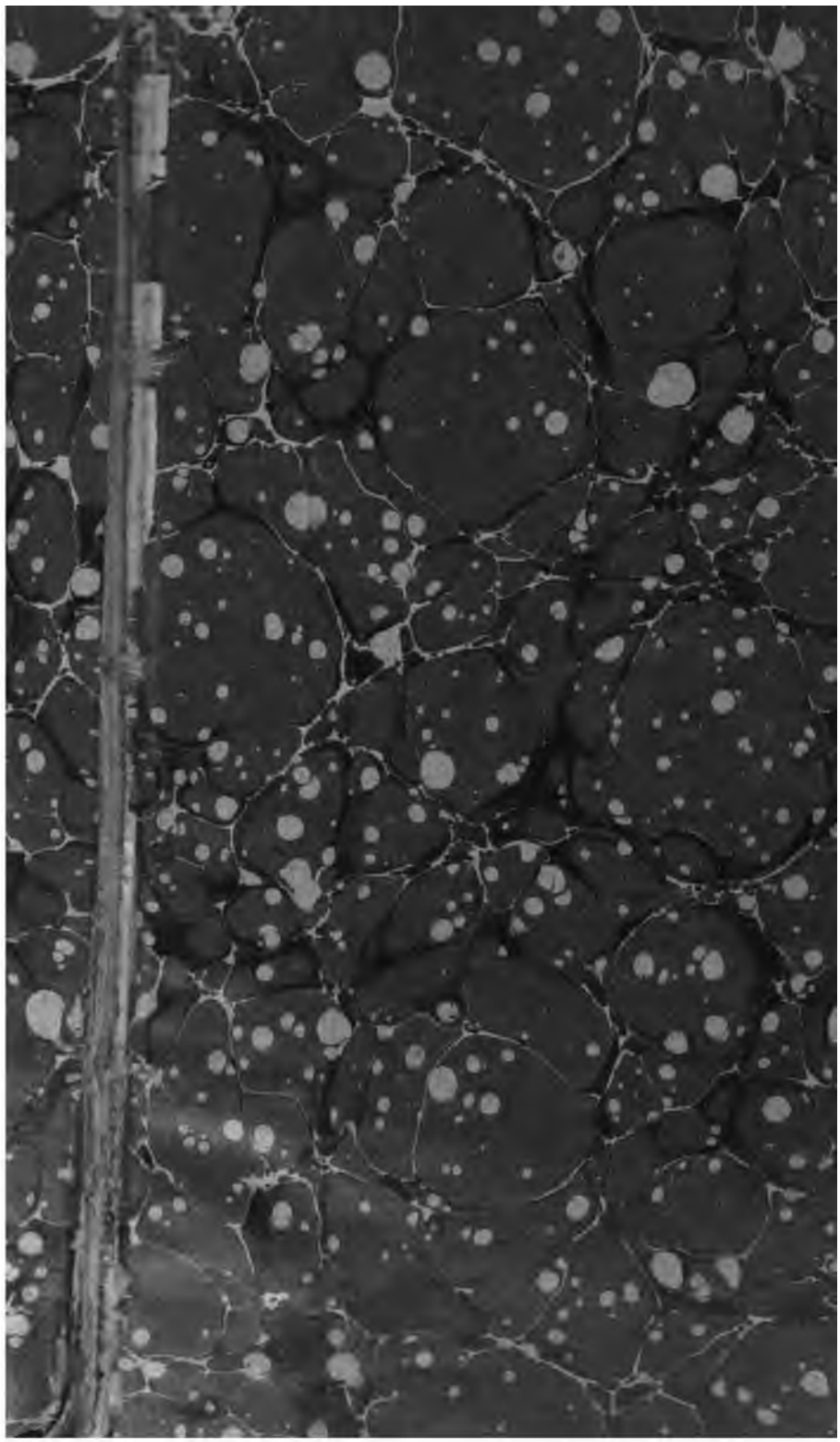
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


Stanford University Libraries
3 6105 000 664 305









04. № 1.

Harvard College Library JUN 12 1904

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 318. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 28. Dezember 1903.)

Inhalt.

		Seite
1.	Franz Kolàček. Über Magnetostriktion	1
2.	Wilhelm Hallwachs. Über die Strahlung des Lichtbogens	38
3.	G. Quincke. VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc.	65
4.	F. Himstedt. Quantitative Versuche über den Rowlandeffekt	100
5.	R. Hartmann-Kempf. Über den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfederbändern. (Hierzu Taf. I—III.)	124
6.	M. Laue. Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten	162
7.	Anton Wassmuth. Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung	182
8.	A. Denizot. Zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente	193
9.	K. v. Wesendonck. Einige Bemerkungen über Entladungen in Vakuumröhren mit nur einer Elektrode	205
10.	Wilhelm Kaiser. Über die Beziehungen zwischen Druck und Brechungsexponent der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre	210
11.	J. Wallot. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. B. Walter	215
12.	Zemplén Győző. Berichtigungen zur Arbeit: Über die Anwendung der mechanischen Prinzipe auf reibende Bewegungen	216

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen**, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 13.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13.

DER GANZEN REIHE 318. BAND.

KURATORIUM:
F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
UND INSBESONDERE VON
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON
PAUL DRUDE.

MIT DREIZEHN FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Inhalt.

Vierte Folge. Band 13.

Erstes Heft.

		Seite
1.	Franz Koláček. Über Magnetostriktion	1
2.	Wilhelm Hallwachs. Über die Strahlung des Lichtbogens	38
3.	G. Quincke. VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc.	65
4.	F. Himstedt. Quantitative Versuche über den Rowlandeffekt	100
5.	R. Hartmann-Kempf. Über den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfederbändern. (Hierzu Taf. I—III.)	124
6.	M. Laue. Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten	163
7.	Anton Wassmuth. Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung	182
8.	A. Denizot. Zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente	193
9.	K. v. Wesendonck. Einige Bemerkungen über Entladungen in Vakuumröhren mit nur einer Elektrode	205
10.	Wilhelm Kaiser. Über die Beziehungen zwischen Druck und Brechungsexponent der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre	210
11.	J. Wallot. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. B. Walter	215
12.	Zemplén Győző. Berichtigungen zur Arbeit: Über die Anwendung der mechanischen Prinzipe auf reibende Bewegungen	216

Ausgegeben am 29. Dezember 1903.

Zweites Heft.

1.	G. Quincke. VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc.	217
2.	Ferd. Kirchner. Über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen	239

74082

Seite

3. R. Hartmann-Kempf. Über den Resonanzverlauf erzwungener Schwingungen. (Hierzu Taf. IV—VII.) 271
4. H. du Bois. Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel. (Hierzu Taf. VIII.) 289
5. R. Hollmann. Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische I 325
6. Hans Happel. Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung 340
7. Aug. Hagenbach. Über den Dopplereffekt im elektrischen Funken. (Hierzu Taf. IX, Figg. 1—4.) 362
8. J. Stark. Sekundäres und primäres negatives Glimmlicht . 375
9. A. Becker. Über den Einfluß von Kathodenstrahlen auf feste Isolatoren 394
10. K. Schaum und F. A. Schulze. Zur Demonstration elektrischer Drahtwellen 422

Ausgegeben am 26. Januar 1904.

Drittes Heft.

1. Albert Dahms. Beiträge zur Kenntnis von den Erscheinungen der Phosphoreszenz. (Hierzu Taf. X—XIII.) 425
2. E. Warburg. Über die Ozonisierung des Sauerstoffs durch stille elektrische Entladungen 464
3. Arthur W. Gray. Über die Ozonisierung des Sauerstoffs bei der stillen elektrischen Entladung 477
4. P. Eversheim. Verhalten von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten einiger Substanzen vor und in dem kritischen Zustand 492
5. P. Drude. Über induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie 512
6. G. Bakker. Die Faraday-Maxwellschen Spannungen . . 562
7. F. Himstedt. Über die radioaktive Emanation der Wasser- und Ölquellen 573
8. F. A. Schulze. Über drehende Schwingungen von dünnen Stäben mit rechteckigem Querschnitt und ihre Verwendung zur Messung der Elastizitätskonstanten 583
9. Gustav Teichner. Untersuchungen über kritische Dichte . 595
10. Gustav Teichner. Untersuchungen über kritische Verdampfungswärme 611
11. J. Traube und G. Teichner. Bemerkung über die kritische Temperatur des Wassers und des Quecksilbers 620
12. G. C. Schmidt. Über die Wirkung von Kanalstrahlen auf Aluminiumoxyd und Zinkoxyd (Antwort an Hrn. J. Tafel) . 622
13. R. Gans. Magnetostriktion ferromagnetischer Körper (Bemerkung zu einer Arbeit des Hrn. A. Heydweiller) 634

Seite

14. J. M. Eder und E. Valenta. Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels (Bemerkung zu der Abhandlung: G. Berndt, Das ultraviolette Funkenspektrum des Selen 640

Ausgegeben am 16. Februar 1904.

Viertes Heft.

1. W. Wien. Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. I 641
2. W. Wien. Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. II 663
3. W. Wien. Über positive Elektronen und die Existenz hoher Atomgewichte 669
4. Otto Frhr. v. u. z. Aufsess. Die Farbe der Seen 678
5. K. Schütt. Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen 712
6. G. N. St. Schmidt. Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium 747
7. Emil Kohl. Über das innere Feld der Elektronen 770
8. Wilhelm Elsässer. Über erzwungene Schwingungen von Stäben 791
9. J. Zenneck. Objektive Darstellung von Stromkurven mit der Braunschen Röhre 819
10. J. Zenneck. Die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke 822
11. Jean Billitzer. Zu den kapillarelektrischen Bewegungen und über einen Strom im offenen Element 827
12. W. Kaufmann. Bemerkungen zur Absorption und Diffusion der Kathodenstrahlen 836
13. Zemplén Győző. Über den Energieumsatz in der Mechanik 840
14. John Mills. Über die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Interferenz des natürlichen Lichtes 848
15. Fred. J. Bates. Berichtigungen zu der Arbeit: „Über Versuchsfehler beim Messen der Rotationspolarisation absorbierender Substanzen“ 856

Ausgegeben am 8. März 1904.

Fünftes Heft.

1. Gustav Mie. Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator 857
2. A. Pflüger. Die Anwendung der Thermosäule im Ultraviolett und die Energieverteilung in den Funkenspektren der Metalle 890

Seite

8. A. Eichenwald. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde 919
4. A. Bestelmeyer. Die Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur 944
5. Karl L. Schaefer und Otto Abraham. Zur Lehre von den sogenannten Unterbrechungstönen 996
6. H. Alt. Über kalorimetrische Messungen an flüssigem Sauerstoff und flüssigem Stickstoff 1010
7. Fr. Heimbrodt. Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Konzentration, bestimmt mit Hilfe gekrümmter Lichtstrahlen 1028
8. K. Simons. Die Dämpfung elektrischer Schwingungen durch eine Funkenstrecke 1044
9. F. Kohlrausch und L. Holborn. Über ein tragbares Torsionsmagnetometer 1054
10. F. A. Schulze. Über die Schallgeschwindigkeit in sehr engen Röhren 1060
11. F. A. Schulze. Zur Erklärung schräggliegender Kundtscher Staubfiguren 1067
12. J. Bernstein. Bemerkung zu dem Aufsatz von L. Hermann, Über elektrische Wellen in Systemen von hoher Kapazität und Selbstinduktion 1073
13. S. Scharbe. Einige Bemerkungen zur Abhandlung des Hrn. Hollmann: Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische 1076
14. G. Berndt. Bemerkung zu der Abhandlung: J. M. Eder und E. Valenta, Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels 1078
15. E. Warburg. Über spontane Desozonisierung, Berichtigung 1080

Ausgegeben am 12. April 1904.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I—VII. Hartmann-Kempf.
„ VIII. H. du Bois.
„ IX. Hagenbach, Figg. 1—4.
„ X—XIII. Dahms.

Gebrüder Borntraeger
BERLIN SW 11
Dessauer Strasse 29

Anfang 1904 beginnt zu erscheinen:

Physikalisch-chemisches Centralblatt

Physico-chemical Review Revue physico-chimique

Vollständiges internationales Referatenorgan
für die physikalische Chemie und die angrenzenden Gebiete
der Chemie und Physik

in Verbindung mit

Bancroft (Ithaca) **Brühl** (Heidelberg) **Classen** (Aachen) **Cohen** (Utrecht) **Colson** (Paris) **Dieffenbach** (Darmstadt) **Goldschmidt** (Christiania) **Goodwin** (Boston)

Jahn (Leipzig) **Jones** (Baltimore) **Kahlbaum** (Basel) **Kahlenberg** (Madison) **Konovalov** (St. Petersburg) **Küster** (Clausthal) **van Laar** (Amsterdam) **Loomis** (Princeton)

Lorenz (Zürich) **Magnanini** (Modena) **Morgan** (New-York) **Nasini** (Padua) **Noyes** (Boston) **Sir W. Ramsay** (London) **Richards** (Cambridge) **Sakurai** (Tokio) **Schmidt** (Erlangen)

Spring (Lüttich) **Staedel** (Darmstadt) **Tamman** (Göttingen) **van der Waals sen.** (Amsterdam) **Walden** (Riga) **Young** (Bristol) **Zelinsky** (Moskau)

und zahlreichen anderen Fachgenossen

herausgegeben von

Privatdocent Dr. Max Rudolphi-Darmstadt

Der Aufschwung und die Entwickelung der physikalischen Chemie in den letzten Jahrzehnten steht nahezu einzig da. Diese Entwickelung hat auch recht befruchtend auf chemischem

wie auf physikalischem Gebiete gewirkt.

Die speziell physikalisch-chemische Originalliteratur wie die Zahl der bedeutungsvollen Arbeiten auf den beiderseitigen Grenzgebieten wächst ständig und in ausserordentlichem Masse. Die Zahl der Zeitschriften, auf die sich die betreffenden Arbeiten verteilen, ist nicht gering. Deshalb soll nicht etwa ein weiteres Publikationsorgan für Originalarbeiten, sondern ein

umfassendes, centralisirendes

physikalisch-chemisches Sammelorgan

geschaffen werden, das über alle hierher gehörigen Arbeiten möglichst schnell und in durchaus sachlich gehaltenen Referaten Bericht erstattet.

Ein solches Organ kann nur dann vollständig sein, wenn es international ist. Es werden daher ebensowohl englische und französische wie deutsche Referate erscheinen. Eine Beschränkung auf diese drei Sprachen erschien indess geboten. Keineswegs besteht die Absicht, ein Organ für ein Land zu schaffen; es soll vielmehr angestrebt werden, dass hier jedes Land im eigentlichen Verhältnis zu seiner wissenschaftlichen Produktivität vertreten ist.

Von einer Aufzählung der einzelnen Hauptgebiete sei abgesehen. Es werden das ganze Gebiet der allgemeinen und physikalischen Chemie und die beiderseitigen Grenzgebiete, soweit sie irgend für den Physiko-chemiker in Betracht kommen, volle Berücksichtigung finden. Ein solches internationales Sammelorgan wird nicht nur für den wissenschaftlich arbeitenden Forscher, sondern auch für den Mann der Praxis von hervorragender Bedeutung sein.

Soweit irgend möglich, sollen von den Autoren selbst verfasste Referate gebracht werden. Dabei wäre erwünscht, dass die Autoren die Referate über ihre Arbeiten alsbald nach Fertigstellung der Hauptarbeit an die Redaktion des Centralblattes einsenden. Diese Autoreferate werden dann sofort nach

dem Erscheinen der Hauptarbeit unter Beifügung des Eingangsdatums und des betreffenden Instituts publiziert.

Die Referate werden **rein sachlich** und in einem der Originalarbeit entsprechenden Umfang gehalten sein. In Fällen, wo ein Autoreferat nicht vorliegt, wird über die Arbeiten nach Sonderabzügen oder nach den betreffenden Zeitschriften durch geeignete Referenten möglichst bald referiert werden.

Alle der Redaktion zugehenden Bücher werden besprochen, soweit nicht die Verfasser „Selbstanzeigen" einsenden, die dann publizirt würden.

Das Centralblatt erscheint jährlich in 24 Heften von je ca. 2 Bogen Gross-Oktav. Am Schlusse eines Jahrganges wird ein genaues Sach- und Autorenregister beigegeben.

Darmstadt
der technischen Hochschule
Physikalisches Institut

Der Herausgeber
Privatdocent Dr. Rudolphi

Die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung ladet zum Abonnement ein. Der Preis des Jahrganges beträgt 30 Mk. Probenummern stehen gratis und franko zu Diensten.

Berlin SW 11
Dessauer Strasse 29

Gebrüder Borntraeger

Soeben ist erschienen:

DIE EINRICHTUNGEN

ZUR

ERZEUGUNG DER ROENTGENSTRAHLEN

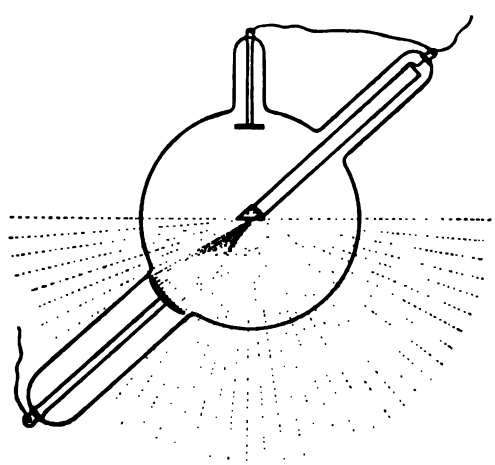
VON

Dr. B. DONATH,

VORSTAND DER PHYSIKALISCHEN ABTEILUNG DER URANIA
IN BERLIN.

ZWEITE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT 140 ABBILDUNGEN IM TEXT UND 3 TAFELN.



Gr. 8° VII, 244 Seiten. Preis Mk. 7.— in Kaliko gebunden Mk. 8.—.

BERLIN,
VERLAG VON REUTHER & REICHARD
1903.

In jeder größeren Buchhandlung erhältlich.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das nunmehr in neuer Auflage vorliegende Werkchen ist bei seinem ersten Erscheinen auch von den Fachleuten freundlich aufgenommen worden, obwohl es in erster Linie für den nichtfachmännischen Benutzer der Röntgenstrahlen-Einrichtung bestimmt war. Man hat sich namentlich mit der in ihm durchgeführten ständigen Verquickung von Theorie und Praxis einverstanden erklärt. In diesem Punkte ist nichts geändert worden. Auch in der zweiten Auflage ist dem Wie stets das Warum zur Seite gestellt.

Im besonderen haben aber die einzelnen Abschnitte sowohl eine umfassende Durcharbeitung wie Erweiterung erfahren. Den einleitenden physikalischen Betrachtungen sowie dem Kapitel über die Stromquellen wurden praktische Beispiele hinzugefügt. Der Abschnitt über die Unterbrecher erhielt eine allgemeine kritische Einleitung und wurde systematisch strenger gestaltet. Die Vakuumröhren und Apparatschaltungen konnten, ebenso wie die Beispiele zur praktischen Durchführung von Durchleuchtungen und Aufnahmen, eingehender abgehandelt werden. Insbesondere gilt dies auch für die Meßmethoden.

Der dem Buche als Anhang beigegebene letzte Abschnitt behandelt die Röntgenstrahlen in wissenschaftlicher Beziehung. Auswahl und Anordnung des Stoffes wurden wiederum mit Rücksicht auf eine möglichst gemeinverständliche Darstellung getroffen. Die kurze Darlegung über die radioaktiven Stoffe dürfte vielen Lesern als Beigabe willkommen sein.

Den Herren Fachgenossen, welche mich vielfach durch wertvolle Hinweise und Berichtigungen bei der Neubearbeitung unterstützt haben, sage ich hierdurch meinen verbindlichsten Dank; ebenso den Herren Reuther & Reichard für die gediegene und saubere Ausstattung des Büchleins.

Berlin, im Oktober 1903.

Dr. B. Donath.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort III

I. Abschnitt.

Einleitung und Veranschaulichung einiger Grundbegriffe. — Elektromotorische Kraft, Stromstärke, Widerstand. — Das Ohmsche Gesetz. — Spezifisches Leitungsvermögen. — Innerer und äußerer Widerstand. — Klemmenspannung, Kurzschluß. — Elektrische Maßeinheiten: Volt, Ampère, Ohm, Watt. — Verschiedene Schaltungsarten der Stromquellen. — Stromabzweigung. — Zusammenstellung. — Praktische Beispiele . . . . . 1—16

II. Abschnitt.

Die Stromquellen und ihre Behandlung. — A. Die Tauchbatterien. B. Die Akkumulatoren. — Prinzip der chemischen Stromaufspeicherung. — Transportable Akkumulatoren. — Kapazität und Entladungsstromstärke. — Überanstrengung. — C. Die Ladung der Akkumulatoren: 1. im Anschluß an das Gleichstromnetz, 2. im Anschluß an das Wechselstromnetz, 3. durch Thermosäulen. — Die Krankheiten der Akkumulatoren. — Zusammenstellung. — Praktische Beispiele . . . . . 17—41

III. Abschnitt.

Die Induktoren. — Zweck, Prinzip und Konstruktion der Induktoren. — Stromwender. — Selbstinduktion, Extrastrom, Kondensator. — Anode (Spitze) und Kathode (Platte) des Induktors. — Über die Leistungsfähigkeit der Induktoren. — Induktoren mit Induktionskommutator (variabler Selbstinduktion). — Zusammenstellung 42—55

IV. Abschnitt.

Die Unterbrecher für Gleich- und Wechselstrom. — A. Allgemeines über die Unterbrecher. — B. Die Gleichstromunterbrecher. — 1. Langsam und schnellschwingende Platinunterbrecher, ihre Vorteile und Fehler. — 2. Die einfachen Quecksilberunterbrecher verschiedener Konstruktion. — Schaltungen einiger Unterbrechertypen den Induktoren gegenüber. — 3. Rotierende Quecksilberunterbrecher (Motorunterbrecher, Turbinenunterbrecher). — 4. Wehnelt-Unterbrecher. — C. Wechselstromunterbrecher. — Wesen des Wechselstromes. — Platinunterbrecher. — Quecksilberunterbrecher. — Elektrolytischer Unterbrecher für Wechselstrom. — Wirtschaftlichkeit der Wechselstromunterbrecher. — Reinigung des Quecksilbers . . . . . 56—98

V. Abschnitt.

Die Vakuumröhren zur Erzeugung der Röntgenstrahlen. — Entladungserscheinungen in Röhren bei wachsender Luftverdünnung und wachsendem Entladungspotential. — Positives Schichtenlicht, Glimmlicht und dunkler

Seite

Kathodenraum. — Ausbildung der Kathodenstrahlung. — Die Röntgenstrahlen. — Anode, Kathode und Antikathode. — Durchlässigkeit verschiedener Körper für Röntgenstrahlen. — Verschiedenheit des Charakters der Strahlung bei verschiedenen Drucken. — Röhrentypen. — Röhren mit verstärkter Antikathode und Wasserkühlung. — Röhren mit veränderlichem Härtegrade. — Ventilröhren. — Zusammenstellung . . . . . 99—118

VI. Abschnitt.

Die Zusammenschaltung der Apparate. — Drahtstärken. — Aufsuchen der Leitungspole. — Sicherungen. — Meßinstrumente und Regulierwiderstände. — I. Einfache Einrichtung. — II. Vollkommenere Anlage. — III. Größere Röntgenstrahleneinrichtung mit eigener Stromquelle und gesondert betriebenem Unterbrecher. — Nebenapparate. — IV. Anschluß des Induktors an das Netz elektrischer Zentralen. — Schaltungen für Gleich- und Wechselstrom. — Fahrbare Anlagen. — Störungen im Betriebe 119—142

VII. Abschnitt.

Radioskopie und Meßkunde. — Prinzip der Radioskopie. — Fluorescenz. — Durchleuchtungsschirme verschiedener Konstruktion. — Größe und Verzerrung der Schattenbilder. — Schattenwurf durch harte und weiche Röhren. — Instrumente zur Beurteilung des Röhrencharakters. — Fluoroskope. — Vergleichende Messung der Schattengrößen. — Aufsuchung der Lage eines Fremdkörpers nach rechtwinkligen Koordinaten. — Formeln für die Feststellung des Ortes eines Fremdkörpers. — Punktograph. — Methoden zur Ableitung der wahren Größe der schattenwerfenden Körper, sowie ihres Tiefensitzes. — Herzmeßapparate. — Bestimmung von Körperlagen durch stereoskopische Betrachtung . . . . . 143—167

VIII. Abschnitt

Die Radiographie. — Allgemeines über die Behandlung der photographischen Platten. — Einrichtung der Dunkelkammer. — Die Bestrahlung der Platte. — Wirksamer Härtegrad der Röhren für besondere Aufnahmezwecke. — Vorrichtungen zur sicheren Lagerung der Platte und des Aufnahmeobjektes. — Expositionszeit. — Das Arbeiten mit farbenempfindlichen und doppeltbelegten Platten und Films unter Benutzung eines Verstärkungsschirmes. — Bleiblenden. — Entwickeln, Verstärken und Fertigmachen der Platten. — Der Positivprozeß. — Diapositive. — Fehlertabelle . . . . . 168—205

IX. Abschnitt.

Über die Natur der Röntgenstrahlen . . . . . 206—234

Anhang 235

Namenregister . . . . . 237—238

Sachregister . . . . . 239—244

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Werke von Professor Dr. Ludwig Zehnder

(an der Universität München)

aus dem Verlag J. C. B. Mohr (Paul Siebeck)

in Tübingen und Leipzig

Das Leben im Weltall.

Mit einer Tafel. 8. 1904. Kartoniert M. 2.50.

HAECKEL schreibt der Materie an sich eine Seele zu. Dadurch wird seine angeblich *monistische* Weltanschauung im Grunde zu einer *dualistischen*. Verf., ein Physiker, der jahrelang biologischen Studien sich widmete, geht dagegen von wenigen einfachen mechanischen Grundlagen aus. Er vermeidet streng die Annahme irgend einer unbekannten Eigenschaft der Materie. Das Wesen von *Schall, Wärme, Licht* und *Elektrizität* wird zwanglos erklärt. Ein lückenloser Übergang führt ins organische Reich. *Assimilation, Anpassung, Lebenselemente* und *Lebenskraft* beruhen auf den bekannten physikalischen und chemischen Gesetzen. Der Aufbau der *Lebewesen*, ihr *Seelenleben* und ihre *Staatenbildung* werden entwickelt. Scheinbar im *Widerspruch mit dem Darwinismus* müssen *zweckmäßige und unzweckmäßige Wesen* sich ausbilden.

Die *Kant-Laplacesche Nebularhypothese* wird den neuesten Forschungen entsprechend *berichtigt*. Es wird untersucht, wie Weltgebäude mit Sonnen, Planeten und Kometen entstehen, wie sie vergehen, wie ein Weltgebäude das andere ablöst. *Die Materie vollbringt einen ewigen Kreislauf.*

Des Verfassers kinetische, wahrhaft monistische Weltanschauung ist so großartig und alle wesentlichen Vorgänge des Weltalls umfassend, wie sie noch nie von einem anderen Forscher geboten worden ist.

Das Buch ist für weitere Kreise bestimmt, an die *Gebildeten aller Stände*. Einige Einschaltungen, die lediglich den Fachgelehrten gelten, können ohne Schaden für das *Verständnis übergangen* werden.

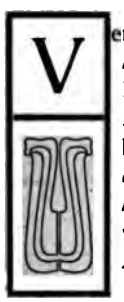
Die Entstehung des Lebens

aus mechanischen Grundlagen entwickelt.

Erster Teil: Moneren. Zellen. Protisten. Mit 123 Abbildungen im Text. Groß 8. 1899. M. 6. --.

Zweiter Teil: Zellenstaaten. Pflanzen. Tiere. Mit 66 Abbildungen im Text. Groß 8. 1900. M. 6. .

Dritter Teil: Seelenleben. Völker und Staaten. Mit 9 Abbildungen im Text. Groß 8. 1901. M. 6.--.



Verfasser zeigt im I. Teil, daß schon *unter den Molekeln ein Kampf ums Dasein* beginnt. Von den Molekeln geht eine *Strahlung* aus. Die Resonanzwirkung dieser Strahlung führt zur *Assimilation*, zur *Anpassung*. Das *Darwinsche Selektionsprinzip* gilt schon hier. Aus komplizierteren Molekelarten müssen sich kleinste *molekulare Röhrchen* (Fistellen) zusammensetzen, aus denen *durchlässige, quellbare, kontraktile Substanzen* entstehen. Diese hinwiederum sind die wichtigsten Bestandteile der unsichtbar kleinen Lebewesen, der *Moneren*, aus denen sich die *Zellen* und die *Protisten* entwickelten.

Im II. Teil wird die Zusammenlagerung der Zellen zu *Zellenstaaten* und die dabei notwendig werdende *Zelldifferenzierung* von Geweben und Organen behandelt. Es entstehen die *Arten der Pflanzenwelt und der Tierwelt*. Speziellen untersucht und erklärt werden beispielsweise das *Saftsteigen* in den Bäumen, die *Flugbewegungen* der Vögel, die automatische rhythmische *Herzbewegung*, die mechanischen Grundlagen des *Lamarckschen Prinzips der Vererbung erworbener Eigenschaften*, die Keimes- und die Stammesentwicklung.

Aus den gewonnenen Grundlagen wird im III. Teil das mit der Geburt beginnende menschliche *Seelenleben* abgeleitet. Durch Reizwirkungen von außen entstehen zuerst unbewußte, dann bewußte *Empfindungen*, in ihrem Gefolge die Gefühle der Lust und des Schmerzes. Diese *Gefühle* sind die *Triebfedern aller Handlungen*. Erziehungseinflüsse, Gewissen, Schlaf, Träume, Wille und Willensarbeit, Wahn, Notwendigkeit, Hypnotismus, Gedächtnis, Fortschreiten der Vernunft, [illegible] einfache Behandlung.

Wie *Zellen* [illegible] aus Menschen, [illegible] Staaten [illegible] Durch Weiterentwicklung werden die Menschenstaaten den Zellenstaaten noch ähnlicher. Mehr als bisher wird der *Zukunftsstaat* für die Lebensbedürfnisse seiner Angehörigen sorgen, die [illegible] Angehörigen wird er in [illegible] Weise [illegible], Streitigkeiten beseitigen. Die zweckmäßigsten Staaten werden sich zu großen *Staatsverbänden*, die die ganze Welt beherrschen und der Völkerfrieden diktieren.

Das Werk ist für *Biologen* und *Philosophen*, aber auch für alle *Gebildeten* bestimmt. *Eltern* werden im III. Teil wichtige Anregungen für die Erziehung *ihrer Kinder* finden.

Stimmen der Presse.

a) Über den I. Teil.

Botanische Zeitung: Das Buch unternimmt nichts Geringeres, als den Versuch, die Erscheinungen an den lebenden Organismen auf die Eigenschaften der konstituierenden Molekeln und Atome zurückzuführen. Der Freiburger Physiker (Zehnder) bringt manches interessante Ding vor und versteht durch seine klare und natürliche Darstellung den Leser anzuregen.

Naturae Novitates: Der Autor hat das dankenswerte Bestreben, so weit es seine überaus komplizierte Materie gestattete, auch für Nicht-Spezialisten verständlich zu bleiben. Es wäre nicht das erstemal, daß eine Kritik der Naturwissenschaft vom Standpunkte der exakten Wissenschaft aus dauernde Resultate für die erstere zeitigen würde.

Zeitschr. f. Mathem. und Phys.: Höchst interessant ist zu verfolgen, wie die Fistellen entstehen und von welcher Wichtigkeit sie sind z. B. hinsichtlich der Assimilation, der Nahrung und Belichtung. Dinge, zu denen der Biologe z. B. nur durch weitere Ausbildung der Versuchsmethode schrittweise gelangen kann, wenn das Vordringen überhaupt praktisch möglich ist, finden hier ihre ungezwungene natürliche Erklärung . . . Überall finden sich in der biologischen Literatur zahlreiche Stützpunkte für die Anschauungen des Verfassers . . .

Die Natur: Dies ist in Kürze der Gang des vorliegenden Buches – eine geistreiche, scharf durchdachte Theorie, aber eine Theorie, die der ruhelose Menschengeist, wie alle anderen vor ihr prüfen und wohl schließlich ebenso mißmutig beiseite legen wird mit dem beschämenden Bekenntnis: „Es irrt der Mensch, so lang er strebt".

Botan. Centralblatt: Um einerseits den Biologen, andererseits den Physikern, den Chemikern und anderen Naturforschern, sowie auch manchen Laien verständlich zu sein, suchte er so wenig Voraussetzungen als möglich zu machen; doch hat sich Verfasser unnötiger Weitschweifigkeit tunlichst enthalten.

Freie Schulzeitung: Um den Stoff auch dem Laien verständlich zu machen, wurden die grundlegenden Begriffe vorerst entwickelt, wird eine recht klare Darstellung gewählt und durch vorzügliche schematische Abbildungen unterstützt . . . Der Verf. hat bei deutlicher und überzeugender Durchführung seiner Aufgabe es vortrefflich verstanden, das rege Interesse des denkenden Lesers zu gewinnen. Das Werk kann als eine Einführung in die modernen Theorien auf diesem Gebiete empfohlen werden.

Zeitschrift für angewandte Mikroskopie: Es sind also durchaus keine vagen Ideen, die hier über die Entstehung des Lebens aufgestellt werden, sondern einfache Vergleiche zwischen der chemischen Molekel und der biologischen Zelle, die ebenso interessant als anregend geschrieben sind.

Die Umschau: Die meisten Versuche, das Leben [illegible] zu erklären, gingen, sofern sie nicht rein philosophische Spekulationen waren, von Vertretern der beschreibenden Naturwissenschaften aus, denen häufig gerade die exakte mechanische Grundlage fehlte. Um so interessanter ist es, daß [illegible] exakten Naturforscher, dem Freiburger Physiker [illegible] Zehnder, an [illegible] such . . . Aus dem übrigen hochinteressanten Inhalt [illegible] greifen, daß . . .

e) Über das vollständige Werk.

Prometheus: Die Sprache ist sehr klar und für jedermann verständlich, Beispiele und Abbildungen erscheinen gut gewählt ... Mit wenigen Ausnahmen ... wissen wir die klärende Wirkung seiner physikalischen Grundlage, die im dritten Teil am wenigsten zur Geltung kommt, wohl zu schätzen und empfehlen das Werk allen Vertiefungsbedürftigen angelegentlichst.

Frankfurter Zeitung: Aus dieser Darlegung ergeben sich bereits klar Ziel und Zweck des Buches. Ob der kühne Versuch des Würzburger Professors (Zehnder) gelingt, ob es bereits unserer Generation vergönnt ist, jene lange, von den Naturforschern so heiß ersehnte Kette der Entwicklung ganz gebildet zu sehen, jene Kette, welche vom einfachsten Atome in ständigem stetem Aufbau sich über alle Produkte der Natur erstreckt und zu dem kompliziertesten, dem menschlichen Organismus hinaufreicht, mögen Berufenere entscheiden.

Berliner Zeitung: Wir müssen es dankbar anerkennen, wenn jemand den Versuch unternimmt einer systematischen Erklärung alles Lebendigen aus den Gesetzen der toten Materie, eines Unterbaues für die Entwicklungslehre, die ja unsere ganze Zeit beherrscht, bis in ihre Tiefen hinab.

Für den Leser aber ist es fesselnd, den „Kampf ums Dasein" im kleinsten Staubteilchen wieder zu finden: Ein Geist, der vom Atom bis zum Größten das All durchweht und zur Vollendung emporführt.

Blätter f. d. bayr. Gymnasialschulwesen: Gelöst ist mit dem Buche das Welträtsel noch nicht ... jedenfalls haben wir in ihm zu begrüßen den geistreichen Versuch eines weitblickenden und kenntnisreichen Mannes, die unendliche Vielheit des Seienden von einem großen Gesichtspunkte aus zu betrachten.

Die Mechanik des Weltalls

in ihren Grundzügen dargestellt. Gr. 8. 1897. M. 3. –

Auf dem Boden der neuesten Forschung stehend, geht der Verfasser von der einfachsten Hypothese aus, die man über den *Weltäther* und über die *wägbare Materie* aufstellen kann. Er entwickelt daraus streng wissenschaftlich, aber in möglichst populärer Form, im ersten Teil die *Grunderscheinungen der Physik und Chemie*, im zweiten Teil die wichtigsten Vorgänge in unserem *Sonnensystem* und im ganzen *Weltall*.

Wegen der Einfachheit, mit der sich die kompliziertesten Vorgänge aus einer einzigen Hypothese ableiten, wird das Buch bei *Naturforschern* und Philosophen, vermöge seines zweiten, leicht verständlichen kosmischen Teils auch bei [illegible] großes Interesse finden.

Stimmen der Presse.

Zeitschrift [illegible] Ob alle Darlegungen des Verf. unanfechtbar sind, ob sie nur möglich sind, jedenfalls stellt seine Schrift in allgemeinen Hypothesen einen Versuch dar.

Blätter [illegible] Das Buch ist ganz dazu angethan, die eine Hypothese bis in ihre [illegible] Folgerungen verfolgen und bewundern.

Kölnische Zeitung: Auf jeden Fall verdienen die Ausführungen des Verfassers Beachtung.

Straßburger Post: Diese Andeutungen mögen genügen, das Buch dem Leser empfehlenswert erscheinen zu lassen.

Zeitschrift für Philosophie u. Pädagogik: Das vorliegende interessante Buch . . .

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik: Die Annahmen haben nichts Gezwungenes, und in einfachster Weise werden die Gründe der Physik und Chemie in qualitativer Hinsicht erklärt.

Natur: Das Büchlein ist lesenswert. Es atmet auf jeder Seite wissenschaftlichen Geist und zeigt überall den verdienstvollen und geistreichen Forscher.

Bestellungen nimmt jede Sortimentsbuchhandlung entgegen.

J. C. B. Mohr (Paul Siebeck)
in Tübingen und Leipzig.

BESTELLZETTEL.

D Unterzeichnete bestellt bei der Buchhandlung von

aus dem Verlag von **J. C. B. Mohr (Paul Siebeck)** in Tübingen und Leipzig

Zehnder, **Das Leben im Weltall.** Kartoniert M. 2.50.
Zehnder, **Die Entstehung des Lebens.** Erster Teil. M. 6. .
Zehnder, – Zweiter Teil. M. 6.- .
Zehnder, Dritter Teil. M. 6. -.
Zehnder, **Die Mechanik des Weltalls.** M. 3. .

Ort und Datum: Name

*) Das Nichtgewünschte bitte zu durchstreichen.

1903. Nr. 205. *Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.*

1904. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *Über Magnetostriktion;* *von Franz Koláček.*

Diese Abhandlung enthält wie ich glaube eine etwas weitergehende Herleitung der Gesetze der Magnetostriktion, da sie über die Natur der magnetischen Medien keinerlei Voraussetzung macht. Nur Hysteresis soll ausgeschlossen werden, da den Entwickelungen das Energieprinzip zugrunde liegt.

a.

Wie in den grundlegenden Arbeiten von Kirchhoff und Helmholtz sollen auch hier eventuelle Diskontinuitäten der Massen durch rasch veränderliche aber stetige Veränderungen an den betreffenden Flächen ersetzt werden. Das Medium selbst soll bis ins Unendliche reichen und daselbst durch eine *feste* Fläche begrenzt sein; die virtuellen Verschiebungen der Massenteilchen sind daselbst Null zu setzen, d. i.

$$\delta\xi = \delta\eta = \delta\zeta = 0. \tag{1}$$

Die magnetischen Kräfte H mit den Komponenten X, Y, Z sollen von polaren Massen herstammen, deren Raumdichte mit ϱ bezeichnet werden soll; Flächendichten sollen ausgeschlossen sein, so daß weder X, Y, Z noch ihre Differentialquotienten unstetig werden.

Die Kräfte selbst sind, unabhängig von der Existenz von Fernkräften, durch ein eindeutiges Potential P darstellbar; denn die Arbeit, welche entgegen den magnetischen Kräften zu leisten ist, wenn eine (unendlich klein gedachte) Masseneinheit von einem festen Punkte $A_0(x_0, y_0, z_0)$ zu einem anderen Punkte $A(x, y, z)$ transportiert wird, ist vom Verbindungswege unabhängig, also wenn x, y, z veränderlich gedacht wird, eine Funktion von x, y, z gleich $P(x, y, z) - P(x_0, y_0, z_0)$.

Im Gegenfalle ließen sich nämlich zwei Arbeitswege zwischen A_0 und A zu einem Kreisprozesse so kombinieren, daß steter unkompensierter Gewinn von Arbeit entstünde.

Infolge einer Verallgemeinerung des Gaussschen Satzes können wir die in einem bestimmten Raume vorhandenen Massen als den $4\pi^{\text{ten}}$ Teil der aus der Grenzfläche austretenden Linien eines Vektors definieren. Derselbe ist identisch mit der sogenannten magnetischen Induktion B, u, v, w. Es ist also

$$(2) \quad 4\pi \Sigma \text{ Massen} = \int d\omega (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)$$

und

$$(3) \quad 4\pi\varrho = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ändert sich an einer bestimmten *Raumstelle* $A(x, y, z)$, die an der Verschiebung der Teilchen *nicht* teilnimmt, infolge der letzteren u, v, w um δu, δv, δw, so beträgt *daselbst* die Änderung von ϱ

$$(4) \quad 4\pi\delta\varrho = \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z}.$$

Andererseits kann man unter der Voraussetzung, daß die magnetischen Massen (Centra von B) an den sich um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ verschiebenden materiellen Teilchen haften, mit Helmholtz setzen

$$(5) \quad \delta\varrho = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\,\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\,\delta\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\,\delta\zeta)\right).$$

Sind alle Massen stets innerhalb einer bestimmten Grenzfläche gelegen, so ist laut (2)

$$(6) \quad \int d\omega (\delta u \cos nx + \delta v \cos ny + \delta w \cos nz) = 0.$$

Im besonderen gilt dies von der unendlich fernen Grenzfläche, wenn die Massen sämtlich im Endlichen gelegen sind. In diesem Falle sind im Unendlichen alle Kräfte in limite Null, das Potential konstant, daher auch

$$(7) \quad \int d\omega\, P(\delta u \cos nx + \delta v \cos ny + \delta w \cos nz) = 0.$$

b.

Die Veränderungen der Raumdichten $\delta\varrho$ an festen Raumstellen x, y, z kann man sich in energetischer Hinsicht ersetzt

denken durch Transporte der Massen von einer einzigen Massenquelle $A_0(x_0, y_0, z_0)$ aus. Der betreffende Arbeitsaufwand beträgt daher, wenn mit $d\tau$ das Differential des Raumes bezeichnet wird,

$$\delta W = \int d\tau \,.\, \delta\varrho \,(P(x,y,z) - P(x_0,y_0,z_0)),$$

oder, wenn die algebraische Summe *aller* Massen stets Null bleibt,

$$\delta W = \int d\tau \dot{P} \,.\, \delta\varrho = \frac{1}{4\pi}\int P\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\delta v}{\partial y} + \frac{\partial\delta w}{\partial z}\right) d\tau,$$

oder unter Zuhilfenahme des Greenschen Satzes mit Rücksicht auf (7)

$$4\pi\delta W = \int d\tau\,[X\delta u + Y\delta v + Z\delta w].$$

Wir bezeichnen den Arbeitsaufwand δW dann als Variation der magnetischen Energie, wenn derselbe nachweisbar von anderen energetischen Äußerungen (Erwärmung, Deformationen etc.) unbegleitet bleibt. Die Variation der Energie W_1 in der Volumeneinheit ist daher

$$\delta W_1 = \frac{1}{4\pi}(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w). \tag{8}$$

Korrekter gesprochen, setzen wir hier den Begriff der magnetischen (spezifischen) Energie W_1 voraus. Dieselbe soll von u, v, w und von gewissen (magnetischen) Konstanten K abhängen, die sich nicht ändern sollen, wenn sich die materiellen Teilchen nicht verschieben. In diesem Falle soll die Variation von W_1 durch (8) definiert sein. Hieraus folgt

$$X = 4\pi\frac{\partial W_1}{\partial u}, \quad Y = 4\pi\frac{\partial W_1}{\partial v}, \quad Z = 4\pi\frac{\partial W_1}{\partial w}, \tag{9}$$

oder auch

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi W_1 &= \int_0^{u,v,w}(du\,.\,X + dv\,.\,Y + dw\,.\,Z) = uX + vY + wZ \\ &\quad - \int_0^{X,Y,Z}(u\,dX + v\,dY + w\,dZ). \end{aligned}\right. \tag{9a}$$

Das untere Integral mit den Grenzen X, Y, Z ist offenbar gleichwie W_1 und $uX + vY + wZ$ eine Funktion des augen-

blicklichen Zustandes u, v, w oder X, Y, Z. Nennen wir dieselbe $F(X, Y, Z)$, derivieren nach X, Y, Z, so folgt

$$(10) \qquad \begin{cases} u = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial Z}, \\ F = uX + vY + wZ - 4\pi W_1. \end{cases}$$

Die usuelle Theorie des Magnetismus geht von der Vorstellung elementarer Magnete aus. Sind a, b, c die Komponenten der Magnetisation, so besitzt ein durch die Komponenten $X + 4\pi a$, $Y + 4\pi b$, $Z + 4\pi c$ definierter Vektor die Eigenschaften des Vektors $B(u, v, w)$ auch dann, wenn es selbständige magnetische Raummassen gäbe. Es existiert also neben einer Funktion der Kräfte $F(X, Y, Z)$, deren Derivationen nach X, Y, Z die Komponenten der Induktion u, v, w ergeben, auch noch eine andere

$$(10\,a) \qquad S(X, Y, Z) = \left(\frac{F}{4\pi} - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}\right),$$

die in gleicher Weise die Komponenten der Magnetisation gibt.

Speziell tritt an die Stelle der Grundgleichung des Magnetismus

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

Die Funktionsform F ist durch Erfahrung gegeben, und in ihr die Kräfte durch P auszudrücken.

c.

In der nachfolgenden Theorie der Magnetostriktion wird W_1 als Funktion von u, v, w vorausgesetzt, welche noch gewisse Konstanten K, K' . . . enthält, die von den elastischen Dilatationen und Deformationen x_x, x_y . . . etc. abhängen. Speziell werden in ihr Ausdrücke wie

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_x} = \frac{\partial W_1}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial x_x} + \frac{\partial W_1}{\partial K'}\frac{\partial K'}{\partial x_x} + \ldots$$

vorkommen, die in eine andere Form gebracht werden sollen, welche die der direkten Messung unterliegenden Magnetisationen a, b, c enthält.

Die Derivationen $\partial W_1 / \partial x_\varkappa$ erfolgen bei konstantem u, v, w, was symbolisch durch ein angehängtes B ausgedrückt werden soll. Aus (10) ergibt sich durch Auflösung nach X, Y, Z

$$(11) \quad \begin{cases} X = \varphi(u, v, w, x_\varkappa \ldots), \quad Y = \psi(u, v, w, x_\varkappa \ldots), \\ Z = \chi(u, v, w, x_\varkappa \ldots). \end{cases}$$

Weiter ist

$$(12) \quad \int_0^{X, Y, Z,} (u\,dX + v\,dY + w\,dZ) = F(X, Y, Z, x_\varkappa \ldots).$$

Aus (12) folgt, wenn daselbst X etc. aus (11) eingeführt wird, durch Derivation bei konstantem B

$$(13) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\varkappa}\right)_B = \frac{\partial F}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial x_\varkappa}\right)_B + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x_\varkappa}\right)_B \\ \qquad + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial x_\varkappa}\right)_B + \left(\frac{\partial F}{\partial x_\varkappa}\right)_H, \end{cases}$$

wobei der letzte Summand die Derivation nach dem explizite in F enthaltenen $x_\varkappa \ldots$ bedeutet, bei welcher X, Y, Z als konstant betrachtet wird, was durch das angehängte H ausgedrückt wird..

Wir können mit Rücksicht auf (12) und (10) schreiben:

$$(14) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\varkappa}\right)_B = u\left(\frac{\partial X}{\partial x_\varkappa}\right)_B + v\left(\frac{\partial Y}{\partial x_\varkappa}\right)_B + w\left(\frac{\partial Z}{\partial x_\varkappa}\right)_B \\ \qquad + \int_0^{X, Y, Z} \left(dX\left(\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa}\right)_H + dY\left(\frac{\partial v}{\partial x_\varkappa}\right)_H + dZ\left(\frac{\partial w}{\partial x_\varkappa}\right)_H\right). \end{cases}$$

Deriviert man auch (9a) nach $x_\varkappa$ (bei konstantem u, v, w), so folgt

$$(14a) \quad 4\pi\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_\varkappa}\right)_B = u\left(\frac{\partial X}{\partial x_\varkappa}\right)_B + v\left(\frac{\partial Y}{\partial x_\varkappa}\right)_B + w\left(\frac{\partial Z}{\partial x_\varkappa}\right)_B - \left(\frac{\partial F}{\partial x_\varkappa}\right)_B.$$

Daher aus (14) und (14a)

$$4\pi\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_\varkappa}\right)_B = 4\pi\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_\varkappa}\right) = -\int_0^{X, Y, Z} \left(dX\left(\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa}\right)_H + dY\left(\frac{\partial v}{\partial x_\varkappa}\right)_H + dZ\left(\frac{\partial w}{\partial x_\varkappa}\right)_H\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_x}\right)_H = \frac{\partial}{\partial x_x}(X + 4\pi a)_H = 4\pi\left(\frac{\partial a}{\partial x_x}\right)_H \text{ etc.,}$$

daher

$$(15) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x_x} = -\left(\frac{\partial S}{\partial x_x}\right)_H, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y_y} = -\left(\frac{\partial S}{\partial y_y}\right)_H \text{ etc.,}$$

wobei

$$(16) \qquad S(X, Y, Z, x_x, \ldots) = S = \int_0^{X, Y, Z} (dX\,a + dY.b + dZ.c)$$

jene Funktion ist, deren Derivationen nach X, Y, Z die Größen a, b, c ergeben.

d.

Wir gehen nun zur eigentlichen Aufgabe über. Es seien $A'\ B'\ C'$ die auf die Volumeneinheit bezogenen Kräfte der Magnetostriktion, A, B, C die äußeren mechanischen Kräfte (beispielsweise die elastischen Reaktionen), welche ihnen Gleichgewicht halten, daher $A = -A'$, $B = -B'$, $C = -C'$; ferner ξ, η, ζ die zugehörigen infolge der Magnetisation schon bestehenden elastischen Verschiebungen, $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ ihre Variationen, daher

$$(17) \quad x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \ldots, \quad x_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \delta x_x = \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} \text{ etc.,}$$

ferner δW_1 die Variation an einer *Raumstelle*.

Konform dem Prinzipe der Energie ist dann

$$(18) \qquad \int (A\,\delta\xi + B\,\delta\eta + C\,\delta\zeta)\,d\tau = \int d\tau\,\delta W_1.$$

Es besteht nun $\delta W_1 = \delta_1 W_1 + \delta_2 W_1 + \delta_3 W_1$ aus *drei* Teilen.

1. Der erste $\delta_1 W_1$ entspricht den Variationen $\delta u, \delta v, \delta w$ an einer Raumstelle, die *ohne Änderung* der magnetischen Konstanten erfolgen, d. h. es ist

$$\delta_1 W_1 = \left(\frac{\partial W_1}{\partial u}\right)_x \delta u + \left(\frac{\partial W_1}{\partial v}\right)_x \delta v + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w}\right)_x \delta w,$$

oder laut (9)

$$\delta_1 W = \int d\tau\,\delta_1 W_1 = \frac{1}{4\pi}\int d\tau\,(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int P\,\delta u \cos nx + \delta v \cos ny + \delta w \cos nz\}\,d\omega$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int P\left\{\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z}\right\} d\tau.$$

Das über die ferne Fläche ausgedehnte Integral ist laut (7) Null, das zweite verwandelt sich unter Benutzung von (4) und (5), sodann durch Transformation mit Hilfe des Greenschen Satzes bei Berücksichtigung von (1) in

$$\delta_1 W = -\int d\tau (X\varrho\,\delta\xi + Y\varrho\,\delta\eta + Z\varrho\,\delta\eta). \tag{19}$$

2. Die zweite (und auch die dritte) Variation $\delta_2 W_1$ setzt an jeder Raumstelle Unveränderlichkeit von u, v, w, aber Änderung der Konstanten K voraus, und zwar in dem Sinne, daß jedes Teilchen seine Konstanten in die neue Lage *unverändert* mitbringt.

In einer unendlich kleinen schon homogenen Partie des als kristallinisch vorausgesetzten Mediums ist W_1 von u, v, w und gewissen Konstanten K abhängig, die sich ändern, wenn ein Koordinatensystem *anderer* Richtung zugrunde gelegt wird. Vor der Verschiebung sollen die mit jedem Teilchen fest verbundenen Beziehungssysteme $x'\,y'\,z'$ insgesamt einem im Raume festen System x, y, z parallel sein. Übrigens soll sich auch K kontinuierlich im Raume ändern können.

In einem bestimmten Raumpunkte A mit den Koordinaten $x-\delta\xi$, $y-\delta\eta$, $z-\delta\zeta$, welcher Schwerpunkt eines kleinen Teilchens sein soll, sei also *vor* der Verschiebung

$$W_1 = f(u, v, w, K_A, K_A', \ldots),$$

wobei K_A, K_A' die numerischen Werte von K, K' in A bedeuten sollen. *Gleichzeitig* sei im Punkte B, x, y, z

$$W_1 = f(u, v, w, K_B, K_B' \ldots).$$

Nach der Verschiebung gelangt der Schwerpunkt von A nach B.

Es erfährt also das Teilchen neben einer Verschiebung $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ noch eine Drehung[1]) um die Winkel

$$\left\{\begin{aligned} \pi' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}\right), \quad \varrho' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z} - \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}\right), \\ \chi' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} - \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

1) Betrachtungen dieser Art hat wohl zum ersten Male Voigt in seinem Kompendium angestellt.

Sein Koordinatensystem $x'\,y'\,z'$, auf welches sich $K_A \ldots$ bezogen hat, liegt nun schief gegen das räumliche und schließt mit ihm Winkel ein, welche durch das Schema

	x	y	z
x'	1	χ'	$-\varrho'$
y'	$-\chi'$	1	π'
z'	ϱ'	$-\pi'$	1

gegeben sind.

Laut Voraussetzung soll sich nun im *Raumpunkte* B u, v, w *nicht* geändert haben. In die Achsen $x'\,y'\,z'$ des Teilchens, dessen Schwerpunkt nun die Lage B eingenommen hat, fallen daher die Induktionskomponenten

$$u' = u + \chi' v - \varrho' w, \quad v' = v - \chi' u + \pi' w, \quad w' = w - \pi' v + \varrho' u.$$

Das Teilchen selbst soll seine Konstanten in die neue Lage B *unverändert* mitgebracht haben, und dies auch dann, wenn dieselben von den Deformationen abhängig sind. Benutzen wir daher zur Darstellung von W_1 das System x', y', z', so herrscht *nach* der Verschiebung in B der Wert

$$(21) \qquad \begin{cases} W_1' = f(u + \chi' v - \varrho' w, \quad v - \chi' u + \pi' w, \\ \qquad\qquad w - \pi' v + \varrho' u, \quad K_A, K_A'), \end{cases}$$

während *vor* der Verschiebung daselbst der Wert

$$(22) \qquad W_1'' = f(u, v, w, K_B, K_B')$$

existierte.

Es ist also

$$(22\,a) \qquad \begin{cases} \delta_2 W_1 = W_1' - W_1'' = \pi' \left(\dfrac{\partial f}{\partial v} w - \dfrac{\partial f}{\partial w} v \right) \\ \qquad\qquad + \varrho' \left(\dfrac{\partial f}{\partial w} u - \dfrac{\partial f}{\partial u} w \right) + \chi' \left(\dfrac{\partial f}{\partial u} v - \dfrac{\partial f}{\partial v} u \right) \\ \qquad\qquad - \sum (K_B - K_A) \dfrac{\partial f}{\partial K}. \end{cases}$$

An Stelle von $(K_B - K_A)\,\partial f / \partial K$ setzen wir, da sich die Konstanten *stetig* ändern sollen,

$$\frac{\partial f}{\partial K} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \delta\xi + \frac{\partial K}{\partial y} \delta\eta + \frac{\partial K}{\partial z} \delta\zeta \right),$$

ferner

$$\frac{\partial W_1^*}{\partial x} \delta\xi + \frac{\partial W_1^*}{\partial y} \delta\eta + \frac{\partial W_1^*}{\partial z} \delta\zeta = \Sigma (K_B - K_A) \frac{\partial f}{\partial K},$$

wo durch das Sternchen Derivationen nach x, y, z angedeutet werden sollen, insofern dieselben in den Konstanten vorkommen. Es tritt dies nicht nur deswegen ein, daß sich die Eigenschaften des Mediums von Ort zu Ort ändern sollen, sondern auch deshalb, weil die K von den von Ort zu Ort verschiedenen Deformationen abhängen. Man kann auch schreiben

$$\frac{\partial W_1^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)_B \text{ etc.}$$

Wir setzen ferner

$$(23)\quad \begin{cases} P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v} w - \frac{\partial f}{\partial w} v\right) = \frac{1}{8\pi}(Yw - Zv), \\ \bar{Q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial w} u - \frac{\partial f}{\partial u} w\right) = \frac{1}{8\pi}(Zu - Xw), \\ \bar{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} v - \frac{\partial f}{\partial v} u\right) = \frac{1}{8\pi}(Xv - Yu). \end{cases}$$

Damit wird bei Rücksichtnahme auf (22a), (23)

$$\delta_2 W = \int d\tau\, \delta_2 W_1 = \int d\tau \left[\bar{P}\left(\frac{\partial \delta\xi}{\partial y} - \frac{\partial \delta\eta}{\partial z}\right) + \bar{Q}\left(\frac{\partial \delta\xi}{\partial z} - \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right) + \bar{R}\left(\frac{\partial \delta\eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta\xi}{\partial y}\right)\right] - \int d\tau \left(\frac{\partial W_1^*}{\partial x}\delta\xi + \frac{\partial W_1^*}{\partial y}\delta\eta + \frac{\partial W_1^*}{\partial z}\delta\zeta\right),$$

oder unter Zuhilfenahme der Greenschen Transformationsmethode mit Rücksicht auf (1)

$$(24)\quad \begin{cases} \delta_2 W = \int d\tau \left[\delta\xi\left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - \frac{\partial W_1^*}{\partial x}\right)\right. \\ \left. + \delta\eta\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} - \frac{\partial W_1^*}{\partial y}\right) + \delta\zeta\left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial W_1^*}{\partial z}\right)\right]. \end{cases}$$

3. Die Verschiebungen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ haben Änderungen der Deformationen, daher auch solche von K zur Folge. Dieser Umstand wurde bisher nicht berücksichtigt, da vorausgesetzt wurde, daß jedes Teilchen seine Konstanten in die neuen Lagen unverändert mitbringt. Daher stammt nun der dritte Teil der Variation:

$$\delta_3 W = \int d\tau \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_z}\delta x_z + \frac{\partial W_1}{\partial x_y}\delta x_y \ldots\right),$$

für welchen mit Zuhilfenahme des Greenschen Satzes und der Relationen (17) sich setzen läßt:

$$(25)\quad \begin{cases} \delta_3 W = -\int d\tau \Big[\delta\xi\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x_x} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x_y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x_z}\Big)\Big) \\ \qquad + \delta\eta\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x_y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W_1}{\partial y_z}\Big) \\ \qquad + \delta\zeta\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x_z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial W_1}{\partial y_z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W_1}{\partial z_z}\Big)\Big]. \end{cases}$$

Das Energieprinzip Gleichung (18) ergibt also bei Berücksichtigung von (25), (24), (19) für die Volumenkräfte der Magnetostriktion $A'\,B'\,C'$:

$$(26)\quad \begin{cases} A' = X\varrho + \frac{\partial W_1^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} \\ \qquad + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x_x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x_y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x_z}\Big) \end{cases}$$

nebst zwei ähnlichen Formeln für B', C'.

Durch folgende Transformationen lassen sich dieselben durch *Spannungen* X_x, X_y ... deuten. Es ist

$$(27)\quad \begin{cases} X\varrho + \frac{\partial W_1^*}{\partial x} = \frac{X}{4\pi}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big) + \frac{\partial W_1^*}{\partial x} \\ \quad = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(Xu) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(Xv) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(Xw) \\ \quad - \frac{1}{4\pi}\Big(u\frac{\partial X}{\partial x} + v\frac{\partial X}{\partial y} + w\frac{\partial X}{\partial z}\Big) + \frac{\partial W_1^*}{\partial x}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(28)\quad \begin{cases} 4\pi\alpha = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad 4\pi\beta = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \qquad 4\pi\gamma = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{4\pi}\Big(u\frac{\partial X}{\partial x} + v\frac{\partial X}{\partial y} + w\frac{\partial X}{\partial z}\Big) = \frac{1}{4\pi}\Big(u\frac{\partial X}{\partial x} + v\frac{\partial Y}{\partial x} + w\frac{\partial Z}{\partial x}\Big) + (v\gamma - w\beta)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(uX + vY + wZ) - \frac{1}{4\pi}\Big(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial x} + Z\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + (v\gamma - w\beta).$$

Es ist nun

$$\frac{X}{4\pi} = \Big(\frac{\partial W_1}{\partial u}\Big)_K \text{ etc.},$$

daher

$$\frac{1}{4\pi}\Big(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial x} + Z\frac{\partial w}{\partial x}\Big) = \Big(\frac{\partial W_1}{\partial x}\Big)_K$$

$$= \frac{\partial W_1}{\partial x} - \Big(\frac{\partial W_1}{\partial x}\Big)_B = \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_1^*}{\partial x}.$$

Schließlich hat man mit Benutzung von (23)

$$(29)\quad \begin{cases} A' + (v\gamma - w\beta) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x_x} + W_1 - \dfrac{vY + wZ}{4\pi}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{Xv + Yu}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{Xw + Zu}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_z}\right). \end{cases}$$

Die Kräfte X, Y, Z haben nun ein Potential; es ist daher laut (28) $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Aus (29) ergeben sich dann für die Spannungskomponenten der Magnetostriktion die Werte

$$(30)\quad \begin{cases} X_x = W_1 + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_x} - \dfrac{vY + wZ}{4\pi}, \quad X_y = \dfrac{Xv + Yu}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_y}, \\ \qquad\qquad X_z = \dfrac{Xw + Zu}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_z}, \\ Y_y = W_1 + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_y} - \dfrac{wZ + uX}{4\pi}, \quad Y_z = \dfrac{Yw + Zv}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_z}, \\ \qquad\qquad Y_x = \dfrac{Yu + Xv}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_x}, \\ Z_z = W_1 + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_z} - \dfrac{uX + vY}{8\pi}, \quad Z_x = \dfrac{Zu + Xw}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_x}, \\ \qquad\qquad Z_y = \dfrac{Zv + Yw}{8\pi} + \dfrac{\partial W_1}{\partial x_y}. \end{cases}$$

e.

Der bisher befolgte Gedankengang bestand darin, unter Voraussetzung polarer Massen, d. i. eines eindeutigen Potentiales, die Volumenkräfte $A'\,B'\,C'$ zu eruieren. Diese lassen sich durch die Flächenspannungen (30) darstellen, welche von den an einem Flächenelemente bestehenden H und B-Komponenten abhängen. Es liegt nun nahe, die Formeln (30) auch dann als richtig anzusehen, wenn die Kräfte *kein* Potential besitzen, da es ja doch nur auf den Betrag derselben, nicht aber auf ihren Ursprung ankommen kann. Dies zugegeben, ist die auf eine Volumeneinheit bezogene Resultante der Tensionen

$$\Xi = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \text{ etc.}$$

laut (29) identisch mit

$$\Xi = A' + (v\gamma - w\beta),$$

wobei A' durch (26) bestimmt ist.

Wir erhalten also infolge Erweiterung des Gültigkeitsbereiches von (30)

$$(31)\quad \begin{cases} \Xi = v\gamma - w\beta + X\varrho + \frac{\partial W_1^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_z}\right), \\ H = w\alpha - u\gamma + Y\varrho + \frac{\partial W_1^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_z}\right), \\ Z = u\beta - v\alpha + Z\varrho + \frac{\partial W_1^*}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_z}\right). \end{cases}$$

Die Größen $\alpha\beta\gamma$ in (28) sind identisch mit den elektromagnetischen Maßzahlen der Stromdichtigkeiten in einem Punkte x, y, z, welche das Medium vorausgesetztermaßen durchströmen.

Ist das Medium isotrop ($\bar{P} = \bar{Q} = \bar{R} = 0$ laut (23)), homogen und hängen seine Konstanten von $x_x \ldots$ nicht ab

$$\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial x_x} = 0 \text{ etc.},$$

so ist

$$\Xi = v\gamma - w\beta, \quad H = w\alpha - u\gamma, \quad Z = u\beta - v\alpha.$$

Sind λ, μ, ν die Richtungskosinuse der Ströme, λ', μ', ν' jene der Induktion B, h die Stromdichtigkeit, so ist die Kraft auf das Element eines Stromfadens der Länge dl und vom Querschnitte dq, welches $dl.dq$ Volumeneinheiten enthält und den Strom $dq.h = i$ führt, gegeben durch die Komponenten

$$\Xi' = i.dl.B(\nu\mu' - \nu'\mu), \quad H' = idl.B(\lambda\nu' - \lambda'\nu),$$
$$Z' = idl.B(\mu\lambda' - \mu'\lambda).$$

Die Resultierende steht auf der Induktions- und Stromrichtung senkrecht und beträgt

$$i.dl.B.\sin(h, B).$$

Die zweideutige Richtung bestimmt sich, indem man setzt

$$\alpha = \beta = 0, \quad v = w = 0.$$

Es ist dann

$$\Xi = 0, \quad Z = 0, \quad H = -\gamma.u.$$

Es ist dies das erweiterte Elementargesetz der ponderomotorischen Wirkung auf ein im Induktionsfelde befindliches Stromelement, das somit auch auf Spannungen zurückführbar ist.

Läßt man in einem unendlich dünnen Stromfaden, welcher bei den als *endlich* vorausgesetzten Stromdichten nur einen verschwindenden Strom führt, diesen hinweg, so ändern sich die $XYZuvw$ nur infinitesimal, während in (31) die von $\alpha\beta\gamma$ herstammenden Glieder entfallen. Es folgt daraus, daß auch bei Anwesenheit des Stromes die in (30) vorkommenden zweiten Glieder die eigentlichen Kräfte der Magnetostriktion vorstellen, welchen die *Masse* eines Stromelementes dann unterliegen muß, wenn das Medium kristallinisch oder nicht homogen ist, oder wenn seine Konstanten von der Deformation abhängen.

f.

An einer Diskontinuitätsfläche zweier verschiedener Medien 1, 2 denke man sich parallel einem Flächenelemente $d\omega$ zwei andere unendlich nahe Elemente $d\omega_1$, $d\omega_2$, innerhalb deren sich die Diskontinuität in kontinuierlicher Weise angleichen soll. Es ändern sich dann in diesem Raume die Größen X_x etc. entlang der von $d\omega_1$ nach $d\omega_2$ gelegten Normalen n unendlich schnell, während in zwei dazu senkrechten Richtungen t_1, t_2 die Änderungen endlich verlaufen. Offenbar reduziert sich dann

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial t_1}\cos t_1 x + \frac{\partial X_x}{\partial t_2}\cos t_2 x + \frac{\partial X_x}{\partial n}\cos n x$$

auf das letzte Glied.

Es ist daher bis auf zu vernachlässigende Größen

$$A' = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$
$$= \cos n x \frac{\partial X_x}{\partial n} + \cos n y \frac{\partial X_y}{\partial n} + \cos n z \frac{\partial X_z}{\partial n},$$

daher die Kraft auf die Masse zwischen $d\omega_1$, $d\omega_2$

$$(32)\quad \left\{ d\omega\, \bar{A}' = \int_1^2 d\omega \,.\, dn\, A' = \int_1^2 (X_x \cos n x + X_y \cos n y + X_z \cos n z) \right.$$
$$\left. = [(Xn)_2 - (Xn)_1]\, d\omega. \right.$$

Die Volumenkräfte A' reduzieren sich also auf Flächenkräfte $\bar{A}'$, welche laut (32) die Limite der magnetischen Züge bilden, denen die Flächen $d\omega_1$, $d\omega_2$ seitens des Medien 1 und 2

ausgesetzt sind. Die behufs Gleichgewichtes anzubringenden äußeren Flächenkräfte sind daher

(33) $A = (Xn)_1 - (Xn)_2, \quad B = (Yn)_1 - (Yn)_2, \quad C = (Zn)_1 - (Zn)_2$

(wobei die Normale von 1 nach 2 positiv gezählt ist).

Die resultierende Kraft, welche Körper 1 inmitten 2 infolge Magnetostriktion erfährt, ist offenbar identisch mit jener der Züge, welche 2 auf 1 ausübt. Sie unterscheidet sich nur infinitesimal von jener, welche die Züge auf eine unendlich nahe, schon im Medium 2 enthaltene Grenzschicht Π_2 ausüben. Man hat also, wenn die Flächenintegration auf diese ausgedehnt wird

$$\Xi = \int_{\Pi_2} d\omega\,(X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz).$$

Ersetzt man die Diskontinuität durch eine rasch ablaufende Kontinuität, so ergibt der Greensche Satz

(34) $$\Xi = \int d\tau \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) = \int d\tau\, A'.$$

Die Integration ist bis Π_2 zu führen.

Hiervon machen wir folgende Anwendung. Wir schreiben (Ströme sollen ausgeschlossen sein) $\varrho = 0$, setzen statt (26) nach Einführung der Größe

$$\Phi_1 = W_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x_x} - \frac{uX + vY + wZ}{4\pi},$$

(35)
$$\left\{\begin{aligned} A' = {} & \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}(uX) + \frac{\partial}{\partial y}(vX) + \frac{\partial}{\partial z}(vX)\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{1}{8\pi}(Yu - Xv)\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_z} + \frac{1}{8\pi}(Zu - Xw)\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

In dem Ausdruck in der ersten Klammer rechts setzen wir $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$, ferner

$$u = X + 4\pi a \text{ etc.}$$

Es folgt so

$$A' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1 + \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_y} + \frac{1}{8\pi}(Yu - Xv)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_z} + \frac{1}{8\pi}(Zu - Xw)\right) + F_0,$$

wobei

$$F_0 = a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial X}{\partial y} + c\frac{\partial X}{\partial z}$$

jene Kraft bedeutet, welche die Volumeneinheit erfährt, wenn dieselbe magnetisch polarisiert gedacht wird (im Sinne der usuellen Theorie).

Aus Gleichungen (34), (35) folgt dann

$$\Xi = \int A' d\tau = \int F_0 d\tau + \int_{\Pi_2} d\omega \left\{ \cos nx \left(\Phi_1 + \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{8\pi} \right) \right.$$
$$+ \cos ny \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_y} + \frac{1}{8\pi} (Yu - Xv) \right)$$
$$\left. + \cos nz \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_z} + \frac{1}{8\pi} (Zu - Xw) \right) \right\}.$$

Ist das Medium 2, in welchem Π enthalten ist, isotrop und hängt seine Permeabilität K_2 weder von den Kräften noch von der Deformation ab, so ist

$$W_1 = \frac{K_2}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Daher

$$\Xi = \int F_0 d\tau - \int d\omega \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{8\pi} (K_2 - 1) \cos nx.$$

Zu diesem Resultat führt auch die ältere Theorie. Speziell für $K_2 = 1$ hat man

$$\Xi = \int F_0 d\tau = \int d\tau \left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} + c \frac{\partial X}{\partial z} \right).$$

Ein gleicher Satz läßt sich bezüglich der statischen Drehmomente erweisen.

g.

Kirchhoff geht in seiner Arbeit über Magnetostriktion[1]) von einem ursprünglich isotropen Medium aus, welches in der Richtung der Hauptdilatationsachsen $x'\,y'\,z'$ magnetisch anisotrop wird. In unserer Bezeichnungsweise setzt er

$$a' = X' (k - k'' x_x' - k' \omega'),$$
$$b' = Y' (k - k'' y_y' - k' \omega'),$$
$$c' = Z' (k - k'' z_z' - k' \omega'),$$

---

1) G. Kirchhoff, Gesamm. Abh., Nachtrag, p. 91. 1891; Wied. Ann. 24. p. 52. 1885.

wobei

$$\omega' = x_x' + y_y' + z_z', \quad x_y' = x_z' = y_z' = 0$$

und die k Konstanten sein sollen. Damit wird laut (16)

$$\begin{aligned} dS &= a'\,dX' + b'\,dY' + c'\,dZ' \\ &= (k - k'\omega')(X'\,dX' + Y'\,dY' + Z'\,dZ') \\ &\quad - k''(X'\,dX'\,x_x' + Y'\,dY'\,y_y' + Z'\,dZ'\,z_z'). \end{aligned}$$

Der Ausdruck läßt sich transformieren auf ein beliebiges Koordinatensystem x, y, z, dessen Winkelstellung durch das Schema

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

gegeben ist.

Man hat dann

$$X' = X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha_3, \quad Y' = X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta_3,$$
$$Z' = X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3,$$
$$\xi = \alpha_1\xi' + \beta_1\eta' + \gamma\zeta' \text{ etc.}, \quad x' = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 \text{ etc.},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = x_x = \alpha_1^2 x_x' + \beta_1^2 y_y' + \gamma_1^2 z_z', \quad y_y = \alpha_2^2 x_x' + \beta_2^2 y_y' + \gamma_2^2 z_z',$$
$$z_z = \alpha_3^2 x_x' + \beta_3^2 y_y' + \gamma_3^2 z_z',$$
$$x_y = 2(\alpha_1\alpha_2 x_x' + \beta_1\beta_2 y_y' + \gamma_1\gamma_2 z_z'),$$
$$x_z = 2(\alpha_1\alpha_3 x_x' + \beta_1\beta_3 y_y' + \gamma_1\gamma_3 z_z'),$$
$$y_z = 2(\alpha_2\alpha_3 x_x' + \beta_2\beta_3 y_y' + \gamma_2\gamma_3 z_z'),$$

daher

$$S = \int_0^{X,Y,Z} dS = (k - k'\omega)\frac{H^2}{2} - \frac{k''}{2}(X^2 x_x + Y^2 y_y + Z^2 z_z + XY x_y + XZ x_z + YZ y_z),$$

wobei

$$H^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Daher laut (15)

$$-\frac{\partial W_1}{\partial x_x} = \frac{\partial S}{\partial x_x} = -\frac{H^2}{2}k' - \frac{k''}{2}X^2 \text{ etc.},$$
$$-\frac{\partial W_1}{\partial x_y} = \frac{\partial S}{\partial x_y} = -\frac{k''}{2}XY.$$

Die Größen k sollen endlich, x_x etc. unendlich klein sein. Es ist daher bis auf zu vernachlässigende Größen

$$u = X + 4\pi a = X(1 + 4\pi k), \quad v = Y(1 + 4\pi k), \quad w = Z(1 + 4\pi k),$$

$$W_1 = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} H^2$$

und damit statt (30)

$$X_x = -\frac{H^2}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k - k'\right) + X^2\left(\frac{1}{4\pi} + k + \frac{k''}{2}\right) \text{ etc.},$$

$$Y_x = X_y = XY\left(\frac{1}{4\pi} + k + \frac{k''}{2}\right) \text{ etc.}$$

Diese Formeln stimmen mit den Kirchhoffschen überein, wobei jedoch bemerkt sein soll, daß derselbe nicht Zugkräfte X_x, sondern Druckkräfte $A_x = -X_x$, $A_y = -X_y$ benutzt.[1])

h.

In diesem Abschnitte soll die Dehnung und Volumenänderung eines (ellipsoidischen) Stabes im Magnetfelde berechnet werden. Dasselbe besitze die Richtung der x-Achse, das Ellipsoid sei ein Rotationsgebilde. Das ursprünglich isotrope Material wird zwar magnetisch anisotrop, jedoch nur in der Richtung der Ellipsoidachse (des äußeren Feldes) gleichmäßig magnetisiert. Von den Elastizitätskräften seien nur die an allen Orten gleichen Spannungen

$$(34a) \quad \begin{cases} \bar{X}_x = \frac{E}{1+\mu}\left(x_x + \frac{\mu\,\omega}{1-2\mu}\right), \quad \bar{Y}_y = \frac{E}{1+\mu}\left(y_y + \frac{\mu\,\omega}{1-2\mu}\right), \\ \bar{Z}_z = \frac{E}{1+\mu}\left(z_z + \frac{\mu\,\omega}{1-2\mu}\right) \end{cases}$$

vorhanden, daher

$$x_y = x_z = y_z = \bar{X}_y = \bar{X}_z = \bar{Y}_z = 0.$$

Die Größen x_x, y_y, z_z sind dann konstant. Es müssen auch die Größen X_z, Y_z, X_y magnetischer Art in (30) wegfallen, denn im Ellipsoid ist jedes Koordinatensystem yz gleichwertig, weil

$$Y = Z = v = w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_1}{\partial x_z} = \frac{\partial W_1}{\partial y_z} = \frac{\partial W_1}{\partial z_x} = 0,$$

weil bei kleinen x_y, x_z, y_z W_1 um eine quadratische Funktion derselben wachsen muß.

1) G. Kirchhoff, Gesamm. Abh., Nachtrag, p. 102. 1891.

Sind andere Massenkräfte ausgeschlossen, so besteht im Ellipsoid Gleichgewicht beider Arten von Spannungen, wenn

$$(35) \qquad X_x + \bar{X}_x = c_1, \quad Y_y + \bar{Y}_y = c_2, \quad Z_z + \bar{Z}_z = c_3$$

gesetzt wird. Die Konstanten c_1, c_2, c_3 erfordern eine gewisse Verteilung der äußeren Flächenkräfte A, B, C. Knapp unter der Oberfläche des Ellipsoides (Medium 1) ist

$$\begin{aligned} (X_n)_1 &= X_x \cos n\,x, \qquad \bar{X}_n = \bar{X}_x \cos n\,x, \\ (Y_n)_1 &= Y_y \cos n\,y, \qquad \bar{Y}_n = \bar{Y}_y \cos n\,y, \\ (Z_n)_1 &= Z_z \cos n\,z, \qquad \bar{Z}_n = \bar{Z}_z \cos n\,z. \end{aligned}$$

Daher erfährt die Basis eines unendlich kleinen Zylinders $d\omega_1$, der mit seiner zweiten Fläche $d\omega_2$ im äußeren Medium 2 mündet, in der Richtung der x-Achse einen resultierenden Zug magnetischer und elastischer Art

$$(X_n)_2 - (\bar{X}_n + (X_n)_1) = (X_n)_2 - c_1 \cos n\,x,$$

welcher durch A kompensiert werden muß. Dies setzt allerdings voraus, daß das äußere Medium 2 keinerlei elastische Reaktionen ausübt. Man hat also

$$(36) \qquad \begin{cases} c_1 \cos n\,x - (X_n)_2 = A, \quad c_2 \cos n\,y - (Y_n)_2 = B, \\ c_3 \cos n\,z - (Z_n)_2 = C. \end{cases}$$

Die Größen

$$(X_n)_2 = (X_x)_2 \cos n\,x + (X_y)_2 \cos n\,y + (X_z)_2 \cos n\,z \text{ etc.}$$

sind Zugkomponenten der äußeren Kraftlinien (in Luft).

Die Kräfte X, Y, Z etc. liegen insgesamt in Meridianebenen. Es ist also speziell in der $x\,z$-Ebene B, $(Y_n)_2$ und dann noch $\cos n\,y = 0$, daher

$$\begin{aligned} A &= c_1 \cos n\,x - [(X_x)_2 \cos n\,x + (X_z)_2 \cos n\,z], \\ C &= c_3 \cos n\,z - [(Z_x)_2 \cos n\,x + (Z_z)_2 \cos n\,z]. \end{aligned}$$

Die Normale geht vom Medium 1 in Medium 2.

Im äußeren isotropen Medium von der Permeabilität 1 gilt in der Meridianebene $x\,z$

$$W_1 = \frac{H^2}{8\pi}, \quad (X_x)_2 = \frac{X^2 - Z^2}{8\pi}; \quad (Z_z)_2 = \frac{Z^2 - X^2}{8\pi}; \quad X_z = \frac{X\,Z}{4\pi};$$

daher

$$(37) \qquad \begin{cases} (X_n)_2 = \dfrac{(X^2 - Z^2)\cos n\,x + 2\,X\,Z \cos n\,z}{8\pi}, \\ (Z_n)_2 = \dfrac{2\,X\,Z \cos n\,x + (Z^2 - X^2)\cos n\,z}{8\pi}. \end{cases}$$

Die Größe der magnetischen Kraft bez. Induktion im Innern des Ellipsoides in der Richtung der x-Achse sei H bez. B. Sie ist überall gleich, weil das Medium überall gleich und auch die Größen x_x, y_y, z_z konstant sein sollen.

Die Normalkomponente der Induktiou $B\cos nx$ setzt sich im Medium 2 ungeschwächt als elektrische normale Kraft fort, und ergibt außen die Achsenkomponenten der Kraft

$$B\cos nx.\cos nx, \qquad B\cos nx.\cos nz.$$

Die Tangentialkomponente der innern Kraft $H\cos tx$ ist gleichfalls kontinuierlich und ergibt außen die Kraftkomponenten

$$H\cos tx.\cos tx, \qquad H\cos tx.\cos tz.$$

Es ist also außen an der Oberfläche

$$(38)\quad X = B\cos^2 nx + H\cos^2 tx,\quad Z = B\cos nx\cos nz + H\cos tx\cos tz.$$

Wächst der Bogen des Meridianschnittes in der Richtung der x-Achse, so ist

$$\cos tx = \sin nx = \cos nz, \quad \cos tz = -\cos nx.$$

Unter Benutzung dieser Werte ist also laut (37)

$$(X_n)_2 = \frac{\cos nx}{8\pi}\left[(B-H)^2\cos^2 nx - H^2\right] + \frac{BH}{4\pi}\cos nx,$$

$$(Z_n)_2 = \frac{\cos nz}{8\pi}\left((B-H)^2\cos^2 nx - H^2\right),$$

und schließlich

$$(39)\quad \begin{cases} \bar{A} = \cos nx\left\{c_1 - \dfrac{(B-H)^2}{8\pi}\cos^2 nx + \dfrac{H^2}{8\pi} - \dfrac{1}{4\pi}BH\right\}, \\ \bar{C} = \cos nz\left\{c_3 - \dfrac{(B-H)^2}{8\pi}\cos^2 nx + \dfrac{H^2}{8\pi}\right\}. \end{cases}$$

Das Ellipsoid soll nun in einen Stab übergehen, der an seiner Mantelfläche, wo $\cos nx = 0$, $\cos nz = 1$, keinerlei äußeren Kraft unterliegen soll. Es wird dies erreicht, wenn

$$c_3 = -\frac{H^2}{8\pi}$$

gesetzt wird. Betrachtungen im Meridian yx ergeben einen genau gleichen Wert von c_3. Setzt man in (35) für X_x, $\bar{X}_x$ . . .

Z_x, $\bar{Z}_x$ ihre Werte aus (34a) und (30) ein, so ergibt sich zur Bestimmung der Dilatationen die Gleichungsreihe

$$(40)\quad \begin{cases} \frac{E}{1+\mu}\left(x_x + \frac{\mu\omega}{1-2\mu}\right) = c_1 - W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial x_x}, \\ \frac{E}{1+\mu}\left(y_y + \frac{\mu\omega}{1-2\mu}\right) = -\frac{H^2}{8\pi} - W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{HB}{4\pi}, \\ \frac{E}{1+\mu}\left(z_z + \frac{\mu\omega}{1-2\mu}\right) = -\frac{H^2}{8\pi} - W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial z_z} + \frac{HB}{4\pi}. \end{cases}$$

Die Konstante c_1 ist unbestimmt geblieben, da über die Belastungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ am Ellipsoidende nicht verfügt wurde.

Es sei in einer Distanz f vom Ende, welche gegen den Stabquerschnitt groß, aber gegen die Stablänge verschwindend klein ist, die eben beschriebene reguläre Magnetisation vorhanden. Sie könnte es bis ans Ellipsoidende sein, wenn die äußeren Kräfte überall so verteilt wären, wie es Gleichungen (39) erfordern. Nehmen wir an, es sei dies nicht der Fall. Wir legen in der Distanz f einen Querschnitt q. Derselbe erfährt in der Richtung der $-x$-Achse einen inneren Zug $c_1 q$, das Endstück selbst nach $+x$ hin an seiner äußeren Oberfläche neben einem äußeren Kraftzug Pq noch den Zug der äußeren Kraftlinien Fq.

Das Gleichgewicht erfordert

$$(41)\qquad c_1 = F + P.$$

Die Größe F ist nicht genau zu berechnen, denn eine Verteilung der äußeren gegebenen Kraft P, konform den Verteilungsbedingungen (39), ist praktisch nicht realisierbar. Daher ist der Induktionsfluß im Endstück nicht so gleichmäßig als in der Stabmitte. Indes begeht man keinen großen Fehler, wenn man den äußeren Kraftlinienzug so berechnet, als wäre der Induktionsfluß bis ans Ende gleichmäßig, und dies selbst dann, wenn man hierzu die halbe Oberfläche des Ellipsoides benutzt, in dessen Mitte ja ohnehin nur ein zur x-Achse senkrechter äußerer Kraftliniendruck vorhanden ist. Setzen wir nämlich voraus, daß die Deformationen im Stabe schon außerhalb des Magnetfeldes überall gleich sind, was bei einem unbelasteten Stab genau und bei einem knapp am Ende belasteten sehr angenähert erreicht ist, so wird bei der Kleinheit der im Magnetfelde erfolgenden Deformation die schon vorhandene

Gleichheit der Permeabilität so wenig gestört, daß bei Berechnung von Fq gleichmäßiger Fluß von B angenommen werden darf. Andererseits wird sich zeigen, daß die von den äußeren Kraftlinien herstammenden Dehnungen relativ gering sind.

Sind α, γ die Halbachsen des Ellipsoides, so gilt

$$\frac{\cos n\,x}{\frac{x}{\alpha^2}} = \frac{\cos n\,z}{\frac{z}{\gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}}},$$

ferner

$$\int d\omega \cos n\,x = \gamma^2 \pi = q,$$

$$\int d\omega \cos n\,x^3 = \int d\omega \cos n\,x \,.\, \cos^2 n\,x = 2\pi \int_0^\gamma z\,dz \cos^2 n\,x$$

$$= 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}\log\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2} = 0 \text{ für } \lim \gamma/\alpha = 0.$$

Die Größe Fq ist dann gegeben durch

$$Fq = \int (X_n)_2\, d\omega = \left(\frac{BH}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi}\right) q$$

und schließlich

$$c_1 - P = \frac{BH}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{42}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (40) bekommen wir also

$$\begin{cases} E x_x = P + \left(\frac{HB}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} - W_1\right)(1-2\mu) \\ \qquad\qquad - \frac{\partial W_1}{\partial x_x} + \mu\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{\partial W_1}{\partial z_z}\right), \\ \frac{E}{1-2\mu}\omega = P - 3\left(W_1 - \frac{HB}{4\pi} + \frac{H^2}{8\pi}\right) - \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_x} + \frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{\partial W_1}{\partial z_z}\right). \end{cases} \tag{43}$$

Diese Gleichungen transformieren wir folgendermaßen. Ein langes rechtwinkliges Prisma sei der Länge nach mit der Kraft P (pro cm²) gedehnt. An den Seitenflächen betrage die Spannung Q und R. Es ist dann[1]) den Elastizitätsgesetzen zufolge:

$$P = \frac{E}{1+\mu}\left(x_x + \frac{\mu}{1-2\mu}\omega\right), \quad Q = \frac{E}{1+\mu}\left(y_y + \frac{\mu}{1-2\mu}\omega\right),$$

$$R = \frac{E}{1+\mu}\left(z_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\omega\right).$$

1) War das unbelastete Medium isotrop, so wird es anisotrop längs den drei Hauptrichtungen P, Q, R. Es ist daher die Suszeptibilität längs P unabhängig von den magnetischen Querkräften.

In einem homogenen Magnetfelde H erreicht das lange Prisma einen Längsmagnetismus der Intensität J:

$$J = f(H, P, Q, R). \tag{44}$$

Läßt man die demagnetisierende Kraft außer acht, so ist H auch die Stärke des inneren Feldes.

Bezeichnen wir die Derivationen von J nach P, Q, R mit J_P, J_Q, J_R, so ergibt sich:

$$\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{\partial J}{\partial x_x} = J_P + \frac{\mu}{1-2\mu}(J_P + J_Q + J_R),$$

$$\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{\partial J}{\partial y_y} = J_Q + \frac{\mu}{1-2\mu}(J_P + J_Q + J_R),$$

$$\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{\partial J}{\partial z_z} = J_R + \frac{\mu}{1-2\mu}(J_P + J_Q + J_R),$$

daher

$$\frac{\partial J}{\partial x_x} + \frac{\partial J}{\partial y_y} + \frac{\partial J}{\partial z_z} = \frac{E}{1-2\mu}(J_P + J_Q + J_R), \tag{45}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_x} - \mu\left(\frac{\partial J}{\partial y_y} + \frac{\partial J}{\partial z_z}\right) = E J_P. \tag{46}$$

Infolgedessen ist laut (15), (16)

$$-\frac{\partial W_1}{\partial x_x} + \mu\left(\frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{\partial W_1}{\partial z_z}\right) = \frac{\partial S}{\partial x_x} - \mu\left(\frac{\partial S}{\partial y_y} + \frac{\partial S}{\partial z_z}\right)$$

$$= \int_0^H dH\left(\frac{\partial J}{\partial x_x} - \mu\frac{\partial J}{\partial y_y} - \mu\frac{\partial J}{\partial z_z}\right) = E\int_0^H dH . J_P$$

und

$$-\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_x} + \frac{\partial W_1}{\partial y_y} + \frac{\partial W_1}{\partial z_z}\right) = \int_0^H dH(J_P + J_Q + J_R).$$

Da unserer Voraussetzung nach der ellipsoidische Stab an den Seitenflächen frei ist, so ist in J_P, J_Q, J_R für Q und R die Null einzusetzen. Ist er auch nicht gedehnt, so ist noch $P = 0$ zu setzen.

Bezeichnen wir mit $(x_x)_0$ bez. $(\omega)_0$ die Dilatation bez. Volumenänderung in *Abwesenheit* des Feldes, wie dieselbe durch die an den Enden wirkende äußere Kraft Pq erzeugt wird, setzen wir ferner

$$-\int_0^H \frac{B\,dH}{4\pi} = -\frac{H^2}{8\pi} - \int_0^H J\,dH,$$

so gewinnen wir das Schlußresultat

$$(47)\quad \omega - (\omega)_0 = \frac{3(1-2\mu)}{E}\int_0^H J\,dH + \int_0^H dH(J_P + J_Q + J_R),$$

$$(48)\quad x_x - (x_x)_0 = \frac{1-2\mu}{E}\int_0^H J\,dH + \int_0^H dH\,J_P(H, P, 0, 0).$$

Es sei bemerkt, daß H, die Intensität der magnetischen Kraft im Stabe, an seinen Seitenflächen in jene des Feldes, die gleichfalls H ist, übergehen muß, solange das Ellipsoid hinlänglich gestreckt ist.

I.

Bezüglich der Funktion

$$J = f(H, P, Q, R)$$

ist zu bemerken, daß dieselbe bei einem ursprünglich isotropen Medium die Bedingung

$$f(H, P, Q, R) = f(H, P, R, Q)$$

erfüllen muß, welche durch Derivation nach R oder Q zu

$$J_Q(H, P, R, Q) = J_R(H, P, Q, R)$$

führt. Speziell gilt

$$(49)\qquad J_Q(H, 0, 0, 0) = J_R(H, 0, 0, 0),$$

sodann

$$(50)\quad \begin{cases} \Pi(H,0,0,0) = J_P(H,0,0,0) + J_Q(H,0,0,0) + J_R(H,0,0,0) \\ \qquad\qquad = J_P(H,0,0,0) + 2\,J_Q(H,0,0,0). \end{cases}$$

Ist der rechtwinklige Stab der Länge nach gedehnt mit P, an zwei Seitenflächen *nicht* beansprucht, dagegen an den zwei anderen gleich stark gedrückt ($Q = -P$, $R = 0$), so ist sein Längsmagnetismus, der von da an unterscheidungshalber mit J' bezeichnet werden soll, eine Funktion von H, P der Form

$$J' = F(H, P) = f(H, P, -P, 0).$$

Man erhält hieraus, wenn nach der Derivation $P = 0$ gesetzt wird,

$$(51)\qquad \frac{\partial J'}{\partial P} = J'_P(H, 0) = J_P(H, 0, 0, 0) - J_Q(H, 0, 0, 0).$$

Die Größe J_P' kommt in der Formel für die magnetische Torsion vor.

Man findet aus (50) und (51) die Gleichung

$$(52) \qquad \Pi(H, 0, 0, 0) + 2 J_P'(H, 0) = 3 J_P(H, 0, 0, 0),$$

also einen Zusammenhang zwischen den in der magnetischen Dilatation und Volumenänderung eines nicht belasteten Stabes vorkommenden Koeffizienten J_P und Π mit jenem der Torsionsgleichungen.

k.

Ähnliche Formeln wie [(47), (48)] lassen sich auch für ein dünnes Toroid herleiten, das durch eine gleichmäßig gewickelte Spule magnetisiert wird. Legen wir etwa durch die Querschnittschwerpunkte die Mittellinie, so dürfen wir mit Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen yz-Ebene mit *einem* Querschnitte zusammenfällt und dessen x-Achse die Tangente an der Mittellinie ist, setzen:

$$(53) \qquad X_x + \bar{X}_x = c_1, \quad Y_y + \bar{Y}_y = c_2, \quad Z_z + \bar{Z}_z = c_3.$$

$$(54) \qquad X_y = X_z = Y_z = \bar{X}_y = \bar{X}_z = \bar{Y}_z = 0.$$

Die Konstanten $c_2 = c_3$ bestimmen sich genau so wie früher, die Konstante c_1 muß Null sein. Es folgt dies aus dem Gleichgewicht eines zwischen zwei beliebigen Querschnitten befindlichen Toroidstückes, welches an diesen Querschnitten gegeneinander schief gerichteten Spannungen $c_1 q$ elastischer und magnetischer Art unterliegt, während die Drucke der äußeren Kraftlinien des gleichmäßigen Spulenfeldes an der Mantelfläche des Stückes sich aufheben. Man hat also in (40) $c_1 = 0$ zu setzen. Das Resultat ist übrigens zufolge der Gleichung (42)

$$c_1 - P = \frac{BH}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi},$$

das nämliche wie in einem Stabe, an welchem äußere Kräfte vom Betrage

$$\frac{H^2}{8\pi} - \frac{BH}{4\pi}$$

angebracht sind. Mit *diesen* ist $(x_x)_0$ und $(\omega)_0$ in (47), (48) zu berechnen.

Ersichtlich unterscheiden sich diese Ausdrücke für x_x und ω von jenen, welche einem ursprünglich ungedehnten *Stabe* entsprechen, nur um die ersten Glieder, welche auch dann bestehen bleiben, wenn äußerer Zug keinen Einfluß auf die magnetischen Eigenschaften der Stabmasse ausübt. Dieselben sind aber von unbedeutendem Einflusse, solange es sich um bloße Dilatation handelt. Setzen wir in (48) $P = 0$ voraus, so ist

$$(55) \qquad x_x = \frac{1-2\mu}{E}\int_0^H J\,dH + \int_0^H dH\,.\,J_P(H, 0, 0, 0).$$

Nimmt man beispielsweise für Eisen

$$\mu = 0{,}25, \quad E = 20000\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} = 2 \times 10^{12}\,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

an und setzt, das erste Glied übertreibend, für J den *Maximalbetrag* 1600, ferner $H = 1000$, so ist der erste Summand $0{,}4 \times 10^{-6}$, während die unter gleichen Umständen beobachteten Dehnungen x_x *einige* Zehnmillionstel betragen.

Man kommt also in erster Linie mit dem Resultate

$$(56) \qquad x_x = \int_0^H dH\,.\,J_P(H, 0, 0, 0)$$

aus.

Dem früheren zufolge bedeutet

$$J_P(H, 0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial P} J(H, P, 0, 0), \quad \lim P = 0$$

die Raschheit, mit welcher bei sehr kleinen Spannungsänderungen der Magnetismus in einem an den Seitenflächen freien Stabe (Drahte) wächst. Diese Größe hängt von H ab und ihr bekanntes Verhalten bei Eisen erklärt den Verlauf der magnetischen Dilatationen in demselben. Das Maximum von x_x, einer Größe, welche bei Eisen bei kleinen H positiv ist, tritt bei einer Kraft H_0 ein, welche die Bedingung $J_P(H_0, 0, 0, 0) = 0$ erfüllt. Es ist dies der Punkt, in welchem eine zu $P = 0$ gehörige (J, H)-Kurve von einer zu ΔP gehörigen geschnitten wird. (Villarischer Punkt.)

Es stehen mir genaue Messungen der Art, wie ich sie bei Prüfung der Formel brauchen könnte, nicht zu Gebote. Im folgenden beschränke ich mich daher auf einige Resultate aus Ewings Buch über magnetische Induktion (deutsche Über-

setzung 1892). Aus dem *Diagramm J H* (94) auf p. 185 entnehme ich für Nickel die Tabelle.

	$H =$	0	10	20	40	60	80	100	
1.	$J =$	0	140	270	340	360	386	406	$P = 0$
2.	$J =$	0	76	157	250	300	330	356	$P = 5{,}5$ kg/mm²
3.	$J =$	0	5	12	36	61	88	108	$P = 33$ kg/mm²
2,75	$(\Delta J : \Delta P)$	—	−32	−56,5	−48	−30,5	−28	−25	
2,75	$(\Delta J : \Delta P)$	—	−71	−14,5	−21,4	−23,9	−24,2	−24,8	

Die fünfte und sechste Zeile enthält $(\Delta J / \Delta P)\,2{,}75$ in kg/mm² berechnet aus der zweiten und dritten, sowie aus der dritten und vierten Zeile. Man sieht, daß dieses Verhältnis numerisch steigt, wenn man von größeren Werten von P zu kleineren übergeht. Es ist also der Wert $(\Delta J / \Delta P)$ bei $\lim P = 0$ aus der Tabelle nicht zu eruieren. Setze ich für denselben die Differenzen in Zeile 5, so ergibt sich, wenn das nachfolgende Integral bis an die Grenze der Tabelle $H = 100$ erstreckt wird, in kg/mm²:

$$\int_0^{H=100} d\,H\,J_P(H, 0, 0, 0) = -\frac{1}{2{,}75}\left[\left(\frac{25+28}{2} + \frac{28+30{,}5}{2} + \frac{30{,}5+45}{2} + \frac{45+56{,}5}{2}\right)20 + \left(\frac{56{,}5+32}{2} + \frac{32}{2}\right)10\right],$$

oder im Dyn/cm²-Maße $-12{,}5 \times 10^{-6}$.

So groß ist laut (56) die (negative) Dehnung des Nickels (der Tabelle) bei $H = 100$. Aus dem Diagramm 126, l. c. Ewing findet man $x_x = -12 \times 10^{-6}$, andere Nickelsorten ergeben bis -30×10^{-6}.[1])

Ein eigentümliches Verhalten zeigt Eisen. Der Durchschnitt zweier JH-Kurven bewegt sich, wie aus dem Diagramm 102 l. c. Ewing ersichtlich ist, mit wachsendem P gegen $H = 0$ hin, so daß bei stark belastetem Eisen eine weitere Belastung die Suszeptibilität schon von $H = 0$ angefangen herabsetzt. Es folgt daraus, daß bei größeren P

1) H. Nagaoka u. K. Honda, Phil. Mag. (6) 4. p. 45. 1902. Im folgenden Kürze halber als Nagaoka l. c. zitiert.

die Größe $J_P(H, P, 0, 0)$ wesentlich negativ, daß daher zufolge (48) stark gespanntes Eisen sich im Magnetfelde zusammenziehen muß.

Bei $P = 0$ steigt die Größe x_x bis zu einem Maximum und geht durch einen Nullwert ins entgegengesetzte Zeichen über. Steigt P, so wird das Maximum niedriger, der Nullwert rückt gegen $H = 0$ hin. Der Anblick von Kurven dieser Art lehrt (Ewing, p. 230), daß $\partial x_x / \partial P$ stets negativ ist. Gleiches gilt dann laut (56) auch von $dJ_P(H, P, 0, 0)/dP$.

Würden die verschiedenen Spannungen P entsprechenden JH-Kurven bei wachsendem H schließlich parallel werden, d. h. würde für jede einzelne Belastung P ein *selbständiges* Magnetisationsmaximum bestehen, so würde $J_P(H, P, 0, 0)$ schließlich von H unabhängig und dx_x/dH konstant. Wäre dieser Zustand bei Nickel bei $H = 100$ erreicht, wo $J_P(H, 0, 0, 0)$ laut Tabelle etwa $-25:27 \times 10^7$ im C.G.S.-Maße beträgt, so müßte für jede hundert Gausseinheiten die Verkürzung um 9 Millionstel zunehmen. Tatsächlich steigt dieselbe bis etwa 40 Millionstel (Nagaoka, l. c.) und bleibt fast stationär. Hieraus folgt $\lim H = \infty$, $J_P(H, 0, 0, 0) = 0$. Es müßte dann im unendlich starken Felde *unabhängig* von P ein *einziges* Magnetisationsmaximum bestehen.

l.

Nagaoka untersucht (l. c. p. 57) auch die Volumenänderungen eines freien ovoidischen Stabes. Dieselben sind bei Nickel, Eisen und Kobalt (gegossen) klein. In ersterem wächst ω linear mit H und erreicht bei $H = 1800$ den Betrag $0{,}225 \times 10^{-6}$, in Eisen $1{,}4 \times 10^{-6}$, in Kobalt $-1{,}5 \times 10^{-6}$. Angesichts dieser Tatsache darf in (47) das Glied

$$\omega' = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \int_0^H J \, dH$$

nicht mehr vernachlässigt werden.

Setzt man (es ist dies nahezu richtig, wenn man bis $H = 1800$ geht) im Integrale statt J den Maximalbetrag 480, 1400, 1130, ferner (der Größenordnung nach richtig) $\mu = 0{,}25$,

$E = 2 \times 10^{12}$ dyn/cm² für alle drei Metalle, so ergibt sich bei $H = 1800$

$$\omega' = 0{,}64 \times 10^{-6}, \quad 1{,}8 \times 10^{-6}, \quad 1{,}4 \times 10^{-6}.$$

Das Integral in (47)

$$\int_0^H d\,H\,\Pi(H, 0, 0, 0)$$

ist also negativ und beträgt, mit den oben angegebenen Werten für ω berechnet,

$$-0{,}415 \times 10^{-6}, \quad -0{,}4 \times 10^{-6}, \quad -2{,}9 \times 10^{-6}.$$

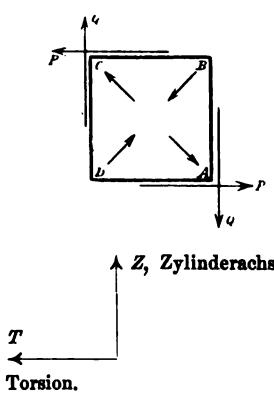
Dagegen betragen für $H = 1800$ die Dilatationen (l. c. p. 50)

$$-37 \times 10^{-6}, \quad -8 \times 10^{-6}, \quad +5 \times 10^{-6}.$$

Man kann daraus schließen, daß $J_P(H, 0, 0\,0)$ gegen $\Pi(H, 0, 0, 0)$ bei Ni und Fe groß ist. Diese Annahme scheint mit Versuchsresultaten anderer Art nicht in Widerspruch zu stehen. (Man sehe namentlich den Schluß der Abhandlung.)

III.

Der Einfluß der Torsion auf die magnetischen Eigenschaften der Metalle läßt sich nach W. Thomson auf jenen von Zug- und Druckkräften reduzieren. Ein elementarer Würfel $A\,B\,C\,D$ (vgl. Figur), welcher an seinen Seitenflächen Scherkräften $P = Q$ unterworfen ist, befindet sich in einem Zustande, welcher durch eine Spannung P in der Richtung $A\,C$ und einen gleichgroßen Druck in der Richtung $B\,D$ erreicht werden kann. Quer zu beiden Richtungen ist das Medium *nicht* beansprucht. Dieser Zustand tritt in einem tordierten *Kreis*zylinder ein, wobei wir uns $A\,B\,C\,D$ auf einem konzentrischen Zylindermantel zu denken haben, dessen Achse die z-Achse sein soll.



Es ist dann P, gleichzeitig Scherkraft in der Richtung der Torsion, gegeben durch

$$P = \bar{Y}_z \cdot \frac{x}{r} - \bar{X}_z \cdot \frac{y}{r},$$

wobei

$$\bar{X}_z = \frac{E}{2(1+\mu)} x_z, \quad \bar{Y}_z = \frac{E}{2(1+\mu)} y_z.$$

Die Richtung von P und die Torsion ψ soll mit Rücksicht auf die z-Achse im Sinne des Uhrzeigers positiv gezählt werden. Die Deviationen ξ, η sind bei einem Kreiszylinder stets im Querschnitt enthalten und durch

$$\xi = -\psi z . y, \quad \eta = \psi z x$$

gegeben. Das feste Ende des Zylinders liegt bei $z=0$. Hiermit ergibt sich

$$x_z = -\psi y, \quad y_z = \psi x$$

und

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \psi . r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{57}$$

Von magnetischen Kräften soll nur die longitudinale Z und eine zirkulare T vorkommen, letztere positiv gerechnet im Sinne des Uhrzeigers. Es fällt dann in die Spannungsrichtung AC die Komponente

$$H_1 = \frac{T+Z}{\sqrt{2}},$$

in die Richtung des Druckes DB die Komponente

$$H_2 = \frac{Z-T}{\sqrt{2}}.$$

Die Suszeptibilität in dem längs AC gespannten, nach DB gleich stark gepreßten und der Quere nach freien Medium sei längs AC $f(H_1, P)$, längs DB $f(H_2, -P)$.

Die Magnetisation längs AC ist dann $H_1 f(H_1, P)$, jene längs DB $H_2 f(H_2, -P)$ (da jede dieser Richtungen eine Achse der magnetischen Anisotropie ist).

Zerlegt man diese in je zwei Komponenten in der Richtung der Zylinderachse c und der Torsion J_t, so ergibt sich

$$\begin{cases} J_t = \frac{Z+T}{2} f\left(\frac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right) - \frac{Z-T}{2} f\left(\frac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right), \\ c = \frac{Z+T}{2} f\left(\frac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right) + \frac{Z-T}{2} f\left(\frac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right). \end{cases} \tag{58}$$

Ist der Zylinder nur längsmagnetisiert ($T = 0$), die Torsion nicht bedeutend, so ergibt eine Reihenentwickelung

$$c = Zf\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{Z}{2}\frac{\partial^2 f\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\partial P^2} \cdot P^2,$$

$$J_t = ZP \cdot \frac{\partial f\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\partial P}.$$

Nennt man wie früher J' die Längsmagnetisierung in einem Prisma, das an den Grundflächen gespannt und an zwei gegenüberliegenden Seiten gleich stark komprimiert ist, setzt also

$$J' = F(H, P) = \frac{F(H, P)}{H} H,$$

so ist offenbar

$$\frac{Z}{\sqrt{2}} f\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, P\right) \quad \text{identisch mit} \quad J'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, P\right),$$

daher

$$(59) \quad \begin{cases} c = \sqrt{2} J'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2 J'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\partial P^2} P^2, \\ J_t = P \cdot \sqrt{2}\frac{\partial J'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\partial P} = P\sqrt{2}\, J'_P\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{cases}$$

Der Einfluß der Torsion auf die Längsmagnetisierung ist eine Größe der Ordnung P^2 oder ψ^2, daher nur bei stärkeren Torsionen beobachtbar. Über den Sinn desselben kann man sich durch die Annahme orientieren, daß eine Längsspannung P die Suszeptibilität eines an zwei gegenüberliegenden Seitenflächen gleich stark (P) gepreßten Prismas in denselben Sinne beeinflußt, als wenn die Seitenflächen frei wären. Es liegt dieser Gedanke um so näher, da dem früher Gesagten zufolge statt der Gleichung (52) die annähernd richtige

$$J'_P(P, 0) = \tfrac{3}{2} J_P(H, 0, 0, 0)$$

gesetzt werden darf.

Gibt man zu, daß auch

$$\frac{\partial^2 J'(H, 0)}{\partial P^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial P^2} J(H, P, 0, 0), \text{ limite } P = 0$$

gleiches Zeichen besitzen, so lehrt die Formel (59) unter Zuhilfenahme der Tabelle auf p. 26, laut welcher bei Nickel die

Größen $\Delta J/\Delta P$ mit wachsendem P algebraisch zunehmen, daß *stärkere* Torsion die Suszeptibilität von *Nickel* erhöhen muß. Infolge der Bemerkung auf p. 27, Zeile 9 von oben, muß es bei Eisen umgekehrt sein, beides in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Die durch Torsion erzeugte Zirkularkomponente J_t ist der ersten Potenz von ψ proportional und besitzt das Zeichen von

$$J'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{oder auch} \quad J_P\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Sie verläuft also bei Nickel stets entgegengesetzt der Torsion, bei Eisen anfangs im selben Sinne, erreicht ein Maximum, wird Null und nimmt dann die entgegengesetzte Richtung ein.

Der bei der Torsion entstehende Induktionsstrom läßt sich leicht berechnen, da sein Verlauf nur hiervon abhängt, *wie* sich der zirkulare Magnetismus ändert, nicht aber, was die Ursachen dieser Änderung sind. Die in der Zeit dt erfolgende Änderung der Energie der *zirkularen* Magnetisation beträgt entsprechend der Formel (8) pro Volumeneinheit

$$\frac{1}{4\pi} T \cdot \frac{dB_t}{dt} dt,$$

wobei T bez. B_t die zirkulare magnetische Kraft bez. Induktion bedeutet, beide positiv gerechnet im Sinne des Uhrzeigers.

Ist i die augenblickliche über den Querschnitt gleichmäßig verteilte Stromintensität, positiv gerechnet in der Richtung der z-Achse, r die Entfernung von der Drahtachse, R der Querschnittsradius, so ist

$$(60) \qquad -T.2r\pi = \frac{4\pi i}{R^2\pi} \cdot r^2\pi \quad \text{oder} \quad T = -\frac{2ri}{R^2}.$$

Ferner darf für $B_t = T + 4\pi J_t$ in stark magnetischen Medien $4\pi J_t$ gesetzt werden. Hat der Draht die Länge l, so beträgt die Abnahme der Energie des zirkularen Magnetismus während der Zeit dt

$$dt \int_{r=0}^{R} 2\pi r^2 l\, dr \cdot \frac{2i}{R^2} \frac{dJ_t}{dt}$$

und ist äquivalent mit der gleichzeitig sich entwickelnden Stromwärme $w' i^2 dt$, wo w' den Widerstand der Schließung

bedeutet. Dauert die Torsion von der Zeii $t=0$ bis $t=\vartheta$, so ist der Integralstrom e gegeben durch die Gleichung

$$w' \int_0^{\vartheta} i\,dt = w'\,e = \frac{4\pi l}{R^2} \int_0^R r^2\,dr\,[(J_t)_\vartheta - (J_t)_0].$$

Es ist nun laut (59), (57)

$$J_t = J_P'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right) \frac{\sqrt{2}\,E}{2(1+\mu)}\,\psi . r,$$

daher

$$w'\,e = R^2\pi . l \cdot \frac{\sqrt{2}\,E}{2(1+\mu)}(\psi_\vartheta - \psi_0) . J_P'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right), \tag{61}$$

wobei ψ_ϑ bez. ψ_0 die Werte des Torsionswinkels zu Ende und Beginn der Torsion bedeuten. In die Formel (61) kann man noch das elastische Drehmoment $\bar{M}_z$ einführen, welches durch

$$\bar{M}_z = \int_0^R 2\pi r\,dr\,.\,Pr = \frac{\pi E R^4}{4(1+\mu)}\psi$$

gegeben ist.

II.

Ist keine längsmagnetisierende Kraft vorhanden ($Z=0$) und der Draht durch einen Strom zirkular magnetisiert, so gilt laut (58)

$$J_t = \frac{T}{2} f\left(\frac{T}{\sqrt{2}}, P\right) + \frac{T}{2} f\left(-\frac{T}{\sqrt{2}}, -P\right),$$
$$c = \frac{T}{2} f\left(\frac{T}{\sqrt{2}}, P\right) - \frac{T}{2} f\left(-\frac{T}{\sqrt{2}}, -P\right).$$

Wir benützen den Umstand, daß sich die Permeabilität nicht ändert, wenn die magnetisierende Kraft umgekehrt wird, setzen also

$$f\left(-\frac{T}{\sqrt{2}}, -P\right) = f\left(\frac{T}{\sqrt{2}}, -P\right),$$

entwickeln nach Potenzen und führen wieder J' ein. Dies ergibt für kleine P

$$\begin{cases} c = T.P\,\dfrac{\partial}{\partial P} f\left(\dfrac{T}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2}\,.\,P J_P'\left(\dfrac{T}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ J_t = \sqrt{2}\left[J'\left(\dfrac{T}{\sqrt{2}}, 0\right) + \dfrac{P^2}{2}\,\dfrac{\partial^2 J'}{\partial P^2}\left(\dfrac{T}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]. \end{cases} \tag{62}$$

Die durch Torsion erzeugte Längsmagnetisation c ist im Querschnitt veränderlich infolge der Veränderlichkeit der magnetischen Zirkularkomponente I. Der Mittelwert derselben ergibt sich nach Einführung des Wertes von P, wenn noch $T/\sqrt{2} = -\sigma = -2.ir/R^2.\sqrt{2}$ gesetzt wird, zu

$$(63) \quad \bar{c} = \int_0^R c.\frac{2\pi r\,dr}{R^2\pi} = \psi\frac{E}{2(1+\mu)}\cdot\frac{R^4}{i^3}\int_0^{\frac{i\sqrt{2}}{R}}\sigma^2\,d\sigma\,J_P'(-\sigma,0).$$

6.

Bei Berechnung der Torsion, welche ein *stromdurchflossener* Draht durch Längsmagnetisierung erfährt, kommen nur die Scherkräfte

$$Y_z = \frac{Yw+Zv}{8\pi} + \frac{\partial W_1}{\partial y_z}, \quad X_z = \frac{Xw+Zu}{8\pi} + \frac{\partial W_1}{\partial x_z}$$

in Betracht (vgl. Gleichung (30)).

Ein Flächenelement des Querschnittes erfährt seitens derselben pro Flächeneinheit ein Drehmoment um die Z-Achse im Betrage $M_z = (Y_z x - X_z y)$; führt man T und B_t ein, so wird wegen $Yx - Xy = T.r$, $B_t.r = vx - uy$

$$(64) \quad M_z = \frac{(wT+ZB_t)r}{8\pi} + \frac{\partial W_1}{\partial y_z}x - \frac{\partial W_1}{\partial x_z}y.$$

Ist nur reine Torsion vorhanden, so ist

$$W_1 = f(u,v,w,x_z,y_z) = f(u,v,w,-\psi y,\psi x).$$

Derivation nach ψ ergibt

$$\frac{\partial W_1}{\partial\psi} = -\frac{\partial W_1}{\partial x_z}y + \frac{\partial W_1}{\partial y_z}x,$$

ferner ist laut (15)

$$\frac{\partial W_1}{\partial\psi} = -\int_0^{Z,Y,X}\left[dX\left(\frac{\partial a}{\partial\psi}\right)_H + dY\left(\frac{\partial b}{\partial\psi}\right)_H + dZ\left(\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)_H\right].$$

In unserem Falle, wo neben einer magnetischen Längskraft und Längsmagnetisation noch eine zirkulare Kraft und

Magnetisation vorkommen sollen, ist, da letztere im Uhrzeigersinn positiv gezählt werden,

$$X = -T \cdot \frac{y}{r}, \quad Y = T \cdot \frac{x}{r}, \quad dX = -dT \cdot \frac{y}{r}, \quad dY = dT \cdot \frac{x}{r}$$

$$dY \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial \psi}\right)_H + dX \left(\frac{\partial a}{\partial \psi}\right)_H = \frac{dT}{r}\left(x\left(\frac{\partial b}{\partial \psi}\right)_H - y\left(\frac{\partial a}{\partial \psi}\right)_H\right)$$

$$= dT \frac{\partial}{\partial \psi}\left(b \cdot \frac{x}{r} - a \cdot \frac{y}{r}\right) = dT\left(\frac{\partial J_t}{\partial \psi}\right)_H,$$

mithin

$$(65) \qquad M_z = \frac{(w\,T + Z\,B_t)\,r}{8\,\pi} - \int_0^{Z,\,T} \left[dZ\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_H + dT\left(\frac{\partial J_t}{\partial \psi}\right)_H\right].$$

Der Ausdruck hinter dem Integralzeichen reduziert sich folgendermaßen. Wir derivieren die Gleichungen (58), in welchen wir P durch ψ ausdrücken, nach ψ und bekommen nach Einführung der Magnetisation J'

$$(66) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial J_t}{\partial \psi} = \left[\dfrac{Z+T}{2}\dfrac{\partial f\left(\frac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right)}{\partial P} + \dfrac{Z-T}{2}\dfrac{\partial f\left(\frac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right)}{\partial P}\right]\dfrac{\partial P}{\partial \psi} \\ \qquad = \dfrac{E\,r}{\sqrt{2}\,.\,2\,(1+\mu)}\left[J'_P\left(\dfrac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right) + J'_P\left(\dfrac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right)\right], \\ \dfrac{\partial c}{\partial \psi} = \left[\dfrac{Z+T}{2}\dfrac{\partial f\left(\frac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right)}{\partial P} - \dfrac{Z-T}{2}\dfrac{\partial f\left(\frac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right)}{\partial P}\right]\dfrac{\partial P}{\partial \psi} \\ \qquad = \dfrac{E\,r}{\sqrt{2}\,.\,2\,(1+\mu)}\left[J'_P\left(\dfrac{Z+T}{\sqrt{2}}, P\right) - J'_P\left(\dfrac{Z-T}{\sqrt{2}}, -P\right)\right]. \end{cases}$$

Da die durch Magnetostriktion erzeugte Torsion sehr klein ist, kann statt P auch Null gesetzt werden. Wir bekommen in dieser Weise laut (65)

$$(67) \quad \begin{cases} M_z = \dfrac{(w\,T + Z\,B_t)\,r}{8\,\pi} - \left\{\displaystyle\int_0^{Z+T} d(Z+T)\,J'_P\left(\frac{Z+T}{\sqrt{2}}, 0\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. - \displaystyle\int_0^{Z-T} d(Z-T)\,J'_P\left(\frac{Z-T}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\} \dfrac{E\,r}{\sqrt{2}\,.\,2\,(1+\mu)}. \end{cases}$$

Statt der Differenz der Integrale läßt sich setzen:

$$\int_{Z-T}^{Z+T} d\sigma\, J_P'\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Wird $\sigma = \vartheta . T + Z$ eingeführt, so ergibt (67)

$$(68)\quad \left\{ \begin{array}{c} M_z = \dfrac{(w\,T + Z\,B_i)\,r}{8\,\pi} \\ - \dfrac{E\,T\,r}{\sqrt{2}\,.\,2\,(1+\mu)} \left[\displaystyle\int_0^1 d\vartheta \left[J_P'\left(\frac{Z+\vartheta\,T}{\sqrt{2}}\right) + J_P'\left(\frac{Z-\vartheta\,T}{\sqrt{2}}\right)\right]\right]. \end{array} \right.$$

Es wurde homogene Torsion vorausgesetzt; das Torsionsmoment der elastischen Kräfte am Orte $d\omega$ $\bar{M}_z'$ ist dann pro Flächeneinheit

$$\bar{Y}_z x - \bar{X}_z y = Pr = \psi \cdot \frac{E r^2}{2\,(1+\mu)}.$$

Soll Gleichgewicht in jedem Punkte, d. h. $M_z + \bar{M}_z' = 0$ bestehen, so muß auch M_z mit r^2 proportional sein.

Es tritt dies ein, wenn der Strom im Drahte derart klein ist, daß die von ihm erzeugte Zirkularkraft gegen jene der Längsmagnetisierung Z verschwindet, da in diesem Falle (genau bis auf Größen der Ordnung I^2/Z^2) für das Integral $2 J_P'(Z/\sqrt{2})$ gesetzt werden kann.

Das erste Glied in (68) ist, wie wir sehen werden, verschwindend klein, übrigens wenn die Induktion in erster Annäherung der Kraft proportional gesetzt wird, mit $T w r$, daher auch mit r^2 proportional. Man hat also

$$(69)\qquad \frac{\psi}{2\pi} = \frac{i}{R^2 \pi}\left(\frac{w}{2\pi}\frac{1+\mu}{E} - \sqrt{2}\, J_P'\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right)\right).$$

Die Torsion ist für große Z und entsprechend kleine i (konform mit den Versuchen von Nagaoka l. c.) mit der Stromdichte proportional. Das erste Glied (69) ergibt bei der Stromdichte 1 (10 Amp./cm²) eine Torsion $\psi' = w(1+\mu)/E$, welche selbst bei extrem hoher Längsmagnetisierung ($w = 20000$, $\mu = 0{,}25$ und $E = 2{,}1 \cdot 10^{12}$ dyn/cm²) nur etwa $^1/_{400}$ Bogen-

sekunde pro Zentimeter Drahtlänge ausmacht, während die beobachteten ganzen Werte ψ viele hunderte Mal größer sind.

Für Berechnung des zweiten Teiles in (69) mangeln mir Daten über den Verlauf von $J_P'(H, 0)$. Gleichung (52), welche angesichts der bei Nickel und Eisen ziemlich genau erfüllten Bedingung $\Pi(H, 0, 0, 0) = 0$, $J_P'(H, 0, 0, 0) = \frac{1}{3}(J_P(H, 0, 0, 0)$ ergibt, gestattet für ψ einen Näherungswert anzugeben. Derselbe ist

$$\frac{\psi}{2\pi} = -\frac{i}{R^2\pi} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} J_P\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}, 0\right). \tag{70}$$

Wir rekapitulieren, daß der Strom positiv gezählt wird vom festen gegen das bewegliche Drahtende und daß in bezug auf diese Richtung die Torsion positiv zu zählen ist, wenn sie im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Entsprechend dem Verhalten der Größe $J_P(Z/\sqrt{2}, 0)$ ist also in Nickel die Torsion stets positiv, in Eisen negativ bis zu einem Maximum, dann Null und entgegengesetzt, alles in Übereinstimmung mit Nagaokas Messungen (vgl. Fig. 11 l. c.).

In quantitativer Beziehung ziehen wir (bei *Nickel*) die Dilatationskurve desselben (Fig. 2 l. c.) zu Hilfe. Für dieselbe gilt

$$x_x = \int_0^H dH\, J_P(H, 0, 0, 0),$$

daher

$$\frac{dx_x}{dH} = J_P(H, 0, 0, 0).$$

Es wird also ein Maximum der Torsion vorhanden sein, wo die (x_x, H)-Kurve das stärkste Gefäll besitzt. In Fig. 2 (l. c. fällt die Kurve anfangs rasch längs der $(-x_x)$-Achse. Weil nun $(-x_x)$ von der Richtung der magnetisierenden Kraft nicht abhängt, so läßt sich schreiben

$$-x_x = a_2 H^2 + a_4 H^4.$$

Aus dem Diagramme 2 (bez. aus den direkt beobachteten Punkten) entnehme ich behufs Bestimmung von a_2, a_4 die Wertepaare $-x_x = 20 \times 10^{-6}$, $H = 48$ und $-x_x = 35{,}8 \times 10^{-6}$, $H = 196$ (allerdings mit Meßfehlern bezüglich der H bis viel-

leicht 5—10 Proz., da die Kurve für kleinere H stark zusammengedrängt ist). Hieraus bestimmt sich durch Rechnung der absolute Maximumwert der Neigung zu $dx_z/dH = 0{,}94.10^{-6}$, mit ihm für Stromdichte Eins das Maximum des Torsionswinkels zu 2,73″ für einen Zentimeter Drahtlänge. Laut Diagramm 11 (l. c.) beträgt für $i = 2{,}45$ Amp. und eine Drahtdicke von 0,833 mm die Maximaltorsion 140″ pro cm, was pro Stromdichte Eins den Winkel $\psi = 3{,}1''$ ergibt, in recht guter Übereinstimmung mit dem aus der Dilatation berechneten Werte 2,73″.

(Eingegangen 26. September 1903.)

2. *Über die Strahlung des Lichtbogens*[1]*;* *von Wilhelm Hallwachs.*

§ 1. Einleitung.

Die sichtbare Strahlung der Bogenlampe geht wesentlich vom Krater aus, nur außerordentlich wenig trägt zu ihr der Bogen selbst bei. Am schärfsten tritt diese Tatsache in der starken Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Richtung hervor: 40—50° unter die Horizontale sendet die Gleichstromlampe mit vertikalen Kohlen etwa 5—6 mal soviel Licht wie nach der Horizontalen. Unter diesen Umständen läßt sich über die Eigenschaften, z. B. das Strahlungsgesetz des Bogens selbst, des vielleicht jetzt physikalisch interessantesten Teiles der Bogenlampe, aus Beobachtungen der sichtbaren Strahlung nichts ermitteln.

Es fragt sich, ob für die ultraviolette Strahlung z. B. den Teil derselben, welcher lichtelektrisch am wirksamsten ist, und welcher kurz die lichtelektrische Strahlung heißen möge, die Verhältnisse ebenso liegen. Soweit ich mich durch die Literatur und mündliche unterrichten konnte, scheint die allgemeine Meinung dahin zu gehen, daß man bei lichtelektrischen Versuchen mit der Bogenlampe wegen der Abhängigkeit von der Richtung auf scharfe Orientierung sehen müsse, weil vom Krater her ein beträchtlicher Teil der ultravioletten Strahlung komme. Andererseits fand ich schon bei früheren Untersuchungen immer, daß die lichtelektrische Strahlung bei konstanter Stromstärke mit der Bogenlänge außerordentlich stark zunimmt, was anderen Beobachtern, obwohl ich mich nach Angaben darüber in der Literatur vergeblich bemüht habe, vermutlich auch aufgefallen ist. Es steht dies im vollkommenen Gegensatz zum Verhalten der sichtbaren Strahlung, welche,

1) Für die erfolgreiche Hilfe, welche mir Hr. Dr. W. Ziegler, jetzt in Santiago (Chile), bei dieser Arbeit geleistet hat, möchte ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

wenn man von sehr kleinen Bogenlängen absiecht, mit wachsender Bogenlänge bei konstanter Stromstärke nicht zu, sondern etwas abnimmt.[1])

Die nähere Untersuchung dieser Verhältnisse ergab nun, wie im folgenden dargelegt werden soll, daß die lichtelektrische Strahlung sozusagen ausschließlich vom Bogen geliefert wird, daß vom Krater her kein, oder schärfer kein die Versuchsfehler, d. h. wenige Prozente, überschreitender Betrag derselben kommt. Dieses Resultat liefert dann einerseits ein Mittel um ein Strahlungsgesetz des Bogens, d. h. die Abhängigkeit der lichtelektrischen Strahlungsintensität von Strom und Spannung, aufzusuchen, andererseits führt es eine beträchtliche Erleichterung für experimentelle Arbeiten, welche diese Strahlung des Bogens benutzen, herbei, weil eine scharfe Orientierung der exponierten Objekte gegen die Bogenlampe wegen der großen Unabhängigkeit der Lichtstärke von der Richtung unnötig wird. Alle folgenden Untersuchungen gelten für normal brennenden Bogen bei vertikalen Kohlen mit der Anode oben.

§ 2. Unabhängigkeit der lichtelektrischen Strahlung von der Richtung.

Zum Nachweis, daß die lichtelektrische Strahlung in weiten Grenzen unabhängig von der Richtung ist, diente folgende Anordnung. Zwei lichtelektrische Zellen standen in verschiedenen Orientierungen zur Lampe, z. B. die eine in der Horizontalen durch den Bogen, die andere weit unter der Horizontalen, so daß die auf sie fallenden Strahlen z. B. einen Winkel von 40° mit der Horizontalen bildeten. Nachdem das Verhältnis der lichtelektrischen Empfindlichkeit der beiden Zellen in diesen Stellungen ermittelt war, erhielten dieselben dicht nebeneinander Aufstellung, worauf wieder jenes Verhältnis bestimmt wurde. Der zweite Versuch liefert das Verhältnis der Zellenkonstanten, mit dessen Hilfe sich dann aus dem ersten das Verhältnis der Lichtstärken in den beiden Richtungen ergibt.

---

1) A. Blondel, Ecl. Electr. 10. p. 289, 496, 539. 1897. Mr. Ayrton in Mrs. Ayrton, „Electric Arc", London, The electrician p. 396. 1903; beides nach letzterem Werk zitiert.

Die verwendeten lichtelektrischen Zellen bestanden aus einem als Träger dienenden Zinkblech, 14 × 4 cm, auf dem parallel davor, in etwa 6—10 mm Abstand, ein etwa ebenso großes Drahtnetz mittels Schellacksäulchen befestigt war. Die auf ihren lichtelektrischen Verlust zu untersuchenden Platten ließen sich in diese Vorrichtung einschieben und auf dem Zinkblech flach liegend mit einer Schraube befestigen. Die Zelle hing dabei an einem am Zinkblech befestigten Schellackstab. Das Drahtnetz, auf welches die Strahlen der Lampe zunächst fielen, stand mit einer andererseits geerdeten Batterie kleiner Akkumulatoren von +280 Volt dauernd in Verbindung, während vom Zinkblech eine durch Schellackstützen isolierte Leitung zu einem Al-Elektroskop führte, dessen Hülle an Erde lag. Mittels Fernrohres wurde die Stellung der von hinten beleuchteten Blättchen auf einer in die Deckplatte des Elektroskops eingeätzten Teilung abgelesen. Nach Ableitung des Elektroskops bei abgeblendeter Bogenlampe gelangte die Zeit τ zur Beobachtung, welche vom Entfernen der Blende bis zum Anwachsen der Divergenz der Blättchen auf einen für alle Versuche gleichen Betrag, bestimmten Teilstrich des Elektroskops, verstrich. Dieser Betrag entsprach etwa $^2/_3$ der oben genannten Batteriespannung. Der reziproke Wert von τ gibt ein Maß für die Intensität der lichtelektrischen Strahlung der Bogenlampe.

Um die Beobachtungen nicht durch die raschen Änderungen unsicher zu machen, welche blanke Metallplatten hinsichtlich ihrer lichtelektrischen Empfindlichkeit erleiden, kamen in den Zellen Kupferoxydplatten[1]) zur Anwendung, welche, wie später gelegentlich gezeigt werden wird, verhältnismäßig konstant sind.

1) Auf die lichtelektrische Empfindlichkeit von CuO-Platten habe ich schon Götting. Nachr. 1889. Nr. 12; Wied. Ann. 37. p. 666, § 1. 1889 hingewiesen, um zu zeigen, daß die lichtelektrischen Erscheinungen nicht auf Oxydation und ähnliche chemische Ursachen zurückzuführen sind. Um die Mitte der 90er Jahre habe ich gelegentlich eine größere Anzahl von Versuchen ausgeführt, welche alle zeigten, daß die lichtelektrischen Erscheinungen keine sekundären durch chemische Ursachen veranlaßten Phänomene bilden, wie damals vielfach angenommen wurde. Nachdem auch konstatiert worden war, daß kein Zusammenhang mit der Wasserfallelektrizität bestand, wie Hr. Thomson gemeint hatte, bewegten sich meine Versuche in der Richtung, zu untersuchen, ob durch die ultra-

Die Bogenlampe war meistens eine Piette Križik-Differentiallampe von Schuckert. Um dieselbe, wie es die Versuche verlangten, auf möglichst feine Regulierung zu bringen, wurden die Sperrkegel mittels eines Korkes ausgehoben. Man muß dann allerdings in Kauf nehmen, daß die Lampe gelegentlich ins Pendeln kommt. Bei ausreichender Vorsicht läßt sich dies indessen genügend vermeiden und die Variationen der Spannung und damit der lichtelektrischen Strahlungsintensität bleiben viel kleiner wie beim Anlegen der für den gewöhnlichen Beleuchtungsgebrauch erforderlichen Sperrkegel. Die Lampe befand sich in einer großen Kiste, welche, mit nach außen führendem Abzugsrohr und entsprechendem Gegenloch versehen, den Austritt der Lampenprodukte in den Beobachtungsraum verhinderte. Im Laufe der Untersuchung ergab sich indessen, daß man wegen der Größe (700 m^3) und guten Ventilation des Beobachtungsraumes auf das Abzugsrohr verzichten konnte.

Den Strom empfing die Lampe von einer Akkumulatorenbatterie, welche von anderen Anschlüssen, um die Lampe vor jeder Störung zu bewahren, frei blieb. Die Lampenspannung wurde mit einem Drehspulengalvanometer (Siemens & Halske, Präzisionsinstrument), welches pro Volt 2 Skt. ergab, die Stromstärke mit einem Rapsschen Weicheiseninstrument laufend kontrolliert. Für gewöhnlich arbeitete man mit etwa 20 Amp., 49 Volt, 16 mm Docht- und 11 mm Vollkohle, die letzteren meist von Gebrüder Siemens. Die Zentrierung der Kohlen geschah mit größter Sorgfalt und die Beobachtungen begannen erst dann, wenn die Kohlen gut eingebrannt waren, d. h. der Krater fehlerfreie Ausbildung gewonnen hatte, der Bogen symmetrisch saß und die negative Kohle keine verlängerte Spitze aufwies.

---

violette Belichtung irgend eine Strahlung ausgelöst werde. Durch die Fülle der Amtsgeschäfte in meiner früheren elektrotechnischen Professur nur selten zu eigener Arbeit frei, hoffte ich die Versuche nach meinem Wiedereintritt in die Physik abschließen zu können. Diese Hoffnung wurde durch die schönen Untersuchungen des Hrn. Lenard gegenstandslos. Das frühere Material zu veröffentlichen hat jetzt keinen Zweck mehr. Bei allen diesen Untersuchungen hat mir die im Vergleich zu anderen Substanzen verhältnismäßig große Konstanz des CuO gute Dienste geleistet.

Mit der geschilderten Anordnung gelangten folgende Versuche zur Ausführung.

α) Vergleich der horizontalen mit der unter 40° gegen die Horizontale geneigten Strahlung.

Zwei lichtelektrische Zellen I und II waren so aufgehängt, daß ihre Mittelpunkte von einer vom Bogen aus um 40° unter die Horizontale geneigten Geraden getroffen wurden. Die beiden Zellen hingen direkt nebeneinander, der Abstand ihrer Mittelpunkte vom Bogen betrug 90 cm. Durch den geringen Abstand von Platte und Netz bei den Zellen war eine merkbare gegenseitige Beeinflussung derselben vermieden, was Hilfsversuche bestätigten.

Von zwei CuO-Platten g und h, kam erst h nach I, g nach II, wobei die beobachteten Ladungszeiten τ (vgl. p. 40) h^u_I und g^u_{II} heißen sollen. Der Index u weist darauf hin, daß die Platten 40° unter der Horizontalen hingen. Sodann wurden die Platten vertauscht und die Ladungszeiten h^u_{II} und g^u_I erhalten. Zunächst möge ein Beispiel solcher Beobachtungen hier ausführlich folgen, zusammen mit den gleichzeitig abgelesenen Spannungen P und Stromstärken i:

Tabelle 1.

P Volt	i Amp.	h^u_I sec	g^u_{II} sec	$\frac{h^u_I}{g^u_{II}}$	P Volt	i Amp.	g^u_I sec	h^u_{II} sec	$\frac{g^u_I}{h^u_{II}}$
50,0	19,2	33,5	45	0,745	49,2	19,0	34	45	0,757
49,5	18,9				50,2	18,5			
50,5	18,8	32	44	0,726	49.8	18,5	34,5	46	0,750
50,0	19,0				50,0	18,8			
50,2	18,8	32	45	0,711	50,5	18,5	35	47	0,745
50,5	18,5				49,2	19,5			
Mittel: $\frac{h^u_I}{g^u_{II}} = 0{,}727$; $\frac{g^u_I}{h^u_{II}} = 0{,}752$					50,5	18,5	34	45	0,757
					50,8	18,8			

Nach diesen Versuchen wurde Zelle I nahezu in der Horizontalen durch den Lichtbogen (5° Neigung unter die Horizontale blieb noch) wieder in 90 cm Abstand mit ihren

Platten vertikal aufgestellt, während II in der vorigen Lage verblieb. Es ergaben sich dann Ladungszeiten g_I^o und h_{II}^u, bez. nach Vertauschung der Platten: h_I^o und g_{II}^u und nach abermaliger Vertauschung wieder g_I^o und h_{II}^u. Die Tab. 2 gibt die gewonnenen Werte.

Tabelle 2.

P Volt	i Amp.	g_I^o sec	h_{II}^u sec	$\frac{g_I^o}{h_{II}^u}$	P Volt	i Amp.	g_I^o sec	h_{II}^u sec	$\frac{g_I^o}{h_{II}^u}$
48,8 49,0	19,5 19,8	30	50	0,600	50,0 49,8	19,2 19,0	30	52	0,577
49,0 49,5	19,5 19,5	29	48	0,604	49,8 50,0	18,5 19,0	29,5	50	0,590
49,0 49,8	19,5 19,2	29	48	0,604	50,0 50,2	19,0 19,0	29,5	50	0,590
		h_I^o	g_{II}^u	$\frac{h_I^o}{g_{II}^u}$	50,0 50,5	18,8 19,0	30	51,5	0,582
49,5 49,8	19,2 19 0	31	55	0,564					
49,6 50,0	19 0 19 2	29	51,5	0,562					
49,9 50,1	19,5 19,5	30	52,5	0,572					

Mittel
$g_I^o : h_{II}^u = 0{,}603$
$h_I^o : g_{II}^u = 0{,}566$
$g_I^o : h_{II}^u = 0{,}585$

Zur Berechnung von h_I^u/h_I^o sowie g_I^u/g_I^o sind nicht die Werte der einzelnen dieser Größen aus den verschiedenen Tabellen miteinander zu kombinieren, sondern, um die Schwankungen des Lichtes zu eliminieren, die am Schluß der Tabellen angegebenen Verhältniszahlen. Es ergibt sich so, wenn die beiden Werte g_I^o/h_{II}^u der Tabelle 2 noch zu gemeinsamem Mittel vereinigt werden:

$$\left.\begin{aligned} h_I^u : h_I^o &= \frac{0{,}727}{0{,}566} = 1{,}284 \\ g_I^u : g_I^o &= \frac{0{,}752}{0{,}594} = 1{,}266 \end{aligned}\right\} \text{Mittel: } 1{,}275.$$

Um hieraus das Verhältnis der lichtelektrischen Strahlungsintensitäten $J_{40°}$ und $J_{5°}$ zu gewinnen, ist zu berücksichtigen, daß der mittlere Inzidenzwinkel der Strahlung, da die Platten vertikal hingen, bei der unteren Platte 40°, bei der oberen 5° betrug, im übrigen die Intensitäten den Entladungszeiten umgekehrt proportional sind, so daß

$$\frac{J_{40} \cdot \cos 40}{J_5 \cdot \cos 5} = \frac{1}{1{,}275},$$

woraus folgt

$$J_{40°} = 1{,}02\ J_{5°}.$$

Unter Berücksichtigung der einige Prozente betragenden Fehlergrenze heißt dies, daß *in zwei Richtungen, in denen die Intensitäten der sichtbaren Strahlung etwa im Verhältnis 5:1 stehen, die der lichtelektrischen Strahlung keinen nachweisbaren Unterschied aufweisen.* Da die sichtbare Strahlung zu etwa $^9/_{10}$ oder mehr vom Krater ausgeht, folgt, daß die lichtelektrische jedenfalls nur in sehr geringem Betrag vom Krater her kommt.

Nebenbei möge darauf hingewiesen werden, daß die Methode der Vertauschung der Platten, wie sie z. B. bei der obigen Anordnung verwendet ist, ermöglicht sowohl die Empfindlichkeit der Platten unabhängig von den Schwankungen des Lichtes, als auch die Konstanten der Zellen unabhängig von den speziellen Platten miteinander zu vergleichen. Seien g, h die Ladungszeiten für den Fall, daß die Platten in einer Normalzelle, deren Empfindlichkeit 1 gesetzt wird, stecken, während die darauf fallende Strahlung einen bestimmten Wert J hat, seien ferner c_I, c_{II} Apparatkonstanten, und zwar die Ladungszeiten, welche sich mit den betreffenden Apparaten ergeben, wenn diese eine Platte, die in der Normalzelle bei der Strahlungsintensität J die Ladungsdauer 1 ergiebt, enthalten, dann ist $g_I = gc_I$; $g_{II} = gc_{II}$; $h_I = hc_I$; $h_{II} = hc_{II}$. Bei den Versuchen wird g_{II} und h_I gleichzeitig ermittelt, ebenso g_{II} und h_I, so daß die Verhältnisse g_I/h_{II} und h_I/g_{II} unabhängig von Schwankungen der Lichtstärke sind. Aus den obigen Gleichungen ergibt sich nun:

$$\frac{g}{h} = \sqrt{\frac{g_I}{h_{II}} \cdot \frac{g_{II}}{h_I}} \text{ und } \frac{c_I}{h_{II}} = \sqrt{\frac{g_I}{h_{II}} \frac{h_I}{g_{II}}}.$$

Auf diesem Weg liefern die Tabellen 1 und 2 $g/h = 1{,}017$ bez. 1,024. Die Übereinstimmung beider Werte bestätigt die Brauchbarkeit der Beobachtungen. Für c_I/c_{II} ergibt Tabelle 1 den Wert 0,740. Wenn es erforderlich ist, lassen sich die Konstanten natürlich durch Zuschalten von Kapazität oder geeignete Wahl der Endpotentiale abgleichen.

Bei einer 4 Monate später vorgenommenen Wiederholung der vorigen Versuche wurde der schräge Einfall der Strahlen auf die untere Platte vermieden, letztere nahezu senkrecht zu denselben orientiert. Der noch bleibende Inzidenzwinkel betrug 5,5°. Die Platte der oberen Zelle stand normal zur Strahlung. Die Beobachtung der Ladungszeiten lieferte folgende Werte (Sekunden):

Tabelle 3.

g^o_{II}	h^u_I	g^o_{II}/h^u_I	h^o_{II}	g^u_I	h^o_{II}/g^u_I
127	123	1,033	129	120	1,075
121	119	1,017	125	118	1,059
	Mittel:	1,025			1,067

Hieraus folgt:

$$c^o_{II}/c^u_I = \sqrt{1{,}025 \,.\, 1{,}067} = 1{,}046.$$

Das Verhältnis c^o_{II}/c^o_I ergab sich aus zwei Versuchsreihen, welche einige Tage vor- bez. nachher stattfanden, zu 1,045 bez. 1,071; Mittel 1,058,[1]) so daß

$$c^u_I/c^o_I = 1{,}058/1{,}046 = 1{,}012\,,$$

und da

$$J_0/J_{40}\ \cos\ 5{,}5^0 = c^u_I/c^o_I\,,$$

so folgt

$$J_{40^0} = 0{,}99\ J_{0^0}\,,$$

welches Ergebnis mit dem der ersten Beobachtungsreihe bestens übereinstimmt.

β) Strahlung über und unter die Kraterebene.

Das Vorige wurde nun durch einige Versuche ergänzt. Bei dem ersten derselben lag zunächst der obere Rand der

1) Die Zellen waren inzwischen abgeglichen worden.

bestrahlten Platten noch ein wenig unterhalb der Kraterebene, so daß von allen Punkten der wie immer 90 cm entfernten Platten aus noch ein kleiner Teil des Kraters sichtbar blieb. Zelle II behielt diese Stellung dauernd bei, während I für einen weiteren Versuch 12 cm höher zu stehen kam, so daß der Mittelpunkt der bestrahlten Platte 4,4 cm oberhalb der Horizontalebene durch den Krater lag und ihr unterer Rand nur noch 1,8 cm unter die letztere hinabreichte. Tabelle 4 gibt die erhaltenen Ladungszeiten und zwar bedeutet g_I diejenige bei der tieferen, g_I' die bei der höheren Lage von I, h_{II} die von II.

Tabelle 4.

h_{II}	g_I'	h_{II}	g_I	h_{II}	g_I'
42	25,5	42	25	42	25
42	25,5	41,5	25	42	25,5
41	25	42	25	42	25,5
42,5	26	—	—	—	—

Hieraus ergibt sich $g_I'/h_{II} = 0{,}609$ bez. 0,601, im Mittel 0,605, und $g_I/h_{II} = 0{,}597$, woraus folgt

$$g_I' = 1{,}01\, g_I .$$

Es zeigt sich kein merkbarer Unterschied der Strahlung für die beiden Lagen, woraus mit noch größerer Sicherheit hervorgeht, daß vom Krater kein merkbarer Teil der lichtelektrischen Strahlung kommt. Was die Zahlenwerte der Tabelle 4 betrifft, so muß darauf hingewiesen werden, daß eine so große Übereinstimmung, wie sie dieselben zeigen, nur ausnahmsweise zu erzielen war; meist variierte die Stärke der Strahlung viel beträchtlicher.

Bei einer 4 Monate späteren Wiederholung der letzten Versuche wurde mit einer bis auf einen schmalen Horizontalspalt abgeblendeten Linse, welche in der Nähe des Ortes aufgestellt war, an welchen die Zellen kommen sollten, ein Bild des Lichtbogens entworfen. Durch vertikales Verschieben der Linse, bis gerade eben der letzte Saum des Kraters auf dem Bild verschwand, ließ sich dann die Stelle aufsuchen, welche eben nicht mehr von Kraterstrahlen getroffen werden konnte. Die Zellen erhielten dann dicht vor der Linse ihre Aufstellung

und zwar Zelle I stets mit ihrem oberen, Zelle II erst mit ihrem oberen, dann mit ihrem unteren Rand gerade vor dem Linsenspalt. Auf diese Weise ließ sich schärfer bewirken, daß in der letzten Lage Zelle II von Kraterstrahlen gerade eben nicht mehr getroffen werden konnte. Aus den beobachteten Ladungszeiten ergab sich:

$$h'_{II} = 1{,}00\ h_{II}$$

in bester Übereinstimmung mit dem vorigen Resultat.

Als dann die Platte II noch etwa 1 cm höher gerückt wurde, zeigte sich eine Abnahme der Strahlung um 6 Proz. Eine Abnahme nach oben hin wird zum Teil dadurch bedingt, daß das verhältnismäßig dicke Ende der oberen, positiven Kohle mit der Erhebung der Strahlrichtung über die Horizontale beträchtliche Teile des Bogens abblendet. Bei Neigung unter die Horizontale ist eine solche Abblendung, welche dort durch die negative Kohle bewirkt werden müßte, wegen der Zuspitzung der letzteren, auch wegen ihrer kleineren Dicke nur gering, wobei noch hinzu kommt, daß der Bogen selbst gegen die negative Kohle hin sehr dünn wird. So erhalten Orte in Richtungen, welche selbst 40° unter die Horizontale geneigt sind, Strahlen noch fast von allen Teilen des Bogens.

Diese Erklärung reicht indessen quantitativ nicht aus. Der quantitativ beträchtliche Unterschied zwischen der Abnahme der Strahlung nach oben und der Abnahme nach unten hin macht vielmehr wahrscheinlich, daß die Strahlung des Bogens von der positiven nach der negativen Kohle hin kleiner wird. Wenn also die in diesem Paragraphen besprochenen Versuche den Nachweis liefern, daß die lichtelektrische Strahlung nicht vom Krater her kommt, so bleibt noch zu untersuchen, wie dieselbe auf den Bogen verteilt ist. Über diesbezügliche Versuche wird im § 4 berichtet werden.

§ 3. Grundzüge eines Strahlungsgesetzes des Lichtbogens.

Nachdem die lichtelektrische Strahlung als spezifische Bogenstrahlung erwiesen ist, erheischt die Untersuchung der Abhängigkeit der Strahlungsintensität von Spannung und Strom, welche sich eventuell als Strahlungsgesetz des Bogens ansprechen lassen wird, besonderes Interesse. Die Kenntnis

dieser Beziehung würde auch bei lichtelektrischen Arbeiten die Reduktion der Lichtstärken auf bestimmten Strom und Spannung gestatten, sowie Aussicht für Aufklärungen über die Vorgänge im Lichtbogen bieten.

Ganz im Gegensatz zur sichtbaren Strahlung, welche, abgesehen von kurzen Bögen, bei denen die Beschattung durch die Kohlen eine zu bedeutende Rolle spielt, von der Spannung nur in geringem Maß abhängig ist, tritt bei der lichtelektrischen Strahlung schon nach meinen früheren gelegentlichen Erfahrungen die Abhängigkeit von der Elektroden- oder besser von der Bogenspannung stark hervor.

α) **Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Spannung.**

Zunächst wurde daher bei möglichster Konstanthaltung der Stromstärke die Spannung variiert. Dies ließ sich mit einer Hauptstromlampe ausführen, und zwar kam eine der in physikalischen Instituten überall verbreiteten, älteren Hefner-Alteneckschen Kontaktlampen zur Anwendung. Aufstellen der letzteren in Vaselinöl, so daß die Luftdämpfungsflügel ihre Bewegung in dieser Flüssigkeit ausführen mußten, und Anbringen eines genügenden Kompensationsgewichtes für den oberen Kohlenhalter verfeinerten die Regulierung so, daß sie derjenigen der sonst benutzten, oben erwähnten Piette-Krifik-Lampe fast gleichkam. Die Variationen der Stromstärke hielten sich bei 20 Amp. Strom innerhalb eines Ampers.

Zuerst wurde die Strahlungsintensität bei Spannungen in der unmittelbaren Nähe der für Beleuchtungszwecke bei etwa 48 Volt liegenden Gebrauchsklemmspannung der Lampe untersucht, weil gerade in diesem Intervall die Zunahme der Strahlung mit der Spannung ganz besonders rasch zu sein schien. Die Regulierung der Lampe war dabei auf 20,5 Amp. eingestellt. Da es einiger Zeit bedurfte, bis die Kohlen genügend einbrannten und die Strahlung verschiedener Kohlen selbst der nämlichen Fabrikation nicht unbeträchtlich voneinander abweichen, so gelangte jede Spannung gesondert zur Untersuchung, indem die Beobachtung der Ladungszeit bei derselben zwischen zwei Beobachtungssätze bei 48 Volt gelagert wurde. Auf diese Weise war man unabhängig vom Kohlenwechsel und konnte die Entladungszeiten bei den einzelnen Spannungen

durch Reduktion auf den für 48 Volt erhaltenen Mittelwert miteinander vergleichbar machen.

Die folgende Tabelle 5 gibt zunächst als Beispiel für den Verlauf der Beobachtungen im einzelnen zwei vollständige Beobachtungssätze. P ist die Spannung in Volt, τ_1 und τ_2 sind die am Elektroskop beobachteten Ladungszeiten zweier lichtelektrischer Zellen; die Werte von P bilden die Umkehrpunkte des Spannungsmessers während der Bestimmung von τ. Im Beobachtungssatz für $P = 46{,}0$ Volt traten bei der langen Dauer von τ_2 mehrere Umkehrpunkte ein, wodurch sich die Striche in der Tabelle erklären. In die Ermittelung der Werte teilten sich zwei Beobachter.

Tabelle 5.

P		τ_1	τ_2	P		τ_1	τ_2	P		τ_1	τ_2
48,3	47,9	17,5	36	45,8	46,4	31	73,5	48,2	47,8	18,5	40
48,4	47,9	17	36,5	45,5	46,2	—	—	48,0	48,2	18	40
47,9	48,3	17,5	39,5	45,7	46,2	31	72	48,1	48,3	17,5	39,5
47,8	48,2	17,5	39,5	46,2	45,8	30	70	47,8	48,5	17,5	39,5
47,8	48,2	17,5	40	46,1	45,8	—	—	47,8	48,2	18	40,5
47,8	48,3	17,5	40	45,6	46,2	31,5	72,5	—	—	—	—
—	—	—	—	45,7	46,2	—	—	—	—	—	—
Mittel	48,1	17,4	39,2	46,0		30,9	72,0	48,1		17,9	39,9
48,1	47,7	20	41	48,9	49,3	17	35	47,9	48,2	19	41
47,9	48,5	18	37	48,7	49,2	17	37	47,8	48,1	19,5	42
47,9	48,4	18	37	49,2	48,7	17,5	37	47,9	48,2	20	42
47,9	48,3	18	38	48,7	49,2	17	37	—	—	—	—
48,0	48,6	17,5	37	—	—	—	—	—	—	—	—
48,2	47,7	19	40	—	—	—	—	—	—	—	—
47,7	48,1	19	42	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	48,1	18,5	38,9	49,0		17,1	36,5	48,0		19,5	41,7

Diese Tabelle liefert eine Übersicht über die erreichbare Genauigkeit. Die Anordnung gestattete die Zeiten etwa auf $^1/_2$ Sek. genau festzustellen: eine größere Genauigkeit hätte wegen der unvermeidlichen Intensitätsschwankungen keinen Zweck gehabt. Andererseits zeigt die Tabelle indes auch, daß die bei aller Sorgfalt im Zentrieren der Kohlen mit einer gut in Stand gesetzten Lampe und besten Kohlen erzielbare Konstanz nicht unterschätzt zu werden braucht.

Die folgende Tabelle 6 enthält eine Zusammenstellung der Schlußresultate der nach dem Beispiel der Tabelle 5 ausgeführten Beobachtungssätze. Dabei wurden die bei den verschiedenen Spannungen gefundenen Werte für τ auf gleiche Verhältnisse reduziert, indem man sie mit dem Verhältnis des Mittels aller für 48 Volt gefundenen τ zu dem zum jeweiligen Satz gehörigen Wert für 48 Volt multiplizierte.

Tabelle 6.

$i = 20{,}5$ Amp.

P	50,8	50,0	49,0	48,0	47,0	46,0
τ_1	12,5	13,5	16,1	17,9	20,5	31,3
τ_2	27,0	29,5	35,1	38,8	45,4	70,6

Unter 46 Volt mit der Spannung herabzugehen hatte keinen Zweck, da schon bei 45 Volt die Strahlung sehr inkonstant wird, was mit dem Kleinwerden des Bogens zusammenhängt. Vor der in Tabelle 6 in ihren Resultaten angegebenen Beobachtungsreihe waren schon 2 andere, weniger umfangreiche ausgeführt worden (Platte 2 war damals noch empfindlicher wie bei Tabelle 6); das Ergebnis derselben, und zwar der Einzelwerte der beiden Reihen zum Mittel vereinigt, enthält Tabelle 7.

Tabelle 7.

$i = 20{,}5$ Amp.

P	50,0	49,0	47,9	47,0	46,0
τ_1	13,9	15,9	19,3	21,8	32,0
τ_2	26,2	28,5	35,4	41,2	57,4

Aus den Werten der beiden letzten Tabellen ist zu schließen, daß die Strahlungsintensität jedenfalls nicht mit der Gesamtspannung und damit mit der gesamten zugeführten Energie in einfacher Beziehung steht. Der in § 2 geführte Nachweis, daß die Strahlung vom Bogen ausgeht, weist darauf hin, zu untersuchen, ob ihre Intensität mit dem auf den Bogen entfallenden Teil der Spannung, den wir mit $p - p_0$ bezeichnen wollen, einen einfachen Zusammenhang besitzt; deshalb waren auch für die gerade besprochenen ersten Versuchsreihen Spannungen in der Nähe von p_0 gewählt worden. Proportional

mit $p - p_0$, d. h. mit der dem Bogen zugeführten Energie, ist die Intensität, wie die Überprüfung der Tabellenwerte (6 und 7) ergibt, keinesfalls, indes geht sie sehr nahezu proportional mit der Wurzel aus $p - p_0$. Aus dem Mittel der beiden in Tabelle 6 und 7 gegebenen Reihen fand sich, daß, wenn man $p_0 = 44{,}7$ nimmt, die $\sqrt{p - p_0}$ als Funktion von $1/\tau$ graphisch dargestellt, sehr nahezu eine Gerade liefert.

Vor weiterer Verfolgung der Möglichkeit dieser Darstellung gelangten nun Versuche mit stärkerer Variation der Spannung zur Ausführung. Die Möglichkeit der Ausdehnung des Intervalles beschränkte sich etwa anf das Gebiet von 46—70 Volt: an der oberen Grenze ist es schon äußerst schwierig, den Bogen während einer Zeit, wie sie das richtige Einbrennen der Kohlen erfordert, vor dem Wandern zu bewahren, an der unteren Grenze fangen bereits die Unregelmäßigkeiten der Kohlenränder an, den Öffnungswinkel des klein gewordenen Bogens merklich zu beeinflussen. Das Ergebnis der erwähnten Versuche enthält Tabelle 8, in welcher die Ladungszeiten wegen geänderter Platten mit τ_1' und τ_2' bezeichnet sind.

Tabelle 8.

P	51,0	54,6	60,7	65,7	52,5
i	20,1	20,8	20,1	21,3	20,4
τ_1'	43	30	23	19	35
τ_2'	69	47,5	36,5	31	56

Um auch für diese Versuche mit höheren Spannungen, bei welchen übrigens, da die Siemenslampe damals anderweitige Verwendung hatte, die Schuckertlampe gebraucht wurde, ein Urteil über den Verlauf im einzelnen zu ermöglichen, sind in der Tabelle 9 die Einzelablesungen bei der höchsten der benutzten Spannungen, bei welcher die Konstanthaltung am schwierigsten war, aufgeführt. Die Stromstärken i mußten hier mit notiert werden, weil die Lampe als Differentiallampe nicht auf bestimmtem Strom reguliert. Hinsichtlich der Spannungsverluste in den Lampenteilen unterschieden sich die beiden Lampen nicht wesentlich.[1])

1) Eine schärfere Berücksichtigung der Spannungsverluste behalte ich mir für weitere Beobachtungen vor.

Tabelle 9.

P			i			τ_1'	τ_2'
64,5	65,2	66,0	22,5	21,0	21,5	19	31
66,0	66,2	66,0	21,5	21,6	22,0	18	30
66,0	65,8	64,8	21,0	21,5	21,0	18	29,5
66,1	66,0	66,2	20,0	20,5	21,0	20	34

Für die Beobachtungen der Tabelle 8 sowohl, als auch für die zu Mittelwerten vereinigten der Tabellen 6 und 7 gibt die Fig. 1 eine graphische Darstellung, bei welcher zu den τ als Abszissen die Werte $1/\sqrt{p - 44{,}7}$ die Ordinaten bilden. Diese Darstellung zeigt, daß zwischen letzterem Ausdruck und der der reziproken Strahlungsintensität proportionalen Zeit τ eine lineare Beziehung besteht. Dabei laufen die Geraden nicht durch Null, es lassen sich aber, wie aus der Figur ersichtlich, die für die vier verschiedenen Platten gültigen Geraden unter Berücksichtigung der hier möglichen Genauigkeit durch einen Punkt führen, für dessen Koordinaten aus der Figur unter Hinzunahme einiger Hilfsrechnungen $\tau = 0$ und $1/\sqrt{p - 44{,}7} = 0{,}058$ erhalten wurde. Bezeichnen daher τ_{10}, τ_{20} etc., allgemein τ_0, Plattenkonstanten, so ist

$$(1) \qquad \frac{\tau}{\tau_0} + 0{,}058 = \frac{1}{\sqrt{p - 44{,}7}} \quad \text{(vgl. Anm. p. 59).}$$

Die beiden numerischen Konstanten sind für die verschiedenen Platten dieselben, die τ_0 sind von der Spannung unabhängig, natürlich aber der Empfindlichkeit der gewählten Versuchsanordnung umgekehrt proportional und von der Stromstärke abhängig.

β) Abhängigkeit von der Stromstärke.

Vorbehältlich der Überprüfung durch weitere Versuche, vgl. unten, stellt die vorige Formel die Abhängigkeit der Strahlung von der Spannung genügend dar, so daß zur Untersuchung der Abhängigkeit von der Stromstärke übergegangen werden kann. Bei den diesbezüglichen Versuchen wurde, weil keine Nebenschlußlampe, die auf konstante Spannung reguliert hätte, zur Verfügung stand, die vorher benutzte Differentiallampe genommen. Da sie auf konstanten Widerstand reguliert,

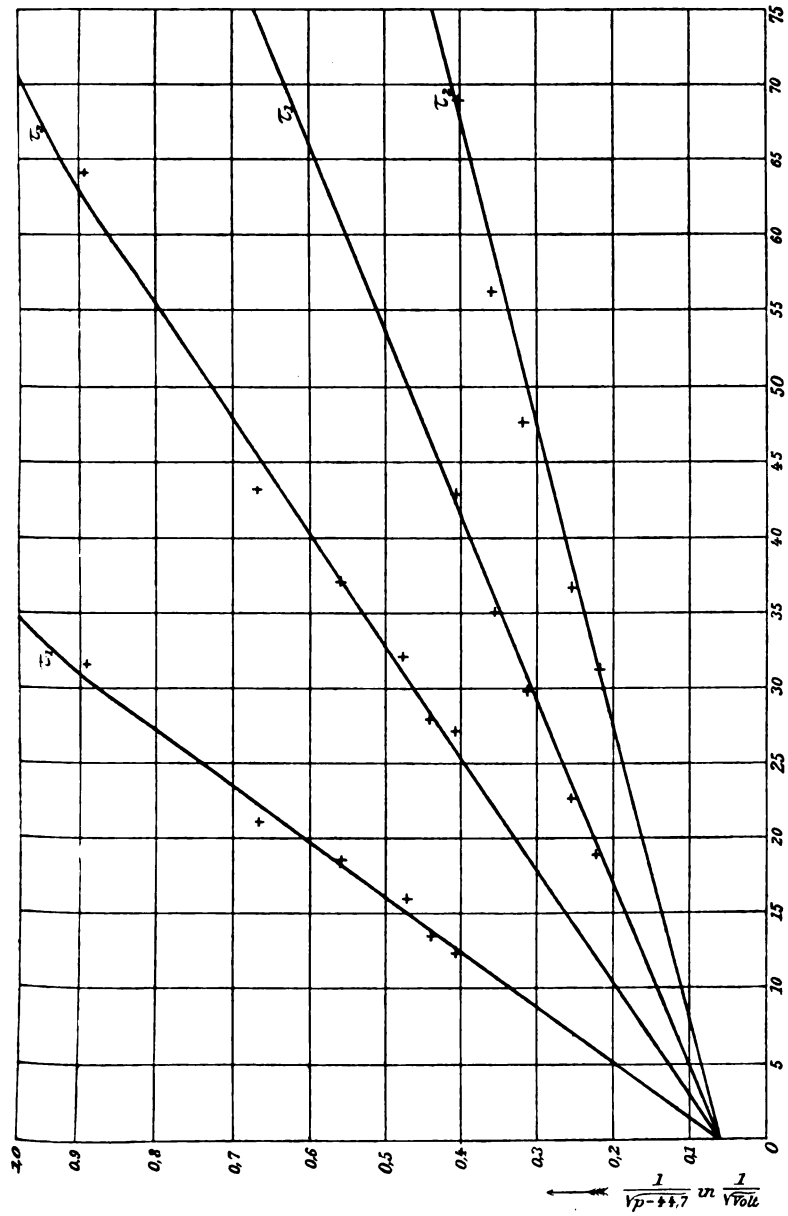

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$\frac{1}{\sqrt{p-44,7}}$ in $\frac{1}{\sqrt{Volt}}$
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
T in Sekunden
J_1
J_2
J_3

Fig. 1.

erhielt ihre Nebenschlußspule nach der dazu erforderlichen Lösung innerer Verbindungen einen separaten Vorschaltwiderstand, so daß man die Spannung unabhängig von den Stromvariationen konstant halten konnte. Einen derartigen Vorschaltwiderstand, der übrigens auch bei einem Teil der vorigen Versuche schon zur Anwendung kam, habe ich auf die Dauer auch bei anderen lichtelektrischen Versuchen für praktisch gefunden. Die Nebenschlußspule der Lampe vermehrt ja, wenn die Lampe wärmer wird, ihren Widerstand, weshalb die Spannung, auf welche die Lampe reguliert, wächst, da die Empfindlichkeit der Hauptstromspule dieselbe bleibt. Infolgedessen steigt die von der Spannung so sehr abhängige lichtelektrische Strahlungsintensität mit der Zeit an. Dem läßt sich durch Einschaltung eines Widerstandes vor die Nebenschlußspule, den man mit dem weiteren Brennen der Lampe entsprechend verkleinert, abhelfen. Überdies wird dadurch ein schnelleres Einbrennen der Lampe ermöglicht. Es ist ferner zweckmäßig, die Nebenschlußspule bereits einige Zeit vor dem Anbrennen der Lampe unter Strom zu setzen, damit sie sich erwärmt, und so ihren Endwiderstand bei Beginn der Versuche schon möglichst erreicht hat. Den erwähnten Übelstand dadurch zu beseitigen, daß die Nebenschlußspule Konstantanwickelung oder dergl. erhält, läßt sich nach Anfrage bei der Fabrik leider nicht bewerkstelligen, weil der Raum für die erforderliche Ampèrewindungszahl fehlt.

Die Anordnung der Versuche zur Ermittelung der Abhängigkeit der Strahlung von der Stromstärke schloß sich der p. 48 angegebenen an. Die Spannung wurde in nächster Nähe von 55 Volt (54,7—55,5) gehalten und die Versuche zunächst mit Hilfe der Formel (1) p. 52 auf 55 Volt, sodann gemäß p. 50, da zwei verschiedene Kohlen nötig gewesen waren, auf gleiche Kohle reduziert. So ergaben sich die Werte der folgenden Tabelle.

Tabelle 10.

p = 55,0 Volt.

i		17,8	19,2	23,0	26,4
τ_e	beob.	45,5	41,5	33	27,5
	ber.	46	41,5	32,5	27,5
τ_d	beob.	74	64,5	51	43
	ber.	72,5	65	51	43

Die Versuche zeigen, daß bezüglich der Abhängigkeit von der Stromstärke die lichtelektrische Strahlung sich ganz analog verhält wie die sichtbare. Die berechneten Werte der Tabelle sind einfach mit Hilfe der Formel:

$$\tau\,(i - i_0) = c, \quad \text{wo } i_0 = 5{,}3 \tag{2}$$

berechnet, indem das Mittel der aus den einzelnen Versuchen hervorgehenden Werte von c durch die einzelnen Werte von $(i - 5{,}3)$ dividiert wurde. Die von Blondel gegebene Kurve für die Abhängigkeit der sichtbaren Lichtstärke von der Stromstärke[1]) bei konstanter Spannung fällt bis zu 10 Amp. herab ebenfalls mit einer Geraden sehr nahe zusammen, die auch auf einen entsprechenden Punkt der Abszisse, etwa 6 Amp., hinzielt. Unter 10 Amp. herab und namentlich bis zu kleinen Stromstärken von wenigen Ampèren hin reicht diese einfache Darstellung keineswegs aus. Auf diese kleinen Stromstärken kam es mir aber bei dieser Untersuchung weniger an, da dort die lichtelektrische Strahlung sehr schwach ist, und im Unterschied zu den größeren Stromstärken die Verhältnisse sich zu verwickeln scheinen. Auf ersteres deutet ja die obige Formel hin: wenn auch die Strahlung bei sehr kleinen Stromstärken nicht auf Null herabgeht, so schwächt sie sich doch außerordentlich ab. Dies bestätigen Versuche, welche mit einer Siemensschen Liliputlampe (ohne Glocke) ausgeführt wurden. Bei diesen ergab sich:

P	i	τ_e	τ_f
71	2,47	1390	1240
49,5	20,2	57,5	47,8

In der unteren Reihe sind unmittelbar vorher unter sonst gleichen Verhältnissen mit einer anderen Lampe angestellte Beobachtungen angegeben. Die Spannung der Liliputlampe schwankte unaufhörlich zwischen 67 und 75 Volt, die Stromstärke zwischen 2,34 und 2,65 Amp. Während der Zeitbeobachtung fanden 100 Ablesungen der Spannung und 40 der Stromstärke statt. Unter Berücksichtigung der Mängel der Isolation würden die Zeiten der oberen Reihe noch etwa

1) Vgl. H. Ayrton, The El. Arc., 1903. p. 367 bez. A. Blondel, Eclairage électrique 10. p. 498. 1897.

10 Proz. größer. Zieht man, was nach den weiter unten folgenden Versuchen als zulässig erachtet werden muß, die Formel (1) zur Berechnung der Zeiten τ heran, welche mit der Liliputlampe erhalten würden, wenn die Strahlung der Stromstärke direkt proportional wäre, so sollten dieselben 3,4 mal so groß werden wie bei 49,5 Volt und 20,2 Amp. Tatsächlich sind sie 24—26 mal so groß. Die Abnahme der Wirkung ist also etwa 7,5 mal so stark, als es sein sollte, wenn in der Formel (2) das Glied i_0 wegkäme. Das Einfügen dieses i_0, welches besagt, daß unter 5,3 Amp. keine im Vergleich zu der bei etwa 20 Amp. erhebliche Wirkung mehr vorhanden ist, rechtfertigt sich also. Zur Berechnung des vorläufigen Zahlenwertes von i_0 sind außer den Versuchen der Tab. 10 auch viele der anderen Versuche noch herangezogen worden.

Wenn man annimmt, daß die Bogenstrahlung von Teilchen ausgeht, welche ursprünglich im Krater im Zusammenhang mit der dort herrschenden hohen Temperatur gebildet worden sind, so findet die nahe gleichlaufende Abhängigkeit der sichtbaren und der lichtelektrischen Strahlung von der Stromstärke ihre Erklärung.

γ) Gleichzeitige Variation von Stromstärke und Spannung.

Drei weitere Versuchsreihen sollten sowohl zur ferneren Prüfung der Formeln dienen, als auch zur Feststellung, ob Strom und Spannung genügend unabhängig wirken, um Vereinigung der beiden Formeln zu gestatten in:

$$(3)\quad \tau_{p,i} = \frac{T_0}{i - 5{,}3}\left[\frac{1}{\sqrt{p - 44{,}7}} - 0{,}058\right] \text{ (vgl. Anm. p. 59).}$$

wo T_0 eine Konstante der Versuchsanordnung und jeweiligen Platte.

Zwei dieser Versuchsreihen fanden mit horizontaler, eine mit um 40° unter den Horizont geneigter Strahlung statt. Strom und Spannung wurden gleichzeitig variiert. In der die Ergebnisse enthaltenden Tab. 11 folgten die berechneten Werte der τ aus den unter den Reihen stehenden T_0, welche das Mittel der aus den Einzelbeobachtungen gewonnenen Werte dieser Größe sind, und Formel (3). In den beiden ersten Versuchsreihen kamen zwei, in der letzten nur eine Zelle zur Exposition.

Tabelle 11.

P	i	τ' beob.	τ' ber.	τ'' beob.	τ'' ber.
65,8	26,2	13	12,5	20	20
60,4	23,7	17	17	27,5	27,5
55,5	21,9	23	24	38,5	38,5
50,8	21,0	34	35,5	55	57
47,6	18,2	68,5	67	109	107
		$T_0' = 1610$		$T_0'' = 2580$	
70,4	27,7	10	11	16,5	17,5
65,8	26,7	18	18	21,5	21
52,5	20,4	35	34,5	56	56
51,0	20,1	43	40	69	65,5
		$T_{1\,0}' = 1730$		$T_{1\,0}'' = 2820$	
65,4	28,2	24	24,5		
66,5	22,5	32,5	32		
47,8	19,2	131	130		
47,9	15,3	175	175		
		$T_0 = 3500$			

Die Übereinstimmung der beobachteten mit den nach Formel (3) berechneten Werten ist so gut, wie sie in Anbetracht der erreichbaren Konstanz der Strahlung nur erwartet werden kann. Die Formel (3) stellt daher innerhalb des Intervalles von 46—70 Volt und 15—28 Amp. die lichtelektrische Strahlungsintensität in ihrer Abhängigkeit von Spannung und Strom vorläufig genügend dar. Eine Untersuchung darüber, ob die Formel auch bei noch größeren Stromstärken und Spannungen weiter anwendbar ist, führte bisher nicht zum Ziel, da die vorhandenen Mittel nicht ausreichten, den Bogen bei 40 Amp. und 80 Volt genügend konstant zu bekommen.

Das für das angegebene Intervall ermittelte Strahlungsgesetz hat inzwischen bei anderen lichtelektrischen Untersuchungen gute Dienste geleistet, indem es vielfach das zeitraubende Einbrennen des Bogens auf ganz bestimmten Strom und Spannung für solche Versuche, welche miteinander verglichen werden sollten, ersparte, da es die Möglichkeit der Reduktion der Strahlungsintensitäten aufeinander gewährt.

Das Zustandekommen der Formel (3) könnte unter anderem unter Umständen durch folgende Betrachtung erläutert werden. Man kann annehmen, daß die lichtelektrische Strahlung von Teilchen ausgeht, welche den Bogen durchlaufen und während dessen wesentlich in konstanter Weise strahlen. Sie werden ursprünglich am Krater entstanden sein, worauf schon oben p. 56 hingewiesen worden ist. Da der Krater nach den vorliegenden Untersuchungen[1]) konstante, von Strom und Spannung unabhängige Temperatur besitzt, so liegt die gemachte Annahme konstanter Strahlung der Teilchen nahe. Von diesen Teilchen soll weiter angenommen werden, daß ihr Transport durch den Bogen mit dem Stromphänomen verknüpft ist, und sie infolgedessen vom Eintritt in den Bogen ab sowohl Beschleunigung als auch bestimmte lichtelektrische Strahlungsintensität erhalten. Die Anzahl der Teilchen würde i proportional sein, wenn nicht schon die Kraterstrahlung derselben nicht proportional wäre (vgl. p. 55) und dadurch darauf hinwiese, daß die Ränder des Kraters durch die anliegenden Teile der positiven Kohle eine Abkühlung erfahren. Diesem Umstand läßt sich, wie erwähnt, in dem bei den vorliegenden Versuchen benutzten Intervall dadurch Rechnung tragen, daß man die sichtbare Strahlung dem Ausdruck $i - i_0$ proportional nimmt, was dann, gemäß dem im vorigen angenommenen Zusammenhang der lichtelektrisch strahlenden Teilchen mit dem Krater, auch für die lichtelektrische Strahlung gilt, so daß dieselbe zunächst $i - i_0$ proportional zu setzen ist.

Sie ist ferner der Dauer t des Aufenthaltes der Teilchen im Bogen proportional zu nehmen. Setzen wir voraus, daß die Teilchen mit der Geschwindigkeit Null in der Richtung des Bogens in diesen eintreten und im Bogengebiet die Beschleunigung b erhalten, während sich eventuell dieser Bewegung nur der Beschleunigung proportionale Widerstände entgegensetzen, so ist, wenn noch l die Bogenlänge bedeutet:

$$t = c\sqrt{\frac{l}{b}}.$$

Die mittlere Beschleunigung b kann in erster Annäherung konstant gesetzt werden, da für das von uns benutzte Intervall

1) Die Literatur vgl. H. Ayrton, l. c. p. 347.

die auf den Bogen entfallende Potentialdifferenz der Bogenlänge, soweit die Untersuchungen darüber reichen, sehr nahe proportional ist. Wir erhalten daher:

$$t = k\sqrt{P - P_0},$$

wo k eine Konstante ist, und für die Strahlungsintensität S würde sich ergeben:

$$S = C(i - i_0)\sqrt{P - P_0},$$

wo C eine andere Konstante. Dieser Ausdruck fällt mit dem experimentell gefundenen sehr nahe zusammen. Er ließe sich damit ganz in Einklang bringen, wenn ins Auge gefaßt wird, daß die Teilchen im allgemeinen nicht gerade, sondern gekrümmte Bahnen durchlaufen und sich demgemäß länger im Bogen aufhalten. Eine Korrektion hierfür in einfacher Form ergäbe sich unter Berücksichtigung dessen, daß der Einfluß bei kürzeren Bögen geringer ausfallen muß wie bei längeren, wenn man setzt:

$$t' = \frac{t}{1 - \gamma t},$$

wo t' die korrigierte mittlere Aufenthaltsdauer eines Teilchens im Bogen ist, und γ eine Konstante bedeutet. Hiermit fände sich dann unsere frühere Formel (3).[1]) Ob die Annahme, daß nur der Beschleunigung proportionale Widerstände sich der Bewegung der Teilchen eventuell entgegenstellen, zulässig ist, wird noch der Revision bedürfen, sie würde sich eventuell auf eine Mitführung des Mediums gründen lassen.

§ 4. Verteilung der Strahlung auf die einzelnen Teile des Bogens.

Aus der im Paragraph 2 festgestellten Unabhängigkeit der lichtelektrischen Strahlung von der Richtung wurde der Schluß gezogen, daß diese Strahlung vom Bogen herrühre. Um diesen Schluß einwandfrei zu machen und gleichzeitig zu sehen, ob die Strahlung nicht etwa auf einzelne Teile des

1) *Anm. bei der Korrektur.* Es hat sich inzwischen ergeben, daß die Berücksichtigung der Spannungsverluste das Glied 0,058 p. 56 Formel (3) wahrscheinlich zum Verschwinden bringt. Hierzu sind weitere Versuche im Gang, da bei den früheren jene Verluste nicht genügend genau und häufig bestimmt worden waren.

Bogens beschränkt sei, sondern sich auf den ganzen Bogen erstrecke und zwar in Konsequenz der am Schluß des vorigen Paragraphen entwickelten Anschauung mit abnehmender Stärke von der positiven nach der negativen Kohle hin, gelangten noch einige Versuche zur Ausführung, bei welchen eine Blende die Strahlung der einzelnen Bogenteile aussonderte.

Dabei wurde folgende Anordnung benutzt. Die Blende, ein Glimmerblatt, stand so dicht als angängig, etwa 1,5 cm, herangerückt mit horizontaler Kante vor dem vertikalen Bogen. Ihre Befestigung an einem durch Zahnstange und Trieb vertikal verschiebbaren Halter gestattete die Blende folgeweise so zu stellen, daß sie erst den Bogen frei ließ und ihn dann von der positiven Kohle her schrittweise abblendete. Auf gleicher Höhe mit dem Bogen in etwa 90 cm Abstand befand sich die vertikal nur 2 cm hohe, horizontal 12 cm lange lichtelektrische Zelle. Unter diesen Verhältnissen erhielten die verschiedenen Punkte der Zelle von bis auf verschwindende Beträge gleichen Bogenteilen Strahlung. Die Beobachtung der abgeblendeten Bogenteile gestattete eine möglichst nahe hinter der Zelle angebrachte Linse, welche bis auf zwei schmale, horizontale Spalten, gerade über und unter dem Rand der bestrahlten Platte, abgeblendet war und auf einen entfernt stehenden Schirm vom Bogen und der Glimmerblende ein etwa fünffach vergrößertes Bild entwarf. Auf demselben hatte gemäß der getroffenen Anordnung der Rand der Blende dieselbe Lage zum Bogen, wie für das von der Zelle direkt nach dem Bogen blickende Auge. Die Umrisse des Bogens und der Kohlen, sowie der Rand der Blende wurden auf dem Schirm mit Blei nachgefahren und so die Figuren 2 erhalten.

Die folgende Tabelle 12 liefert die Ergebnisse der mit dieser Anordnung angestellten Versuche. In der ersten Kolumne sind die Ladungszeiten τ enthalten, und zwar im allgemeinen je zwei Werte, da die Blende nach Erreichung ihrer höchsten Lage wieder zurückgeführt und bei den vorherigen Stellungen derselben je eine zweite Beobachtung ausgeführt wurde. Ihre Mittel $\bar{\tau}$ stehen in Kolumne 2. Die dritte Kolumne gibt die zugehörigen Mittelwerte der Stromstärke, die vierte die, soweit erforderlich, auf 19,5 Amp. reduzierten Werte von $\bar{\tau}$, die fünfte die der Strahlungsintensität s proportionalen

Werte $1000/\bar{\tau}_r$, die sechste die am Projektionsbild, und zwar von der Kathode ab gemessenen Längen l des nicht abgeblendeten Bogenteiles. Durch Subtraktion aufeinander folgender Werte von l bez. s ergaben sich die in Kolumne 7 und 8 ent-

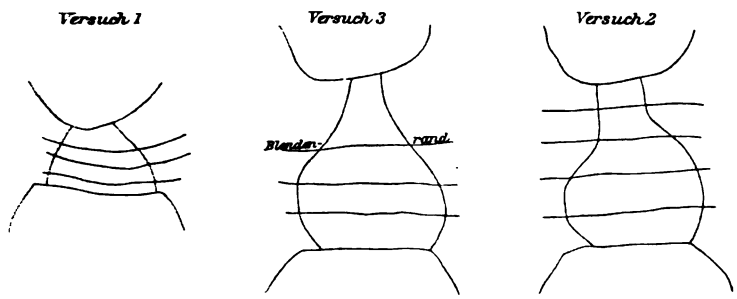


Fig. 2.

haltenen Längen l' der einzelnen Bogenschichten und der von ihnen ausgehenden Strahlungsintensitäten s', wobei die Werte in der Richtung Anode-Kathode aufeinander folgen. Aus Kolumne 9 ist das mittlere Strahlungsvermögen der einzelnen Schichten zu entnehmen.

Tabelle 12.

Versuch	t sec	$\bar{\tau}$ sec	i Amp.	$\bar{\tau}_r$ (19,5 A.)	$s = \frac{1000}{\bar{\tau}_r}$	l mm	l' mm	s'	$\frac{s'}{l'}$
1	17,5 19	18,2	19,65	18,4	54,9	27	4	19,4	4,8
	29 27,5	28,2	19,55	28,3	35,5	23	7	15,6	2,25
	50 50,5	50,2	19,5	50,2	19,9	16	7	11,3	1,61
	115	115	19,55	115	8,6	9	9	8,6	0,96
2	13 14	13,5	18,5	12,5	80	67	13,5	31,2	2,31
	22 21	21,5	18,4	20,5	48,8	53,5	13,5	23,2	1,72
	42,5 42	42,2	18,5	39	25,6	40	13	15,2	1,15
	102,5 106	104	18,8	96	10,4	27	13,5	6,3	0,47
	261	261	18,4	243	4,1	13,5	13,5	4,1	0,30
3	13 13	13	19,2	12,8	78	66,5	13,5	32,4	2,40
	23,5 22	22,8	19,0	21,9	45,7	53	13	19,4	1,49
	42,5 38,5	40,5	18,6	38,0	26,3	40	13,5	15,7	1,16
	99	99	18,8	94	10,6	26,5	26,5	10,6	0,40

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, daß der Bogen seiner ganzen Länge nach an der Strahlung teil nimmt und zwar im Einklang mit dem Schluß von § 3 von der Anode nach der Kathode hin mit abnehmender Stärke. Rückte man in Fortsetzung des Versuches 1, Tab. 12, die Blende so, daß sie die Anode und von dieser her den ganzen Bogen bedeckte und gerade eben die Kathode berührte, so ergaben sich 490 Sek. für τ, d. h. nicht ganz 4 Proz. der gesamten Strahlung kamen aus dem Kathodengebiet. Die Kathode ist also an der Strahlung nur minimal oder vielleicht auch gar nicht beteiligt, indem ja die strahlenden Partikelchen teilweise auch erst jenseits der durch den Blendenrand bezeichneten Berührungsebene der Kathode die letztere treffen.

Bekam im Anschluß an Versuch 2 die Blende eine solche Lage, daß sie die Kathode und von dieser her den Bogen fast ganz bedeckte und mit ihrem Rand die äußersten Spitzen der positiven Kohle berührte, wobei wegen der gerade vorhandenen Krümmung der Randprojektion noch eine kleine Spur des Bogens und, falls die Zelle etwa von einem äußersten Streifchen des Kraters noch bestrahlt werden konnte, auch dieses frei blieb, so betrug τ 149 Sek. Etwa 8 Proz. der Strahlung kamen also von dem noch frei bleibenden Teile. Da nun nach dem Verlauf von s'/l', wie er sich aus der Tabelle ergibt, die ersten 8 Proz. der Strahlung von einer nur ca. 0,4 mm dicken, der Anode anliegenden Bogenschicht kommen mußten, so viel aber etwa von der Blende ungefähr noch frei gelassen wurde, so folgt, daß auch die Anode an der lichtelektrischen Strahlung jedenfalls nur minimal beteiligt sein kann. Aus allem zusammengenommen ergibt sich, daß diese Strahlung vom Bogen ausgeht, die Elektroden dazu jedenfalls nur einen sehr kleinen, eventuell gar keinen Beitrag liefern, wodurch die früheren Schlüsse in dieser Richtung bestätigt werden.

Die Strahlung des 27 mm langen Bogens (Versuch 1, Tabelle 12) war 55, diejenige der ersten 27 bez. 26,5 mm des 67 bez. 66,5 mm langen Bogens (Versuch 2 und 3) 54 bez. 52. Die beiden Strahlungen ergaben sich also innerhalb der erzielten Genauigkeitsgrenzen als gleich, wodurch eine Konsequenz des am Schluß des § 3 Entwickelten ihre quantitative Bestätigung findet. Man könnte u. a. auch annehmen,

daß die Teilchen beim Durchlaufen des Bogens immer mehr an Strahlungsvermögen einbüßen, wäre dann aber, um der Formel (3) zu genügen, zu der Annahme gezwungen, daß das Strahlungsvermögen der Wurzel aus dem Abstand von der Anode umgekehrt proportional ist. Demgegenüber ist die oben entwickelte Anschauung doch so einfach, daß man sich einer weiteren Prüfung derselben, trotz mancher Bedenken, welche sich zur Zeit noch entgegenstellen, nicht wird entziehen können.

Vergleicht man mit der eben besprochenen Strahlung der ersten 27 mm diejenige der zweiten 27 mm, wofür Versuch 2 Beobachtungen enthält, so ist das Verhältnis

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{21{,}7}{54} = 0{,}40\,,$$

wonach sich das oben für den ganzen Bogen gefundene, angenäherte Wurzelgesetz auch für einzelne Abschnitte des Bogens bestätigt, da nach ihm $s_2/s_1 = \sqrt{2} - 1$ sein sollte.

Um eine derartige Vergleichung auf alle einzelnen Schichten ausdehnen zu können, sind in der folgenden Tabelle 13 die aus den Beobachtungen direkt durch Subtraktion gefundenen Werte s' (vgl. Tabelle 12) mit Werten s'' zusammengestellt, welche nach der Formel

$$s'' = C\left[\sqrt{l_e} - \sqrt{l_a}\right]$$

berechnet wurden, wo l_e und l_a die Strecken des Bogens von der Anode bis zum Ende bez. Anfang der betrachteten Schicht bedeuten. s' und s'' sollten annähernd gleich verlaufen und zwar nur annähernd: erstens, weil die Potentialdifferenzen der einzelnen Schichten nicht deren Dicke proportional zu sein brauchen, wenn auch die ganze Bogenlänge der gesamten auf den Bogen entfallenden Potentialdifferenz nahezu proportional ist, zweitens, weil die Werte l_e und l_a etwas unter der Zartheit des Blendenrandbildes litten, was sich wegen der in der Formel vorkommenden Differenz stärker geltend machen muß, drittens, wegen der in der Formel für s'' nicht berücksichtigten, im § 3 erwähnten Krümmung der Bahnen.

Tabelle 13.

Bogenstrecke	Versuch 1				Versuch 2					Versuch 3			
	0 bis 4	4 bis 11	11 bis 18	18 bis 27	0 bis 13,5	13,5 bis 27	27 bis 40	40 bis 53,5	53,5 bis 67	0 bis 13,5	13,5 bis 26,5	26,5 bis 40	40 bis 67
s'	19,4	15,6	11,3	8,6	31,2	23,2	15,2	6,3	4,1	32,4	19,4	15,7	10,6
s''	20,0	13,1	9,3	9,6	36,7	15,3	11,2	9,9	8,7	36,7	14,8	11,7	18,3

Allen drei Versuchen liegt derselbe Wert von C zugrunde, für den sich als bestes Mittel aus sämtlichen Versuchen 10,0 ergab. Unter Berücksichtigung des oben Gesagten ist der Anschluß der berechneten an die beobachteten Werte genügend. Nach den Zahlen der Tabelle scheinen die Geschwindigkeiten der Teilchen in der Nähe der Elektroden über, in der Mitte unter dem Wert zu liegen, welcher bei gleichförmiger Beschleunigung erhalten würde, beim langen Bogen tritt dies stärker hervor wie beim kurzen und an der Kathode stärker wie an der Anode. Die Annahme einer dementsprechenden Feldverteilung bietet keine Schwierigkeit, eventuell macht sich auch in der Nähe der Kathode die negative Entladung geltend.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß die Prüfung anderer Ansätze nicht zum Ziel führte; u. a. war z. B. zu prüfen, ob die Strahlung etwa dem Volumen v' der einzelnen Bogenschichten oder Bögen proportional wäre. Berechnete man die v' aus der Figur 2 unter Annahme des Bogens als Rotationskörper und bildete für alle Versuche die Werte s'/v', so variierten diese zwischen 0,19 und 1,21, so daß also keine Proportionalität besteht.

Bei der vorliegenden Untersuchung wurden als Anoden Dochtkohlen verwendet. Ob die strahlenden Teilchen wesentlich dem Docht entstammen, mögen spätere Versuche entscheiden.

Dresden, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, Oktober 1903.

(Eingegangen 17. Oktober 1903.)

3. *VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc.* von *G. Quincke.*[1])

§ 128. *β-Leimchromat. Hebermethode.* In einem Glastrog von 10 × 10 × 1 cm wurden zehn Lösungen von Kaliumbichromat vom spezifischen Gewicht 1,025 bis 1,00002 mit dem Prozentgehalt 4, 2, 1 ... bis 0,007 übereinander geschichtet. Ließ man aus einer Heberöffnung von 0,5 mm in der früher (§ 26, Fig. 17) geschilderten Weise eine Lösung mit 3,3 Proz. β-Leim (1,009) in die Kaliumbichromatlösung einfließen, so blieb der Strahl auf einer Strecke von 30 mm geradlinig, verdoppelte dabei durch Wasseraufnahme seinen Querschnitt und bildete dann Wellen- oder Schraubenlinien von 10—16 mm Ganghöhe. Bei seitlicher Belichtung mit Sonnenlicht oder elektrischem Bogenlicht wurde der gerade Strahl auf der belichteten Seite konkav und gleichsam vom Lichte abgestoßen. Dabei entstanden die Schraubengänge schon 20—25 mm unter der Heberöffnung. Der Strahl war von einer dünnen Haut von ölartigem Leimchromat bekleidet, deren Oberflächenspannung auf der konkaven Seite größer als auf der konvexen Seite war (wie bei den Versuchen § 46, Fig. 64 oder § 100, Fig. 136, *e*, *f* mit Leimtannat). Vermutlich bildete sich auf der durch Belichtung erwärmten Seite das Leimchromat schneller, als auf der kälteren Seite und die dickere Schicht von ölartigem Leimchromat hatte größere Oberflächenspannung als die dünnere.

Von den unteren Schraubengängen lösten sich in gleichen Abständen voneinander vertikale Fäden, mit Wirbelköpfen am

1) G. Quincke, Fortsetzung von Ann. d. Phys. 7. p. 57—96, 631—682, 701—744. 1902; 9. p. 1—43, 793—836, 969—1045. 1902; 10. p. 478—521, 673—703. 1903; 11. p. 54—95, 449—488, 1100—1120. 1903.

unteren Ende (ähnlich wie bei den Strahlen von Silberhaloidleim § 111, Fig. 163, *a*), die dann in den vier untersten Schichten mit 4—0,5 Proz. $K_2Cr_2O_7$ birnförmige Zellen, 5 bis 10 mm große Schaumkammern und wellenförmige dicke Schlieren bildeten, die sehr langsam zu Boden sanken. Bei Belichtung zeigten Schaumkammern und Schlieren keine Veränderung, doch wurden dadurch Luftblasen in den Schaumkanten sichtbar.

β-Leimlösung von 4 mal größerer Konzentration zeigte ähnliche Erscheinungen, aber etwas längere Schraubengänge des einfließenden Strahles.

Die Wände der Schaumkammern und die Schlieren stießen unter Winkeln von 120° oder auch anderen Winkeln zusammen und lösten sich später in der umgebenden Flüssigkeit.

§ 129. *Flockung von Leimchromatlösung durch Belichtung.* Eine warme wässerige Lösung von 10 Proz. Gelatine und 4 Proz. Kaliumbichromat wurde im Dunkeln hergestellt und bei roter Beleuchtung mit kaustischem Ammoniak versetzt, bis die orange Färbung eben zu verschwinden anfing und sich in gelb verwandelte. Ich werde im folgenden der Kürze wegen diese warme Lösung als „*Leimchromatlösung I*" bezeichnen, die gleiche Lösung ohne Ammoniakzusatz als „Leimbichromatlösung I". Kalt bildeten beide Lösungen steife Gallerte, welche in einem verkorkten Glasgefäß unter einer Blechkapsel vor Licht geschützt aufgehoben wurden.

Wurden einige Tropfen der Leimchromatlösung I im Dunkeln in ein Probierröhrchen mit kaltem Wasser gegossen und geschüttelt, so erschien die Flüssigkeit bei roter Beleuchtung klar. Durch das Schütteln bildeten sich viele kleine Luftblasen im Innern der Flüssigkeit; ein Beweis, daß sich durch das Schütteln neue unsichtbare Schaumwände ölartiger Flüssigkeit abscheiden. Bei Belichtung mit einem horizontalen Lichtbündel von elektrischem Bogenlicht in einem Probierröhrchen oder in einem Glastrog aus zusammengeschmolzenen Spiegelglasplatten von 6 × 3,5 × 1 cm entstanden Flocken auf Kreisen von 2—3 mm mit starker positiver Photodromie. Die Geschwindigkeit der Flocken, die auf das Licht zuwanderten, wuchs mit der Stärke der Belichtung und der Nähe der belichteten Trogwand. Die Flocken setzten sich nicht an der

Trogwand fest, hatten also keine flüssige Oberfläche mehr, und waren schnell erstarrt.

Nach 6 Stunden erschien die Flüssigkeit noch trübe. Das diffus normal zu dem einfallenden reflektierte Licht war noch, wie früher, parallel der Reflexionsebene polarisiert. Aber die positive Photodromie fehlte. Die schwebenden Teilchen erschienen ruhig und zeigten Flocken mit Schaumwänden von 120° und eingelagerten Blasen, aus denen sich doppeltbrechende Kristalle abgeschieden hatten. Einzelne Flocken klebten an der Glaswand.

Durch die Belichtung entsteht an der Oberfläche von ölartigem Leimchromat eine Flüssigkeit *C*, die sich auf der flüssigen Oberfläche ausbreitet. Die Ausbreitungswirbel führen die Teilchen und Flocken zusammen. Die Oberfläche der Teilchen bleibt so lange flüssig, daß die Teilchen noch zu Flocken zusammenkleben können, erstarrt dann aber schnell, so daß nur einzelne Flocken an der Glaswand kleben bleiben.

In verdünnterer Leimchromatlösung zeigten die schwebenden Teilchen noch nach 24 Stunden positive Photodromie.

Leimbichromatlösung I im Dunkeln in Wasser getropft und belichtet gab Flocken aus erstarrten Röhren mit abgerundeten Köpfen und negativer Doppelbrechung, mit optischer Achse normal zur Oberfläche (Fig. 171a).

Fig. 171a.

§ 130. *Leimchromatlösung auf Quecksilber eingetrocknet.* Ein Tropfen Leimchromatlösung I (mit 4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ und NH_3) wurde bei gedämpftem Tageslicht auf eine frische reine Quecksilberoberfläche in einer flachen Glasschale von 7 cm Durchmesser gebracht (wie sie für Pilzkulturen benutzt werden) und sofort mit einer großen Blechkappe bedeckt (vgl. Fig. 89, § 66).

Man benutzt hierfür Quecksilber, welches 14 Tage unter reiner Salzsäure gestanden hat, wiederholt mit heißem destillierten Wasser gewaschen und getrocknet ist. Die Glasschalen werden mit heißem Wasser gereinigt und im warmem Luftstrom über einer Gasflamme getrocknet. In die warme Glasschale läßt man durch einen Trichter von Schreibpapier mit einer Öffnung von 1 mm Durchmesser das Quecksilber einlaufen und bedeckt es sofort mit dem übergreifenden Deckel.

Ein Wassertropfen breitet sich auf einer solchen frischen Quecksilberfläche aus.[1])

1 bis 4 Tropfen der Leimchromatlösung I ließ ich 1, 4, 12 und 24 Stunden lang unter der Blechkappe eintrocknen zu den Leimchromatlamellen Nr. 1—4.

Die *Leimchromatlamelle Nr. 1* von 5 cm Durchmesser wurde 1 Stunde nach dem Auflegen der Lösung bei bewölktem Himmel durch Fortnehmen der Blechkappe belichtet. Nach 20 Sek. bildeten sich an den dicksten Stellen der Lamelle Falten, dann feine Falten am Rande, dann tiefe radiale Falten auf einer zentralen Fläche von 2 cm Durchmesser bis zur Mitte der Lamelle. Ueber der Quecksilberfläche bildeten sich stoßweise in $^1/_2$ Sek. oder kürzerer Zeit Äste oder Zweige von 0,06 mm Breite, die wie eine Rakete hervorgeschossen wurden,

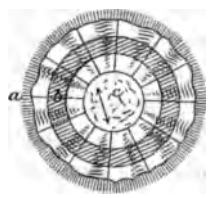


Fig. 172.

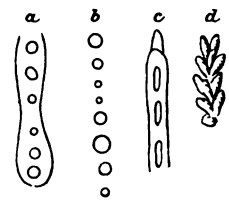


Fig. 173.

sich stoßweise verlängerten, wie bei den Metallsalzvegetationen (§ 29). Die Äste hatten das Bestreben, in Kugeln zu zerfallen und erstarrten, ehe dies geschehen war. Nach 15 Min. war die ganze Lamelle erstarrt und zeigte am Rande bei *a* (Fig. 172) viele feine radiale Falten von 0,1—0,5 mm Breite und 2—3 mm Länge. Von einem zentralen Fleck *c* von 2 cm Durchmesser mit höckerigen Linien laufen 12 tiefe radiale Falten zum Rande *a* mit den feinen Falten. Auf dem mittleren Teile *b* der erstarrten Leimchromatlamelle mit tiefen Falten zeigen sich acht Zonen parallel dem Umfang, deren Abstand von außen nach innen allmählich abnimmt; außen 1,8 mm, innen 1,1 mm beträgt. In den Zonen liegen bald viel, bald wenig Linsen von 0,03—0,005 mm Durchmesser. In der zentralen Stelle *c* erkennt man langgestreckte Röhren mit Anschwellungen und Einschnürungen, in denen einzelne Kugeln liegen, oder die schon zu Kugeln zerfallen sind (Fig. 173, *a*, *b*, *c*). Ein

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 67. 1870.

Kopf der raketenartig gebildeten Äste ist in Fig. 173, *d* abgebildet.

Die *Leimchromatlamelle Nr. 2* von 5 cm Durchmesser war aus vier Tropfen der Leimchromatlösung I auf einer Quecksilberoberfläche unter einer Blechkappe 4 Stunden lang eingetrocknet. In ihrer Mitte lag eine Gallertschicht von 3,8 cm Durchmesser. Bei Belichtung mit Tageslicht entstanden in 6 Min. radiale Falten. Unter der gelbbraunen Leimdecke schossen auf dem Quecksilber einige Flüssigkeitstropfen von mehreren Millimetern Durchmesser wie Luftblasen geradlinig hin und her, auf die Lichtquelle zu und von der Lichtquelle fort, wie von Ausbreitungswirbeln bewegt, als ob sich eine Spur fremder Flüssigkeit *C* abgeschieden und an ihrer Oberfläche ausgebreitet hätte.

Die Tropfen waren Flüssigkeitsblasen, welche platzten und verschwanden, Blasen aus wasserreicher Leimchromatlösung *B* von einer dünnen Haut ölartiger wasserarmer Leimchromatlösung *A* überzogen. Auf dieser Haut breitete sich eine chromatärmere und wasserreichere Leimchromatlösung *C* aus, da eine solche Leimchromatlösung *C* sowohl in Flüssigkeit *A*, als in Flüssigkeit *B* löslich ist, also gegen beide Flüssigkeiten *A* und *B* die Oberflächenspannung 0 haben muß. Die Erscheinung ist ähnlich dem Vorgang bei Silberchromatleim, den ich früher (§ 107) beschrieben habe, oder der Ausbreitung von Wasser an der Grenzfläche von ölartiger wasserreicherer Salzlösung *A* und alkoholreicherer Salzlösung *B* (§ 49).

Bei ähnlichen Versuchen und Belichtung mit einer Auerlampe vertieften sich die Randfalten der Leimchromatlamelle ebenfalls. Auch einzelne Flüssigkeitstropfen von mehreren Millimetern Durchmesser schossen unter der horizontalen gelbbraunen Leimchromatdecke hin und her in geraden Linien, normal zur Richtung der beleuchtenden Strahlen.

Leimchromatlamelle Nr. 3 von 6 cm Durchmesser aus einem Tropfen Leimchromatlösung I 12 Stunden lang im Dunkeln eingetrocknet, zeigte beim Abheben der Blechkappe viele runde Linsen am Rande, welche bei längerer Belichtung verschwanden und durch feine radiale Falten ersetzt wurden. Durch langsames Neigen der Glasschale ließ sich das Quecksilber unter der Leimchromatlamelle abgießen. Die Lamelle legte sich

glatt an den Boden der Glasschale an und war mit einem dünnen Quecksilberspiegel bedeckt. Bei einmaligem Behauchen zog sich das Quecksilber schnell zu einzelnen Tröpfchen zusammen und die Leimchromatlamelle ließ sich direkt in der Glasschale auf dem Mikroskoptisch mit den stärksten Vergrößerungen untersuchen. Am äußersten Rande der Leimchromatlamelle zeigen sich im reflektierten Tageslicht Newtonsche Farben von Schwarz bis Violett zweiter Ordnung, einer Leimchromatdicke von 0—0,0004 mm entsprechend. An den dünnsten Stellen haftet das Quecksilber an dunklen Kurven, die sich normal schneiden (Fig. 175, *a*). An dickeren Stellen (0,0002 mm) liegen zahlreiche Dendriten von der in Fig. 175, *b* dargestellten Form, mit doppeltbrechenden Kugeln. In der braungelben Mitte der Lamelle sieht man zahlreiche Sphärokristalle aus einfach brechender Substanz von 0,18 mm Durchmesser mit radialen Röhren und zwei zentralen herzförmigen Löchern (Fig. 174). Ähnliche Gebilde mit herzförmigen Löchern hat Behrens[1]) bei Pikrinsäure beobachtet. Die herzförmigen Löcher entsprechen den nach außen konkav gekrümmten Schaumwänden (Fig. 101, *c*, § 71), welche aus wässeriger Lösung von Natriumsilikat beim Eintrocknen auf einem Objektträger entstehen.

Fig. 174.

Leimchromatlamelle Nr. 4 war aus einem Tropfen Leimchromatlösung I 24 Stunden lang auf Quecksilber im Dunkeln eingetrocknet. Nach Abgießen des Quecksilbers und Behauchen blieb in der Glasschale eine dünne Lamelle zurück mit schönen Newtonschen Farbenstreifen parallel dem Rande und einer trüben gelben Mitte von 2,5 cm Durchmesser mit radialen Falten. Unter dem Mikroskop zeigten drei Stellen mit den Newtonschen Farben Weiß, Violett und Orange die in Figg. 175a, 175b, 175c (Photographie) abgebildeten Erscheinungen. Bei Fig. 175c zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen. Nimmt man den Brechungsexponenten der Leimschicht größer als den des Glases (vgl. § 86), so hatte die Leimchromatlamelle eine Dicke von

a	*b*	*c*
0,000 093	0,000 206	0,000 341 mm

1) H. Behrens, Die Kristalliten, p. 80. Fig. 22. Kiel 1874.

An der dünnsten Stelle *a* bilden die dunkeln braunen Linien oder Röhren von 0,0003 mm Breite Kreisbogen von 0,12—0,18 mm Durchmesser, die sich normal schneiden und aus einzelnen nebeneinander liegenden kurzen braunen Strichen bestehen, die durch helle Pünktchen getrennt sind. Diese Kreisbogen gehen für größere Dicken der Leimchromatlamelle Nr. 4 allmählich in die Fig. 175b dargestellten Dendriten

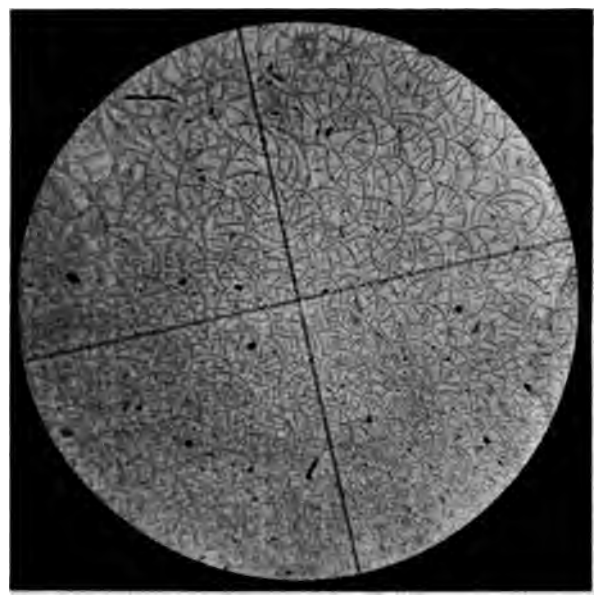


Fig. 175a.

Leimchromat auf Quecksilber eingetrocknet (0,000093 mm Dicke).

über, mit gekrümmten und geraden 0,005—0,1 mm breiten Ästen und doppeltbrechenden Kugeln von 0,0015 mm oder noch dickeren doppeltbrechenden kugelförmigen Schaummassen im Innern der Äste.

An den dünneren Stellen der Leimchromatlamelle haben die Dendriten kreisförmige Zweige, die gegen den Hauptzweig unter 25° geneigt sind, von gleicher Breite und ähnlicher Beschaffenheit, wie die dunkeln Kreislinien an der dünnsten Stelle *a*. Dicke und Neigungswinkel der Äste wachsen mit zunehmender Lamellendicke. Für die Dicke *b* setzen die Äste

unter 45° an dem Hauptzweig an und sind mit kurzen, am Ende abgerundeten Nadeln besetzt, die ebenfalls unter 45° gegen den Seitenzweig geneigt sind.

Bei größerer Dicke der Leimchromatlamelle gehen die kurzzweigigen Äste in reich gegliederte, doppeltbrechende Palmenwedel über mit positiver Doppelbrechung und optischer Achse normal zum Hauptzweig.

Fig. 175b.

Leimchromat auf Quecksilber eingetrocknet (0,000206 mm Dicke).

Legt man auf die Leimchromatlamelle in der Glasschale ein Stückchen Deckglas und bringt unter dieses einen Tropfen Wasser, so ist die Doppelbrechung augenblicklich verschwunden und bleibt nach Verdunsten des Wassers verschwunden. Das Wasser hat die doppeltbrechenden Kristalle von Kalium- und Ammoniumchromat gelöst, welche sich beim Eintrocknen aus den mit wasserreicher Leimchromatlösung *B* gefüllten Schaumzellen ausgeschieden hatten. Einzelne Zweige der Palmenwedel zeigten helle doppeltbrechende kugelförmige Massen, die bei starker Vergrößerung gegliederte Schaummassen erkennen lassen.

Zuweilen zeigten sich einzelne doppeltbrechende Pünktchen oder schöne Sphärokristalle von 0,018 mm Durchmesser mit schwarzem Kreuz zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen und negativer Doppelbrechung (Sphärokristalle II, *d*, § 42), die nach einigen Minuten platzten und verschwanden.

Losgelöste dicke Stückchen der Leimchromatlamelle Nr. 4 blieben nach wochenlanger Belichtung mit Tageslicht ungelöst,

Fig. 175c.
Leimchromat auf Quecksilber eingetrocknet (0,000341 mm Dicke).

wenn sie 8 Stunden lang unter einem Deckglas mit Wasser von 70° in Berührung waren.

Aus der dünnen Haut von wässeriger Leimchromatlösung I scheidet sich beim Eintrocknen eine ölartige wasserarme Leimchromatlösung *A* ab, in kugel- oder kreisförmigen Schaumwänden, die bald erstarren, da sich die neu abgeschiedenen Schaumwände normal an die früher abgeschiedenen angesetzt haben, wie aus Fig. 175a zu ersehen ist. Diese kreisförmigen Schaumwände gleichen den kreisförmigen Sprüngen einer dünnen Kieselsäurelamelle (Fig. 94, § 69), welche ebenfalls beim Ein-

trocknen von unsichtbaren ölartigen und später erstarrten Schaumwänden entstanden sind (vgl. § 83, Nr. 12). Die kreisförmigen Fäden oder Schaumwände von Leimchromat sind wegen der dunkelbraunen Farbe viel leichter wahrzunehmen, als die farblosen Schaumwände aus Kieselsäure, sind 3mal dicker als die dünne Flüssigkeitshaut auf dem Quecksilber, aus welcher sie sich abgeschieden haben und zeigen deutlich das Bestreben unter dem Einfluß der Oberflächenspannung sich zu kugelförmigen Tropfen zusammenzuziehen. An der ausgeschiedenen wasserarmen Leimchromatlösung haftet das Quecksilber stärker, als an der wasserreichen Leimchromatlösung.

Bei größerer Dicke der auf Quecksilber eingetrockneten Flüssigkeitsschicht bildet die periodisch abgeschiedene ölartige Leimchromatlösung verzweigte Röhren mit kugelförmigen Köpfen und kugelförmigen Schaummassen im Innern, Dendriten (Fig. 175 b) oder Palmenwedel (Fig. 175 c), welche den Gebilden der Kristallskelette oder Tannenbäume, oder gekrümmten Kristallen aus alkoholhaltigen wässerigen Salzlösungen (§ 58), oder den gekrümmten doppeltbrechenden Massen von Tannin (Fig. 129, *c*, § 93) entsprechen, und wie diese durch Oberflächenspannung ihre Erklärung finden. Die Neigungswinkel der Seitenzweige gegen den Hauptstamm und der Nebenzweige (Tannennadeln) gegen die Seitenzweige sind meist dieselben, können 90 oder 45°, oder weniger betragen, je nachdem sich die Seitenzweige an schon erstarrte oder noch flüssige Röhrenwände angesetzt haben. Analog kommen an den unsichtbaren ölartigen Wänden oder Sprüngen in Lamellen aus α-Leim (Fig. 120, *f*, *g*, *h*, § 87), oder Stärke (Fig. 130, *v*, *w*, *x*, § 94), oder Silberchromatleim (Fig. 152, *a*, *b*, *c*, § 107) auch bald Winkel von 90°, bald von 120° vor (vgl. §§ 22, 83, Nr. 7).

Die Neigungswinkel wechseln zuweilen periodisch in Zonen parallel dem Umfang, wenn man von außen nach der Mitte der Leimchromatlamelle geht.

Die braunen Dendriten bestehen aus festem, in warmem Wasser unlöslichen Leimchromat. Die benachbarte Lamelle besteht aus geschlossenen und offenen Schaumzellen mit unsichtbaren Schaumwänden aus demselben braunen Leimchromat, das durch die Belichtung unlöslich geworden ist.

Die dicken doppeltbrechenden Dendriten (Tannenbäume) enthalten in den hohlen Ästen aus erstarrtem ölartigen Leimchromat, die offene Schaumkammern bilden, Leim, der noch in kaltem Wasser löslich ist. Dieser Leim mag aus wasserreicher Leimchromatlösung *B* entstanden sein.

Wurde nach dem Abgießen des Quecksilbers die an der Glasschale haftende Lamelle längere Zeit mit kaltem oder warmem Wasser in Berührung gelassen, und das Wasser mehrfach erneuert, so blieben nach dem Verdunsten des Wassers farblose Dendriten zurück, die bei starker Vergrößerung ähnliche Formen zeigten, wie die früher beschriebenen künstlichen Zellen von Ferrocyankupfer (Fig. 8, *d*, § 25). Dieselben waren am Glase festgeschmolzen und die hellen Wände der Schaumkammern bildeten zum Teil Winkel von 120°, waren also aus ölartiger Flüssigkeit mit gleicher Oberflächenspannung entstanden.

Das wasserarme ölartige Leimchromat erstarrt bei geringem Wassergehalt bald nach seiner Bildung, gibt aber an zugesetztes Wasser einen Teil des Chroms wieder ab, wird wieder eine ölartige klare Flüssigkeit, die an der Glaswand haftet, niemals von dem darüberstehenden Wasser gelöst wird, und als dünner Überzug das braune feste Leimchromat vor der weiteren Einwirkung des Wassers schützen kann. (Vgl. auch unten § 133, Figg. 182, 183, *a*, *b*.)

Beim Eintrocknen zieht sich die wasserreiche Leimchromatlösung stärker zusammen als die wasserarme, übt einen Zug in der Richtung der Oberflächennormalen aus und erzeugt die positive Doppelbrechung mit optischer Achse normal zur Oberfläche der Äste. Bei Berührung mit Wasser hört dieser Zug auf, die Doppelbrechung verschwindet.

Sehr interessant und merkwürdig ist die plötzliche Bildung der Randfalten einer Leimchromatlamelle auf Quecksilber durch die Belichtung bei einem bestimmten Wassergehalt oder einer bestimmten Konzentration der eintrocknenden Leimchromatlamellen. Sie beweist, daß plötzlich durch Belichtung zahlreiche Schaumwände im Innern der Leimchromatlamelle ausgeschieden werden, welche die obere und untere Lamellenfläche gegeneinander ziehen und die Leimlamelle verlängern (vgl. § 22, Nr. 8). Analoge, aber weniger tiefe Falten und

weniger kräftige durch Licht entstandene Schaumwände habe ich früher (§ 123) bei Belichtung von Bromsilbergelatine auf Quecksilber erhalten.

Die Falten liegen normal zum Rande oder seltener parallel zum Rande der eintrocknenden Lamelle, je nachdem sich die ersten unsichtbaren Schaumwände normal oder parallel zum Rande ausgeschieden hatten, an welche sich dann durch Kontaktwirkung neu gebildete ölartige Flüssigkeit ansetzen kann (vgl. Fig. 124, § 90 bei Eiweiß; § 96, Nr. 11 u. 12).

Wasserreichere Leimchromatlösung II wurde erhalten, indem man bei rotem Licht warme Leimchromatlösung I mit dem 9fachen Volumen von warmem Wasser mischte. Ein Tropfen dieser wasserreichen Leimchromatlösung II trocknete auf einer reinen Quecksilberfläche unter einer Blechkappe im Dunkeln 10 oder 12 Stunden lang zu einer Leimchromatlamelle Nr. 5 oder 6 ein.

Die *Leimchromatlamelle Nr. 5* zeigte bei Belichtung keine Veränderung. Beim Behauchen wurde die Lamelle breiter und bekam Falten, die beim Verdunsten des Wassers wieder verschwanden. Nachdem die Lamelle 18 Min. mit der Blechkappe bedeckt war, wurde wieder belichtet. Am Rande hatten sich radiale Falten gebildet, die beim Behauchen nach außen, nach dünneren Stellen der Lamelle verschoben wurden. Nach weiterer einstündiger Belichtung traten beim Behauchen Falten auf, die beim Verdunsten des Wassers für die Lamellendicke 0,0004 mm wieder verschwanden, für größere Dicken nahe der Lamellenmitte blieben. Nach $2^1/_2$ stündiger Belichtung fehlten die Falten für einen bestimmten Wassergehalt der Leimchromatlamelle.

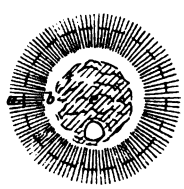


Fig. 176.

Die *Leimchromatlamelle Nr. 6*, in 12 Stunden im Dunkeln auf Quecksilber eingetrocknet, zeigte am Rande viele radiale Falten und Newtonsche Farben erster Ordnung (Schwarz, Orange, Blauviolett) in normal reflektiertem Licht. Eine 2,7 cm breite bronzegrüne zentrale Stelle *c* (Fig. 176) zeigte Kurven parallel und normal zum Umfang. In der faltenfreien Zone *b* zwischen faltigem Rande *a* und Mitte *c* lag ein Tropfen von 5 mm Durchmesser mit Perlmutterfarben (grün, blau, violett), die mit dem Einfallswinkel

des Lichtes wechselten. Bei Belichtung durch Abheben der Blechkappe war keine Änderung wahrzunehmen. Wurde durch ein Glasrohr feuchte Luft auf die faltenfreie Zone bei *b* geblasen, so erschienen Falten, die bei weiterem Blasen fortgingen und dann wieder kamen. Falten und Schaumwände im Innern der Leimchromatlamelle fehlen also für einen bestimmten Wassergehalt.

Beim Behauchen der ganzen Leimchromatlamelle gingen die Falten fort. Die Newtonschen Farben rückten nach dem Rande, die Lamelle wurde durch Wasseraufnahme dicker. Beim Verdampfen des Wassers gingen die Farben wieder nach der Mitte der Lamelle zurück und es erschienen neue Falten, ohne daß die Newtonschen Farben bei der Faltenbildung eine merkliche Änderung oder Verschiebung zeigten. Von einer Dickenänderung rührten die Falten also nicht her.

§ 131. *Gelatinereiche Leimchromatlösung III auf Quecksilber eingetrocknet. Perlmutterfarben durch Belichtung entwickelt.* Warme Leimchromatlösung 1 wurde bei rotem Licht statt mit Wasser mit einer warmen Gelatinelösung gemischt, und dadurch *gelatinereiche Leimchromatlösung III* mit 7,5 Proz. Gelatine und 0,4 Proz. Kaliumbichromat und Ammoniak erhalten.

$^1/_2$ ccm dieser gelatinereichen Leimchromatlösung III trocknete 13 Stunden lang auf Quecksilber im Dunkeln zu einer *Leimchromatlamelle Nr. 7* von 6 cm Durchmesser ein. Bei Belichtung durch Abheben der Blechkappe bildeten sich sofort 20 radiale Falten in einer mittleren Zone *b* (Fig. 177), einige Schaumwände auf dem zentralen Fleck *c* und feine radiale Falten in der Randzone *a*. In der mittleren Zone *b* wurde gleichzeitig durch die Belichtung der Mantel eines abgestumpften Kegels mit breiter unterer und schmaler oberer Basis sichtbar durch lebhafte Perlmutterfarben, die sich auch nach halbstündiger Belichtung mit Wolkenlicht noch langsam änderten.

Fig. 177.

Auf dem Kegelmantel folgten von innen nach außen die Farben Braun, Weiß, Blau. Nennt man φ den Winkel, welchen die Achse des Auges oder die Absehlinie mit der Normale der Quecksilberfläche einschließt, und vergrößert man φ durch Bewegen des Auges parallel oder normal zum Radius der

Lamelle, so rücken die Perlmutterfarben im ersten Fall nach außen zum Rande, im zweiten Fall nach innen zur Mitte der Lamelle. Wenn φ in radialer Richtung von 0—30° zunahm, folgten sich die Farben Weißlichgelb, Braun, Blaugrün, Hellgrün.

Es sind also keine Interferenzfarben dünner Blättchen, sondern Beugungsfarben, wie sie ein Glasgitter oder Metallgitter im reflektiert gebeugten Lichte zeigt, mit ringförmigen Linien parallel dem Umfang der Lamelle.

Eine andere *Leimchromatlamelle Nr. 8*, aus einem Tropfen derselben gelatinereichen Leimchromatlösung III im Dunkeln auf Quecksilber eingetrocknet, hatte 5 cm Durchmesser, viele radiale Falten auf einer 2,5 cm breiten Randzone. Der Abstand dieser Randfalten war kleiner, als bei den Lamellen Nr. 1—4, aber größer als bei Nr. 5. Am Rande lagen eine Reihe Erhebungen oder Sprünge parallel dem Umfang, welche sich periodisch abgeschieden hatten, 1 mm vom Rande besonders zahlreich waren und beim Behauchen verschwanden. Am Rande der Lamelle bei *a* und außerhalb des zentralen Fleckes *c* bei *b* waren je drei Newtonsche Farbenringe parallel dem Umfang sichtbar. Jedoch hatte die Lamelle in der Mitte *c* die größte Dicke.

Nach Abheben der Blechkappe traten durch Belichtung auf dem zentralen Fleck *c* am Boden der Leimchromatlamelle Nr. 8 schöne Perlmutterfarben auf, die beim Behauchen fortgingen und nach dem Verdampfen des Wassers wieder erschienen. Diese Perlmutterfarben änderten sich wie die Farben, welche ein Glasgitter im reflektiert gebeugten Lichte zeigt, mit der Richtung, in der man auf die Leimchromatlamelle blickte, und waren am lebhaftesten, wenn man in der Richtung des belichtenden Tageslichtes auf die Leimchromatlamelle sah. Beim Drehen des Quecksilbers mit der Lamelle um eine vertikale Achse traten bei demselben Beugungswinkel die Perlmutterfarben mit ähnlicher Färbung auf. Die farbige Wolke der Perlmutterfarben zeigte aber eine etwas andere Gestalt. Ich werde unten (§ 138) zeigen, daß die Farben von feinen Falten an der Oberfläche der Leimchromatlamelle herrühren, welche durch Belichtung entstanden sind, und daß der Abstand der Falten mit ihrer Entfernung vom Lamellenrande wechselt.

Nach Abgießen des Quecksilbers blieb in der Schale die dünne Leimchromatlamelle Nr. 8 mit einem Spiegelbelag von Quecksilber zurück, auf dem die Newtonschen Farben gut zu erkennen waren. Beim Behauchen durch ein Glasrohr wurden die behauchten Stellen der Lamelle matt, d. h. es bildeten sich getrennte Wasser- und Leimlinsen, die beim Verdampfen des Wassers wieder verschwanden und die Newtonschen Farbenringe wieder hervortreten ließen. Beim Behauchen der ganzen Lamelle schurrte das Quecksilber zu einzelnen Tröpfchen am Rande zusammen.

Aus Leimchromatlösung, welche auf 10 Proz. Gelatine 4, 0,4, 0,04 oder 0,004 Proz. Kaliumbichromat und Ammoniak enthielt, entstanden durch Eintrocknen auf Quecksilber Lamellen mit schönen Perlmutterfarben. Nach Abgießen des Quecksilbers blieb ein dünner Spiegelbelag von Quecksilber unter der Lamelle zurück, der beim Behauchen unter den dünnen Stellen der Lamelle augenblicklich verschwand, unter den dickeren Stellen aber bestehen blieb. Man hat also anzunehmen, daß bei den dünnen Stellen in dem Bruchteil einer Sekunde Wasser durch die Lamelle zur Grenze von Leimchromatgallerte und Quecksilber diffundiert, sich hier ausbreitet und wasserreiche Leimchromatlösung bildet. Das Quecksilber haftet an wasserreichem Leimchromat schlechter, als an wasserarmem Leimchromat. Die Ausbreitungswirbel rollen es von der Leimfläche ab, und es fließt zu kleinen Tröpfchen zusammen.

Die Perlmutterfarben treten auf Quecksilber lebhafter hervor, als auf der Leimchromatlamelle ohne Spiegelbelag.

Die Leimchromatlamellen zeigen nach Berührung mit kaltem Wasser keine Doppelbrechung mehr. Lamellen mit größerem Chromgehalt sind in kaltem und warmem Wasser unlöslich. Lamellen mit geringem Chromgehalt ($< 0{,}4$ Proz. $K_2Cr_2O_7$) quellen schon in kaltem Wasser auf. Werden sie mit der oberen Seite auf mit Wasser benetzte Glasplatten gelegt, so quellen sie auf, saugen sich am Glase fest und zeigen nach dem Eintrocknen wieder schöne Perlmutterfarben.

§ 132. *Bildung von Falten, unsichtbaren Schaumwänden und Perlmutterfarben in Leimbichromatlamellen durch Belichtung.* Leimbichromatlösung I mit 10 Proz. Gelatine und 4 Proz. Kaliumbichromat wurde im Dunkeln geschmolzen, einige Tropfen

dieser warmen Lösung bei schwacher roter Beleuchtung auf eine reine Quecksilberfläche gebracht und mit einer Blechkappe bedeckt. Nach 15 Stunden wurde die Blechkappe abgenommen und die *Leimbichromatlamelle Nr. 9* mit Sonnenlicht belichtet. In 10 Sek. bildeten sich um eine klare Mitte *c* von 1 cm Durchmesser tiefe radiale Falten und am Rande *a* eine Reihe feiner Falten (Fig. 178). Letztere verschwanden und kehrten wieder in kurzen Zwischenräumen, als ob die im Innern der Lamelle ausgeschiedenen unsichtbaren Schaumwände kurz nach der Entstehung von der umgebenden Flüssigkeit wieder gelöst würden.

Fig. 178.

Ein ähnliches periodisches Wiedererscheinen und Verschwinden von Falten, ohne und mit Perlmutterfarben, durch Belichtung am Boden der klaren Gallerte habe ich nicht bloß bei Leimbichromat, sondern auch bei Leimchromat Gallerte beobachtet. Es macht den Eindruck, als ob man die Haut eines Tieres sähe, welches friert.

In dem zentralen Fleck entstanden bei weiterem Eintrocknen unter Einwirkung des Lichtes dicke braune, radial angeordnete Dendriten mit einer lichten Hülle und viele feine dunkle Streifen parallel dem Umfang in 0,0017 cm Abstand voneinander. Nach Abgießen des Quecksilbers wurden Dendriten und Streifen photographiert (Fig. 179) (Photographie). Die feinen Streifen, welche bei den auf Glas oder Silber eingetrockneten Leimchromatlamellen fehlen, halte ich für feine Falten in der unteren Lamellenfläche. Dieselben erklären die Perlmutterfarben, welche die betreffende Zone *b* der Leimbichromatlamelle zeigt, und sind durch Schaumwände von wasserarmem ölartigen Leimbichromat entstanden, das sich beim Eintrocknen der Lösung parallel dem Umfang periodisch abgeschieden hat.

Die Dendriten sind von einem hellen Schein oder einer lichten Hülle umgeben, chromatärmerer Leimlösung *C*, welche sich an der Oberfläche der ölartigen wasserarmen Leimlösung *A* ausgebreitet hat (vgl. § 130) und dann aufgequollen ist. Bei Kugeln aus Silberbromidleim habe ich eine ähnliche lichte Hülle beobachtet (§ 120).

Die Leimbichromatlamelle wurde auf dem Quecksilber

mit einer scharfen Schere in zwei Hälften geteilt, eine Hälfte mit einem Objektträger vom Quecksilber abgenommen und mit einem zweiten Objektträger bedeckt. Beide Objektträger wurden durch zwei seitlich aufgeschobene Kautschukringe zusammengehalten. Blickt man durch die Zone mit den vertikalen dunklen Streifen auf einen hellen Lichtpunkt oder eine vertikale Lichtlinie (elektrische Glühlampe mit einem Kohlefaden), so sieht man ein breites Spektrum, dessen rotes Ende der Licht-

Fig. 179.
Leimbichromat auf Quecksilber eingetrocknet.

linie abgewandt, dessen blaues Ende der Lichtlinie zugewandt ist. Das Spektrum ist oft viel leichter zu sehen als die Gitterstreifen.

Die Perlmutterfarben treten auf Quecksilber lebhafter hervor, als nach Abgießen des Quecksilbers. Sie bleiben bestehen und die Beugungsspektra bleiben sichtbar, wenn die mehrere Monate eingetrocknete Leimbichromatlamelle stundenlang in kaltes oder heißes Wasser gelegt und wieder getrocknet wird.

Unter dem Mikroskop zeigte der dünne Rand der Leimbichromatlamelle Nr. 9 Dendriten, wie Fig. 175, *c* und sternförmige Dendritenbüschel mit schwach doppeltbrechenden oder einfach brechenden Ästen.

Leimbichromatlösung I gab mit 9 Volumenteilen Wasser verdünnt die Leimbichromatlösung II. 3 Tropfen dieser *wasserreichen Leimbichromatlösung II* trockneten im Dunkeln auf einer reinen Quecksilberfläche in 10 Stunden zu einer *Leimbichromatlamelle Nr. 10* ein, welche beim Belichten keine Veränderung zeigte, beim Behauchen breiter wurde und radiale Randfalten bildete, die beim Verdampfen des Wassers wieder verschwanden. Nach längerer Belichtung rückten die durch Behauchen entstehenden Falten nach außen, nach dünneren Stellen der Lamelle.

10 Tropfen Leimbichromatlösung I trockneten im Dunkeln 11 Stunden lang auf Quecksilber zu einer von festen Randfalten umgebenen *Leimbichromatschicht Nr. 11* ein. Bei Belichten mit elektrischem Bogenlicht entstanden zuerst am Boden, dann im Innern der klaren Gallerte undurchsichtige Schaummassen. Der vorher unsichtbare dünnste äußere Rand wurde trübe und zeigte neue Randfalten.

Gelatinereiche Leimbichromatlösung III mit 5,5 Proz. Gelatine und 0,4 Proz. Kaliumbichromat trocknete im Dunkeln auf einer reinen Quecksilberfläche 10 Stunden lang zu einer *Leimbichromatlamelle Nr. 12* ein, deren Falten beim Belichten größer wurden. Gleichzeitig traten schöne Perlmutterfarben auf, deren Färbung mit dem Winkel φ wechselte.

§ 132a. *β-Leimbichromat.* 4 Tropfen einer Leimbichromatlösung mit 16 Proz. β-Leim und 1,31 Proz. $Na_2Cr_2O_7$ trockneten drei Tage im Dunkeln auf Quecksilber ein zu einer *β-Leimbichromatlamelle Nr. 13*, welche bei Belichtung Randfalten gab. Dieselben traten jedoch nach der Belichtung erst beim Behauchen auf in drei Zonen parallel dem Umfang. Nach Abgießen des Quecksilbers ließen sich mit dem Mikroskop keine dunklen Kurven, Dendriten oder doppeltbrechenden Massen in dieser Lamelle 13 erkennen, wie bei Chromgelatine (α-Leimchromat). Nach weiteren 24 Stunden zeigten die Lamellen doppeltbrechende Schaummassen, die aus deformierten Linsen von 0,006 bis 0,009 mm Durchmesser entstanden waren.

Wurde auf die Lamelle ein Stückchen Deckglas gelegt

und darunter mit einer Kapillarpipette etwas Wasser gebracht, so riß die β-Leimchromatschicht in langen geraden Linien mit Neigungswinkeln von 120°. Die Risse waren also aus ölartigen Scheidewänden von wasserreicher Leimlösung *B* entstanden, die sich beim Aufquellen mit Wasser eher auflösten, als die benachbarten Teile der Lamelle. Zu beiden Seiten und in unmittelbarer Nähe des Risses erschien die Lamelle negativ doppeltbrechend, mit optischer Achse normal zur Rißrichtung.

Fig. 180.

Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Randdendriten mit periodisch abgeschiedenem braunen Leimchromat.

Nach einigen Tagen war das Wasser unter dem Deckglas verdampft und es waren einige Hundert Sphärokristalle der Klasse IIe (§ 42) von 0,01 bis 0,02 mm Durchmesser entstanden mit negativer Doppelbrechung und optischer Achse normal zur Oberfläche. Einige dieser Sphärokristalle waren massiv. Die meisten waren hohl und bestanden in der Mitte aus einfach brechender Substanz, die von einer kugelförmigen Hülle mit negativer Doppelbrechung umgeben war.

§ 133. *Leimchromat auf Glasplatten eingetrocknet.* Zehn Tropfen einer Leimchromatlösung (10 Proz. Gelatine + 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3) trockneten 20 Stunden lang auf einer runden Glasplatte unter einer Blechkappe im Dunkeln ein zu einer hellgelben Schicht von 57 mm Durchmesser mit einer 5 mm breiten klaren Randzone, an welche eine Zone *a* mit gelben Dendriten grenzte. Nach der Belichtung mit Wolkenlicht

Fig. 181 a.

Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Dendriten mit Kristallen.

bildeten sich noch weitere Dendriten aus, besonders reichlich in drei konzentrischen Zonen *a*, *b*, *c*, deren Zweige in der äußersten Zone *a* am feinsten, in der innersten Zone *c* am dicksten waren und doppeltbrechende Massen enthielten. Die Fig. 180 (Photographie) zeigt die Dendriten der äußeren Zone *a* mit dicken braunen Köpfen und einzelnen braunen Stellen in den feinen Zweigen, welche häufig Kreisbogen bilden. Die braunen Stellen sind einfach brechend. Dazwischen liegen doppeltbrechende Massen. Figg. 181 a und 181 b (Photographie) zeigen bei gewöhnlichem Licht oder mit gekreuzten Nikolschen

Prismen die Dendriten oder Vegetationen der Zone *b* mit doppeltbrechenden Kristallen an den Spitzen und in den Wänden der röhrenförmigen Äste. Die Kristalle sind mit einer dünneren oder dickeren braunen Schicht bekleidet, sind anscheinend monoklin und bestehen wohl aus Kalium-Ammoniumchromat.

In der Mitte der inneren Zone *c* liegen dickwandige Dendriten

Fig. 181 b.

Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Dendriten mit Kristallen zwischen ⊥ Nicolschen Prismen.

und Palmenwedel mit doppeltbrechenden Massen oder runde Linsen von 1—1,2 mm Durchmesser, in deren Oberfläche braune Schaumwände und doppeltbrechende Kristalle verteilt sind.

Zwischen den Dendriten mit feinen Ästen der äußeren Zone *a* und den dicken Ästen der Zone *b* mit spitzen Neigungswinkeln gegen den Hauptstamm liegen Dendriten (Tannenbäume) mit Ästen mittlerer Dicke, deren Seitenzweige und Nebenäste (Tannennadeln) unter 90° an Hauptstamm und Seitenzweige ansetzen (vgl. § 58).

Die doppeltbrechenden Massen verschwinden unter einem Deckglas bei Berührung mit kaltem Wasser, sind in diesem löslich. Die braunen Teile und Wände der Verzweigungen quellen in Wasser auf und sind übrigens in kaltem und heißem Wasser unlöslich — nach genügend langer Belichtung.

Wird die Glasplatte mit den Vegetationen von Leimchromat in eine Porzellanschale mit Wasser gelegt, die in einem Wasserbecken schwimmt und das Wasserbecken bis zum Sieden des Wassers erhitzt, so löst sich der Inhalt der Schaumkammern, die braunen Wände von Leimchromat quellen auf, saugen sich an der Glasplatte fest und fließen langsam zu braunen Kugeln oder Blasen oder braunen Kreisbogen oder Schraubenlinien zusammen, deren Neigungswinkel von 90° oder 45° langsam in Winkel von 120° übergehen. Nach dem Verdampfen des Wassers blieben auf der Glasplatte die aus getrockneten Röhren und Schaumkammern — nicht mehr gelb sondern farblos — mit etwas deformierter Gestalt zurück, und ließen noch die ursprünglichen Vegetationen erkennen, die sich beim Eintrocknen der Leimchromatlösung gebildet hatten.

Die Fig. 182 (Photographie) zeigt die farblosen deformierten und an die Glasfläche angeschmolzenen Schaummassen des Randes mit zum Teil spitzen Enden, während die auf Quecksilber eingetrockneten und mit Wasser behandelten Dendriten abgerundete Köpfe haben (vgl. § 130). Mehr nach dem Innern der Lamelle ist nicht alles braune Leimchromat zerstört, wie die braunen Schraubenflächen von 0,015 mm Breite zeigen (Fig. 183 a) [Photographie], die bei starker Vergrößerung als kleine zusammenhängende Schaumkammern erkannt werden (Fig. 183 b) [Photographie], in welche das ölartige Leimchromat durch Einwirkung des Wassers sich verwandelt hat.

Ich möchte darauf hinweisen, daß auch Silberchromatleim solche Schraubenflächen bildet und daß auch aus Silberchromatleim bei Einwirkung von Wasser ölartige farblose Fäden entstehen (§ 98, Fig. 132 *a*; § 108, Figg. 154 *b*, 155). Eben entstehen bei Einwirkung von Wasser auf ölartiges Leimtannat Schaummassen mit kleineren Schaumkammern (§ 10 Fig. 143 *a*, *b*; Fig. 144, § 106).

Während das gelbe Leimchromat mit doppeltbrechenden Kristallen in den Schaumkammern sich beim Eintrocknen

dicken Schichten von der Glasplatte ablöst, haftet das mit Wasser behandelte farblose Leimchromat fest an der Glasfläche.

Statt die ganze Platte in heißes Wasser zu legen, kann man auch ein Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen auf die Leimchromatlamelle legen, einen Tropfen Wasser unter das Deckglas bringen, die runde Glasplatte in der trockenen Porzellanschale auf 90° erwärmen und das Wasser am Rande des Deckglases mit Fließpapier absaugen. Die vom Wasser

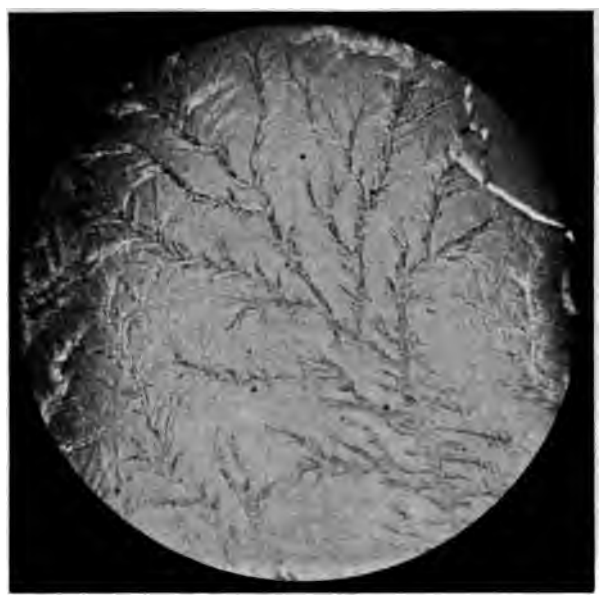


Fig. 182.

Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Ausgewaschene Randdendriten.

veränderten Stellen lassen sich dann leicht mit den ungeänderten Stellen vergleichen.

§ 134. *Leimchromat im Uhrglas eingetrocknet.* Größere Mengen Leimchromatlösung ließ ich statt auf einer ebenen Glasplatte in einem Uhrglas eintrocknen.

Warme Lösungen von 10 Proz. Gelatine mit 4, 0,4, 0,04 und 0,004 Proz. Kaliumbichromat und Ammoniak wurden gleichzeitig in 4 Paar Uhrgläser von 75 mm Durchmesser gegossen und unter einer Blechkappe im Dunkeln oder im Tageslicht

langsam eingetrocknet. Die erkaltete Lösung bildete eine Gallerte mit glatter Oberfläche, die Sonnenlicht wie ein Japanischer Spiegel reflektierte.

Nach vier Tagen zeigte das belichtete Uhrglas mit größtem Chromgehalt einen klaren 1 cm breiten Außenrand, daneben eine 3 mm breite Zone brauner Vegetationen mit doppeltbrechenden verschieden orientierten Massen, Dendriten, dicken

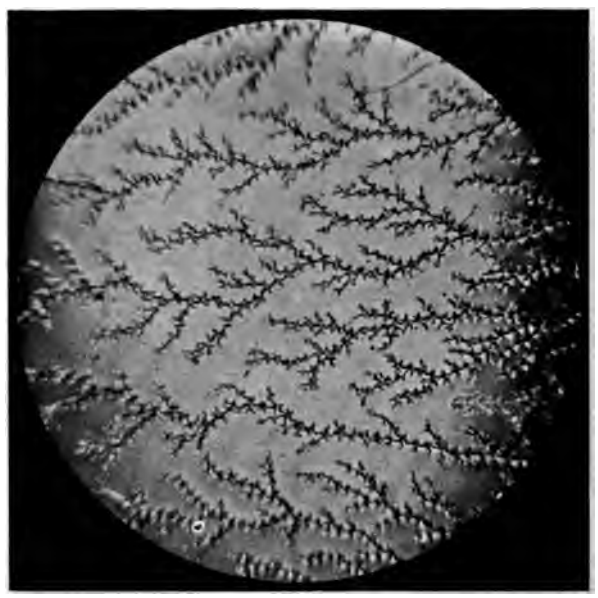


Fig. 188a.
Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Schraubenförmige Dendriten (0,015 mm).

reliefartigen Knospen und doppeltbrechenden Kaliumchromatkristallen. Diese Vegetationen und Knospen wuchsen nach Innen und erfüllten nach sechs Tagen das ganze Uhrglas, während die Leimchromatschicht sich tief braun färbte.

Auf die 14 Tage lang eingetrocknete Chromatschicht wurde halb über dem klaren Außenrand, halb über den Vegetationen ein Glasring von 15 mm Durchmesser und 6 mm Höhe mit Kolophoniumkitt aufgesetzt, mit kaltem Wasser gefüllt, das Wasser mit einer Pipette wiederholt abgesogen und erneuert.

Die Leimchromatschicht zog Wasser an und quoll auf, am Rande und oben weniger, als näher der Mitte und unten. Die schwach aufgequollene und unlösliche obere Leimchromatschicht von 0,5 mm Dicke wurde durchbrochen und zeigte mehrere Risse, der untere Teil der Leimschicht war verschwunden. Nach dem Verdampfen des Wassers blieb eine hellgelb gefärbte Leimchromatschicht zurück, sehr verschieden von der

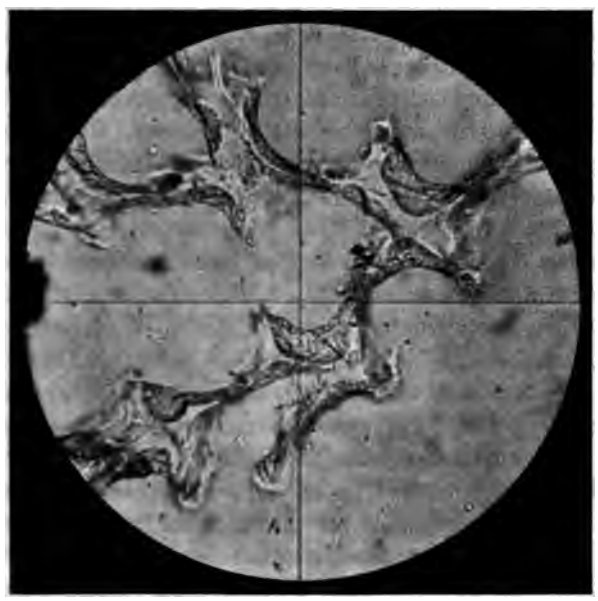


Fig. 183 b.
Leimchromat auf Glas eingetrocknet. Schraubenförmige Dendriten (0,015 mm).

tiefbraunen Leimchromatschicht außerhalb des Glasringes. Dabei hatten sich neue Dendriten mit runden Köpfen in der doppeltbrechenden früher klaren Randschicht gebildet, und in der Mitte lagen neue große Sphärokristalle von 1,2 bis 2 mm Durchmesser, indem fünf bis sechs dicke braune Röhren mit runden Köpfen radial um eine kleine Kernblase gelagert waren.

Die von der aufgequollenen Gallerte abgesogene Flüssigkeit enthielt Kaliumchromat und Leim. Auf einer Glasplatte eingetrocknet bildete sie gelbe Dendriten mit doppeltbrechenden

Kristallen, die sich aus Schaumzellen mit kugelförmigen Wänden abgeschieden hatten und in Wasser leicht lösten.

Die belichtete Leimchromatgallerte mit 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ war in 14 Tagen zu einer dünnen klaren Schicht eingetrocknet, die in der Mitte stärker braun gefärbt erschien, als am Rande. Diese Verschiedenheit fehlt bei den im Dunkeln eingetrockneten Leimchromatlamellen und beweist, daß die später eingetrockneten Stellen chromatreicher sind, als die zuerst eingetrockneten, daß das Chromat gleichsam in der Mitte des Uhrglases angereichert wird. Unter einem Deckglasstreifen mit Wasser quoll die Lamelle stark auf und wurde doppeltbrechend. Nach einigen Tagen waren an dieser Stelle zahlreiche Sphärokristalle mit negativer Doppelbrechung von 0,04 mm Durchmesser sichtbar, die aus radial um eine Kernblase gelagerten Palmenwedeln bestanden.

Die im Licht eingetrockneten Leimchromatgallerten mit 0,04 und 0,004 Proz. $K_2Cr_2O_7$ bildeten schwach gelb oder gar nicht gefärbte klare Leimschichten. In der Oberfläche der chromreicheren Schicht mit 0,04 Proz. $K_2Cr_2O_7$ lagen Linsen von 0,01—0,004 mm mit stärkerer Lichtbrechung als die Umgebung. Mit gekreuzten Nicolschen Prismen sah man im Innern der Leimchromatschicht Kugeln mit doppeltbrechenden Schaumzellen gefüllt, oder doppeltbrechende Kugeln von 0,1 mm Durchmesser mit einem dunkeln Streifen, wie bei Platten eines zweiachsigen Kristalles senkrecht zur optischen Achse geschnitten, aber ohne Farbenringe. Ohne Nicolsche Prismen war an derselben Stelle des Leimes nichts zu bemerken.

Die im Licht eingetrocknete Leimlösung mit 0,004 Proz. $K_2Cr_2O_7$ bildete eine klare kaum gelblich gefärbte Lamelle mit starker unregelmäßiger Doppelbrechung.

Das 14 Tage lang im Dunkeln unter einer Blechkappe eingetrocknete Leimchromat mit 4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ bildete eine klare homogene Gallerte, gelb oder schwach gelb gefärbt, mit einer klaren dünnen, 2 cm breiten Randschicht gleicher Färbung.

Nach 29 Tagen hatten sich aber auch im Dunkeln auf einer 10 mm breiten Zone in 1,5 cm Entfernung vom Rande Dendriten gebildet. Nach außen feine Dendriten, wie Palmenwedel mit verschieden orientierten doppeltbrechenden Massen,

nach innen dicke Dendriten mit kugelförmigen Köpfen und von einer hellen Hülle umsäumt, von hellerer Farbe und kleinerer Lichtbrechung als die Umgebung. Diese Dendriten traten reliefartig auf der eingetrockneten braunen Leimchromatlamelle hervor und bestehen aus Schaummassen mit erstarrten Schaumwänden von ölartiger wasserarmer Leimchromatlösung. Im Dunkeln entstehen also in 29 Tagen ähnliche Schaumwände, wie in der belichteten Leimchromatgallerte in vier Tagen.

Wurde mit Kolophoniumkitt ein Glasring von 16×6 mm auf diese Leimchromatschicht gekittet, der halb über den Dendriten, halb über der klaren Randschicht lag, und wurde der Ring mit Wasser gefüllt, das Wasser abgesogen und wieder erneuert, so quoll die Leimchromatschicht ohne zu reißen auf, unter Abgabe von Chromat zu einer klaren gelben Gallerte mit zahlreichen großen Schaumkammern. Die Gallerte zeigte negative Doppelbrechung mit optischer Achse parallel dem Uhrglasradius. Dabei bildete die Gallerte an verschiedenen Stellen, auch nahe dem Rande der Leimchromatschicht kleine Hügel und Schaumwände mit Neigungswinkeln von 120, 170 und 45°. Die Schaumwände und der Inhalt der Schaumkammern wurden durch Wasserzusatz wieder flüssig und hatten eine mit dem Gehalt an Wasser und Chrom wechselnde Oberflächenspannung.

Dabei schmilzt ein Teil der Schaumwände an der Glasfläche an; an den dickeren Stellen der Leimchromatschicht weniger als an den dünneren Stellen.

Wasserreiches und wasserarmes Leimchromat quillt verschieden stark auf bei Wasserzusatz, belichtetes schwächer als unbelichtetes. Dadurch entstehen Risse in der aufquellenden Gallerte, häufig parallel dem Radius und parallel dem Umfang des Uhrglases, von derselben Gestalt wie bei Kieselsäure (Fig. 102, *c*, § 72).

Bei Zusatz von Ammoniak quoll die Leimchromatgallerte innerhalb des Ringes noch weiter auf, unter Abgabe von Chrom, Bildung von Rissen in der Oberfläche und Zunahme der Doppelbrechung. Das Leimchromat quoll also unten stärker als oben.

Das im Dunkeln eingetrocknete Leimchromat mit 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ zeigte nach zwei Monaten in der Mitte viele kleine

Kugeln von 0,006 mm mit größerer Lichtbrechung als die Umgebung und mit doppeltbrechenden Massen gefüllt; negative Sphärokristalle von 0,2 mm Durchmesser, aus sternförmig angeordneten doppeltbrechenden Palmenwedeln aufgebaut; und blauschimmernde Schaumkugeln von 0,025 mm, die mit doppeltbrechenden Massen gefüllt aneinanderhingen und größere kugelige Schaummassen von 0,2 mm Durchmesser bildeten.

An der tiefsten Stelle des im Dunkeln zu einer klaren gelben Gallerte eingetrockneten Leimchromats mit 0,04 Proz. $K_2Cr_2O_7$ lagen nach 14 Tagen Hunderte von Sphärokristallen von 0,1 mm Durchmesser, die aus doppeltbrechenden, um eine kleine Kernblase gelagerten Schaumzellen bestanden und zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen ein dunkles Kreuz und negative Doppelbrechung, oder rechts oder links gewundene Airysche Spiralen (wie die Kugeln aus eingetrockneter Kieselsäurelösung (§ 70, Fig. 96, *h*), oder noch kompliziertere Kurven zeigten.

Die im Dunkeln eingetrocknete Leimchromatschicht mit 0,004 Proz. $K_2Cr_2O_7$ hatte große unregelmäßige Rippen und starke Doppelbrechung, wie die im Lichte eingetrocknete Schicht mit gleichem Chromgehalt.

§ 135. *Leimbichromat im Uhrglas eingetrocknet.* Warme Lösungen von 10 Proz. Gelatine und 4 oder 0,4 Proz. Kaliumbichromat, ohne Ammoniakzusatz, wurden in Uhrgläser von 7,5 cm gegossen und im Tageslicht oder unter einer Blechkappe im Dunkeln eingetrocknet. Diese Leimbichromatgallerten verhalten sich im wesentlichen wie Leimchromatgallerte.

Nach 5 Tagen hatten sich in der belichteten 4 proz. Leimbichromatgallerte zahlreiche Dendriten auf einem zentralen Fleck von 5 cm Durchmesser abgeschieden. Die Dendriten bestanden aus braunen Schaumwänden und doppeltbrechenden verschieden orientierten Massen im Innern der Schaumkammern, und waren von vier klaren Zonen von 2, 5, 2 und 1,2 mm Breite umgeben, deren Färbung und Chromgehalt nach der Mitte hin größer wurde.

Wurde ein Glasring mit Kolophoniumkitt auf die eingetrocknete Lamelle aufgesetzt, Wasser eingegossen und mehrfach erneuert, so lösten sich die doppeltbrechenden Massen, die Leimbichromatschicht quoll unten mehr auf, wie oben,

bekam oben Risse und zeigte um so mehr Schaumwände in den Gallertbrocken, je weiter diese vom Rande entfernt lagen. Das aus dem Ring abgesogene Wasser war gelb, also chromathaltig wie bei Leimchromatlamellen.

Am Boden der belichteten Gallerte mit 10 Proz. Gelatine und 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ zeigten sich nach 7 Tagen viele Sterne von 0,15 mm, Dendriten mit doppeltbrechenden Massen, die radial um eine kleine Kernblase gelagert waren und zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen ein dunkles Kreuz zeigten, die Polarisationsfarben einer gleichzeitig eingeschalteten Gipsplatte nicht änderten. Im oberen Teile der Gallerte lagen Kugeln von 0,06—0,02 mm mit einer Kernblase und vier bis acht darum gelagerten Schaumkammern, die schwache negative Doppelbrechung zeigten, mit optischer Achse normal zum Umfang.

Das im Dunkeln eingetrocknete Leimbichromat bildete nach 10 Tagen eine klare braune oder gelbe Gallerte, ohne Doppelbrechung.

In einem Uhrglas von 8 cm ließ ich eine größere Menge einer warmen Lösung von 5 Proz. Gelatine und 4 Proz. Kaliumbichromat erkalten und bei Tageslicht eintrocknen. Nach 1—2 Tagen wirkte die Oberfläche der Gallerte wie ein Japanischer Spiegel und zeigte im reflektierten Sonnenlicht helle und dunkle Linien parallel dem Radius und parallel dem Umfang des Uhrglases, welche Kreisbogen oder Röhren mit Anschwellungen und Einschnürungen bildeten und die Lage der dicken braunen Schaumrippen vorzeichneten, welche bei weiterem Eintrocknen entstanden. Die Linien ließen radiale Fächer erkennen, welche von einer äußeren Zone *a* mit braunen Dendriten nach der klaren Mitte *c* liefen. Die Zone *a* war von einem 5 mm breiten klaren braunen Rande ohne Dendriten eingefaßt.

Das Mikroskop zeigte in der ersten Zone *a* radiale Büschel ohne Doppelbrechung; viele runde Linsen von 0,005 mm; aus Linsen von 0,04 mm abgeschiedene doppeltbrechende Massen; Linsen von 0,05 mm Durchmesser mit kleinen Blasen von 0,005 mm, welche parallel dem Radius und parallel dem Umfang aneinander gereiht lagen; Sphärokristalle von 0,07 mm mit positiver Doppelbrechung, bei welchen 7—12 radiale Röhren eine Kernblase umgaben; Dendriten oder Tannenbäume

mit Ästen von 90° oder 45° Neigung gegen den Hauptstamm. Derselbe Tannenbaum zeigte gleiche Neigung der Seitenäste gegen den Hauptstamm, wie für Nebenäste (Tannennadeln) gegen die zugehörigen Seitenäste.

Nach 1 Tag hatten sich erstarrte Halbkugeln von 0,004 bis 0,006 mm, Röhren mit Anschwellungen und kugelförmigen Köpfen von 0,03 mm und erstarrte Schaummassen gebildet. Seitenzweige aus aneinandergereihten kleinen und großen Kugeln waren unter 45° oder 90° gegen einen kreisbogenförmigen Hauptstamm geneigt.

Nach 5 Tagen erschienen positive oder negative Sphärokristalle von 0,3—0,4 mm, Kristallbüschel aus geraden oder gewundenen Röhren mit Anschwellungen und kugelförmigen Köpfen, die radial um eine Kernblase herumlagen, oft von einer Reihe kleinerer Kugeln umsäumt.

Nach 6 Tagen bildeten sich Tannenzweige oder Palmenwedel mit kreisförmig gekrümmtem Hauptzweig (von 1 mm Durchmesser oder kleiner), die sich langsam nach dem Innern des Uhrglases verlängerten, während sich an den Hauptzweig Seitenzweige und Nebenäste (Tannennadeln) mit 90° Neigung ansetzten. Dann traten plötzlich an der Spitze der Seitenäste Bündel von 45° auf. Zuweilen setzten sich die Seitenäste auf der konvexen Seite des Hauptzweiges mit Winkeln von 90° an, auf der konkaven Seite (mit dickerer Wand und größerer Oberflächenspannung der ölartigen Wandsubstanz) mit Winkeln von 45°. Oder es bildeten sich Seitenäste nur auf der konvexen Seite des Hauptzweiges, deren Neigung nach der Spitze des Hauptzweiges allmählich von 90° bis 45° abnahm.

Die Auslöschungsrichtung der doppeltbrechenden Massen in den Seitenästen und Palmenwedeln liegt gewöhnlich normal zur Richtung des Hauptzweiges an der Abzweigungsstelle. Hauptstamm, Äste und Tannennadeln bilden ähnliche kreisförmige Kurven mit ähnlichen Neigungswinkeln, wie die Sprünge von Kieselsäurelamellen, die auf Glasflächen eingetrocknet sind und ebenfalls unsichtbaren Schaumwänden ölartiger Flüssigkeit ihre Entstehung verdanken (§ 69, Fig. 94; auch § 130, Fig. 175 *a*).

Läßt man dieselbe Leimbichromatlösung im Dunkeln eintrocknen, so bilden sich dieselben braunen Schaumwände und Dendriten, wie bei Tageslicht, aber viel langsamer.

Nach 4 Wochen traten dicke braune Dendriten reliefartig hervor und ebenso weißliche Kugeln oder Haufen kleiner zusammengebackener Kugeln von 0,1 mm, welche auf Kreisen oder Kreisbogen von 10—4 mm Durchmesser lagen und die Lage der Schaumwände von ölartiger Flüssigkeit bezeichneten in denen sie verteilt waren. Dieselben traten besonders im reflektierten Licht hervor, wie Fig. 184 (Photographie) zeigt.

§ 136. *Oberflächenspannung an der Grenze von wasserarmer und wasserreicherer Leimchromatlösung.* Die in §§ 130 bis 135 beschriebenen Versuche erklären sich in folgender Weise.

Fig. 184.

Leimbichromat im Uhrglas eingetrocknet. Reflektiertes Licht.

Schon Eder[1]) fand 1878, daß nasse gequollene Chromgelatineschichten sehr unempfindlich gegen Licht sind, lufttrockene Schichten eine hohe Empfindlichkeit gegen Licht besitzen und vollkommen über Chlorcalcium getrocknete Chromgelatineschichten wieder weniger lichtempfindlich sind. Chromatgelatine wird bei langem Liegen im Dunkeln oder beim Erhitzen unlöslich, ganz ebenso, als ob sie belichtet worden wäre.

Hiermit in Übereinstimmung bilden sich die Falten oder Schaumwände des Leimchromates beim Eintrocknen (§§ 131

1) J. M. Eder, Handbuch der Photographie, das Pigmentverfahren der Heliogravüre IV. S. p. 328. 1896.

bis 135) für einen bestimmten Wassergehalt besonders leicht aus. Im Lichte schnell, im Dunkeln langsam.

Durch Einwirkung von Kalium- und Ammoniumchromat oder von Kaliumbichromat auf wässerige Gelatine (Lösung oder Gallerte) entsteht im Lichte schnell, im Dunkeln langsam eine braune ölartige wasserarme Leimchromatlösung *A* und eine wasserreiche Leimchromatlösung *B* mit Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze — ähnlich wie bei Leimtannat (§ 97). Die wasserarme Leimchromatlösung *A* ist ein flüssiger Niederschlag, der sich in kurzen Zwischenräumen oder periodisch bildet, und später fest werden kann.

Durch Oxydation der organischen Substanz, welche einen Teil der Chromsäure zu Chromoxyd reduziert (Eder), entsteht eine unlösliche Verbindung von Leim und Chromoxyd, ein Niederschlag. Dieser Niederschlag entsteht im Dunkeln langsam, im Lichte schnell, ist eine kürzere oder längere Zeit flüssig und scheidet sich in Zwischenräumen oder periodisch ab, wie alle Niederschläge (vgl. § 23). Der Niederschlag ist in der wasserarmen Leimlösung *A* stärker löslich, als in der wasserreichen Leimlösung *B*. Die Oberflächenspannung an der Grenze von *A* und *B* hängt vom Leimchromatgehalt der wasserarmen Leimlösung *A* ab. Die ölartige Leimlösung *A* bildet unter dem Einfluß dieser Oberflächenspannung Vegetationen, gerade, kreisförmige und gewundene Röhren mit Anschwellungen und kugelförmigen Köpfen und Querwänden, Blasen und Schaumkammern, wie ich sie früher (§§ 27, 29, 35) beschrieben habe. Unsichtbare Wände von flüssigem Niederschlag können durch Kontaktwirkung die Abscheidung von neuem Niederschlag aus der übersättigten Lösung desselben einleiten und dadurch dicker und sichtbar werden. Bei großem Gehalt an Leimchromat erstarrt die ölartige Flüssigkeit *A* und ist dann nicht mehr in kaltem oder warmem Wasser löslich, quillt aber noch in Wasser auf.

Die röhrenförmigen Äste und Schaumkammern sind mit wasserreicher Leimlösung *B* gefüllt, in der Kaliumchromat leichter löslich ist als in der wasserarmen Leimlösung *A*. Beim Eintrocknen scheiden sich aus der Leimlösung *B* reichlicher als aus der Leimlösung *A* doppeltbrechende Kristalle von Kaliumchromat ab, und lassen noch die (etwas veränderte) Gestalt der Blasen und Schaumkammern erkennen, aus denen

sie entstanden sind. Die Kristalle sind verschieden orientiert, sobald sie durch eine Haut von ölartiger Flüssigkeit *A* voneinander getrennt sind und lassen bei starker Vergrößerung röhrenförmige Hohlräume mit kugelförmigen Anschwellungen erkennen. Die Erscheinungen sind ähnlich denjenigen, welche ich früher bei der Kristallbildung aus alkoholhaltigen wässerigen Salzlösungen eingehend beschrieben habe, und finden wie dort durch die Oberflächenspannung der ölartigen Flüssigkeit *A* ihre Erklärung (§§ 49—57, 60). Nur war der Überzug aus alkoholreicher ölartiger Salzlösung meist unsichtbar und nur an seinen Wirkungen erkennbar, während hier der Überzug von brauner ölartiger, leimchromathaltiger Leimlösung *A* leicht wahrzunehmen ist.

Beim Eintrocknen auf Quecksilber oder Glas zieht sich die wasserarme Leimlösung *A* weniger zusammen, als die wasserreiche Leimlösung *B*, und die verzweigten Äste der Vegetationen mit dicken Röhren und Schaumwänden heben sich bald reliefartig ab von der aus wasserreicher Leimlösung *B* entstandenen dünneren Lamelle.

Bei den Dendriten (Tannenbäumen, Palmenwedeln) setzen sich neue Lamellen von ölartiger Leimlösung *A* an schon vorhandene Lamellen unter verschiedenem Winkel an, je nach der Größe der Oberflächenspannung der alten und neuen Lamellen, die mit dem Chrom- und Wassergehalt der Leimlösungen *A* und *B* wechselt, ähnlich wie bei Silberchromatleim (Fig. 152, § 107 u. fl.) oder Leimtannat (§ 97). Die periodische Abscheidung von ölartigem Leimchromat bedingt eine periodisch wechselnde Konzentration der eintrocknenden Leimlösung und damit wechselnde Neigung der Seitenäste und Nebenäste (Tannennadeln) gegen Hauptstamm und Seitenzweig.

Rechtwinklige Neigung der Seitenäste und Nebenäste beweist, daß sich der neu gebildete Niederschlag an schon erstarrte Wände von ölartigem Niederschlag angesetzt hat, daß dieser Niederschlag also nicht lange flüssig geblieben ist.

Chromoxyd bildet mit Leim einen unlöslichen Niederschlag, verhält sich also ähnlich wie Gerbsäure (§§ 105, 106) und man pflegt auch in der praktischen Photographie zu sagen, daß Chromoxyd auf Gelatine „gerbend“ einwirkt.[1])

1) E. Englisch, Photographisches Kompendium p. 216. 1902.

Ob das ölartige Leimchromat eine chemische Verbindung von Leim und Chromoxyd enthält nach bestimmtem Gewichtsverhältnis, oder nur eine Lösung von Chromoxyd in wasserarmer Leimlösung *A* ist und ob durch Hydrolyse die chemische Verbindung dissoziiert wird, — ähnlich wie bei Leimtannat — oder ob die chromoxydhaltige Leimlösung in anderer Weise verändert wird bei Wasserzusatz, müssen weitere Untersuchungen lehren. Jedenfalls wechseln chemische und physikalische Eigenschaften des Leimchromates wie des Leimtannates mit der Menge Leim, Wasser und Chromsalz, welche gleichzeitig in Berührung sind und mit der Dauer ihrer Einwirkung aufeinander.

Ölartiges Leimchromat aus Gelatine und Kaliumchromat und Ammoniumchromat hat ähnliche Oberflächenspannung und ähnliche Eigenschaften wie Leimbichromat, das aus Leim und Kaliumbichromat erhalten wird.

Leimchromathaltige Leimlösung hat eine Oberflächenspannung gegen wasserreiche Leimlösung oder gegen Wasser. Die Oberflächenspannung von Leimlösung gegen Wasser ist Null, und erhält erst einen merklichen Wert, wenn die Leimlösung Leimchromat enthält. Man hat also anzunehmen, daß die Oberflächenspannung von leimchromatreicher Leimlösung *A* gegen leimchromatarme oder wässerige Leimlösung *B* oder gegen Wasser um so größer ist, je größer der Unterschied des Leimchromatgehaltes in beiden Lösungen *A* und *B* ist.

Dies erklärt die verschiedenen Neigungswinkel der Schaumwände beim Aufquellen des Leimchromates.

Ferner muß sich wässerige Leimlösung oder leimchromatarme Leimlösung *C* an der Grenze von wasserarmer Leimchromatlösung *A* und wasserreicher Leimlösung *B* (oder leimchromatärmerer Leimlösung *B*) ausbreiten. Diese leimchromatarme Leimlösung *C* bildet die helle Hülle der Köpfe der Dendriten oder Schaumkammern beim Aufquellen der eingetrockneten Leimchromatschicht und erzeugt die Ausbreitungswirbel und geradlinigen Bewegungen der Blasen aus ölartiger wasserarmer Leimchromatlösung (§ 130), ähnlich wie bei Leimtannatlösungen verschiedener Konzentration (§§ 97, 98).

§ 137. *Pigmentdruck.* In der praktischen Photographie wird bei dem Swanschen Kopierverfahren mit Pigmentdruck eine mit Kohle oder Farbstoff gefärbte, auf Papier aufgetragene

Gelatineschicht in wässeriger Kalium-Ammoniumchromatlösung gebadet, dadurch sensibilisiert und im Dunkeln getrocknet. Die lichtempfindliche (lufttrockene) Leimchromatschicht wird unter einer Zeichnung belichtet, mit Wasser gewaschen, und die durch das Licht entstandene in warmem Wasser unlösliche Schaummasse gegen eine Papier- oder Glasplatte gedrückt, an der die ölartigen Schaumwände adhärieren und nach Abziehen der ersten Papierplatte durch Baden in warmem Wasser von dem anhängenden noch löslichen Leim befreit werden.

Ein negatives Bild der Zeichnung aus gefärbtem ölartigen Leimchromat, in welchem beide Seiten vertauscht sind, ist dann auf die Papier- oder Glasplatte übertragen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

(Eingegangen 2. Oktober 1903.)

4. *Quantitative Versuche über den Rowlandeffekt; von F. Himstedt.*

(Aus den Freiburger Berichten 14. p. 85. 1903.)

In seiner Dissertation Paris 1901 sowie in mehreren Mitteilungen in den Compt. rend. der Pariser Akademie für 1902 hat Hr. Crémieu eine Reihe von Versuchen beschrieben, durch die er beweisen zu können glaubt, daß die elektrische Konvektion einer elektromagnetischen Wirkung nicht fähig sei, und daß somit die früheren Beobachter bei ihren Arbeiten sich geirrt hätten.[1])

Auf die abweisenden Bemerkungen, welche Hr. Crémieu in seiner Dissertation p. 41 über meine Beobachtungen macht, glaube ich nicht ausführlicher eingehen zu sollen, da sie, soviel ich sehe, alle auf unrichtiger Auffassung bez. Wiedergabe meines Textes beruhen. So schreibt z. B. Hr. Crémieu: „H. observait les élongations et il ne parle pas de déviations permanentes.“ In meiner Arbeit p. 565 heißt es: „Es wurden stets nur definitive Einstellungen abgelesen, nicht Schwingungsbeobachtungen gemacht.“ Ebenso heißt es bei Hrn. Crémieu: „Je ne crois pas que le système magnétique de M. H. pouvait donner pour de pareils courants des impulsions de 40 à 100 mm à 1 Mtr.“ Abgesehen davon, daß es Hrn. Crémieu an der nötigen Unterlage fehlt, die Stärke der in meinem Apparate auftretenden Ströme zu berechnen, ist wieder unzutreffend die Angabe, daß ich in 1 m Skalenabstand beobachtet hätte, — p. 564 l. c. steht deutlich 3 m — und ist ebenso unrichtig die bei gleicher Gelegenheit gemachte Annahme, der Abstand der rotierenden Scheiben von dem Magnetsysteme habe 3 cm betragen, er betrug noch nicht ganz 1,5 cm etc.

1) Rowland, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 211. 1876; W. C. Röntgen, l. c. p. 198. 1885; Rowland und C. T. Hutchinson, Phil. Mag. 27. p. 445. 1889; F. Himstedt, Wied. Ann. 38. p. 560. 1889.

Nur in einem Punkte stimme ich mit Hrn. Crémieu überein, daß nämlich eine endgültige Entscheidung der Frage nur durch quantitative Messungen erfolgen kann. Ich hatte solche schon 1889 vorbereitet, habe aber außer aus andern Gründen auch um deswillen damals Abstand davon genommen, weil solche Messungen, wie bekannt, im gleichen Jahre von Rowland und Hutchinson ausgeführt waren, und nach meiner Ansicht in überzeugender Weise das Vorhandensein des Rowlandeffektes dargetan hatten.

Gegenüber den wieder und wieder und immer lauter und bestimmter ausgesprochenen Behauptungen des Hrn. Crémieu, es existiere absolut keine elektromagnetische Wirkung der elektrischen Konvektion, schien es mir jedoch unerläßlich, von neuem möglichst sorgfältige quantitative Versuche auszuführen.

Bei der Konstruktion des Apparates habe ich mich eng an die Versuchsanordnung angeschlossen, welche bei meinen früheren Versuchen gute Resultate ergeben hatte.[1]) Mit einem von Hrn. Mechaniker Elbs hier nach meinen Angaben ausgeführten Apparate habe ich vom 2. Oktober 1901 bis 18. Februar 1902 Versuche angestellt, deren Resultate, die weiter unten mitgeteilt werden sollen, eine so gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zeigen, wie man sie bei so schwierigen Messungen nur erwarten kann. Trotzdem entschloß ich mich, weil mich die Anordnung in zwei später zu erwähnenden Punkten nicht ganz befriedigte, einen neuen Apparat bauen zu lassen, mit dem ich vom 18. September 1902 bis 13. April 1903 Versuche anstellte. Die vollständige Übereinstimmung der Resultate dieser Versuche mit denen der oben erwähnten scheint mir um so beweisender zu sein, als außer dem Beobachtungsfernrohr tatsächlich auch kein einziger Apparatenteil beiden Versuchsreihen gemeinsam ist.

Wenngleich nun inzwischen schon eine ganze Reihe von Physikern[2]) durch ihre Arbeiten nachgewiesen haben, daß ent-

1) F. Himstedt, l. c. p. 564.

2) Bekannt geworden sind mir die Arbeiten der Herren Wilson, Adams, Pender, Eichenwald.

gegen der Behauptung des Hrn. Crémieu der Rowlandeffekt tatsächlich vorhanden ist, so glaube ich meine Rechnungen und Beobachtungen dennoch in extento mitteilen zu sollen, weil ich der Ansicht bin, daß in einer so wichtigen Frage eine quantitative Bestätigung stets ihren Wert behält.

Beschreibung des Apparates.

Fig. 1 gibt einen Vertikalschnitt durch den zweiten der oben erwähnten Apparate. *M M* ist das Magnetometer. Das astatische Nadelpaar war einem Dubois-Rubensschen Galvanometer entnommen und an einem dünnen Aluminiumdrahte

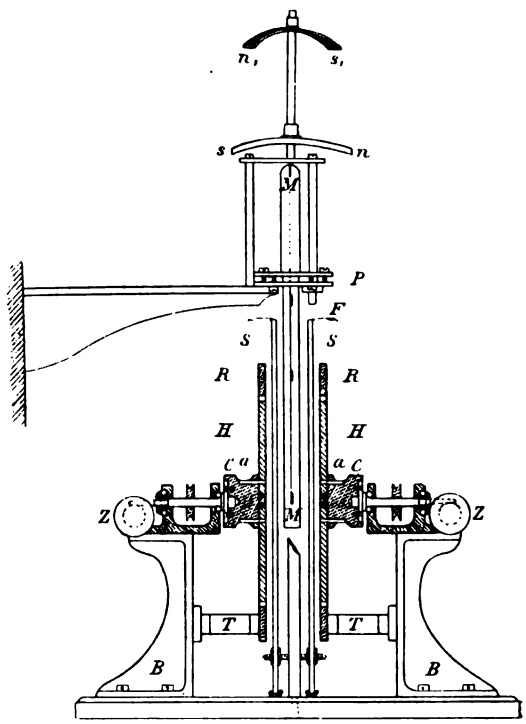


Fig. 1.

so befestigt, daß der Mittelpunkt des unteren Magnets mit dem Mittelpunkte der Scheiben *H* zusammenfiel, der obere Magnet ca. 1 cm über dem oberen Rande der rotierenden Scheiben sich befand. Der Kupferdämpfer bestand aus zwei

Streifen von Elektrolytkupfer je 0,6 cm dick, 5 cm breit, ca. 25 cm lang, die, nachdem in ihnen die Aussparungen für das Magnetsystem und den Spiegel angebracht waren, aufeinander geschraubt und luftdicht verkittet waren. Der Kupferdämpfer war angelötet an die Messingplatte *P*, welche mit sechs Zug- und Druckschrauben auf einem Träger befestigt war, der, wie K. R. Koch[1]) beschrieben hat, in einer Mauerecke der Hauptfundamentmauern des hiesigen physikalischen Institutes quer übers Eck, also in beide zusammenstoßende Mauern eingemauert war. Das Magnetsystem war an einem ca. 15 cm langen sehr feinen Quarzfaden aufgehängt, und über die Aufhängung war ein dicht schließendes Messingrohr geschoben, so daß das System vollkommen dicht in ein Metallgehäuse eingeschlossen war, das nur bei *F* ein nicht ganz 2 cm großes Fenster für die Spiegelablesung besaß. Trotzdem bei sorgfältigster Untersuchung sich gezeigt hatte, daß das System in dieser zur Erde abgeleiteten Hülle vollkommen von äußeren elektrostatischen Wirkungen geschützt war, habe ich bei den meisten Versuchen das Glasfenster noch mit einem Drahtgitter bedeckt, durch dessen Maschen hindurch bei guter Beleuchtung der Skale die Ablesung mit dem Fernrohr keine Schwierigkeiten bot. Bei einigen Versuchen habe ich auf das Fenster einen Metalltrichter von solcher Länge aufgesetzt, daß sein Ende weit über die geladenen Scheiben hinausragte.

Die gekreuzten Richtmagnete gestatteten, die Schwingungsdauer des Systems stets auf ca. 30 Sek. einzustellen. Die Dämpfung war dann noch nicht ganz aperiodisch.

Die rotierenden Scheiben *H* aus Hartgummi hatten bei dem ersten Apparate einen Durchmesser von 20 cm, bei dem zweiten von 30 cm, und waren 5 mm dick. Sie waren auf die Hartgummizylinder *C* von ca. 6 cm Durchmesser und 6 cm Länge aufgeschraubt, und in diesen letzteren waren, wie aus der Figur zu ersehen, die Metallachsen befestigt. Diese bestanden aus Hartguß und liefen in einem Kugellager, dessen Kugeln aus Neusilber hergestellt waren. An dem Ende jeder

1) K. R. Koch, Relative Schweremessungen, ausgeführt im Auftrag des Kgl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens, p. 358. Stuttgart 1901.

Achse befand sich ein Zählwerk *Z*. Durch jede der Hartgummischeiben hindurch sind in die Hartgummizylinder je sechs Stifte *a* eingeschraubt, die vorn eben mit der Scheibe abgedreht sind, hinten aber, dadurch daß eine Rinne in den Zylinder eingedreht ist, sozusagen einen Kollektor bilden, auf welchem der Zuleitungsdraht für die Ladung der Scheiben leicht federnd schleift. Die Hartgummischeiben sind auf der Innenseite versilbert und diese Versilberung ist zunächst in sechs ganz voneinander isolierte Sektoren geteilt, so daß jeder Sektor mit einem der oben erwähnten Stifte in Verbindung steht. Jeder Sektor ist dann noch einmal durch drei radiale Schnitte in Unterabteilungen geteilt, die aber alle nahe dem Mittelpunkte der Scheibe zusammenhängen. *R* ist ein Messingring, der als Schutzring die rotierenden Scheiben umgibt und durch Träger wie *T* fest mit den Böcken des Achsenlagers verschraubt ist.

SS sind zwei Spiegelglasplatten von 40×50 cm, welche durch sechs Schrauben (wie eine in der Figur angedeutete) gehalten, genau vertikal und damit den ebenfalls vertikal stehenden rotierenden Scheiben parallel gestellt werden konnten. Rings am Rande war an die Spiegelglasscheiben, wie in der Figur am oberen Rande angedeutet, ein steifer Karton angeklebt, welcher den enormen Luftzug, der bei der Rotation der Scheiben entstand, abfangen und von dem Magnetsystem abhalten sollte. Auf der den Hartgummischeiben zugekehrten Seite waren die Spiegelglasplatten versilbert, und war die Versilberung in derselben Weise wie bei den rotierenden Scheiben durch radiale Schnitte in Unterabteilungen geteilt. Die Ableitung der Versilberung zur Erde erfolgte durch die Halteschrauben. Auf der dem Magnetsysteme zugekehrten Seite war auf jede Glasplatte ein Staniolring von 2 mm Breite und 10,3 cm Radius aufgeklebt, der nach Art des Ringes einer Tangentenbussole mit zwei dicht nebeneinander laufenden Stromzuleitungen versehen war.

Durch Verstellen der Befestigungsschrauben der Glasplatten war es möglich, den Abstand der Kreisringe von dem Magnetsystem auf jeden gewünschten Betrag einzustellen. Unabhängig hiervon konnte durch Verstellen der Lagerböcke *B* der Abstand jeder Hartgummischeibe von der ihr gegenüber-

stehenden Spiegelglasplatte, also die Dicke des Dielektrikums zwischen diesen Kondensatorplatten reguliert werden. Mit Ausnahme der Hartgummiplatten und ihrer Schutzringe waren alle Apparatenteile, und zwar jeder für sich, durch gute Leitungen an Erde gelegt. Der Antrieb der Scheiben erfolgte durch einen einpferdigen Elektromotor, der, in 11 m Entfernung aufgestellt, auf ein Vorgelege arbeitete, von dem aus Schnurläufe über die an der Achse des Apparates gezeichneten Rollen führten. Dieselben waren nicht aus Metall, sondern aus Hartgummi, weil sich gezeigt hatte, daß bei diesem Material das Gleiten der Schnüre bedeutend geringer und infolgedessen die Rotation der Scheiben viel gleichmäßiger war. Der Apparat, mit dem die erste Versuchsreihe ausgeführt wurde, unterschied sich von dem eben beschriebenen in folgenden Punkten:

1. die Scheiben hatten 10 cm statt 15 cm Radius,
2. die Schutzringe um die Scheiben fehlten,
3. die Staniolringe auf den Innenseiten der Spiegelglasplatten fehlten. Um die Empfindlichkeit des Magnetsystems zu bestimmen, mußten nach jedem Rotationsversuche die Böcke mit den Hartgummischeiben entfernt und an ihrer Stelle zwei Drahtringe aufgestellt werden, durch welche ein das Magnetsystem ablenkender Strom von bekannter Stärke geschickt werden konnte,
4. die Rotationsapparate hatten Zapfenlager, nicht wie hier Kugellager.

Berechnung eines Versuches.

Wir bezeichnen das magnetische Moment des unteren Magneten unseres astatischen Paares mit M_1, das des oberen mit M_2 und nennen die Kraft, welche ein Strom von 1 Amp., der den auf die Innenseite der Spiegelglasplatte geklebten Staniolring (bez. den eben erwähnten, an die Stelle der rotierenden Scheibe gestellten Drahtring) durchfließt, parallel der Achse dieses Ringes auf einen Einheitspol an der Stelle von M_1 bez. M_2 ausübt, Z_1 bez. Z_2. Wird das Magnetsystem dann durch einen Strom von der Stärke i um den Winkel g abgelenkt, so gilt offenbar die Gleichung

$$(1) \qquad i\,(M_1 Z_1 + M_2 Z_2)\cos g = (M_1 - M_2) H \sin g,$$

wo H die Horizontalintensität ist.

Bezeichnen wir ebenso die Kraft, welche die geladenen rotierenden Scheiben auf einen Einheitspol am Orte des unteren bez. des oberen Magneten senkrecht zum Meridian ausüben mit Z_1 und Z_2 und nennen die bei einem Versuche beobachtete Ablenkung des Magnetsystems γ, so gilt entsprechend

$$(2) \qquad (M_1 Z_1 + M_2 Z_2) \cos\gamma = (M_1 - M_2) H \sin\gamma,$$

folglich

$$i = \frac{\operatorname{tg} g}{\operatorname{tg}\gamma} \frac{M_1 Z_1 + M_2 Z_2}{M_1 Z_1 + M_2 Z_2}.$$

Setzen wir $M_2 = M_1 (1 - a)$ wo a ein echter und zwar kleiner Bruch sein wird, so können wir schreiben:

$$i = \frac{\operatorname{tg} g}{\operatorname{tg}\gamma} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} \left\{ 1 - a \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \right\}$$

Bei der Wahl der Dimensionen der in Betracht kommenden Apparatenteile war nun Bedacht darauf genommen, daß die mit a multiplizierte Klammergröße höchstens den Wert 0,08 hatte. Anderseits waren die Magnete des astatischen Paares mit Sorgfalt so gleich gemacht, daß a, wie direkte magnetometrische Messungen, die vor wie nach den Versuchen ausgeführt wurden, ergaben, kleiner als 0,002 war. Bei der hier angestrebten bez. erreichbaren Genauigkeit darf also der Wert der großen Klammer gleich *1* gesetzt werden. Z_1 und Z_2 lassen sich, wie im folgenden gezeigt werden wird, auf die Form bringen

$$Z_1 = \frac{P_1}{v}, \quad Z_2 = \frac{P_2}{v}$$

wo v das Verhältnis der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten bez. die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für diese Größe aufgelöst ergibt mithin die obige Gleichung

$$(3) \qquad v = \frac{1}{i} \frac{\operatorname{tg} g}{\operatorname{tg}\gamma} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Alle im folgenden mitzuteilenden Versuche sind benutzt, um mit Hilfe dieser Gleichung die Größe v zu berechnen.

Berechnung von Z_1 und Z_2.
Drehungsmoment eines Kreisstromes auf das astatische Nadelpaar.

Die Ebene des Stromes falle zusammen mit der XY-Ebene, Fig. 2, der untere Magnet liege auf der Z-Achse, habe also die Koordinaten 0, 0, c, der obere Magnet senkrecht darüber habe die Koordination 0, b, c. Auf einen im Punkte 0, 0, c befindlichen Magnetpol 1 übt der Strom von der Stärke 1 eine Kraft aus, deren Komponente parallel der Z-Achse sich berechnet zu

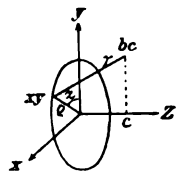


Fig. 2.

$$(4) \qquad Z_1 = \frac{2\pi\varrho^2}{(\varrho^2 + c^2)^{3/2}},$$

wo ϱ der Radius des Stromkreises ist. Entsprechend ergibt sich die Z-Komponente anf einen Einheitspol im Punkte 0, b, c

$$(5) \qquad Z_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho(\varrho - b\cos\alpha)\, d\alpha}{(\varrho^2 - 2\varrho b\cos\alpha + b^2 + c^2)^{3/2}}.$$

Um dieses Integral auf die Legendreschen Formen der elliptischen Integrale zurückzuführen, setzen wir

$$\alpha = \pi - 2\varphi, \quad (\varrho + b)^2 + c^2 = s^2, \quad \frac{4\varrho b}{s^2} = k^2,$$
$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \Delta.$$

Dann wird

$$Z_2 = \frac{2\varrho(\varrho + b)}{s^2}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{4\varrho b}{s^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}.$$

Es ist

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) = \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3} - \frac{\sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^3} + \frac{\Delta^2 - 1}{k^2\Delta^3} - \frac{\sin^2\varphi}{\Delta},$$
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta^3}\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) + \frac{\Delta}{k^2}.$$

Integriert man beide Seiten zwischen 0 und π, so wird die linke Seite Null und man erhält mithin

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{k^2 - 1}\int_0^{\pi}\Delta\, d\varphi = -\frac{2}{k^2 - 1}E.$$

Weiter ist

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^2} = -\int_0^\pi \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{k^2\Delta^3}\, d\varphi + \int_0^\pi \frac{d\varphi}{k^2\Delta^3}$$

$$= -\int_0^\pi \frac{d\varphi}{k^2\Delta} + \int_0^\pi \frac{d\varphi}{k^2\Delta^3} = -\frac{2}{k^2}K - \frac{2}{k^2(k^2-1)}I$$

Durch Einsetzen dieser Werte läßt sich Z_2 in die F
) bringen

$$(6) \qquad Z_2 = \frac{2}{s^3(k^2-1)}\left[(b^2+c^2+\varrho^2)E - (c^2+[\varrho-b]^2)K\right].$$

Berechnung von Z_1 und Z_2.
Drehungsmoment der rotierenden geladenen Scheiben auf astatische Nadelpaar.

Nach Formel (4) p. 107 ist die Z-Komponente der K
mit welcher ein Kreisstrom von der Intensität i auf e
magnetischen Einheitspol im Punkte 0, 0, z wirkt,

$$Z_1 = \frac{2\pi\varrho^2 i}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}}.$$

Bezeichnen wir die Dichte der Ladung auf der Scl
mit ε, die Anzahl der Umdrehungen in der Sekunde mit n
mit v das Verhältnis der elektrischen Einheiten, so haber
zu setzen

$$i = 2\pi\varrho\, d\varrho\, \frac{\varepsilon . n}{v}$$

und erhalten dann für die von der ganzen Scheibe par
der Z-Achse ausgeübte Kraft

$$(7) \quad Z_1 = \frac{4\pi^2\varepsilon n}{v}\int_0^R \frac{\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{4\pi^2\varepsilon n}{v}\left\{\frac{R^2+2z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2z\right\} =$$

wo R der Radius der Scheibe ist.

---

1) Nach G. Wiedemann, Elektrizität 3. p. 225. ist diese
duktion auf die Normalform schon von Secchi ausgeführt worden.

Um die entsprechende Kraft auf einen Einheitspol im Punkte 0, b, z zu erhalten, gehen wir aus von der Formel (5)

$$Z_2 = i \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\,(\varrho - b\cos\alpha)\,d\alpha}{(\varrho^2 - 2\,\varrho\,b\cos\alpha + b^2 + z^2)^{3/2}},$$

setzen wieder

$$i = 2\,\pi\,\varrho\,d\varrho\,\frac{\varepsilon n}{v}$$

und integrieren nach ϱ zwischen den Grenzen 0 und R

$$(8) \qquad Z_2 = \frac{2\,\pi\,\varepsilon n}{v} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2\,(\varrho - b\cos\alpha)\,d\varrho\,d\alpha}{(\varrho^2 - 2\,\varrho\,b\cos\alpha + b^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Es gelingt, auch dieses Integral auf die Legendreschen Normalformen zurückzuführen. Ich verdanke die Angabe der hierzu erforderlichen Rechnungen der Freundlichkeit des Hrn. Prof. Löwy hier.

Die Integration nach ϱ bietet keine Schwierigkeiten und wir erhalten, wenn wir setzen

$$(R^2 - 2\,R\,b\cos\alpha + b^2 + z^2)^{1/2} = Q.$$

$$\frac{Z_2}{\frac{2\pi\,\varepsilon\,n}{v}} = -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Q} + 2 \int_0^{2\pi} Q\,d\alpha - \int_0^{2\pi} (b^2 + z^2)^{1/2}\,d\alpha$$

$$+ 2\,b \int_0^{2\pi} \cos\alpha \log (R - b\cos\alpha + Q)\,d\alpha$$

$$- 2\,b \int_0^{2\pi} \cos\alpha \log (-b\cos\alpha + \sqrt{b^2 + z^2})\,d\alpha.$$

Bezeichnen wir die Integrale der Reihe nach mit A_1 bis A_5, so erhalten wir durch die Substitution $\alpha = \pi - 2\,\varphi$

$$A_1 = \frac{-4\,R^2}{\sqrt{(R+b)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{-4\,R^2}{\sqrt{(R+b)^2 + z^2}} \cdot K,$$

wo

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\;k^2 = \frac{4\,R\,b}{(R+b)^2 + z^2}.$$

Durch dieselbe Substitution erhalten wir

$$A_2 = 8\sqrt{(R+b)^2+z^2}\int_0^{\pi/2} \Delta\, d\varphi = 8\sqrt{(R+b)^2+z^2}\,.\,E\,.$$

Ganz direkt ergibt sich

$$A_3 = -\,4\pi\sqrt{b^2+z^2}\,.$$

Nicht so leicht gestaltet sich die Auswertung von A_4. Z nächst erhalten wir durch partielle Integration

$$A_4 = \Big[2b\sin\alpha\log(R - b\cos\alpha + Q)\Big]_0^{2\pi} - 2b^2\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha\left(1+\frac{R}{Q}\right)d}{R - b\cos\alpha + Q}$$

Das erste Glied hat den Wert Null und das zweite l sich schreiben

$$A_4 = 2b^2\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha\left[-b\cos\alpha + \frac{bR\cos\alpha - b^2 - z^2}{Q}\right]d\alpha}{b^2\sin^2\alpha + z^2}\,.$$

Von dem ersten Gliede dieses Ausdruckes läßt sich lei zeigen, daß es bei der Integration den Wert Null annim mithin bleibt

$$A_4 = 2b^2\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha}{Q}\,\frac{bR\cos\alpha - b^2 - z^2}{b^2\sin^2\alpha + z^2}\,d\alpha\,.$$

Indem man im Nenner $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ setzt und d die Division mit $b^2 + z^2 - b^2\cos^2\alpha$ ausführt, erhält man

$$A_4 = 2Rb\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{Q} - 2(b^2+z^2)\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Q}$$

$$+\,2b^2\int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{c^2 R}{b} - \cos\alpha - z^2 - \frac{z^4}{b^2}\right)d\alpha}{Q\,(b^2\cos^2\alpha - b^2 - z^2)}\,.$$

Durch die Substitution $\alpha = \pi - 2\varphi$ wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{Q} = \int_{\frac{+\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi \cdot 2\, d\varphi}{(R^2 + 2Rb\cos 2\varphi + b^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$= 2\int_{\frac{+\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} \frac{(1-2)\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{-4K}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}}$$

$$+ \frac{8}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Ebenso erhalten wir für das zweite der obigen Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Q} = \frac{4K}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}}.$$

Bei dem dritten Integrale zerlegen wir in Partialbrüche

$$2b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{z^2 R}{b}\cos\alpha - z^2 - \frac{z^4}{b^2}\right) d\alpha}{Q(b^2\cos^2\alpha - b^2 - z^2)} = 2b^2(\lambda_1 M + \lambda_2 N),$$

wo dann

$$2b^2\lambda_1 = z^2\left(R + \sqrt{b^2+z^2}\right), \quad 2b^2\lambda_2 = z^2\left(R - \sqrt{b^2+z^2}\right),$$

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Q(b\cos\alpha + \sqrt{b^2+z^2}}, \quad N = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Q(b\cos\alpha - \sqrt{b^2+z^2}}.$$

Setzt man wieder $\alpha = \pi - 2\varphi$, so läßt sich schreiben

$$M = \frac{4}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}\,(\sqrt{b^2+z^2}-b)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}-b}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$N = \frac{-4}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}\,(\sqrt{b^2+z^2}+b)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}+b}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin 2\varphi}}.$$

Nach Enneper, Elliptische Funktionen p. 179, Gleichung (14), gilt für $\varphi = \pi/2$ die Beziehung

$$0 = \frac{-k^2\sin^2\alpha}{1-k_1^2\sin^2\alpha} F(\pi/2) + \Pi\left(\operatorname{cotg}^2\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{k_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-k_1^2\sin^2\alpha}\Pi\left(-1+k_1^2\sin^2\alpha, \frac{\pi}{2}\right).$$

Setzen wir unter dem Integralzeichen in M:

$$\operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}-b},$$

so erhalten wir durch Benutzung dieser Relation

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}+b}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{k^2\sin^2\alpha}{1-k_1^2\sin^2\alpha} K + \frac{k_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-k_1^2\sin^2\alpha}\Pi\left(-1+k_1^2\sin^2\alpha, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nun läßt sich aber schreiben

$$\Pi\left(-1+k_1^2\sin^2\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1-(1-k_1^2\sin^2\alpha)\sin^2\varphi]\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi\,[1-(1-k_1^2\sin^2\alpha)\sin^2\varphi]}{[1-(1-k_1^2\sin^2\alpha)\sin^2\varphi]\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi\,[1-k_1^2\sin^2\alpha]\sin^2\varphi}{[1-(1-k_1^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi]\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= K + (1-k_1^2\sin^2\alpha)\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{[1-(1-k_1^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und da dieses letzte Integral nach Enneper, p. 189, Gleichung (1) den Wert hat

$$\frac{\frac{\pi}{2} - [K.E(\alpha, k_1) + E.F(\alpha, k_1) - K.F(\alpha, k_1)]}{k_1^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\alpha}},$$

so erhalten wir schließlich

$$M = \frac{4 \sin\alpha}{(\sqrt{b^2 + z^2} - b)\sqrt{(R+b)^2 + z^2}} \left[\sin\alpha . K + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\alpha}} \left\{ \frac{\pi}{2} - K.E(\alpha, k_1) - E.F(\alpha, k_1) + K.F(\alpha, k_1) \right\} \right].$$

In ganz ähnlicher Weise erhalten wir das entsprechende Integral in dem Werte für N, indem wir $\alpha = \pi - 2\varphi$ und dann

$$\frac{2b}{\sqrt{b^2 + z^2} + b} = 1 - k_1^2 \sin^2\gamma$$

setzen. Es wird dann

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{2b}{\sqrt{b^2 + z^2} + b} \sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1 - (1 - k_1^2 \sin^2\gamma)\sin^2\varphi]\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= K + (1 - k_1^2 \sin^2\gamma) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{[1 - (1 - k_1^2 \sin^2\gamma)\sin^2\varphi]\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

wofür wir nach Enneper, p. 189 schreiben können

$$K + \frac{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}}{k_1^2 \sin\gamma \cos\gamma} \left\{ \frac{\pi}{2} - K.E(\gamma, k_1) - E.F(\gamma, k_1) + K.F(\gamma, k_1) \right\},$$

so daß wir schließlich finden

$$N = \frac{-4}{(\sqrt{b^2 + z^2} + b)\sqrt{(R+b)^2 + z^2}} \left[K + \frac{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\gamma}}{k_1^2 \sin\gamma \cos\gamma} \left\{ \frac{\pi}{2} - K.E(\gamma, k_1) - EF(\gamma, k_1) + K.F(\gamma, k_1) \right\} \right].$$

Stellen wir alle erhaltenen Ausdrücke zusammen, so ergibt sich

$$A_4 = \frac{-8Rb}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}} \cdot K + 4\sqrt{(R+b^2)+z^2}\,(K-E)$$

$$- \frac{8(b^2+z^2)}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}} \cdot K + \frac{4z^2(R+\sqrt{b^2+z^2})\sin\alpha}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}(\sqrt{b^2+z^2}-b)}$$

$$\left[\sin\alpha \,.\, K + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\alpha}}\right.$$

$$\left\{\frac{\pi}{2} - K\,.\,E\,.\,(\alpha, k_1) - EF(\alpha, k_1) + K\,.\,F(\alpha, k_1)\right\}$$

$$- \frac{4z^2(R-\sqrt{b^2+z^2})}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}(\sqrt{b^2+z^2}+b)}\left[K + \frac{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\gamma}}{k_1^2\sin\gamma\cos\gamma}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{\pi}{2} - K\,.\,E(\gamma, k_1) - EF(\gamma, k_1) + K\,.\,F(\gamma, k_1)\right\}\right]$$

Das letzte Integral

$$A_5 = -2b\int_0^{2\pi} \cos\alpha \log(-b\cos\alpha + \sqrt{b^2+z^2})\,d\alpha$$

geht durch partielle Integration über in

$$A_5 = -2b\left[\sin\alpha \log(\sqrt{b^2+z^2} - b\cos\alpha)\right]_0^{2\pi}$$

$$+ 2b^2\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{b^2+z^2}-b\cos\alpha}.$$

Das erste Glied wird durch Einsetzen der Grenzen zu Null, das noch bleibende Integral läßt sich auf die Form bringen

$$A_5 = 2b\int_0^{2\pi} \cos\alpha\,d\alpha + 2\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2+z^2}\,.\,d\alpha - 2\int_0^{2\pi} \frac{z^2\,d\alpha}{\sqrt{b^2+z^2}-b\cos\alpha}$$

so daß wir erhalten

$$A_5 = 4\pi\sqrt{b^2+z^2} - 4\pi z.$$

Stellen wir die Werte für A_1 bis A_5 zusammen, so ergibt sich endlich

$$Z_2 = 2\pi \frac{\varepsilon n}{v} \cdot S = \frac{P_2}{v}. \tag{9}$$

$$S = 4\sqrt{(R+b)^2+z^2}\,.\,E - \frac{4(b^2+z^2)}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}} \cdot K - 4\pi\,.\,z$$

$$+ \frac{4z^2(R+\sqrt{b^2+z^2})\sin\alpha}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}(\sqrt{b^2+z^2}-b)}\left[\sin\alpha\,.\,K + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\alpha}}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{\pi}{2} - K\,.\,E(\alpha, k_1) - E\,.\,F\,.(\alpha, k_1) + K\,.\,F(\alpha, k_1)\right\}\right]$$

$$- \frac{4z^2(R-\sqrt{b^2+z^2})}{\sqrt{(R+b)^2+z^2}(\sqrt{b^2+z^2}+b)}\left[K + \frac{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\gamma}}{k_1^2\sin\gamma\cos\gamma}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{\pi}{2} - K\,.\,E(\gamma\,k_1) - E\,.\,F(\gamma\,k_1) + K\,.\,F(\gamma\,k_1)\right\}\right],$$

wobei

$$k^2 = \frac{4Rb}{(R+b)^2+z^2}, \quad k^2 + k_1^2 = 1, \quad \sin\vartheta_1 = k_1,$$

$$\operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}-b}, \quad 1 - k_1^2\sin^2\gamma = \frac{2b}{\sqrt{b^2+z^2}+b}.$$

Erste Versuchsreihe.

Bei dem ersten Apparate hatten die in die Rechnung eingehenden Größen die folgenden Werte: Abstand der Magnete des astatischen Paares voneinander $b = 11{,}5$ cm. Radius der Kreisringe für konstanten Strom $\varrho = 8{,}25$ cm. Radius der rotierenden Scheiben $R = 9{,}8$ cm. Abstand derselben von der Ebene des Magnetsystems $z = 2{,}1$ cm.

Die Dicke der Luftschicht zwischen der Versilberung der Glasplatten und den rotierenden Scheiben, die variiert wurde, ist in Zentimeter gegeben und mit d bezeichnet.

Das Potential, auf welches die Scheiben geladen wurden, ist in Volt angegeben und unter V aufgeführt. Die in den Formeln vorkommende Dichte der Scheibenladung ergibt sich dann $\varepsilon = V/4\pi d$.

Die Tourenzahl in der Minute ist unter n gegeben. Unter g ist der Doppelausschlag in Millimeter angegeben, welcher am Magnetsystem beobachtet wurde, wenn der Strom i Amp. in den zwei erwähnten Kreisringen, welche an die Stelle der rotierenden Scheiben gebracht werden konnten, kommutiert

wurde. Entsprechend unter γ die durch die Scheiben hervorgebrachte kommutierte Ablenkung.

Nr.	d	V	n	g	$i \cdot 10^4$	γ	$v \cdot 10^{-10}$
1	0,50	6000	4700	63,8	0,66	24,3	3,24
2	0,52	5100	5320	52,7	0,66	19.8	3,03
3	0,55	4360	5450	53,4	0,66	18,6	2,70
4	0,55	4500	5280	55,0	0,66	16,8	3,08
5	0,6	3930	5400	32,7	0,66	8,7	2,91
6	0,6	4140	5530	33,1	0,66	8,8	3,15
7	0,6	4770	6770	32,6	0,66	12,9	2,96
8	0,4	4130	6360	32,6	0,66	15,8	2,95
9	0,26	3110	7000	33,9	0,66	19,0	3,29
10	0,26	3150	6940	34,0	0,66	20,1	3,10
						Mittel	3,04

Zu den vorstehenden Beobachtungen ist das Folgende zu bemerken. Um die Scheiben zu laden, wurde, da keine ausreichende Hochspannungsbatterie vorhanden war, eine Vosssche Influenzmaschine mit zwei beweglichen Platten von 50 cm Durchmesser benutzt. Dieselbe wurde durch einen kleinen Elektromotor in dauernde schnelle Rotation versetzt, und ihre Pole wurden mit der inneren bez. äußeren Belegung einer aus sechs großen Flaschen (40 cm hohe Belegung) bestehenden auf Paraffinklötzen gut isolierten Leydener Batterie verbunden. Die Leitung, welche zu den Kollektoren der zu ladenden rotierenden Scheiben führte, konnte mittels eines passenden Kommutators je nach Wunsch an die äußere oder innere Belegung der Flaschenbatterie gelegt werden. Die Höhe des Potentiales wurde mit einem Siemensschen elektrostatischen Voltmeter gemessen. Um die Batterie auf ein bestimmtes konstantes Potential laden zu können, war dem Knopfe einer der parallel geschalteten Flaschen gegenüber ein mikrometrisch verstellbarer, zur Erde abgeleiteter Spitzenkamm [1]) aufgestellt. Bei dieser Anordnung zeigten jedoch die beiden Belegungen der Batterie Spannungen, die um mehrere Hundert Volt von-

1) Es war dieselbe Anordnung, welche die Herren Sieveking und Tamm bei ihren Arbeiten im hiesigen Institute benutzt hatten (Ann. d. Phys. **1.** p. 299. 1900 und **6.** p. 259. 1901.

einander verschieden waren. Erst als sowohl von der inneren wie von der äußeren Belegung durch je einen Spitzenkamm abgesaugt wurde, gelang es, durch passende Regulierung der Entfernungen auf den Belegungen angenähert gleich hohe Potentiale zu erhalten.

Bei jedem Versuche wurde zuerst die Isolation geprüft. Die Scheiben wurden geladen, von der Flaschenbatterie abgetrennt und am Elektrometer kontrolliert, daß die Spannung längere Zeit hindurch praktisch vollkommen konstant blieb. Darauf wurden die wieder an die Flaschenbatterie angelegten Scheiben in gleichmäßige aber ganz langsame Rotation (eine Umdrehung in 6 Sek.) versetzt und festgestellt, daß weder hierbei noch beim Kommutieren der Ladung eine Ablenkung der Magnete hervorgerufen wurde. Fände ein Ausströmen der Elektrizität aus der Scheibe nach den zur Erde abgeleiteten Spiegelglasplatten hin, oder ein Fließen der Elektrizität von dem einen Sektor nach dem anderen hin statt, welches eine Ablenkung des Magnetsystems hervorzubringen vermöchte, so müßte dies auch bei langsamer Rotation sich geltend machen. Es war dies aber bei meinen Apparaten nie der Fall.

Hierauf wurden die Scheiben wieder entladen und in die gewünschte schnelle Rotation versetzt. Hierdurch fand bei diesem ersten Apparate stets eine Verlegung der Ruhelage des Magnetsystems statt, die bei den einzelnen Versuchen 20—40 mm an der Fernrohrskala betrug. Hatte das Magnetsystem nach 3—4 Min. die neue Ruhelage eingenommen und behielt diese bei, solange die Scheiben rotierten, so wurde ein Versuch ausgeführt. Änderte sich dagegen — was anfangs, ehe ich den später anzugebenden Grund kannte, nicht selten vorkam —, die Ruhelage des Magnetsystems nach Verlauf von 4 Min. noch weiter, so wurde der Versuch abgebrochen, auch dann, wenn diese Änderung so gleichmäßig war, daß sie aus den kommutierten Ablenkungen sich würde herausgehoben haben.

Hatte das Magnetsystem eine neue, konstante Ruhelage eingenommen, so wurden die Scheiben geladen, die neue Einstellung abgelesen, die Ladung kommutiert, wieder abgelesen etc. Ich lasse als Beispiel hier die Ablesungen bei dem ersten der obigen Versuche folgen.

Ruhelage bei ruhenden Scheiben 503,2. Ruhelage bei rotierenden Scheiben 469,0.

Ablesungen:

456,9	456,8	456,6	456,6	457	456,8	457
481,1	481,5	481,0	480,8	480,7	481,3	

Kommutierte Ablenkung im Mittel $\beta = 24{,}3$.

Bei den Versuchen mit ungeraden Nummern entsprach Rotationsrichtung der Scheiben, vom Fernrohr aus gesehen, der Uhrzeigerbewegung, bei den geraden Nummern war sie entgegengesetzt.

Mit der Anordnung der Versuche 1—4 habe ich Kontrollversuche ausgeführt in der Weise, daß ich die beiden Scheiben in entgegengesetzter Richtung rotieren ließ, im übrigen aber genau wie bei den anderen Versuchen verfuhr. Ich habe nie eine Ablenkung erhalten, die einen Skalenteil überschritten hätte, und die minimalen Ablenkungen, die eintraten, lassen sich sehr wohl aus einer ungleichen Rotationsgeschwindigkeit oder Unsymmetrien in der Aufstellung der beiden Scheiben erklären. Wenn man bedenkt, daß in die Berechnung von v eine große Anzahl von Einzelmessungen eingehen, die, wie z. B. die Bestimmung von d und von z, keiner großen Genauigkeit fähig sind, so wird man zugestehen müssen, daß die Übereinstimmung der für v gefundenen Werte untereinander sowohl wie mit dem wahren Werte von $v = 3 \cdot 10^{10}$ eine durchaus genügende ist.

Ich würde es deshalb auch bei den vorstehenden Beobachtungen haben bewenden lassen, wenn nicht die Beobachtungen, wie schon erwähnt, in zwei Punkten mich unbefriedigt gelassen hätten. Der eine Punkt war der, daß das Magnetsystem eine neue Ruhelage einnahm, wenn die Scheiben in schnelle Rotation versetzt wurden, und, was weit wichtiger, daß diese neue Ruhelage bei einigen Versuchen ganz konstant wurde, sobald die Scheiben ihre normale Geschwindigkeit erreicht hatten, bei anderen dagegen fortgesetzten Änderungen unterworfen war.

Nach langem Suchen und gar manchem vergeblichen Versuche ist es mir gelungen, diesen Punkt aufzuklären. Das Wandern der Ruhelage rührt von Thermoströmen her, die

durch Warmlaufen der Achsen entstehen. Durch Anfassen mit der Hand oder durch Berühren mit einem heiß gemachten Metallstabe konnte ich die gleiche Erscheinung hervorrufen und je nach dem Teile des Apparates, den ich berührte, die Nadel nach rechts oder links ablenken. War durch absichtliches Erwärmen eines Apparatenteiles eine Ablenkung der Magnetnadel hervorgerufen, und ließ man den Apparat jetzt ruhig stehen, so nahm die Ablenkung langsam aber ganz stetig ab. Ließ man aber den Apparat laufen, oder erzeugte auf andere Weise stärkere Luftströmungen, so schwankte die Magnetnadel unausgesetzt hin und her.

Ich habe diesen Übelstand bei dem zweiten Apparate vollständig beseitigen können dadurch, daß ich Kugellager benutzte und die allergrößte Sorgfalt auf die Ausbalanzierung der rotierenden Scheiben verwendete, so daß diese tadellos liefen, gar kein Schlagen zeigten und keinen einseitigen Zug auf die Achsen ausübten. Mehr als 3—4 Versuche hintereinander konnte ich trotzdem nie mit dem Apparate anstellen, ohne daß sich wieder Spuren von Nullpunktswanderungen zeigten. Es wurden deshalb bei den neuen Versuchen meist schon nach zwei Beobachtungen die Achsen wieder nachgeschliffen und neue Kugeln eingelegt. Bei dieser Vorsichtsmaßregel blieb während der Versuche die Ruhelage des Magnetsystems absolut konstant. Schließlich habe ich es auch erreicht, daß die Verlegung des Nullpunktes beim Anlaufen der Scheiben aufhörte, und zwar einfach durch Ausprobieren. Es rührt diese Verlegung wahrscheinlich von irgend welchen geringen Unsymmetrien in der Aufstellung her. Jedenfalls wurde sie wesentlich größer, wenn ich absichtlich die Rotationsachse etwas schräg gegen das Magnetsystem stellte, und durch vorsichtiges mikrometrisches Verstellen der Richtmagnete einerseits, durch ganz minimales Klopfen an den Lagerblöcken der Rotationsachsen anderseits konnte ich es stets erreichen, daß das Magnetsystem bei ruhenden und bei rotierenden ungeladenen bez. zur Erde abgeleiteten Scheiben dieselbe Ruhelage besaß. Am Beobachtungsfernrohre sitzend, konnte man dann nur noch an einem das Anlaufen der Scheiben erkennen, daß nämlich, wenn diese durch eine bestimmte Geschwindigkeit hindurchgingen (schätzungsweise 30 Umdrehungen pro Se-

kunde), das Bild des Skalenteiles kurze Zeit etwas unscharf wurde, weil der Spiegel offenbar für kurze Zeit in eine leicht zitternde Bewegung geriet.

Der zweite Punkt, der mich nicht befriedigte, war der, daß trotz der oben erwähnten Absaugespitzen während eines Versuches hin und wieder plötzlich das Potential der negativ geladenen Scheiben bis zu 200 Volt niedriger ausfiel als wenn kommutiert, die Scheiben also positiv geladen wurden. Daß dies an der Elektrisiermaschine bez. der Flaschenbatterie und nicht an den Scheiben lag, geht deutlich daraus hervor, daß dieser Mißstand fortfiel, als bei den folgenden Versuchen ein Hochspannungsakkumulator benutzt wurde.

Zweite Versuchsreihe.

Abstand der Magnete des astatischen Paares voneinander $b = 16{,}6$ cm. Radius der Kreisringe für konstanten Strom $\varrho = 10{,}3$ cm. Radius der rotierenden Scheiben $R = 15{,}01$ cm. Die Buchstaben d, V, n, g, γ, i, v haben dieselbe Bedeutung wie oben, c ist der Abstand der Ebene eines Ringes ϱ von dem Mittelpunkte des Magnetsystems, z der Abstand einer rotierenden Scheibe vom Magnetmittelpunkte.

Nr.	d	V	n	c	g	$i \cdot 10^4$	$\varkappa$	γ	$v \cdot 10^{-1}$
1	0,61	2620	4000	0,9	76,6	0,67	1,87	24,0	2,68
2	0,61	3050	3750	0,9	71,6	0,67	1,87	24,6	2,84
3	0,60	2900	4750	0,9	52,6	0,67	1,87	18,9	3,24
4	0,60	2985	4575	0,9	52,5	0,66	1,87	20,4	3,00
5	0,60	3765	3575	0,9	52,7	0,67	1,87	18,3	2,98
6	0,60	2890	6200	0,9	52,5	0,67	1,87	25,9	3,06
7	1,00	4050	5500	1,025	51,4	0,66	2,395	8,9	2,97
8	1,00	4050	5500	1,025	51,4	0,67	2,395	8,7	3,05
9	1,00	4110	5900	1,025	53,4	0,66	2,395	20,3	2,98
10	1,00	4100	6050	1,025	53,5	0,67	2,395	21,0	2,95
11	1,00	3996	6050	1,00	45,0	0,67	2,375	17,0	3,19
12	1,00	4170	5980	1,00	44,5	0,67	2,375	18,3	3,04
13	0,78	4152	5500	1,00	46,8	0,69	2,375	22,0	3,01
14	0,78	4264	5550	1,00	43,0	0,67	2,375	23,1	2,82

Mittel $v\,10^{-10} = 2{,}99$

Daß das Mittel für v fast genau mit dem wahren Werte $3 \cdot 10^{10}$ übereinstimmt, ist natürlich nur Zufall, wie ohne

weiteres aus den Abweichungen der Einzelwerte voneinander erhellt.

Die Ladung der Platten erfolgte bei diesen Versuchen wie erwähnt durch einen Hochspannungsakkumulator. Ich habe absichtlich stets mit Spannungen gearbeitet, die im Verhältnis zu der Dicke des Dielektrikums nur sehr niedrig waren, so daß schon hierdurch die Gefahr einer Ausstrahlung auf ein Minimum herabgesetzt war. Bei einigen Versuchen lag die Ladespannung für $+ E$ sogar unter dem sogenannten Minimumpotential, bei welchem überhaupt erst Ausstrahlung aus Spitzen beginnen kann. Die ungeraden Nummern sind wieder mit Rotation der Scheiben im einen, die geraden mit Rotation im entgegengesetzten Sinne angestellt.

Am Ende von Versuch 6 verunglückte eine der rotierenden Scheiben und die ihr gegenüberstehende Spiegelglasscheibe und mußten durch neue ersetzt werden. Versuch 7 und 8 sind deshalb nur mit einer rotierenden Scheibe angestellt. Mit der Anordnung des Versuches Nr. 6 habe ich Versuche angestellt, bei denen die Scheiben in entgegengesetzter Richtung rotierten, d. h. die eine rechts, die andere links herum. Der Ausschlag blieb unter 0,5 Skt. Mit der gleichen Einstellung habe ich, während beide Scheiben in gleichem Sinne rotierten, die eine auf + 2050, die andere auf — 2050 geladen, indem die Batterie in der Mitte zur Erde geleitet wurde. Eine Scheibe allein gab 10,3 Skt., beide zusammen 0,6 Skt.

Endlich habe ich mit der Aufstellung, die bei den Versuchen 13 und 14 benutzt war, noch die folgenden Versuche ausgeführt: die Scheiben wurden, wie oben auseinandergesetzt, mit aller Sorgfalt so eingestellt, daß sie, wenn nicht geladen, weder bei langsamer noch bei schneller Rotation die Ruhelage des Magnetsystems beeinflußten. Hierauf wurden die Scheiben bei ganz langsamer Rotation, ca. eine Umdrehung in 2 Sek., geladen und es wurde die Einstellung des Magnetsystems an der Fernrohrskale abgelesen, dann die Geschwindigkeit gesteigert bis dieselbe ca. 90 Touren in der Sekunde betrug, und wieder die Einstellung abgelesen, hierauf wieder bei langsamer Drehung beobachtet etc., so daß also, während die Scheiben rotierten, keine Änderung der Ladung eintrat, es wurde weder entladen, noch kommutiert. Die bei diesen Versuchen erhal-

tenen Werte von $v.10^{-10}$ sind: 3,52, 2,78, 2,65, 2,86, 3,15, 2,78, 2,95, 2,79. Die Fehler, mit denen diese Werte behaftet sind, sind ja unverkennbar größer, als bei den früheren Messungen. Aber wenn man bedenkt, daß erstens die zu beobachtende Ablenkung nur halb so groß war, daß zweitens es sich um die Messung der *einseitigen* (nicht kommutierten) Ablenkung eines hochempfindlichen astatischen Nadelpaares handelt, und daß drittens bei dem abwechselnd schnell und langsam Laufenlassen der Scheiben man nie absolut genau die gleiche Geschwindigkeit erzielen kann, und daß die Messung derselben bei diesen Versuchen nicht gleichzeitig mit der Messung der Ablenkung, sondern erst nach Beendigung der Versuche erfolgen mußte, so wird man die Übereinstimmung der Werte untereinander, sowie die Annäherung an den Wert 3,00 als durchaus beweisend anerkennen müssen.

Herr Crémieu hatte bei seinem Apparate beobachtet, daß in dem Augenblicke, wo die rotierenden Scheiben geladen wurden bez. ihre Ladung kommutiert wurde, die Magnetnadel zuweilen starke Ausschläge zeigte. Durch die letzten Versuche glaube ich den Nachweis erbracht zu haben, daß bei meinem Apparate diese Fehlerquelle keine Rolle gespielt haben kann.

Außer den vorstehend beschriebenen quantitativen Versuchen habe ich mit den Apparaten noch eine große Anzahl von Beobachtungen ausgeführt, bei denen ich bald diese, bald jene kleine Abänderung getroffen hatte; so habe ich die Hartgummischeiben sowohl versilbert, als mit Graphit eingerieben, als mit Stanniol belegt, benutzt. Ich habe die Hartgummischeiben durch Glasscheiben ersetzt etc. etc. Stets habe ich, wenn der Apparat in Ordnung war, die dem Rowlandeffekt entsprechenden Resultate erhalten, und ich habe keinen Anhaltspunkt gefunden, das negative Resultat der Crémieuschen Versuche zu erklären. Unter aller Reserve möchte ich deshalb nur die Vermutung aussprechen, daß bei jenen Versuchen die störenden Einflüsse der durch die schnelle Rotation erzeugten Erschütterungen, Luftströmungen und Thermoströme die zu beobachtende Erscheinung verdeckt haben können. Es hat mich nämlich überrascht, daß die Einzelbeobachtungen welche Herr Crémieu in seiner Dissertation p. 76 und 77 und p. 93 und 94 aus den Versuchen mit dem Prüfring-

(spire témoin) mitteilt, so wenig gut übereinstimmen, daß Abweichungen vom Mittelwerte vorkommen, die 20—30 Proz. betragen. Hierbei handelt es sich aber um Versuche, bei denen die Induktionsströme gemessen werden sollen, die in einer Induktionsspule dadurch hervorgerufen werden, daß in einem rotierenden Kreisringe ein konstanter Strom bis zu 17mal in der Sekunde unterbrochen wird. Der Umstand, daß bei diesen Versuchen, bei denen es sich also gar nicht um Konvektionsströme oder um hohe Spannungen handelt, keine bessere Übereinstimmung hat erzielt werden können, hat mich auf den Gedanken gebracht, daß vielleicht die oben genannten Erscheinungen, die direkt mit dem Rowlandeffekt nichts zu tun haben, nicht ausreichend gewürdigt sein könnten.

Freiburg i. B., Mai 1903.

(Eingegangen 12. Oktober 1903.)

5. *Über den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfederbändern;* von *R. Hartmann-Kempf.*[1])

(Hierzu Taf. I—III.)

(Auszug aus der Würzburger Dissertation.)

Unter obigem Titel soll in gedrängter Darstellungsweise ein Teil der wichtigsten Resultate meiner kürzlich erschienenen Dissertation veröffentlicht werden. Diese umfaßt unter der Gesamtbenennung „Elektro-akustische Untersuchungen" außer dem oben genannten Gegenstand noch Studien über die Verschiebung des Resonanzbereiches bei erzwungenen Schwingungen, wie sie als natürliche Folge der Tonverstimmung eines Klangkörpers mit wachsender Amplitude auftreten muß. Außerdem sind daselbst noch eine Reihe von merkwürdigen Begleiterscheinungen getrennt in einem Anhange behandelt, deren Besprechung ich hier nicht vollständig durchführen kann. Dagegen sollen die Untersuchungen über das Wandern des Resonanzbereiches demnächst in einer gesonderten Abhandlung veröffentlicht werden, zumal es als eine zeitgemäße Aufgabe betrachtet werden dürfte, für die verschiedenartigen analogen Vorgänge in Systemen mit gedämpften akustischen oder elektrischen Schwingungen eine figürliche Darstellung durch Kurven oder Photogramme zu bieten, aus denen, wenn auch nicht ein stets einschlägiges Vorbild, so doch ein qualitativer Anhalt zur Beurteilung von Folgeerscheinungen gewährleistet werden kann.

Um über die Ursachen, welche das Gebiet der maximalen Resonanz eines schwingenden Systems, d. h. also die Tonlage seiner besten Anspruchsfähigkeit auf die mit konstanter

1) Meine bisherigen Veröffentlichungen sind unter dem Namen R. Kempf-Hartmann erschienen.

Frequenz erregende periodische Kraft verschiebt, zu größerer Klarheit zu gelangen, müssen zuvor die Einflüsse, welche die Tonhöhe des frei abklingenden Klangkörpers verändern, einzelne erwogen und getrennt beobachtet werden. Diese können mannigfacher Art sein; z. B. wird bei einem eingespannten Stahlfederband die mit wachsender Amplitude eintretende Verkürzung des mittleren Trägheitshalbmessers die Schwingungszahl vergrößern, und solcherart der durch die Luftdämpfung hervorgerufenen Tonerniedrigung bis zu einem gewissen Grad entgegenwirken. Treten dann noch weitere verstimmende Momente hinzu, so wird es ganz unmöglich, die Stärke der Beteiligung des einzelnen an der Gesamtwirkung zu übersehen, es sei denn, daß zuvor jeder Einfluß der Größe noch ermittelt worden wäre. Eine derartige systematische Zergliederung in gesonderte Faktoren soll die Aufgabe der in vorliegender Abhandlung referierten Untersuchung sein.[1])

Daß sämtliche uns bekannter Klangkörper keine Normalien im strengen Sinn dieses Wortes sind, sondern daß ihre Tonhöhe für jede Amplitude eine um einen geringen Betrag veränderte ist, gilt als längst bekannte Tatsache; die Ursachen sind aber bei den einzelnen Instrumenten ganz verschiedenartiger Natur, z. B. bei einer eingespannten Saite andere als

---

1) Dieses Referat lehnt sich an die Originalarbeit in bezug auf Form und Inhalt in durchaus freier Weise an. Wegen der Kürze muß ich auf die Wiedergabe von Tabellen verzichten, oftmals auch auf eingehende Begründungen oder auf Einzelheiten experimentell-technischer Natur, und statt dessen auf die ausführlichere Behandlung in der Originalarbeit hinweisen. Diese enthält die Tabellen zu den Auswertungen von über 120 photographischen Aufnahmen und ebensoviel graphische Darstellungen, welche in Form und Kurvenblättern auf 6 lithographischen Tafeln reproduziert sind. Von den Originalphotogrammen sind 33 durch Rotationsdruck der Neuen Photographischen Gesellschaft Berlin-Steglitz veröffentlicht. (Ich bin jederzeit erbötig, ein solches Exemplar oder auf besonderen Wunsch einzelne nicht veröffentlichte Abzüge abzugeben.) Der Gleichmäßigkeit zuliebe muß ich auch hier die fortlaufende Numerierung wählen, wie sie sich auf die in meinem Besitz befindlichen Originalaufnahmen bezieht. Die durch Rotationsdruck veröffentlichten Kopien sind durch fettgedruckte Nummern hervorgehoben. Als Abkürzungen bei den Hinweisen auf die Dissertation soll z. B. gelten: (Diss. XIV III) für Dissertation Kurvenblatt XIV auf Kurventafel III; (Diss. Ph. 51) für Dissertation, Photogramm 5 auf Photogrammtafel I; u. dgl.

bei einer Stimmgabel. Gerade mit der in der Physik weg ihrer relativ hohen Konstanz der Tonhöhe und ihrer verhältni mäßig geringen Abhängigkeit von der Amplitude mit Vorlie angewandten Stimmgabel hat man sich vielfach beschäftig neben zahlreichen Bemühungen, genaue Eichungsmethoden erproben, wurde auch versucht, die Abweichungen der To höhen, welche mit der Differentialgleichung für gedämpft pendelartige Schwingungen:

$$K\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

nicht im Einklang stehen, in mathematische Ausdrücke formulieren. Zu nennen sind hauptsächlich Poske,[1]) Hee wagen[2]) und Stefanini.[3]) Ferner hat F. Braun[4]) den Ei fluß der Amplitude auf die Tonhöhe bei keilförmigen Stäb von niederer Schwingungszahl experimentell und theoretis nachgewiesen.

Entsprechende Versuche an Stahlfederbändern sind mein Wissens noch nirgends angestellt worden, obwohl man gera in diesen eine typische Form zu erkennen hat, einmal sch wegen des geringen Querschnittes der Biegungsstelle, und fern wegen des bedeutend stärkeren Einflusses der Luftdämpfun der sich zumal bei breiten und dünnen Federn bemerkli macht. Vielleicht haben wir den Grund zu der Nichtbehan lung besagten Gegenstandes in der Umständlichkeit zu suche welche man beim Herantreten an solche Untersuchungen gewärtigen hat; denn die bisherigen einfacheren Method direkter Beobachtung, wie sie bis zu einem gewissen Gr zur Bestimmung des Dekrementes und der Tonhöhe von schwa gedämpften, mithin langsam abklingenden Stimmgabeln au reichten, erweisen sich als unzulänglich, wenn es sich um ras abklingende, stark gedämpfte Federbänder oder dergl. hande zumal wenn man die Untersuchung nicht in den engen Grenz niederer Schwingungszahlen und relativ kleinen Amplitud halten will. Was hierbei unter großen Amplituden zu versteh

1) H. Poske, Pogg. Ann. 152. p. 448. 1847.
2) F. Heerwagen, Mag.-Diss. Dorpat 1890.
3) A. Stefanini, Atti della reale academia lucchese, Lucca 18
4) F. Braun, Pogg. Ann. 153. p. 448. 1874.

ist, wird einerseits durch die Elastizitätsgrenze bez. die Dauerhaftigkeit solcher Federbänder gekennzeichnet, andererseits geht dieses Maß aus ihrem Verwendungszweck hervor.

Der spezielle Anstoß zu einer gründlichen experimentellen Untersuchung ist tatsächlich auf den praktischen Gebrauch eines Resonanzapparates im Laboratorium von Hartmann & Braun zurückzuführen, an welchem mir merkwürdige Erscheinungen von zunächst unübersichtlichem Charakter auffielen.

Das Auftreten der Resonanz an schwingenden Systemen, welche der Einwirkung äußerer periodischer Kräfte unterliegen, ist eine längst bekannte Erscheinung und es wurde wiederholt auf die Verwendbarkeit oszillierender Körper (Stimmgabeln, Federn

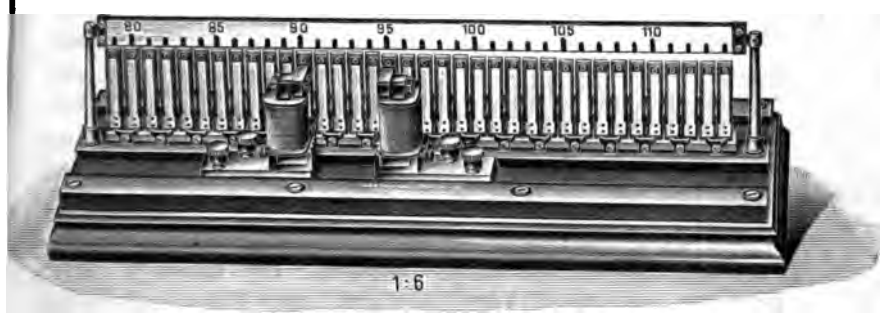


Fig. 1.

und dergl.) zur Frequenzmessung nach dem Resonanzprinzip hingewiesen. Ich selbst war bestrebt, der Methode zur Messung und Fernmeldung der Frequenz wellenförmiger Ströme eine bequeme Handhabe zu bieten durch eine skalenartige Anordnung von zungenförmigen Federn, welche entweder einzeln oder beliebig viele zugleich der pulsierenden Einwirkung eines magnetischen Wechselfeldes ausgesetzt sind, wodurch sowohl das Aufsuchen der Frequenz (Polwechsel, Touren, Unterbrechungen pro Sekunde etc.) erleichtert wird, als auch das Wandern des Resonanzbereiches bei Frequenzschwankungen ohne weiteres sichtbar gemacht werden kann.

Vorstehende Fig. 1 stellt eine Ausführungsform des Apparates dar, in welcher er wohl geeignet sein mag, das Resonanzprinzip zur Anschauung zu bringen. Er besteht aus einer größeren Anzahl, hier 36 tönenden Stahlzungen, welche

in skalenartigen Intervallen z. B. von 1 = 1 Schwingung (= Polwechsel) abgestimmt sind und ein beliebiges Bereich, etw das von 80—115 Polwechseln umfassen. Die Resonanz mac sich durch Tönen und deutlich sichtbares Schwingen d jenigen Zunge bemerkbar, mit deren Schwingungszahl Frequenz der Erregerstromquelle, worin das längs der Sk verschiebbare Magnetpaar eingeschaltet ist, übereinstimmt.

Durch Auseinanderschieben des Magnetpaares kann m eine aufrecht zu erhaltende Frequenz eingabeln, so daß si der Eintritt einer Schwankung durch das beginnende Tön einer Grenzzunge verrät. Auch lassen sich gleichzeitig v schieden hohe Frequenzen messen, so z. B. die Schlüpfu eines Asynchronmotors gegen die Tourenzahl des Wechs stromgenerators, wobei man sich unter Umständen besser ein gesonderten Magnetpaares bedient, welches in der Schien führung auf der entgegengesetzten Seite längs der Skala läu Ebenso gestattet diese Anordnung die Vorführung interessan Schwebungsversuche.[1]) Das Interferrikum zwischen Sta zunge und Magnet kann durch Drehen der Befestigungsste des Magnets verringert werden, mit Rücksicht auf uns reichende Stärke des Erregerstromes. Die dadurch herv gerufenen geringen Verschiebungen des Resonanzbereich einer Stahlzunge sollen in dem gesonderten Teil des Referat zur Besprechung kommen.

Als ich im physikalischen Institut der Universität Wü burg unter Leitung des Vorstandes, des Hrn. Professor D Willy Wien, an die systematische Behandlung der Aufga herantrat, schien es mir geboten, die Untersuchungen nic weiter auszudehnen als auf folgende Modelle typischer E schaffenheit:

1. Stimmgabeln von verschieden großer Dämpfung.
2. Stahlfederband a) stark, b) schwach.
3. Stahlzunge mit und ohne Kasten (feststehender Meta rahmen).

---

1) Über Versuchsbedingungen und weitere Konstruktionsein heiten geben meine früheren Abhandlungen Aufschluß: Elektrotech Zeitschr. 22. p. 9. 1901; L'industrie électrique p. 218. 1901; Phys Zeitschr. 2. p. 546. 1901; ferner auch die neueren Kataloge von Ha mann & Braun, Frankfurt a. M.

Die Tonhöhe wurde zu 100 Schwingungen pro Sekunde gewählt, weil sich diese Zahl für viele Verwendungszwecke der Stimmgabel eignet und weil sich die mittels Resonanzinstrumenten zu messende Frequenz wellenförmiger Ströme, namentlich bei Wechselstromanlagen, ebenfalls durchschnittlich auf 100 beläuft. In speziellen Fällen wurden auch durch Belasten auf 50 Schwingungen vertiefte Stimmgabeln, sowie Stahlzungen von 50 und 25 Schwingungen der Beobachtung unterwerfen.

Zur Erleichterung der Übersicht über die hier zu besprechenden Ergebnisse diene die nachstehende

Versuchsfolge:

A. Bestimmung von Tonhöhe und Dekrement beim freien Abklingen.

1. Stimmgabel mit größerer Dämpfung von Rudolf Koenig (†), Paris.[1])
2. Stimmgabel mit geringer Dämpfung von Max Kohl, Chemnitz.
3. Stimmgabel mit mittlerer Dämpfung von Anton Appunn (†), Hanau.
4. Eingespanntes starkes Stahlfederband.
5. Stahlzunge mit und ohne Kasten bei verschiedenem Luftdruck.
6. Schwaches Stahlfederband (Relaisfeder) bei verschiedenem Luftdruck.

Für 2. wurde noch der Einfluß der Belastung, für 4—6 die Wirkung eines zugefügten permanenten Magnetfeldes untersucht.

---

1) Da die Güte der Stimmgabeln meist nach ihrer möglichst geringen Dämpfung beurteilt wird, so ist gleich zu bemerken, daß es sich hier um ein außergewöhnliches Modell handelt, das viel schwächer dimensioniert war und das vielleicht auch durch Überanstrengung bei den Resonanzversuchen an Elastizität eingebüßt hat. Die allgemein rühmlichst bekannten Stimmgabeln Koenigs haben in der Regel ein sehr geringes Dekrement.

Neuerdings werden diese Fabrikate von R. Koenigs langjährigem Mitarbeiter und Nachfolger, L. Landry, rue Borromée 17, Paris, wieder auf den Markt gebracht.

B. Theoretische Untersuchungen.

7. Wärmeentwickelung einer im Vakuum stationä schwingenden Stahlzunge.
8. Einfluß des mit der Amplitude variabeln Trägheit momentes einer Stahlzunge auf deren Tonhöhe un Schwingungsform.

Methode zur Bestimmung von Tonhöhe und Dekrement.

Wie schon erwähnt, reichen die Methoden direkt (stroboskopischer, vibroskopischer) Beobachtung nicht mehr au um Änderungen von Tonhöhe und Dekrement an rasch al klingenden Schwingungen zu verfolgen, vielmehr muß ma suchen, ein graphisches Protokoll zu erlangen. Die Aufzeichnun

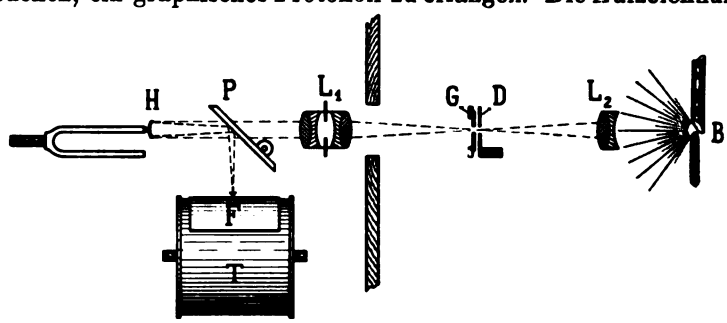


Fig. 2.

auf Rußpapier erweist sich in den vorliegenden Fällen als un praktikabel und ist auch schon wegen der unkontrollierbare Dämpfung verwerflich. Der naheliegende Gedanke, d Amplituden photographisch zu registrieren, wurde schon vo Stefanini[1]) zum Studium des Dekrementes von Stimmgabel ausgeführt, allerdings in technisch etwas primitiver Weise un leider nur für Amplituden von mittlerer oder geringerer Größ Die Aufgabe, auf dem nämlichen Photogramm sämtliche Vo gänge festzuhalten, um für jede Amplitude das Dekreme und die zugehörige Tonhöhe finden zu können, löste ich durc folgende Anordnung, welche durch vorstehende Fig. 2, sow durch Fig. 9 auf p. 148 veranschaulicht werden soll.

Das leuchtende Kohlebild einer Bogenlampe (B) wird durc die Sammellinse L_2 auf das feststehende, punktförmige Di

1) Vgl. Fußnote 3, p. 126.

phragma (*D*) geworfen, passiert den Spalt eines dahinter stehenden an einer (in der Figur nicht sichtbaren) Stimmgabelzinke befestigten Diaphragmas (*G*) aus gelbgefärbten Glasscheiben, wird durch das Linsensystem L_1 parallel gerichtet und trifft auf den Hohlspiegel *H*, welcher am beweglichen Ende des zu untersuchenden Objektes (Stimmgabel, Zunge u. dgl.) befestigt ist. Dieser wirft das Licht nunmehr konvergent zurück, zunächst auf einen aus der Symmetrielinie herausgerückten, schräg nach abwärts gestellten Planspiegel (*P*), von wo aus es auf die Oberfläche eines Trommelmantels (*T*) fällt. Dortselbst ist eine Filmfolie (*F*) aufgespannt, worauf sich die beim Drehen der Trommel zu Sinuslinien aufgelösten

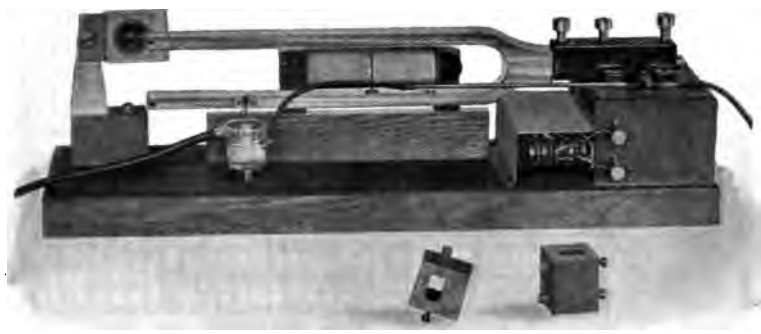


Fig. 3.

Schwingungen der Versuchsstimmgabel und dergleichen photographisch abbilden. Das Gelbscheibendiaphragma ist an eine elektromagnetisch betriebene Normalstimmgabel (vgl. vorstehende Autotypie, Fig. 3) befestigt.

Wenn diese mit starken Amplituden schwingt, so wird das weiße Licht nur für die äußerst kurze Dauer des Durchganges des Spaltes durch die Ruhelage (ca. 0,0001 Sek. lang) hindurchgelassen. Für die übrige Zeit der Schwingungsperiode wird die photographische Wirkung des Lichtes durch die Gelbscheiben geschwächt. Demgemäß hebt sich beim Entwickeln des Negatives ein kurzes Stückchen der Schwingungskurven durch kräftigere Schwärzung aus dem übrigen Verlaufe heraus. In den Kopien der Photogramme erscheinen die Kurven hell

auf dunklem Grunde. Die Verbindungslinien dieser „Lichtblitzpunkte“ — es finden entsprechend dem zweimaligen Durchgang des Spaltes durch die Ruhelage jeweils zwei um 180° Grad einer Schwingungsperiode symmetrisch verlaufende Lichtblitze statt — ergeben bei Synchronismus zwei gerade parallele Linien, bei Tondifferenz jedoch schwebungsartige, sinusförmige Kurven. Zur Erläuterung diene Fig. 4 und Fig. 6 p. 134, sowie die beigeheftete Photogrammtafel I.

Dem Tonabstand ist die Anzahl dieser Punkte proportional. Die Amplituden stehen in direktem Verhältnis zu der angewandten Vergrößerung; wenigstens gilt dies für Stimmgabeln, woselbst der Ausschlagswinkel noch nicht diejenige Grenze

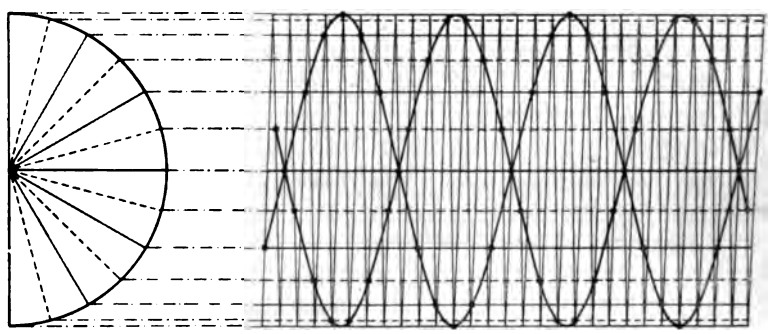


Fig. 4.

überschreitet, innerhalb deren die bekannten Vertauschungen der Sehne mit dem zugehörigen Kreisbogen erlaubt sind. Die Reduktion der Amplitudenordinaten auf Bogengrade — welches Maß bei Stimmgabeln von verschiedener Länge am ehesten Vergleiche zuläßt — wird im Sinne der Fig. 5 nach der Formel

$$\alpha = A \frac{1}{2f+L} \cdot \frac{360}{2\pi}$$

vorgenommen.

Nicht so leicht ist die Umrechnung der an der Photographie abgemessenen Ordinatenlänge A auf die in $\mathfrak{A}$ mm ausgedrückte Entfernung des freien Endes aus der Ruhelage, welche wiederum bei Zungenfedern zu bevorzugen ist, woselbst der Neigungswinkel in einer mathematisch nicht formulierbaren, aber jedenfalls stärkeren Weise wächst, als diese Entfernung des schwingenden Endes aus der Ruhelage. Auch

kommt letztere Größe bei der direkten Beurteilung der relativen Schwingungsweite ausschließlich in Betracht.[1]) Deshalb empfiehlt es sich, mit Hilfe eines besonderen Gestelles, worin sich ein treppenartig gezackter Schlitten, welcher von Stufe zu Stufe um 1 mm steigt, verschieben läßt, die Eichung in

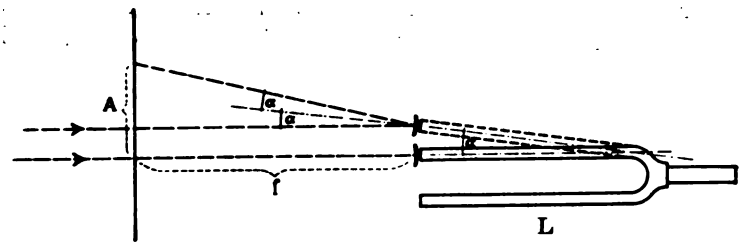


Fig. 5.

Form eines Skalenblattes[2]) vorzunehmen. Das Aufsuchen der Skalenwerte wird durch graphische Darstellung zu einer Kurve wesentlich erleichtert. Folgende Tabellenwerte zeigen beispielsweise die Umrechnungsverhältnisse in einem Skalenblatt, das

Skalenblatt zu Aufnahme 29, 31.

$\mathfrak{A}$	A	$\mathfrak{A}$	A
1	5,0	9	44,0
2	9,8	10	48,7
3	14,55	11	53,7
4	19,35	12	59,3
5	24,2	13	64,5
6	29,9	14	70,0
7	33,9	15	76,0
8	38,8	16	83,0

zu den Versuchen an dem eingespannten Stahlfederband gehört. Hierin bedeutet $\mathfrak{A}$ die Entfernung des freien Endes aus der Ruhelage und A die zugehörige Ordinatenlänge der im Skalenblatt photographierten Linien. Die Vergrößerung hängt natürlich von der Brennweite des Hohlspiegels ab, die sich bei Zungen und starken Stahlfederbändern auf 13,5 cm bei

1) Vgl. z. B. Figg. 2 u. 3 der Physik. Zeitschr. 2. p. 547 u. 548.
2) Vgl. Diss. Ph. IV. Muster eines Skalenblattes.

Stimmgabeln und schwachen Federbändern auf 30—50 cm belief. In ersteren Fällen muß man sich stets mit der Photographie des Ausschlages nach nur einer Seite begnügen, außer bei ganz kleinen Amplituden. Das Photogramm erhält dann das charakteristische Aussehen der Fig. 6, wie es sich auch in der Photogrammtafel wiederfindet. Die Auswertung kann sich trotzdem auf ganze Schwebungsperioden erstrecken, weil

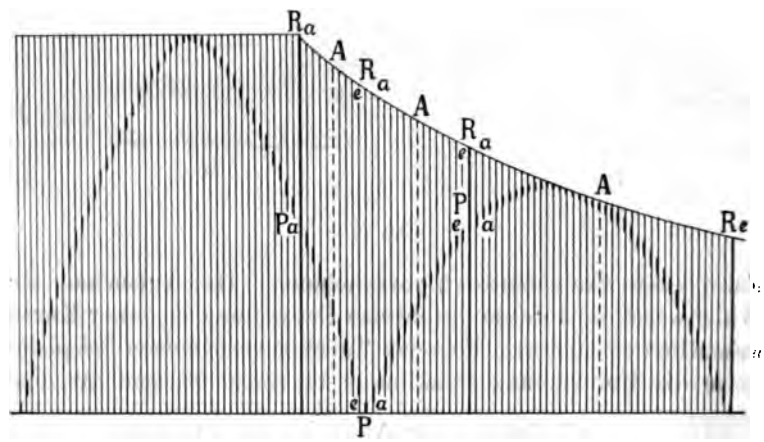


Fig. 6.

man ebensogut statt der Punkte die Anzahl Schwingungen abzählen kann; doch wird man des öfteren das Auswerten halber Schwebungsperioden vorziehen.

Nachfolgende Schemas beziehen sich auf diese vorbildlichen Verfahren, worin das Abschätzen der Bruchteile eines Lichtblitzintervalles zu Hilfe genommen wird, welches ober- und unterhalb der Ruhelinie liegt.

Schema I.

Für eine halbe Periode beträgt . . . . . $t\triangle$ (in $^1/_{100}$ Sek.)

Ganze Lichtblitzintervalle 19

Von der Mittellinie bis zum Anfang des ersten $\frac{23}{35{,}5}$

„ „ „ „ „ Ende des letzten $\frac{17}{33}$ } in $^1/_{10}$ mm

$t\triangle$ insgesamt $19 + 0{,}648 + 0{,}516 = 20{,}164$.

Im ungünstigsten Falle ergibt ein Messungsfehler von $^1/_{20}$ mm:

$$19 + \frac{25{,}5}{35{,}5} + \frac{16{,}5}{33} = 20{,}138.$$

Bei großen Amplituden lassen sich solche beträchtliche Fehler vermeiden, bei kleinen können sie indessen noch merklicher werden; in diesem Falle empfiehlt es sich, wenigstens für das Lichtblitzintervall den Fehler zu verringern dadurch, daß man es bei der größten Amplitude genau mißt und nun der Amplitude proportional abnehmen läßt.

Genauer noch ist das Verfahren nach

Schema II.

Bestimmung von $t_{\wedge\vee}$ für eine ganze Schwebungsperiode.

Nr. der Schwebungsperiode		1	2	3	4
$t_{\wedge\vee}$	Ganze $^1/_{100}$ Sek.	19	19	19	19
	($^1/_{10}$ mm)	22 15 / 39,5 36	10,5 / 33	5 / 30,3	
	Bruchteile ($^1/_{1000000}$ Sek.)	555 418	582 319	681 165	etc. 835
	Zusammen	19,976	19,901	19,846	

Hier wurden nur bei der ersten Schwebungsperiode die Bruchteile am Anfang und Ende ermittelt; für den Anfang jeder nächsten Periode ergibt sich der Bruchteil aus der Differenz des letzten Bruchteiles gegen ein Ganzes.

Dieses letztere Schema ist durchaus das bessere, weil sich die etwaigen Messungsfehler ausgleichen. Zudem ermittelt man in kürzerer Zeit bereits die Hälfte der Punkte für die graphische Darstellung, aus welcher sich dann ersehen läßt, ob sie ausreichen oder ob es besser ist, die um 180° verschobene Serie der Schwebungen ebenfalls auszuwerten. Das beschriebene Verfahren ist zwar sehr mühsam und zeitraubend, indessen wohl das denkbar genaueste, um ganz kleine Tonschwankungen zu verfolgen.

Auf Grund der in meiner Arbeit gemachten Erfahrungen möchte ich befürworten, von vornherein durch Belasten der Normalstimmgabel einen Tonabstand von 2—3 Proz. gegen den Versuchsklangkörper herbeizuführen. Man hat alsdann etwa 20 Lichtblitzpunkte für eine halbe Schwebungsperiode zu erwarten, bez. 40 für eine ganze, und ist deshalb in der Lage, nach Belieben die Messungen für interessante Stellen des

Photogrammes besonders genau vorzuneh
bei größeren Schwebungsperioden oftmals
zu unterteilen und die Lichtblitzpunkte i
bungsabschnitte zu berechnen. Dieses F
häufig anwenden. Tab. 19 diene als Mu
nächst die gewöhnliche Art der Auswertu
bungsperioden, worin t_Δ die Anzahl der
die Zeit in $^1/_{100}$ Sek. bedeutet, ferner A
messene Ordinate des Photogrammes,
ausschlag des freien Federendes reduzi
Schwingungszahl, wobei die Normalstim
gungen angesetzt ist. Die laufenden
Anzahl und Folge der ausgewerteten

Tabelle 19.

Tonhöhe der Stahlzunge ohne Kast
Luftdruck. (Aufnahme

Aufnahme	32	33
Luftdruck	0 mm	verschlechtertes Vakuum

Nr.	A	$\mathfrak{A}$	t_Δ	n	Nr.
32					*34*
1	71,3	10,20	53,0	99,025	1
2	53,3	7,76	49,6	98,992	2
3	40,8	6,00	47,6	98,950	3
4	31,8	4,70	47,0	98,947	4
5	25,0	3,72	47,5	98,949	5
6	19,8	3,00	47,8	98,955	6
7	16,0	2,45	48,3	98,964	7
33					*3*
1	77,0	10,95	54,6	99,082	1
2	56,0	8,15	49,7	98,994	2
3	42,6	6,24	48,0	98,958	3
4	33,0	4,86	47,3	98,942	4
5	26,2	3,90	47,2	98,940	5
6	20,8	3,12	47,35	98,944	6
7	16,4	2,50	47,60	98,950	7
8	13,0	2,00	47,90	98,957	

Tabelle 2.

Stimmgabel von Rud. Koenig.

Aufnahme 4.

	$2A_m$	α_m	$\frac{\log 2A_p - \log 2A_q}{q-p}$	k
	34,60	1,660	0,00722	1,0168
	31,45	1,510	643	149
4	28,95	1,390	588	136
6	26,75	1,285	541	125
6	24,85	1,192	494	114
6	23,35	1,120	450	104
6	21,90	1,050	446	103
6	20,75	0,996	402	093
8	19,40	0,932	389	090
10	18,00	0,865	355	082
12	16,65	0,800	304	070
14	15,25	0,732	284	066
18	13,85	0,665	235	054
	12,30	0,591	206	048
	10,45	0,502	177	041
	8,80	0,425	116	027

...sene Begrenzungsamplitude des Intervalles p bis q.
...ttlere Amplitude in Millimetern.
...ag in Bogengraden.
...is.

... entnehmen wir:

...mm; $\log 2A_0 = 1{,}5605$
...mm; $\log 2A_6 = 1{,}5172$

$\lambda = 0{,}0433 : 6 = 0{,}00722.$

...tzungsfehler von $^1/_{20}$ mm — und ein größerer ...rmeiden — bewirkt, daß sich λ um 1,4 Proz. ändert ...,6 mm, $\lambda = 0{,}00712$).

...ser F... in der Folge weniger empfindlich als ...e am ... Dem steht wiederum die leichtere Ab...barkeit ... Amplitu... stig gegenüber.

Tab. 19a erweist das mühsame, aber ganz zuverlässige Verfahren der Auswertung aus Schwebungsabschnitten. Hierin bedeutet:

R_a = Radius des Kreises
P_a = Projektion des Schwebungsstückes } am Anfang des Abschnittes,

R_e = das Entsprechende
P_e = „ „ } am Ende des Abschnittes,

$\mathfrak{R}_a$, $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{R}_e$, $\mathfrak{P}_e$ = das Entsprechende in Werten des Skalenblattes.

s = der zu den Projektionen gehörige Teil einer Kreisschwingung,

t_s = die dazu erforderliche Zeit in $^1/_{100}$ Sek.

Man verfolge den Sinn der Abkürzungen an der Fig. 6, p. 134, sowie an der auf der beigehefteten Photogrammtafel I reproduzierten Aufnahme 5.

(Über Genauigkeit des Verfahrens vgl. Diss. p. 38; ebenda ist auch p. 220 eine Methode zur Erleichterung des Umrechnens angegeben.)

Die Berechnung des Dekrementes geschieht in bekannter Weise.[1]) Ist a_p die Größe des p^{ten}, a_q die des q^{ten} Bogens, so gilt

$$k = \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{1}{q-p}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log a_p - \log a_q}{q-p}.$$

Hierin ist a durch $2A$ zu ersetzen; eine Reduktion von $2A$ auf Bogenwert ist überflüssig.

Wenn man im voraus davon überzeugt ist, daß das Dekrement eine lineare Funktion der Amplitude ist, oder wenigstens nur ganz wenig davon abweicht, so darf man $q - q$ ziemlich groß nehmen. Das Resultat wird zwar dadurch nicht genauer, aber rascher ermittelt.

Alle anderen Maßnahmen gehen aus der Tab. 2 hervor; es verlohnt sich indessen, ein Beispiel ausführlich durchzurechnen und auch den Einfluß eines Ablesefehlers zu zeigen.

---

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl. p. 101.

Tabelle 2.

Dekrement der Stimmgabel von Rud. Koenig.

Aufnahme 4.

Nr.	$2A$	$q-p$	$2A_m$	α_m	$\frac{\log 2A_p - \log 2A_q}{q-p}$	k
1	36,35	6	34,60	1,660	0,00722	1,0168
2	32,90	6	31,45	1,510	643	149
3	30,10	6	28,95	1,390	588	136
4	27,75	6	26,75	1,285	541	125
5	25,75	6	24,85	1,192	494	114
6	24,05	6	23,35	1,120	450	104
7	22,60	6	21,90	1,050	446	103
8	21,25	6	20,75	0,996	402	093
9	20,10	8	19,40	0,932	389	090
10	18,70	10	18,00	0,865	355	082
11	17,35	12	16,65	0,800	304	070
12	15,95	14	15,25	0,732	284	066
13	14,55	18	13,85	0,665	235	054
14	13,20	30	12,30	0,591	206	048
15	11,45	50	10,45	0,502	177	041
16	9,55	50	8,80	0,425	116	027
17	8,35	240				

Hierin bedeuten:

$2A$ die in Millimetern gemessene Begrenzungsamplitude des Intervalles p bis q.
$2A_m$ die dazugehörige mittlere Amplitude in Millimetern.
α den einseitigen Ausschlag in Bogengraden.
k das Dämpfungsverhältnis.

Aus Tab. 2, Nr. 1 entnehmen wir:

$2A_0 = 36{,}35$ mm; $\log 2A_0 = 1{,}5605$
$2A_6 = 32{,}90$ mm; $\log 2A_6 = 1{,}5172$

$\lambda = 0{,}0433 : 6 = 0{,}00722.$

Ein Schätzungsfehler von $^1/_{20}$ mm — und ein größerer läßt sich vermeiden — bewirkt, daß sich λ um 1,4 Proz. ändert ($2A_0 = 33{,}6$ mm, $\lambda = 0{,}00712$).

Dieser Fehler ist in der Folge weniger empfindlich als gerade am Anfang. Dem steht wiederum die leichtere Ablesbarkeit bei größeren Amplituden günstig gegenüber.

Fig. 7.

Gleichstromunterbrecher mit elektromagnetisch angetriebener Stahlseite.

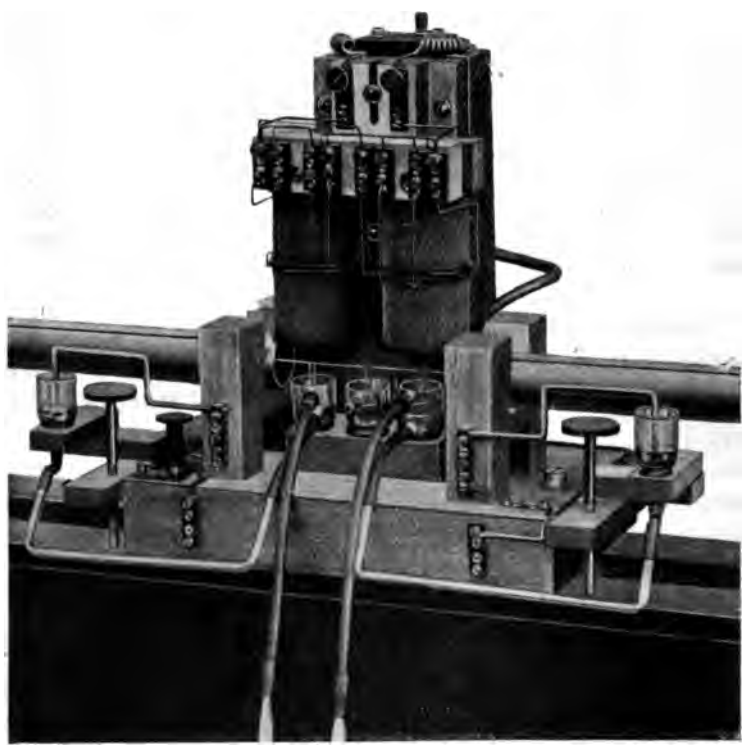


Fig. 7a.

Schlitten mit Magnet und Unterbrechungsvorrichtung.

Zur elektromagnetischen Erregung der Resonanzschwingungen wurde Wechselstrom und periodisch unterbrochener Gleichstrom benutzt. Erstere wurde einem sogenannten Gleichstrom-Drehstromumformer (von Siemens & Halske) von ca. 1 Kilowatt Leistung entnommen, dessen Tourenzahl durch Widerstände, wovon sich einer für ganz feine Einstellung in nächster Nähe meines Standortes befand, reguliert werden konnte. Sehr bequem geschieht dies mit Hilfe eines Frequenzmessers, bestehend aus einigen, etwa 12 Zungen, welche ober- und unterhalb des Resonanzbereiches alle zugleich vor einem Magnet geräuschlos schwingen.

Den periodischen Gleichstrom lieferte ein Saitenunterbrecher (Autotypie Fig. 7) nach F. Niemöllers[1]) Idee, dessen Konstruktion sich bis zu einem gewissen Grade an ein von M. Wien[2]) herrührendes Modell anlehnt. Wegen Ausführungseinzelheiten verweise ich auf meine Originalabhandlung p. 222—231; ferner ist eine eingehende Beschreibung namentlich der in mechanisch-technischer Beziehung interessanten Teile in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde" beabsichtigt. Die bereits an anderer Stelle[3]) näher erläuterte Art der Unterbrechungsvorrichtung mit Spülung durch fließendes Wasser geht aus der Spezialabbildung Fig. 7a deutlich hervor. Besondere Sorgfalt wurde der Spannvorrichtung, sowie der zentrischen, isolierten Lagerung der Saite gewidmet. Die massive, durchweg aus Gußeisen oder Stahl bestehende Bauart sichert ein vollkommen gleichmäßiges Arbeiten des Unterbrechers bei großer Konstanz der Schwingungszahl.

Betreffs der übrigen wichtigen Bestandteile des Instrumentariums (Trommel mit Schutzgehäuse, Vorgelege und Motorantrieb, automatisch funktionierender Objektivverschluß und dergl.) sei ebenfalls auf den Anhang der Originalarbeit hingewiesen.

A. Versuchsergebnisse.

1—3.

Es erleichtert die Vergleichsmöglichkeit, wenn die Resultate über den Verlauf von Tonhöhe und Dekrement an Stimm-

1) F. Niemöller, Wied. Ann. 6. p. 301. 1879.
2. M. Wien, Wied. Ann. 42. p. 593. 1891.
3) R. Kempf-Hartmann, Ann. d. Phys. 8. p. 494. 1902.

gabeln für alle hier behandelten Fälle zugleich besprochen werden. Aus diesen Gründen sind die graphischen Darstellungen auf Kurvenblatt I, Taf. II vereinigt. Beim Auftragen der logarithmischen Dekremente λ kann dies ohne Umstände geschehen, dagegen muß für die Tonhöhen n, welche sich bei sämtlichen Stimmgabeln nicht weit von 100 Schwingungen pro Sekunde aufhalten, eine Transposition nach einem gemeinsamen Anfangspunkt vorgenommen werden. Dies macht insofern Schwierigkeit, als die Tonhöhe für sehr kleine Amplituden bei jeder Stimmgabel aus den ursprünglichen Kurven (Diss. I—VIII 1) geschätzt werden muß. Denn anfänglich wurde beim Studium dieser Verhältnisse hauptsächlich den praktischen Bedürfnissen Rechnung getragen, für welche man die Tonhöhe bei ganz kleinen Amplituden als nahezu konstant voraussetzen mag. Interessanter ist auch tatsächlich das Studium der verstimmenden Einflüsse starker Amplituden wegen der Verwendung von Stimmgabeln zu selbsttätigen Unterbrechern, Resonanzapparaten und dergl., ganz abgesehen von wertvollen Ergebnissen für theoretische Schlußfolgerungen. Deshalb wurde die Steigerung der Amplitude bis zum höchst zulässigen Maß für Dauerschwingungen getrieben, ja meist noch weiter, was man für wenige Augenblicke riskieren darf; bei längerem Schwingenlassen mit übergroßen Amplituden kann die Elastizität nachlassen, oft infolge von kleinen Sprüngen an den Stellen stärkster Biegung. Ein solches Höchstmaß ist z. B. bei der massiven Stimmgabel von M. Kohl (27 cm Zinkenlänge) eine nach beiden Seiten des schwingenden freien Endes gemessene Gesamtamplitude von 10 mm; bei schwächer dimensionierten Gabeln kann es noch mehr betragen.

Resultate anderer Autoren (vgl. Heerwagen, Diss. Dorpat), die sich allerdings auf höchstens halb so große Amplituden beziehen, haben bereits darauf schließen lassen, daß die Tonhöhenabnahme eine lineare Funktion der Amplitude sei, so daß man die Schwingungszahl etwa in Form der Gleichung

$$n = n_0 - p \cdot \alpha$$

ausdrücken könne.

Aus dem vorliegenden mit weitaus größerer Genauigkeit an drei Stimmgabeln ermittelten Tonhöhenverlauf geht hervor,

daß die Verstimmung etwas stärker wächst, so daß sich die Gleichung

$$n = n_0 - (p + \Delta\alpha)\alpha$$

der Kurve vielleicht besser anschmiegen würde. Indessen ist der Wert solcher empirischen Formeln nur gering. Die Gleichung würde wesentlich komplizierter, wenn man noch den erhöhenden Einfluß berücksichtigen wollte, der aus der Verkürzung des Trägheitsmomentes infolge der Deformation der schwingenden Zinke entspringt. Dieser scheint sich hauptsächlich bei der verhältnismäßig dünnen Stimmgabel von A. Appunn bemerkbar gemacht zu haben.

Als Beispiel für die praktische Nutzanwendung der Versuchsergebnisse sei die Verstimmung berechnet, welcher der Stimmgabelunterbrecher bei Spannungsschwankungen unterliegt. Das hierzu benutzte Modell ist der untersuchten Gabel von M. Kohl völlig gleich. Nehmen wir an, die Gesamtamplitude verringere sich von 10 auf 9 mm, dann steigt die Tonhöhe um 0,005 Schwingungen oder ebensoviel Prozent. Für die meisten Messungen bliebe der entstehende Fehler ganz unbelänglich, dagegen dürfte er bei den später beschriebenen Vakuumversuchen nicht mehr als 0,001 Schwingungen betragen, um nicht die charakteristischen Unterschiede zu verwischen.

Der Verlauf des logarithmischen Dekrementes läßt sich ebenfalls annähernd als lineare Funktion der Amplitude

$$\lambda = p_1 . \alpha$$

darstellen, wennschon auch hier mitunter ein etwas steileres Wachstum sich bemerkbar macht, z. B. bei der belasteten Stimmgabel von M. Kohl.[1]) Daß sich das Dekrement für $\alpha = 0^0$ ebenfalls dem Wert Null nähere, ist ein ideeller Fall, der aus irgend welchen Gründen mechanisch-physikalischer Natur nur annähernd erreicht wird. Im großen Ganzen ist die Annahme berechtigt, daß sich mit doppelt so großer Amplitude auch das Dekrement verdoppelt.

Was nun die Verstimmung der Eigenschwingungszahl anbelangt, welche das Dekrement hervorrufen müßte, so ist

1) Die zum Belasten erforderlichen Gewichte sind aus der Autotypie, Fig. 3, p. 131 zu ersehen.

schon verschiedentlich darauf hingewiesen worden[1]), daß die auf theoretischem Wege als Folge der Dämpfung errechnete Amplitude verschwindend klein ist gegen die experimentell beobachtete. Sie erreicht auch in den von mir errechneten Fällen (vgl. Diss. p. 42) noch nicht den hundertsten Teil des tatsächlichen Wertes. Nichtsdestoweniger scheinen Verstimmung und Dekrement in einem direkten Zusammenhang zu stehen, wie nachstehende Tabelle lehrt.

Stimmgabel	d	d	$\frac{d}{\lambda}$
R. Koenig	0,0042	0,30	72
M. Kohl, frei 100 Schwing.	0,00075	0,040	58,5
K. Kohl, belastet 50 „	0,00083	0,050	60
A. Appunn	0,0020	0,15	75
		Mittel:	66

Hierin bedeutet d die Verstimmung in ganzen Schwingungen oder in Prozenten jeweils für die ziemlich große Amplitude von 1^0, worauf auch λ zu beziehen ist.

4.

Wennschon die Ergebnisse der Versuche an Stimmgabeln insofern neuartig waren, als sie sich auf eine große Amplitude erstreckten und zugleich eine mit früheren Methoden nicht annähernd erreichte Genauigkeit aufwiesen, so haben sie nichts Überraschendes gebracht. Anders verhält es sich mit den jetzt und fernerhin zu besprechenden Resultaten der Untersuchungen von Tonhöhe und Dekrement von Stahlbändern und Stahlzungen, deren physikalische Beschaffenheit sich in drei für uns wesentlichen Beziehungen von den Stimmgabeln unterscheidet.

a) Die Tonhöhe wird nicht durch die Dämpfung allein, sondern ungleich mehr durch die Verkürzung des Trägheitsmomentes beeinflußt, welches namentlich bei stärkeren Amplituden zur Geltung kommt, weil ja die Durchbiegung nicht auf eine enge Stelle beschränkt ist, sondern sich ganz allmählich auf ein größeres Stück ausdehnt. (Vgl. die schematisch dar-

1) Vgl. F. Heerwagen, Mag.-Diss. Dorpat 1890.

gestellten Fälle in Fig. 10, p. 154, deren linksstehendes Bild ein sich verkürzendes, das rechtsstehende ein konstantes Trägheitsmoment repräsentiert.)

b) Für die innere Reibung kommt der dünne Querschnitt in Betracht, welcher eine starke Verbiegung bei geringer Dilatation und Kompression der molekularen Struktur zuläßt.

c) Der Luftwiderstand tritt in ein ganz anderes Größenverhältnis zu der potentiellen Energie des schwingenden Systems. Bei Stimmgabeln war er fast zu vernachlässigen.

Die äußere Beschaffenheit des Stahlfederbandes, sowie der Stahlzunge und des Messingkastens zeigt uns Fig. 8. Als Dimensionen seien aufgeführt für Stahlfederband bez. Stahlzunge: Freie Länge 80 bez. 52 mm, Breite 9 bez. 7,5 mm, Dicke 0,75 bez. 0,45 mm.[1])

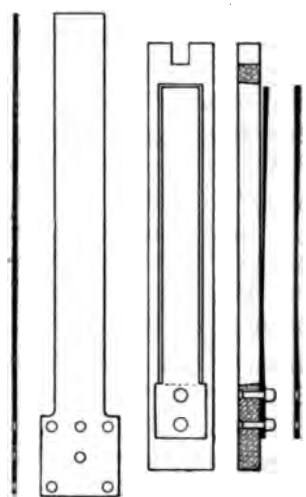


Fig. 8.

Wir beginnen mit der Tonhöhe des frei abklingenden Stahlfederbandes (Blatt XIII a. lith. Taf. II). Neuartig ist das beträchtliche Sinken der Tonhöhe gerade bei kleinen Amplituden, welches mit der fast traditionell gewordenen Annahme, daß die Schwingungszahl bei kleinen Amplituden konstant sei, in einem bemerkenswerten Widerspruch steht. Bei mittelgroßen Amplituden passiert die Tonhöhe ein Minimum, um dann wieder zu steigen, und einem vermutlichen Maximum zuzustreben. Kurve 29 steht um 0,4 Schwingungen tiefer als 31. Sie gehört zu einer zeitlich älteren Aufnahme,[2]) und es mag die Tondifferenz als Folgeerscheinung der magnetischen Remanenz (siehe weiter unten) oder der elastischen Überanstrengung der Feder angesehen werden. (Über das Auf-

1) An der dünnsten Stelle gemessen. Das keilförmig dicker werdende Ende ist 0,8 mm stark.

2) Die Nummernbezeichnung der Kurven gibt keinerlei Aufschluß über die zeitliche Aufeinanderfolge, vielmehr hängt sie nur mit der in der Originalarbeit eingehaltenen Reihenfolge zusammen.

treten der „Querschwingungen“ infolge der Überanstrengung und dergl. siehe Diss. p. 97, ferner dortselbst Photogramm 28.)

Das Abklingen geschah stets von einer großen, durch ein starkes magnetisches Wechselfeld erzwungenen Amplitude ab; die Lage der Frequenz für die großen Resonanzamplituden ist in Blatt XIII angegeben. Aus verschiedenen Gründen ist es nun interessant, den Einfluß eines permanenten Magnetfeldes auf die Tonhöhe etc. des abklingenden Federbandes zu untersuchen, welches Feld im Moment der Unterbrechung des Erregerstromes eingeschaltet wurde. Seine Stärke läßt sich einigermaßen aus der dauernden Ausbiegung der Feder von ihrer Ruhelage beurteilen. (Blatt XII.) Erstaunlich ist die große Tonvertiefung, welche durchschnittlich etwa 4 Proz. beträgt. Auch wird eine etwaige Erhöhung durch Deformation völlig von der dämpfenden Wirkung des Magnetfeldes unterdrückt.

Das Dekrement des Stahlfederbandes (Blatt XII) zeigt etwas ganz Unerwartetes; nämlich, daß es für kleine Amplituden größer ist als für stärkere. Dagegen wird es mit weiter wachsenden Amplituden nur schwach erhöht, fast bleibt es konstant. Die Einwirkung eines permanenten Magnetfeldes (siehe oben) auf das Dekrement ist nun wiederum erstaunlich gering im Vergleich zu der großen Tonerniedrigung.

5.

Wir betrachten zunächst die Ergebnisse der in gleicher Weise wie an dem Stahlfederband nunmehr an der Stahlzunge angestellten Versuche. Vergegenwärtigen wir uns die geringere Dicke der Biegungsstelle, so darf es nicht verwundern, daß das Dekrement der Stahlzunge (Blatt XIV) infolge des relativ bedeutenden Luftwiderstandes nicht mehr annähernd konstant bleibt, sondern fast proportional der Amplitude wächst, und dies sehr stark, wenngleich es schließlich doch geringer bleibt als das des Federbandes. Wir werden aus den später folgenden Vakuumversuchen lernen, daß dies Anwachsen nur auf Rechnung des Luftwiderstandes zu setzen ist. Übrigens war der „Kasten“ einstweilen abgenommen. Die Abszissen-

maße beziehen sich von jetzt ab auf den für die direkte Beobachtung in Betracht kommenden doppelten Ausschlag in Millimetern. Ein genaues Gegenüberstellen der Resultate mit denen auf Blatt XII und XIII ist sowieso wegen des verschiedenen Baues beider Federn nicht möglich.

Der Tonhöhenverlauf ist aus Blatt XIX besser ersichtlich; im Blatt XV repräsentiere die Kurve 52 nur die Lage der Tonhöhe bei frei abklingender ungedämpfter (abgesehen von etwaiger Remanenz) Zunge. Die Verstimmung bei künstlich zugeschalteter magnetischer Dämpfung ist ganz außerordentlich, beinahe 8 Proz. der Gesamtschwingungszahl. Solche Versuche gewinnen u. a. auch dadurch an Interesse, weil sie uns eine deutliche Vorstellung von der Einwirkung permanenter Felder auf Resonanzschwingungen geben, wie sie z. B. beim optischen Telephon von M. Wien, beim Vibrationsgalvanometer von Rubens etc. vorhanden sind.

Die Einflüsse der durch Luftwiderstand bewirkten Dämpfung auf Tonhöhe und Dekrement wurde, wie schon erwähnt in einem Vakuum gesondert studiert. Der Aufbau ist durch Fig. 9 veranschaulicht. Hierbei wurde auch versucht, den allenfallsigen Unterschied zu ermitteln zwischen dem Widerstand der Luft bei bestmöglichem Vakuum und demjenigen bei äußerst geringer Luftmenge, welche eben noch ausreicht, um die Reibung der Gasmoleküle an den festen Wänden des schwingenden Systems wieder herzustellen. Das Maxwellsche Gesetz besagt, daß die Reibung der Gase erst dann wesentlich geringer zu werden beginnt, wenn die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle in die Größenordnung der Entfernungen zwischen feststehenden und bewegten Wänden eintritt. Die Versuche von Kundt und Warburg[1]) an einer zwischen zwei engbenachbarten Wänden schwingenden Scheibe haben dies Gesetz bekanntlich bestätigt. Allerdings liegen bei einer Zungenfeder, welche in einem größeren Raum frei (oder höchstens für ein kleines Wegstück an den Wänden des Rahmenkastens vorbei) schwingt, die Verhältnisse wesentlich ungünstiger, wenn man eine größere Wirkung erwarten will. Diese ließe sich bei entsprechender Abänderung, z. B. durch

1) F. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337. 1875.

Befestigen einer dünnen Scheibe aus Aluminiumblech am freien Zungenende etc., ohne Zweifel herbeiführen. So aber blieb der fragliche Unterschied gering. Die eigentliche Luftreibung kommt kaum zur Geltung, Vergleiche Kurven 32 u. 33 auf den Blättern XVI und XIX, Tafel II u. III. Zudem macht sich bei großer Verdünnung eine andere Erscheinung in höchst unerwünschter Weise geltend, welche in gleicher Art wie die

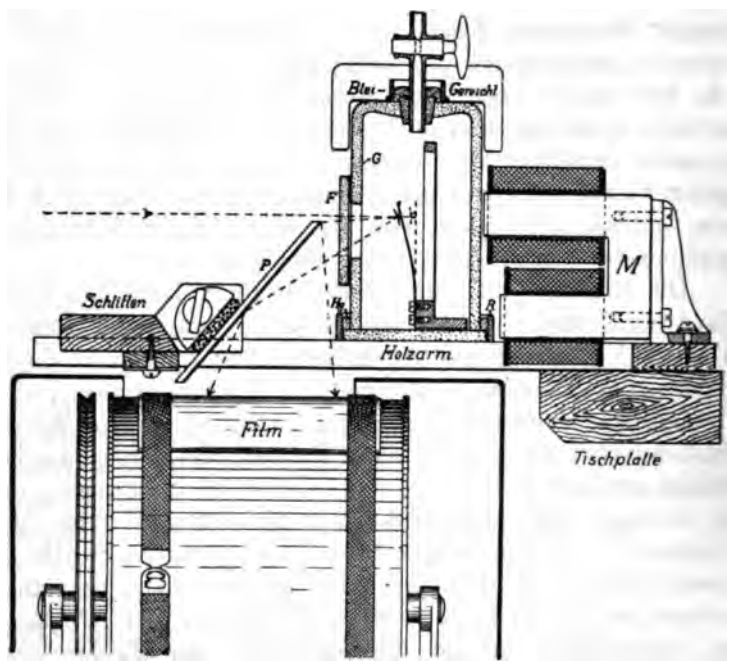


Fig. 9.

Reibung das Maxwellsche Gesetz befolgt, nämlich die verminderte Wärmeleitfähigkeit der Gase. Alsdann kann sich die beim Schwingen der Zunge entstehende Wärme nicht schnell genug von der Biegungsstelle entfernen, weil die Wärmeabgabe an die Luft durch Leitung fortfällt und nur, abgesehen von der äußerst geringen Ausstrahlung, die direkte Leitfähigkeit des Metalles in Frage kommt.[1]) Diese reicht aber nicht aus, um eine stationäre Erwärmung der Biegungsstelle um immerhin 1°

1) Vgl. die theoretische Behandlung in Absatz II.

zu verhindern, welcher Temperaturunterschied sich durch die wenn auch nur geringe Abnahme der elastischen Spannkraft genügend bemerklich macht, um den wirklichen Einfluß der Luftreibung auf Tonhöhe und Dekrement zu entstellen, wenn nicht ganz zu überdecken. Mehrere in der Originalarbeit aufgeführte Versuche bestätigen das eben Gesagte.

Dessenungeachtet haben die Vakuumversuche auch interessante positive Resultate gezeitigt. Das wichtigste besteht wohl darin, daß das Dekrement mit wachsender Amplitude schon bald einem Maximum zustrebt, welches man als konstant ansehen darf, (Kurve 32 und 33, Blatt XVI); denn nach diesem Ergebnis bewahrheitet sich die Annahme, welche die innere molekulare Reibung der ersten Potenz der Geschwindigkeit, also nicht einer höheren Potenz, proportional setzt. Dieses Dekrement ist ziemlich klein, namentlich im Vergleich zu demjenigen bei normalem Luftdruck; denn sowie Energie an die Luftmassen abgegeben wird, steigt das Dekrement ungefähr entsprechend dem Atmosphärendruck, wenigstens für kleine und mittelgroße Amplituden. Bei größeren scheint der Kurvenverlauf des Dekrementes für eine halbe Atmosphäre Luftdruck noch etwas von der Form der Kurven 32 und 33 für luftleeren Raum in sich zu tragen; wogegen die Zunahme des Dekrementes bei vollem Luftdruck schließlich rapid steigt. In letzterem Falle muß der Zunge eine große Energiemenge zugeführt werden, um die Resonanzschwingungen aufrecht zu erhalten, darin ist auch der Grund zu erblicken, warum die Feder nur bis zu mäßig großen Amplituden dauernd erregt werden kann.[1])

Viel stärker, namentlich bei kleinen Amplituden, fällt das Dekrement begreiflicherweise aus, wenn die Zunge mit einem Rahmen („Kasten") versehen ist. Wir entnehmen seinen Verlauf aus Kurve 121, Blatt XXIII a II. Im Vakuum, oder besser gesagt, bei sehr geringem Luftdruck, äußert sich der Einfluß des Kastenrahmens nur bei kleinen Amplituden; die Kurve

1) Die nachteiligen Folgen der Überanstrengung verraten sich nicht sofort; zuerst wird das Dekrement erheblich vergrößert, ferner wandert das Resonanzmaximum immer mehr nach der Tiefe, aber die Maximalamplituden werden zusehends geringer. Diese Erscheinung kann sich solcherart bis zu einer Verminderung der Schwingungszahl von 20 Proz. fortspielen.

des Dekrements bildet an dieser Stelle ein Knie (λ = ca. 0,00285) und strebt von da ab langsam zu einem geringeren, für die Folge wohl ziemlich konstanten Wert (λ = ca. 0,00270) zu.

Den entsprechenden Tonhöhenverlauf bei variablem Luftdruck lehrt Blatt XIX, woselbst Kurve 32 streckenweise geschätzt wurde (gestrichelte Linie). Es ist zu vermuten, daß, wenn eine bessere Abkühlung während des Schwingens stattgefunden hätte, die Kurve 32 eine durchweg etwas höhere Lage einnehmen dürfte. Kurve 35 ist absichtlich nicht abgerundet, weil sich der Knick zwischen $2A = 6$ und $2A = 7$ mm als charakteristisch auch in anderen Aufnahmen erwiesen hat. Die ganze Tondifferenz zwischen Vakuum und normalem Luftdruck ist erstaunlich gering. Haben wir doch gesehen, daß eine magnetische Dämpfung, welche das Dekrement relativ weit weniger vergrößerte, als hier der hinzutretende Luftwiderstand, eine außerordentlich starke Tonerniedrigung im Gefolge hat. (Blatt XIV und XV.) Hier aber, wo das Dekrement durch den Lufthinzutritt bis auf das Dreifache des Anfangswertes etc. erhöht wird, beträgt die ganze Tondifferenz noch nicht 0,1 Proz. Etwas bedeutender (ca. 0,12 Proz.) und ebenfalls ziemlich gleichbleibend fällt die Differenz aus zwischen der für das Vakuum gültigen Schwingungszahl und derjenigen beim Abklingen in Luft. (Diss. XXIV v.) Die Tonhöhenunterschiede bei völlig beseitigter Luftreibung gegen diejenigen bei verschlechtertem Vakuum sind sehr gering; sie betragen, sofern dies aus den infolge der Wärmeentwickelung etwas entstellten Resultaten geschlossen werden darf, etwa 0,01 Proz.

6.

Mit dem vielleicht nicht ganz bezeichnenden Ausdruck „Relaisfeder" belege ich im vorliegenden Falle schwache Federn, welche zu Resonanzrelais Verwendung finden können. Hierbei ist an ganz geringe Erregerströme gedacht, wennschon das untersuchte Stahlfederband bedeutend stärkere Dimensionen aufweist als z. B. das zu dem optischen Telephon von M. Wien benutzte. (Dicke 0,1 mm, Länge 29 mm, Breite 6 mm.) Bei seiner Auswahl hatte ich die Aufgabe im Sinne, mit Hilfe der Resonanzschwingungen einen Kontakt oder irgend eine mechanische, empfindliche Einrichtung zur Signalgebung zu betätigen,

und es schien mir interessant, auch für solch kleine Federn die gleichen Einflüsse der Amplitude auf Tonhöhe und Dekrement der Größe nach festzustellen.

Solche Resonanzrelais kann man unter Umständen durch Hinzunahme eines permanenten Magnetfeldes, auf welches die oszillierenden Stromimpulse schwächend oder verstärkend einwirken, empfindlicher machen. Selbstredend spielt auch der Abstand der Feder vom Erregermagnet eine wichtige Rolle, wenngleich die Annahme falsch wäre, daß man das Interferrikum möglichst klein machen müsse. Denn die vergrößerte Dämpfung durch Luftwiderstand und magnetische Induktion, schließlich auch die permanente Ausbiegung der Feder setzen die Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit des Relais bedeutend herunter. (Näheres Diss. § 21.)

Die Untersuchungen wurden ebenfalls bei verschiedenem Luftdruck angestellt und gliedern sich in folgende Hauptfälle:

I. Erregung lediglich durch oszillierendes Magnetfeld. Abstand des freien Endes vom Polschuh 3 mm. Kurz: Relaisfeder I.

II. Erregung unter Zuhilfenahme eines permanenten Magnetfeldes.

a) Abstand des freien Endes 3 mm, Relaisfeder II a.

b) „ „ „ „ 1 „ „ II b.

Beginnen wir mit dem Dekrement der Relaisfeder I (Blatt XXV). Eine besondere Wirkung der eigentlichen Luftreibung läßt sich noch kaum nachweisen. Es wurden deshalb die Werte aus Aufnahme 55 und 56 zu einer einzigen Linie zusammengezogen. Wiederum begegnen wir der höchst auffälligen Erscheinung, daß das Dekrement mit der Amplitude.[1]) nicht zunimmt, sondern geringer wird. Der Mittelwert $\lambda = 0{,}0025$ ist gering, er stimmt der Größenordnung nach gut mit dem an Zungen beobachteten überein und scheint dieser für Stahlfederbänder gewissermaßen spezifisch zu sein.

---

1) Die Amplitude erstreckt sich hier nicht über $\alpha = 2°$, d. i. etwa 1 mm einseitiger Ausschlag. Dieser genügt für den genannten Zweck des Relais; für Beobachtung mit Spiegel und Skala (bei Nullmethoden) ist er mehr als hinreichend. Späterhin wurden die Amplituden sogar nur halb so groß gewählt. Die Vergrößerung erzielte ich mit Hohlspiegeln von 30—50 cm Brennweite.

Das Dekrement bei normalem Luftwiderstand (Kurve 57) ist wesentlich größer, außer bei allerkleinsten Amplituden, woselbst es sich mit den Werten für luftleeren Raum zu decken scheint.

Die entsprechenden Kurven für den Tonhöhenverlauf sind Nr. 55 mit 56 und 57 auf Blatt XXVI. In Übereinstimmung mit dem Dekrement geben sie keinen Anlaß zu Auffälligkeiten, abgesehen von der Merkwürdigkeit, daß Kurve 57 für kleine Amplituden höher liegt als 55/56. Eine Erklärung könnte sich in dem Vorhandensein einer kleinen Remanenz bei 55/56 finden, doch darf ich nicht verschweigen, daß das Auswerten der Schwebungen für ganz kleine Amplituden mit Schwierigkeiten verbunden war und nicht mit der sonst vorliegenden Genauigkeit geschehen konnte.

Daß eine Remanenzwirkung an sich vorliegt, geht mit Sicherheit aus dem Unterschied zwischen dem Kurvenpaar 55/56 und der Kurve 54 hervor; bei letzterer Aufnahme wurden die Resonanzschwingungen durch Wechselstrom erzeugt, welche Erregungsart eine Remanenz im Hufeisenmagnet völlig ausschließt. Dagegen macht sich eine merkwürdige Polarisation geltend, deren Ursache durch die Mutmaßung, daß die Stahlfeder remanenten Magnetismus behalten habe, nicht genügend begründet wird. (Vgl. über diese Erscheinung vorläufig Diss. p. 151 und Aufnahme **91** u. **92**. Ph. T. VI.)

Bei der Anordnung II äußern sich alle dämpfenden Einwirkungen in stärkerem Maße. Es ist mir dank der stärkeren Vergrößerung (50 cm Brennlänge bewirkt hier mehr als dreißigfache Übertragung) gelungen, einen merklichen Unterschied im Dekrement bei völligem Evakuieren gegen dasjenige bei 3 mm (IIa und IIb, Kurve 58—59 und 62—63, Blatt XXVII).[1]) zu finden. Wir beobachten wieder eine ganz merkwürdige Steigung des Dekrementes nach den ganz kleinen Amplituden hin, Kurve 60 und 61. Das Dekrement in letzterer Kurve erreicht bereits einen relativ sehr hohen Wert, die geringe Sättigung des Eisens durch permanenten Magnetismus[2]) macht sich durch

1) In Aufnahme 59 ist leider ein Stück wegen Versagens der Bogenlampe verdorben, was ich erst beim Entwickeln bemerkte.

2) Es ist zu bemerken, daß der permanente Magnetismus nicht stärker als gerade notwendig erzeugt wurde. (Vgl. Diss. p. 149, ebendort auch Aufnahme 97a auf Ph. T. IX.)

eine nicht unbedeutende Vergrößerung des Dekrementes bemerklich; selbstredend gilt dies für alle Kurven in gleichem Maße.

In der Anordnung II ist das permanente Feld noch geringer; demgemäß auch die Dämpfung in den Aufnahmen 62 und 63. Aber der Widerstand bei normalem Luftdruck wächst wegen der kleinen Entfernung des freien Federendes von den Magnetpolen (1 mm) ganz enorm; er steigert das Dekrement auf das Vierfache des Wertes für luftleeren Raum.

Der Vergleich[1]) des Kurvenblattes XXVIII mit XXVI läßt den Einfluß der magnetischen Dämpfung auf die Tonhöhe erkennen, die mit zunehmender Amplitude nun nicht mehr ansteigt, sondern fällt. Auch der Luftzutritt äußert sich merklich, indessen wiederum für ganz kleine Schwingungen am stärksten. Nicht unbedeutend ist ferner die Wirkung der Luftreibung nach Einlassen der Luft bis auf 3 mm Druck. Sie darf wohl auch größer angenommen werden; denn der Schnittpunkt[2]) beider Kurven ist unverständlich und im Zweifelsfalle hat die Ermittelung für die Aufnahme bei 3 mm Druck den größeren Anspruch auf instruktiven Wert.

Ganz enorm fällt die Tonvertiefung aus bei Wiederhinzutritt der Luftdämpfung, beinahe um 5 Proz., eine Erscheinung, die um so weniger verständlich sein dürfte, wenn wir überlegen, daß das mit der Amplitude ziemlich ansteigende Dekrement (Kurve 64, XXVII) eine weiterhin viel merklicher mit der Amplitude wachsende Verstimmung hervorrufen sollte, als es die Kurve 64, XXIX, tatsächlich aufweist.

Wir sind nun des öfteren und namentlich bei den letzthin besprochenen Ergebnissen auf mannigfache, weder vorauszusagende, noch stets mit Sicherheit zu erklärende Erscheinungen gestoßen, die geeignet sein dürften, das Interesse an solch experimentellen Studien zu erhöhen und ihre Notwendigkeit zu erweisen, sobald es sich darum handelt, genaue Messungen mit schwingenden Systemen dieser Gattung vorzunehmen. Wir werden nun im später erscheinenden zweiten Teil des Referates Gelegenheit haben, die meisten Erscheinungen in ihrer Einwirkung auf das Resonanzbereich zu verfolgen.

1) Die in beiden Blättern weit auseinander liegende Schwingungszahl rührt lediglich von verschiedener Höhe der Befestigungsstelle des Hohlspiegels her.

2) Die Werte sind wiederholt kontrolliert und richtig befunden worden.

B. Theoretische Untersuchungen.

7.

Wärmeentwickelung in einer stationär schwingenden Stahlzunge.

Bei konstanter Breite α wachse der Längsschnitt einer Zunge keilförmig, so wie es in nachstehendem Bilde angedeutet ist.

Aus dem Dekrement der in Luft schwingenden Zunge findet man, daß die Energie bei einer Amplitude von $A = 10$ mm von einer Schwingung bis zur nächsten um ca. 4 Proz. abnimmt. Dieser Differenzbetrag hat sich in Reibungswärme umgesetzt.

Bei stationärem Schwingungszustand wird dem schwingenden System die verlorene Energie immer wieder ersetzt und dadurch die Amplitude auf konstanter Höhe gehalten.

Die in Wärme umgesetzte Energie erfährt man aus dem Verluste an lebendiger Kraft. Die mittlere lebendige Kraft L_m eines Massenpunktes, bez. einer Querschicht von der Höhe dx ist:

$$L_m = \frac{M}{2} v_m^2 = \frac{M}{2T} \int_0^T v^2 dt = \frac{1}{2} \sigma q \, dx \, (2\pi n)^2 \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos^2(2\pi n t) \, dt.$$

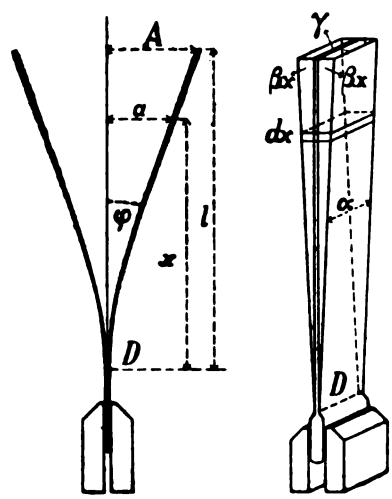


Fig. 10.

q = Querschnitt,
σ = spez. Gewicht,
n = Schwingungszahl,
= 100 pro Sek.,
$q = \alpha(\gamma + \beta x)$,
$\gamma = 0{,}02$ cm,
$\beta = 0{,}01$,
$\alpha = 0{,}75$ cm,
$l = 5$ cm.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sich die Durchbiegung ausschließlich im Punkt (bez. der Linie) D vollziehe, damit man setzen kann:

$$a = \frac{A}{l} x.$$

Ferner sei:

$$A = c \cdot \varphi = \operatorname{arc} \varphi.$$

Es bedeute L_M die mittlere lebendige Kraft des ganzen Systems.

$$L_M = \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_0^l\int_0^T \sigma\alpha(\gamma+\beta x)\frac{A^2}{l^2}x^2\,dx\,4\pi^2n^2\cos^2(2\pi n t)\,dt,$$

$$L_M = \frac{\alpha}{2}\sigma A^2\left(\frac{\gamma l}{3}+\frac{\beta l^2}{4}\right)4\pi^2n^2\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(2\pi n t)\,dt,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(2\pi n t) = n\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 u\,du}{2\pi n} = \frac{n\pi}{2\pi n} = \frac{1}{2};$$

denn

$$2\pi n t = u; \quad dt = \frac{du}{2\pi n};$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du = \left[\frac{1}{2}\sin u\cos u + \frac{u}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi,$$

$$L_M = \alpha\sigma A^2\left(\gamma\frac{1}{2}+\frac{\beta l^2}{4}\right)\pi^2n^2 = BA^2.$$

Nun ist aber die Differenz der lebendigen Kraft zweier aufeinander folgender Schwingungen

$$L_0 - L_1 = B(A_0^2 - A_1^2); \quad A_0^2 - A_1^2 = 0{,}04.$$

In einer Sekunde, d. h. für $n = 100$ Schwingungen muß dem stationär schwingenden System eine Arbeit zugeführt werden:

$$\mathfrak{W} = nB(A_0^2 - A_1^2)\text{ Erg.},$$
$$= 100\,.\,0{,}75\,.\,8\,.\,0{,}096\,.\,\pi^2\,.\,10000\,.\,0{,}04\text{ Erg.},$$
$$\mathfrak{W} = \frac{230000}{42000000} = 0{,}0055\text{ g-Kal.}$$

Diese Wärmemenge wird an die umgebenden Metallmassen abgeleitet, hauptsächlich aber an die Luft, durch welche die schwingende Zunge eine geradezu ideale Abkühlung erfährt; besonders bevorzugt werden in dieser Beziehung die äußeren Schichten der Biegungsstelle, allwo die Reibungswärme am stärksten auftritt.

Die im Vakuum schwingende Zunge erleidet keine Abkühlung durch die Luft. Dafür ist aber auch die Energie zur Erhaltung des stationären Schwingungszustandes weitaus ge-

ringer, entsprechend dem Dekrement, welches bei $A = 1$ cm nur 0,6 Proz. beträgt.

$$A_0^2 - A_1^2 = 1^2 - 0{,}994^2 = 0{,}012.$$

Dann ist obiger Wert für $\mathfrak{W}$ mit $\frac{0{,}012}{0{,}040}$ zu multiplizieren.

$$\mathfrak{W}_{\text{Vakuum}} = 0{,}00165 \text{ g-Kal.}$$

Da das obere Ende sich kaum verbiegt, so werde die Annahme zugelassen, daß alle Wärmeerzeugung auf das kleine Stück von 2 cm beschränkt sei, gemessen von D ab.

Das Stück der Feder beträgt:

$$\alpha \int_{l=0}^{l=2} (\gamma + \beta x)\, dx = 0{,}06 \text{ cm}^3.$$

Ist s die spezifische Wärme des Stahles gleich 0,12, so wird das genannte Stück der Zungenfeder in der Sekunde um je $\frac{0{,}00165}{0{,}06\, s} = 0{,}23^0$ erwärmt.

Um einigermaßen beurteilen zu können, wie warm die Biegungsstelle bleibt, wollen wir annehmen, daß von den gesamten 0,00165 g-Kal. pro Sekunde 10 Proz. durch Strahlung verloren gehen, gleich 0,00015 g-Kal. Wir fragen nun nach dem Temperaturgefälle an der Biegungsstelle, welche in Anbetracht ihrer großen Masse selbst nicht merklich erwärmt wird. Der Querschnitt sei dort:

$$q = 0{,}02 \,.\, 0{,}75 = 0{,}015 \text{ cm}^2.$$

Das Wärmeleitvermögen des halbweichen Stahles sei gleich 0,1.

Dann wird das stationäre Temperaturgefälle:

$$\tau = t_D - t_0 = \frac{0{,}0015}{0{,}015 \,.\, 0{,}1} = 1^0.$$

Auf jeden Fall erhellt aus der Rechnung, daß die Temperaturerhöhung bei stationärem Schwingungszustand der Maximalamplitude von 10 mm in der Größenordnung von 1° C. liegt, und daß diese Temperaturerhöhung vollauf genügt, um die Fehler zu erklären, welche bei den Vakuumversuchen auftreten, sobald die Wärmeleitung der Luft beseitigt war.

Des weiteren leuchtet ein, daß dieser Fehler um so kleiner wird, je weniger Zeit es kostet, um durch Herstellen der

größten Resonanz die Maximalamplitude zu erzielen, von welcher aus das Abklingen erfolgen soll.

Bei dieser ganzen Betrachtung ist noch keine Rücksicht genommen auf die Wärme, welche durch die induzierten Ströme (Foucaultströme) entstehen mag. Es ist dazu jedoch zu bemerken, daß diese Wärmeentwickelung in erster Linie in der Nähe des freien Endes stattfindet, woselbst der Querschnitt der Zunge und der Kraftlinienschnitt am stärksten ist.

8.

Einfluß der Deformation einer schwingenden Stahlzunge auf deren Schwingungsdauer und deren Schwingungsform.

Wir machen die Annahme, daß das Trägheitsmoment sich beim Ausbiegen der Zunge verkürze, und zwar soll diese Verkürzung eine quadratische Funktion der Amplitude φ sein.

Dann gilt der Ansatz:

$$(1) \qquad k(1 - b\varphi^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c^2\varphi,$$

worin k das Trägheitsmoment und c^2 die der Amplitude φ proportionale Kraft bedeutet.

Durch Substitution $p = d\varphi/dt$ gelingt die einmalige Integration:

$$(2) \quad \begin{cases} \int p\,dp = -\frac{c^2}{k}\int \frac{\varphi}{1 - b\varphi^2}\,d\varphi, \\ p^2 = -\frac{2c}{k}\int \frac{\varphi}{1 - b\varphi^2}\,d\varphi + C^2. \end{cases}$$

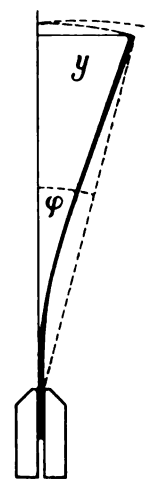


Fig. 11

Bei den Experimenten überschreitet φ selten $^1/_3$ der Winkeleinheit; eine rohe Messung zeigt, daß alsdann der mittlere Trägheitshalbmesser um etwa 2 Proz. verkleinert wird, das Trägheitsmoment daher um 4 Proz.

$$b\varphi^2 = 0{,}04, \quad b = \sim 0{,}004.$$

Entwickelt man $1/1 - b\varphi$ in die Reihe:

$$1 + b\varphi^2 + (b\varphi^2)^2 + (b\varphi^2)^3 + \ldots,$$

so genügt die Berücksichtigung der ersten zwei Glieder, da $(b\varphi^2)^3 = 0{,}0016$ das Trägheitsmoment k um weniger als

2 Promille und die Schwingungsdauer $\tau = F(\sqrt{k})$ in verschwin dend geringem Maße beeinflußt.

Es ist nun weiter

$$(3)\quad p^2 = -\frac{2c}{k}\int\left[\varphi + \frac{b}{3}\varphi^3\right]d\varphi + C^2 = -\frac{c^2}{k}\varphi^2 - \frac{bc^2}{2k}\varphi^4 + C^2$$

$$(4)\quad t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C^2 - \frac{c^2}{k}\varphi^2 - \frac{bc^2}{2k}\varphi^4}}.$$

Setzt man hierin $b = 0$, so erhält man die bekannt Formel für die Abhängigkeit des Ausschlages φ von der Zeit t

$$(5)\quad \varphi = C\sin\left(\frac{c}{\sqrt{k}}t\right) = C\sin(2\pi n t),$$

welche Gleichung aussagt, daß die Schwingungszahl n konstan bleibt und die Schwingung selbst sinusförmig verläuft.

Ist aber $b > 0$, so führt die Gleichung (4) auf elliptisch Integrale erster Gattung und man muß suchen, diesen Aus druck auf die Normalform zu reduzieren, nämlich auf da Integral

$$(6)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

worin $\varkappa$ den Modul der elliptischen Funktionen bezeichnet.

Zur Umwandlung empfiehlt sich folgende speziellere For

$$(7)\quad \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}.$$

Hierin ist

$$(8)\quad \sqrt{Y} = \sqrt{\gamma^2(y^2+\alpha^2)(\beta^2-y^2)}$$

und man hat sich der Substitutionen zu bedienen:

$$(9)\quad \varkappa = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad y = \beta\sqrt{1-z^2}.$$

Durch Entwickelung der Wurzelausdrücke in (4) und Gleichstellung der Koeffizienten erhält man:

10) $$C^2 - \frac{c}{k}\varphi^2 - \frac{b c^2}{2k}\varphi^4 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)y^2 - \gamma^2 y^4.$$

(11)
$$\begin{cases} \alpha^2\beta^2\gamma^2 = C^2, \\ \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{c^2}{k} = A^2, \\ \gamma^2 = \frac{b c^2}{2k} = B^2. \end{cases}$$

(11a)
$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{A^2}{B^2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} + \left(\frac{A^2}{2B^2}\right)^2}, \\ \beta^2 = -\frac{A^2}{B^2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} + \left(\frac{A^2}{2B^2}\right)^2}. \end{cases}$$

(12) $$\beta = \sqrt{-\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\sqrt{c^2 + 2bkC^2}}.$$

Aus (7) folgt:

(13) $$z = \sin am(\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, t).$$

Da nun

$$y = \beta\sqrt{1 - z^2},$$

so ist auch

(14) $$y = \beta \cos am(\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, t).$$

Es sei in der Folge $\varphi = y$

(15) $$y = \sqrt{-\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\sqrt{c^2 + 2bkC^2}} \cos am \sqrt{\frac{c}{k}\sqrt{c^2 + 2bkC^2}\, t} + \text{Const.}$$

Den Wert für C^2 findet man aus dem Wurzelausdruck für die Amplitude $\beta = \mathfrak{A}$ als

$$C^2 = \frac{\left(\mathfrak{A}^2 + \frac{1}{b}\right)^2 b^2 c^2 - c^2}{2bk}.$$

In (15) eingesetzt:

(16) $$y = \mathfrak{A} \cos am\left[\frac{c}{\sqrt{k}}\, t\left(1 + \frac{b}{2}\mathfrak{A}^2\right)\right] + \text{Const.}$$

(16a) $$y_{b=0} = \mathfrak{A} \cos am\left[\frac{c}{\sqrt{k}}\, t\right] + \text{Const.}$$

Die Schwingungsdauer

(17) $$T = \frac{4K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\sqrt{k}}{c}.$$

18)
$$\begin{cases} K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2, \\ q = \lambda + 2\lambda^5 + \ldots, \\ \lambda = \frac{1}{2}\frac{1 - \sqrt{\varkappa'}}{1 + \sqrt{\varkappa'}}, \\ \varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\varkappa^2\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\varkappa^2\right), \\ q = \lambda = \frac{\varkappa^2}{16}, \\ \lambda = \frac{1}{2}\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}\varkappa^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\varkappa^2}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right.}{4} \\ \varkappa' = 1 - \frac{1}{2}\varkappa^2. \end{cases} \quad \lambda = \frac{1}{1}$$

(19) $$\varkappa^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2\left(\mathfrak{A}^2 + \frac{1}{b}\right)} = \sim \frac{b}{2}\mathfrak{A}^2;$$

(20) $$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{8}b\,\mathfrak{A}^2\right),$$

(21) $$T = \frac{4\pi\left(1 + \frac{1}{8}b\,\mathfrak{A}^2\right)}{2\left(1 + \frac{b}{2}\mathfrak{A}^2\right)2\pi n} = \underline{\underline{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{3}{8}b\,\mathfrak{A}^2\right)}},$$

worin n die Schwingungszahl des Systems für unendlich kleine Amplituden bedeutet.

Die Schwingungszahl des Systems bei der Deformation ist:

(22) $$N = n\left(1 + \frac{3}{8}b\,\mathfrak{A}^2\right).$$

Die Schwingungszahl wird demnach erhöht, und zwar ist die Erhöhung bei kleinen Amplituden sehr gering.

In dem Kurvenblatt XXXVI ist die Tonerhöhung der Zunge bei der Deformation graphisch dargestellt. Gleichzeitig wurde versucht, die experimentell erhaltene Tonhöhenänderung zu analysieren. Es gelingt dies ziemlich gut, wenn man als Verstimmungsgröße einen mit der Amplitude linear wachsenden Faktor annimmt. Die resultierende Kurve entspricht demnach der Gleichung:

(23) $$N = n\left(1 - p\,\mathfrak{A} + \frac{3}{8}b\,\mathfrak{A}^2\right).$$

Einfluß der Deformation auf die Schwingungsform einer Zunge.

Wir gehen von der Gleichung (16) aus:

(16) $$y = \mathfrak{A}\cos a\,m\left[\frac{c}{\sqrt{k}}t\left(1 + \frac{b}{2}\mathfrak{A}^2\right)\right] + \text{Const.}$$

Da

$$(24)\qquad \cos a\,m\left(\frac{2K}{\pi}\,m\,t\right) = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot 2\sqrt[4]{q}\,\frac{\cos(m\,t)+\ldots}{1-2\,q\cos(2\,m\,t)+\ldots},$$

so wird

$$(25)\qquad y = \mathfrak{A}\left(1-\frac{b}{8}\,\mathfrak{A}^2\right)\frac{\cos\left[2\,\pi\,n\left(1+\frac{3}{8}\,b\,\mathfrak{A}^2\right)t\right]}{1-\frac{b}{8}\,\mathfrak{A}^2\cos\left[2\,.\,2\,\pi\,n\left(1+\frac{3}{8}\,b\,\mathfrak{A}^2\right)t\right]}.$$

Setzt man

$$n\left(1+\frac{3}{8}\,b\,\mathfrak{A}^2\right) = N,$$

so erhält man

$$y = \mathfrak{A}\left(1-\frac{b}{8}\,\mathfrak{A}^2\right)\frac{\cos(2\,\pi\,N\,t)}{1-\frac{b}{8}\,\mathfrak{A}^2\cos(2\,.\,2\,\pi\,N\,t)},$$

$$(26)\qquad y = \mathfrak{A}\cos(2\,\pi\,N\,t)\left[1-\underbrace{\frac{b}{8}\,\mathfrak{A}^2(1-\cos 4\,\pi\,N\,t)}_{(\Delta)}\right].$$

Diskussion der Schwingungsgleichung.

Wenn $b=0$, verläuft die Schwingung sinusförmig.

Ist aber $b>0$, so nimmt das Korrektionsglied Δ alle Werte an zwischen 0 und $(2\,b/8)\,\mathfrak{A}^2$, und zwar in der Weise, wie es durch die beigegebene Fig. 12 veranschaulicht werden mag. Da $1-\Delta$ als Faktor einer Kosinusfunktion auftritt, so ist die Verkleinerung der Amplitude relativ am stärksten, wenn die Zunge die Ruhelage passiert, wenn also die Amplituden y an und für sich sehr klein sind. Deshalb wird sich die Amplitudenverkleinerung bei den Abmessungen selbst etwa in der Gegend von $\varphi=45^0$ bez. 135^0 etc. am ehesten bemerkbar machen.

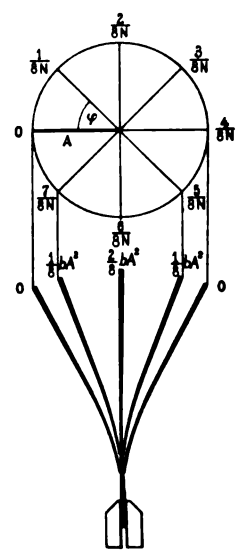


Fig. 12.

Bei der Methode der teilweisen Auswertung einer optischen Schwebung wurde stets eine sinusförmige Schwingung voraus-

gesetzt. Da diese niemals über $\mathfrak{A} = 1$ cm gingen, so betrug Δ bei $b = 0{,}004$ und $\mathfrak{A} \cos 45^0$ erst 0,05 Proz. der ganzen Ordinatenlänge.

Diese, zu 5 cm angenommen, wurde demnach um 0,025 mm zu groß gemessen, also um einen Betrag, der längst unterhalb der Größenordnung der übrigen Fehler liegt.

Eine graphische Darstellung der tatsächlichen Schwingungsform verlohnt kaum der Mühe, weil die Abweichungen zu gering ausfallen.

Die dünnen Hohlspiegel (Galvanometerspiegel von Hartmann & Braun) stellt die optische Präzisionswerkstätte von P. Schüll, Frankfurt a. M. her. Über Oberflächenversilberung vgl. Ann. d. Phys. 8. p. 537. 1902.

Zu den photographischen Aufnahmen benutzte ich 0,25 mm dicke Blattfilmfolien der A.-G. für Anilinfabrikation, Berlin SO. 36.

Hrn. Prof. Max Wien verdanke ich neuerdings den Vorschlag, bei künftigen Versuchen über das Dekrement von Stimmgabeln den mit intermittierendem Gleichstrom gespeisten Erregermagnet zu Beginn des Abklingens völlig zu entfernen, um die dämpfenden Wirkungen des remanenten Magnetismusses auszuschließen, der sowohl im Eisenkern des antreibenden Blättermagnetes als auch in den Stimmgabelzinken seinen Sitz haben kann. Die entsprechenden Versuche an der Stimmgabel von M. Kohl (Diss. IV VI, 1) dürften dank der Anordnung nach Fig. 3 (p. 131) von der Remanenz nur gering beeinflußt sein; denn das für die Strommagnetisierung gut geschlossene Kraftlinienfeld dürfte doch in Bezug auf den remanenten Stabmagnetismus wegen der Länge der Stahlzinken eine starke Streuung aufweisen. Jedenfalls ist die Erregung durch Wechselstrom, wie sie für Zungenfedern und dergleichen ausschließlich zur Anwendung kam, auch für Stimmgabelversuche zu bevorzugen. —

Ferner habe ich zu berichtigen, daß die auf p. 12 der Diss. genannte Methode zur Photographie schwingende Saiten nicht von A. Kundt, sondern von O. Raps ersonnen worden ist (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 32. 1901).

Die hier besprochenen Versuche wurden im Sommer 1902 zu Würzburg im physikalischen Institut der Universität ausgeführt, dessem Vorstand, Hrn. Prof. Willy Wien, ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank für seine wertvollen Anregungen aussprechen möchte.

Paris, Oktober 1903.

(Eingegangen 18. Oktober 1903.)

6. *Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten; von M. Laue.*

(Auszug aus der Berliner Dissertation, I. Teil.)

Einleitung.

Wenn man die auf Interferenz beruhenden Methoden, durch welche man sich einen Einblick in den Bau der Spektrallinien zu verschaffen gesucht hat, durchmustert, so sieht man, daß man zwei prinzipiell verschiedene Arten zu unterscheiden hat. Bei der einen Klasse läßt man nur zwei Wellen interferieren, muß dann aber, da an dem einzelnen Interferenzstreifen zunächst nichts Charakteristisches zu sehen ist, eine große Zahl von ihnen oder sogar das ganze Interferenzphänomen von verschwindend kleinen, bis zu jenen großen Gangunterschieden berücksichtigen, bei welchen die Streifen endgültig verschwinden. Bei der anderen Klasse von Versuchsanordnungen beobachtet man nur einen Streifen, muß aber eine Mehrzahl von Wellen zur Interferenz bringen, von denen je zwei denselben Gangunterschied haben.

Das Ziel aller spektroskopischen Untersuchungen muß sein, die Funktion zu ermitteln, welche die Intensitätsverteilung in der Spektrallinie in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl (oder einer äquivalenten Variabelen) darstellt. Den Versuch, dies Ziel auf die erstgenannte Art zu erreichen, hat bekanntlich Michelson[1]) gemacht; dadurch, daß er die „Sichtbarkeitskurve“ einerseits experimentell, andererseits, von willkürlich angenommenen Intensitätsverteilungen ausgehend, rechnerisch bestimmte, wollte er durch Vergleich beider Resultate Schlüsse auf den Bau der Spektrallinien ziehen. Nun ist ein solcher Rückschluß aber nicht eindeutig, wie Rayleigh[2]) zeigte, vielmehr gibt es im allgemeinen eine unendliche Mannigfaltigkeit von Intensitätsverteilungen, welche dieselbe

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) **31**. p. 338—346. 1891; **34**. p. 280—299. 1892; Journ. de phys. (3) **3**. p. 5—22. 1894.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **31**. p. 407—411. 1892.

Sichtbarkeitskurve ergeben. Tatsächlich hat sich Michelson auch in manchen Resultaten geirrt, wie später Perot und Fabry nachwiesen.

Um unzweideutigen Aufschluß über den Bau der Linien zu erhalten, ist man also auf das zweite Verfahren angewiesen. Als Apparate kommen hierfür in Betracht das Gitter, das Michelsonsche Stufenspektroskop und auch die planparallele Platte, seitdem es Perot und Fabry[1]) durch Versilbern der Grenzflächen, Lummer[2]) durch Vergrößerung des Einfallswinkels gelungen ist, das Reflexionsvermögen der Grenzflächen so zu steigern, daß die vielfach reflektierten Strahlen mit den ersten an Intensität noch vergleichbar sind.

Es entsteht nun die Frage, ob man mit diesem Verfahren imstande ist, das Ziel der Spektroskopie, die quantitative Erforschung der Intensitätsverteilung, zu erreichen. Zwar ist ohne weiteres klar, daß es nicht, wie beim Michelsonschen Verfahren, vorkommen kann, daß zwei Intensitätsverteilungen ununterscheidbar bleiben, obwohl sie nicht die geringste Ähnlichkeit miteinander haben; aber ob es möglich ist, in alle Einzelheiten dieser Funktionen, die nach den neuesten Untersuchungen von Lummer und Gehrcke doch manchmal recht kompliziert sind, einzudringen, kann doch nicht von vornherein entschieden werden. Man könnte einwenden, daß nach der bekannten Formel, nach welcher das Auflösungsvermögen des Gitters durch das Produkt ph aus der Zahl p der interferierenden Wellen und der Ordnungszahl h des beobachteten Interferenzstreifens bestimmt ist, sich durch Vergrößerung von p und h beliebig nahe benachbarte Teile der Linie trennen lassen müssen. Aber der Vergrößerung von p setzen jedenfalls einmal technische Schwierigkeiten eine Grenze, und daß eine Vergrößerung von h mit der von p gleichwertig erscheint, liegt nur an der Definition des Auflösungsvermögens, die von unendlich

1) A. Perot und C. Fabry, Ann. de chim. et phys. (7) **12**. p. 459—501. 1897; Compt. rend. 1897, 1898, 1899 und 1900; Ann. de chim. et phys. (7) **16**. p. 115—144. 1899.

2) O. Lummer, Verhandl. der Deutschen Physik. Gesellsch. **3**. p. 85—98. 1901; O. Lummer und E. Gehrcke, Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 11—17. 1902; Ann. d. Phys. **10**. p. 457—477. 1903; E. Gehrcke, Arch. d. Mathem. und Phys. **3**. p. 216—228. 1903.

schmalen Linien spricht. In Wirklichkeit gibt es für jede Spektrallinie eine Grenze, welche h nicht überschreiten kann, ohne daß benachbarte Spektrallinien ineinander überfließen und so zur Untersuchung unbrauchbar werden. Endlich ist es auch nicht ganz unbedenklich, jene Formel vom Gitter auf die planparallele Platte zu übertragen, bei der doch die Intensitäten den interferierenden Wellen nicht gleich sind, sondern die Glieder einer geometrischen Reihe bilden.

Wir wollen also folgende Frage behandeln: Es interferieren p Wellen, das Verhältnis der Amplitude der Schwingung in der n^{ten} zur Amplitude in der $n+1^{\text{ten}}$ sei s. s ist natürlich positiv, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$s \leqq 1$$

voraussetzen. Der Gangunterschied zwischen der $(n+1)^{\text{ten}}$ und der n^{ten} Welle sei charakterisiert durch die Größe u, und zwar der Einfachheit der Gleichungen halber so, daß $cu/2\pi$ gleich dem Gangunterschied ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum sein soll. Außerdem nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, jede Welle erleide einen Phasensprung ϑ, bevor sie mit der anderen interferiert. Bezeichnen wir ferner mit ν die Schwingungszahl $\left(\text{dann ist } u\nu = 2\pi \cdot \frac{\text{Gangunterschied}}{\text{Wellenlänge}}\right)$, und drückt $f(\nu)$ die Intensitätsverteilung aus, so ist die Helligkeit nach der Airy-Lummerschen Formel (in einer passend gewählten Einheit)

$$J = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \frac{1 + s^{2p} - 2s\cos p(u\nu + \vartheta)}{1 + s^2 - 2s\cos(u\nu + \vartheta)} d\nu \,. \tag{1}$$

Was kann man, wenn man J als Funktion von u und ϑ kennt, über $f(\nu)$ aussagen? Dabei soll s konstant sein, unabhängig sowohl von ν als auch von den Größen, welche u bestimmen. Dagegen schließen wir den Fall nicht aus, daß u (z. B. infolge von Dispersion) noch von ν abhängt.

Bei dieser Fragestellung haben wir schon von dem Vorzug Gebrauch gemacht, der die planparallele Platte vor den anderen Spektroskopen auszeichnet, nämlich, daß bei ihr das Interferenzbild von der Ausdehnung der Lichtquelle (Spalt-

breite) unabhängig ist.[1]) Die Interferenzbilder zweier Punkte verstärken sich durch Übereinanderlagerung, während sie beim Gitter durch Nebeneinanderlagerung sich stören. Dies gilt soweit die Bereiche des Gesichtsfeldes, welche von beiden Punkten Licht empfangen, sich überdecken; der Bereich eines Punktes hängt aber ab von der Gesamtheit der Richtungen, in denen der Punkt der Platte Licht zustrahlt; denn jeder Richtung entspricht ein Punkt des Gesichtsfeldes. Verlegt man nun die Lichtquelle ins Unendliche, indem man sie in die Brennebene einer Kollimatorlinse bringt, so sendet jeder Punkt der Lichtquelle nur in einer Richtung der Platte Licht zu, erleuchtet also auch nur einen Punkt, d. h. die Lichtquelle wird in diesem Falle im Gesichtsfeld abgebildet. Trotzdem gilt auch dann noch der Satz von der Unabhängigkeit des Interferenzbildes von der leuchtenden Fläche, falls diese nur überall gleichmäßig leuchtet.

Ferner haben wir, wenn wir die Airy-Lummersche Formel so, wie es geschehen ist, anwenden, schon ausgesprochen, daß wir das Licht als aus zeitlich unbegrenzten ungedämpften und ungestörten Sinusschwingungen bestehend annehmen; denn nur unter dieser Voraussetzung ist jene Formel abgeleitet. Diese Annahme steht nicht in Widerspruch mit der oft angewandten Betrachtungsweise, die in Rücksicht auf die Entstehung des Lichtes im leuchtenden Körper von gedämpften aber immer wieder neu erregten Schwingungen spricht. Denn wie auch der Vorgang der Lichterregung sein mag, immer können wir durch das Fouriersche Doppelintegrad den Lichtvektor als Summe reiner Sinusschwingungen darstellen.[2]) Wir halten uns so nicht nur von jeder Hypothese frei, sondern sind auch noch vor der Möglichkeit geschützt, durch Übertragung von Formeln, die sich auf reine Sinusschwingungen beziehen, auf solche gestörte Schwingungen Irrtümer zu begehen.

---

1) Vgl. O. Lummers Darstellung in Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik 2. 1. p. 916 ff.

2) Über die Frage, welche Größe bei dieser Darstellung als Intensität der Strahlung von der Schwingungszahl ν zu bezeichnen, vgl. M. Planck Ann. d. Phys. 1. p. 81—122. 1900 u. 7. p. 390—400. 1902.

§ 1. **Die Fouriersche Reihe für die Funktion** $\frac{1 + s^{2p} - 2 s^p \cos p z}{1 + s^2 - 2 s \cos z}$

Wir gehen aus von der aus der Theorie des Poissonschen Integrals bekannten Gleichung:

$$\frac{1}{1 + s^2 - 2 s \cos z} = \frac{2}{1 - s^2}\left(\frac{1}{2} + \sum_1^\infty s^n \cos n z\right).^{1})$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n z \, dz}{1 + s^2 - 2 s \cos z} = \frac{2 s^n}{1 - s^2}.$$

Dabei ist zunächst n als positiv vorausgesetzt. Vertauscht man aber n mit $-n$, so ändert sich auf der linken Seite nichts; also gilt die allgemeinere Gleichung:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n z}{1 + s^2 - 2 s \cos z} dz = \frac{2 s^{|n|}}{1 - s^2}.$$

Dieses Resultat soll uns dienen, die Koeffizienten der Reihe für die Funktion $\frac{1 + s^{2p} - 2 s^p \cos p z}{1 + s^2 - 2 s \cos z}$ zu berechnen. Der Koeffizient von $\sin n z$ ist natürlich gleich Null. Der von $\cos n z$ aber hat den Wert:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + s^{2p} - 2 s^p \cos p z}{1 + s^2 - 2 s \cos z} \cos n z \, dz$$

$$= \frac{1 + s^{2p}}{\pi}\int_{+\pi}^{-\pi} \frac{\cos n z \, dz}{1 + s^2 - 2 s \cos z} - \frac{s^p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos (p + n) z + \cos (p - n) z}{1 + s^2 - 2 s \cos z} dz$$

$$= 2\frac{s^n - s^{|p-n|+p}}{1 - s^2}.$$

Ist $n \geqq p$, also $|p - n| = n - p$, so verschwindet dies Integral, ist dagegen $n < p$, so ist es gleich

$$2\frac{s^n - s^{2p-n}}{1 - s^2}.$$

---

1) H. Burckhardt u. W. F. Meyer, Encyklopädie der Mathem. Wissenschaft. 2. A. 7. b. § 19 u. 20.

Mithin ist:

$$(2)\quad \frac{1+s^{2p}-2s^p\cos pz}{1+s^2-2s\cos z}=2\frac{1-s^{2p}}{1-s^2}\left(\frac{1}{2}+\sum_1^{p-1}A_{n,p}\cos nz\right),$$

wobei

$$(3)\quad A_{n,p}=\frac{s^n-s^{2p-n}}{1-s^{2p}}$$

gesetzt ist. Gleichung (1) nimmt also, wenn man gleichzei zu einer anderen Einheit für J übergeht, die Form an:

$$(4)\quad J=\int_{\nu_1}^{\nu_2}f(\nu)\,d\nu+\sum_1^{p-1}A_{n,p}\int_{\nu_1}^{\nu_2}f(\nu)\cos n(u\nu+\vartheta)\,d\nu.$$

Uns interessiert zunächst das Verhalten von $A_{n,p}$ als Fu tion von s, n und p. Aus (3) folgt:

$$(5)\quad \frac{dA_{n,p}}{ds}=\frac{s^{2n-1}}{(1-s^{2p})^2}[n(1-s^{2(2p-n)})-(2p-n)s^{2(p-n)}(1-s^2$$

also ist für

$$s=0\qquad A_{n,p}=0\qquad \frac{dA_{n,p}}{ds}=0.$$

$$s=1\qquad A_{n,p}=1-\frac{n}{p}\qquad \frac{dA_{n,p}}{ds}=0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, da der Einfluß vo nach (4) sich nur in den Werten der $A_{n,p}$ äußert, der für Theorie der planparallelen Platte wichtige Satz:

Ist die Differenz $(1-s)$ klein, so ist ihr Einfluß auf Interferenzphänomen von der Größenordnung $(1-s)^2$.

Für alle zwischen 0 und 1 liegenden Werte s $dA_{n,p}/ds>0$, wie wir nun zeigen wollen. Aus den U gleichungen

$$\frac{1}{p-n}(s^{2n}+s^{2(n+1)}+\ldots s^{2(p-1)})<s^{2n}<\frac{1}{n}(1+s^2+\ldots s^{2(n-$$

folgt, indem man mit $1-s^2$ erweitert,

$$p\,s^{2n}<n\,s^{2p}+p-n.$$

Letzteres ist identisch mit

$$\frac{d}{ds}[n(1-s^{2(2p-n)})]<\frac{d}{ds}[(2p-n)s^{2(p-n)}(1-s^{2p})].$$

Die Funktionen, deren Differentialquotienten hier miteinander verglichen werden, sind aber für $s = 1$ einander gleich. Daraus folgt, daß für $s < 1$

$$n(1 - s^{2(2p-n)}) > (2p - n)\, s^{2(p-n)}(1 - s^{2p})$$

ist, und nach (5), daß (für $s < 1$) $dA_{n,p}/ds > 0$ ist. Hieraus schließen wir, daß der Wert $1 - n/p$, den $A_{n,p}$ für $s = 1$ annimmt, sein Maximalwert ist. Fügen wir nun noch hinzu, daß

$$A_{n,p+1} > A_{n,p} > A_{n+1,p}$$

ist, so haben wir die uns interessierenden Eigenschaften von $A_{n,p}$ vollständig aufgezählt.

§ 2. Berücksichtigung der Dispersion.

Bekanntlich zeigt die Formel für das Auflösungsvermögen des Stufenspektroskopes einen nicht ganz unbeträchtlichen Einfluß der Dispersion und ein Blick auf die Gleichung, die den Gangunterschied bei der planparallelen Platte gibt, lehrt, daß dieser außer von der Plattendicke und dem Einfallswinkel auch von dem Brechungsindex des Plattenmateriales, also von der Schwingungszahl ν des Lichtes abhängt. Dementsprechend wollen wir u als Funktion von ν, oder was dasselbe sagt, als Funktion der Wellenlänge in Luft

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

betrachten. Mit λ_0 wollen wir eine in der Spektrallinie auftretende, mittlere Wellenlänge bezeichnen, mit u_0 den Wert von u, welchen man erhält, wenn man der Berechnung von u den λ_0 zugehörenden Wert des Brechungsindex zugrunde legt. Bei der Schmalheit der Spektrallinien ist es jedenfalls ausreichend,

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_0 (\lambda - \lambda_0) \tag{6}$$

zu setzen. Es mag inkonsequent erscheinen, daß wir hier die Wellenlänge als Variabele benutzen, es empfiehlt sich aber dies Verfahren durch die Einfachheit, die es unseren Glei-

chungen gibt; denn durch die Substitution (6) erhält n wenn man die Größen

$$U = u_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_0 \lambda_0, \quad V = \vartheta + c\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_0 \tag{7}$$

einführt,

$$u v + \vartheta = U v + V. \tag{8}$$

Die Berücksichtigung der Dispersion hat also keine wesentlic Änderungen zur Folge. Gleichung (4) geht jetzt über in:

$$J(U, V) = \tfrac{1}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu)\, d\nu + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \cos n (U\nu + V)\, d\nu \tag{9}$$

$J(U, V)$ haben wir geschrieben, weil wir von nun U und V als die unabhängigen Variabelen betrachten woll daß sie in Praxi z. B. bei der planparallelen Platte von gebener Dicke nicht voneinander unabhängig sind, brau uns dabei nicht zu stören. Durch Spezialisierung können immer zu diesem Fall übergehen.

Der Gleichung (9) wollen wir sogleich noch eine für wisse Zwecke bequemere Form geben. Wir führen die Wellenlänge λ_0 entsprechende Schwingungszahl ν_0 ein u setzen

$$\xi = \nu - \nu_0.$$

Ferner sei $f(\nu) = \varphi(\xi)$. Führen wir endlich in Verallgemei rung der von Michelson in den zitierten Arbeiten gebrauch Bezeichnungen

$$\begin{cases} P = \int \varphi(\xi)\, d\xi, \\ C_n = \int \varphi(\xi) \cos n U \xi\, d\xi, \quad S_n = \int \varphi(\xi) \sin n\, U \xi\, d\xi \end{cases} \tag{10}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{cases} J(U, V) = \tfrac{1}{2} P + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \big(C_n \cos n (U\nu_0 + V) \\ \qquad\qquad - S_n \sin n (U\nu_0 + V)\big) \end{cases} \tag{9a}$$

§ 3. Eine Fouriersche Reihe für $f(\nu)$.

Zur Untersuchung eignen sich nur solche Interfere streifen, welche von den benachbarten deutlich getrennt si Notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung die

Trennung ist, daß nicht das h^{te} Helligkeitsmaximum einer in der Spektrallinie auftretenden Schwingungszahl auf das $(h+1)^{te}$ einer anderen fällt. Die Helligkeitsmaxima, welche streng monochromatisches Licht von der Schwingungszahl ν erzeugen würden, liegen nun nach (1) und (8) dort, wo

$$u\nu + \vartheta = U\nu + V = 2h\pi$$

ist. Für die Trennung der Streifen ist also erforderlich, daß für keine der vorkommenden Schwingungszahlen ν

$$U\nu + V = 2(h+1)\pi$$

dort ist, wo

$$U\nu_1 + V = 2h\pi$$

ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn

$$U(\nu_2 - \nu_1) < 2\pi. \tag{11}$$

Diese Ungleichung sehen wir nun als erfüllt an. Führen wir vorübergehend

$$y = U\nu$$

als Variabele in $f(\nu)$ ein, so ist die Funktion $f(y/U)$ nach (11) nur in einem Bereich der Variabelen von Null verschieden, der kleiner als 2π ist. Für diesen Bereich gilt also die Entwickelung

$$\pi f\left(\frac{y}{U}\right) = \tfrac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) dy + \sum_1^\infty \left(\cos ny \int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) \cos ny\, dy + \sin ny \int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) \sin ny\, dy \right).$$

Kehrt man zur Benutzung der Variabelen ν zurück, und ersetzt dann ν durch den Ausdruck $(2h\pi - V)/U$, so findet man

$$\frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right) = \tfrac{1}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu)\, d\nu + \sum_1^\infty \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \cos n(U\nu + V)\, d\nu. \tag{12}$$

Durch Einführung der Substitutionen (10) kann man dieser Gleichung auch die Form geben:

$$\frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right) = \tfrac{1}{2} P + \sum_1^\infty (C_n \cos n(U\nu_0 + V) - S_n \sin n(U\nu_0 + V)). \tag{12a}$$

§ 4. Vergleich der Gleichungen (9) und (12).

Setzt man in (9) $s = 1$, $p = \infty$, so nehmen nach (3) alle $A_{n,p}$ den Wert 1 an und es folgt aus (12):

$$J(U, V) = \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right),$$

d. h. J ist proportional zur Intensität der Schwingungszahl, welche für sich allein an der betreffenden Stelle ihr h^{tes} Helligkeitsmaximum ergäbe. In diesem Fall könnte man die Funktion f direkt aus dem Anblick eines Interferenzstreifens entnehmen. Dieser Fall ist nun nicht realisierbar. Vielmehr treten, da p stets endlich ist, von den Integralen

$$\int f(\nu) \cos n(U\nu + V)\, d\nu$$

in (9) nur die $(p-1)$ ersten auf und auch diese sind nicht mit dem ihnen nach (12) zukommenden Koeffizienten 1, sondern mit den mit wachsendem n abnehmenden Koeffizienten $A_{n,s}$ multipliziert. Trotzdem wird eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den Funktionen

$$J(U, V) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right)$$

bestehen, wenn die in der Reihenentwicklung (12) ausschlaggebenden Glieder in (9) mit solchen Koeffizienten $A_{n,p}$ multipliziert sind, die von 1 noch nicht allzuviel verschieden sind. Nach dem in § 1 Gesagten nimmt diese Ähnlichkeit mit wachsendem s und p stets zu. Die Zahl der in (12) ausschlaggebenden Glieder hängt von U ab, denn der Wert von U, von dem an nach der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\int f(\nu) \cos(U\nu + V)\, d\nu$$

von Null nicht mehr merklich verschieden ist, wird von dem Produkt nU bei um so kleinerem n überschritten, je größer U ist.

Auf indirektem Wege kann man übrigens, ohne die Grenzen eines Interferenzstreifens zu überschreiten, noch mehr über die Funktion $f(\nu)$ ermitteln. Hat man z. B. ein Verfahren, bei dem man p von 1 an bis zu einem Maximalwert P sukzessiv

wachsen lassen kann[1]), so kann man, da jedesmal, wenn p um 1 wächst, in (9) ein neues Integral auftritt, und die Koeffizienten $A_{n,p}$ bekannt sind, die $(P-1)$ ersten Integrale der Gleichung (12) einzeln bestimmen. Dasselbe erreicht man, wenn man sich mit Beobachtungen bei konstantem p begnügen will, auf rechnerischem Wege folgendermaßen:

Die in den Gleichungen (10) auftretende Integrationsvariabele ξ ist infolge der Schmalheit aller Spektrallinien im ganzen Integrationsbereich höchstens von der Größenordnung $10^{-4}\nu_0$. Ist also p nicht zu groß (sagen wir kleiner als 10^2), so ist selbst C_{p-1} und S_{p-1} mit U langsam veränderlich gegen alle $\cos n(U\nu_0+V)$ und $\sin n(U\nu_0+V)$, die in (9a) auftreten. Betrachtet man aber alle C_n und S_n als konstant, so wird $J(U,V)$ die Funktion einer einzigen Variabelen

$$w = U\nu_0 + V.$$

Multipliziert man dann (9a) mit $\cos n\,w\,dw$ oder $\sin n\,w\,dw$ und integriert von einem beliebigen Wert w_1 bis $w_1+2\pi$ (die Werte durchläuft w, wenn man von einer Stelle des h^{ten} bis zur entsprechenden Stelle des $(h+1)^{\text{ten}}$ Interferenzstreifens fortschreitet), so findet man nach den bekannten Formeln zur Berechnung der Koeffizienten einer Fourierschen Reihe die Integrale C_n und S_n bis zu $n=p-1$ einzeln, die man dann nach (12a) zur angenäherten Berechnung von f verwenden kann. (Hätte man eine Versuchsanordnung, bei der sich V bei konstantem U variieren ließe, so könnte man von der Gleichung

$$J(U,V) = \tfrac{1}{2}\int f(\nu)\,d\nu + \sum_1^{p-1} A_{n,p}\Big(\cos n\,V\int f(\nu)\cos U\nu\,d\nu - \sin n\,V\int f(\nu)\sin n\,U\nu\,d\nu\Big)$$

ausgehend, in ähnlicher Weise die $(p-1)$ ersten Integrale von (12) *in aller Strenge* ermitteln. Da aber ein solches Verfahren bis jetzt nicht bekannt ist, haben wir der obigen angenäherten Methode den Vorzug gegeben.)

---

1) Vgl. O. Lummer u. E. Gehrcke, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4. p. 337—346. 1902, besonders von p. 344 an.

Es gilt also der Satz:

Interferieren p Strahlenbündel miteinander, so lassen sich durch Beobachtung des einzelnen Interferenzsstreifens die p ersten Glieder der Reihenentwickelung (12) bestimmen. Die höheren Glieder sind ohne Einfluß auf das Interferenzbild.

Überblickt man noch einmal den Einfluß, den die Größen s, p, U und V auf die Leistungsfähigkeit der Methode haben, so sieht man:

1. V ist ohne jeden Einfluß darauf, dasselbe gilt daher auch von dem Phasensprung ϑ.

2. Der Einfluß von s ist äußerst gering, wenn s von 1 nicht sehr verschieden ist; er läßt sich ganz eliminieren.

3. p bestimmt die Zahl der Glieder von (12), die sich ermitteln lassen.

4. U bestimmt die Schnelligkeit der Konvergenz der Reihe (12).

§ 5. Exakte Bestimmung von $f(\nu)$.

Aus den Erörterungen der vorigen Paragraphen sieht man daß die Annäherung, mit welcher sich $f(\nu)$ aus der Betrachtung eines Interferenzstreifens ermitteln läßt, vor allem von der Zahl p der interferierenden Wellen abhängt, und tatsächlich ist auch von jeher das Streben der Experimentatoren auf Vergrößerung dieser Zahl gerichtet gewesen. Um so interessanter dürfte es sein, daß es ein Verfahren gibt, bei dem man in der Genauigkeit der Bestimmung $f(\nu)$ von p (und ebenso von s) gänzlich unabhängig ist, bei dem man sich dafür freilich nicht auf die Messung in einem Streifen beschränken darf, sondern deren mehrere (genau genommen unendlich viele) in Betracht ziehen muß. Aus diesem Grunde kann man dies Verfahren passend als eine Kombination der beiden Arten spektroskopischer Untersuchungsmethoden bezeichnen, von denen wir in der Einleitung sprachen.

Die Funktion

$$H(U, V) = J(U, V) - \tfrac{1}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu)\, d\nu \tag{13}$$

ist, ebenso wie $J(U, V)$, eine empirisch zu ermittelnde Funktion, denn die Gesamtintensität $\int f(\nu)\,d\nu$ der Spektrallinie ist leicht anderweitig zu bestimmen. Nach (9) ist

$$H(U, V) = \sum_{1}^{p-1} A_{n,p} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(n) \cos n(U\nu + V)\,d\nu. \tag{14}$$

Wir bilden nun die Summe:

$$\tfrac{1}{2} H(O, O) + \sum_{1}^{\infty}{}_m H(m\,U, m\,V);$$

nach (14) erhält $A_{n,p}$ dabei als Faktor die Summe:

$$\tfrac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu)\,d\nu + \sum_{1}^{\infty}{}_m \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \cos m\,n(U\nu_0 + V)\,d\nu,$$

welche nach (12) den Wert

$$\frac{\pi}{n\,U} f\left(\frac{2\,h'\pi - n\,V}{n\,U}\right)$$

hat. Dabei ist angenommen [vgl. (11)], daß

$$n\,U(\nu_2 - \nu_1) < 2\,\pi.$$

Damit dies für alle in (14) auftretenden Werte von n zutrifft, muß

$$(p - 1)\,U(\nu_2 - \nu_1) < 2\,\pi \tag{15}$$

sein.

Diese Ungleichung sei erfüllt. Die ganze Zahl h' muß so gewählt sein, daß $(2\,h'\pi - n\,V)/n\,U$ zwischen ν_1 und ν_2 liegt, d. h. so, daß $n(U\nu_1 + V) < 2\,h'\pi < n(U\nu_2 + V)$ ist. Eine Zweideutigkeit durch (15) ist ausgeschlossen. Liegt nun $2\,h\pi$ zwischen $U\nu_1 + V$ und $U\nu_2 + V$, so muß man $h' = n\,h$ setzen und erhält als Faktor von $A_{n,p}$ in obiger Summe

$$\frac{\pi}{n\,U} f\left(\frac{2\,h\pi - V}{U}\right).$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} H(O, O) + \sum_{1}^{\infty} H(m\,U, m\,V) = \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2\,h\pi - V}{U}\right) \cdot \sum_{1}^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}.$$

Stellt man hier die Glieder etwas um, so findet man das *in aller Strenge gültige* Resultat:

$$f\left(\frac{2\,h\pi - V}{U}\right) = \frac{U}{\pi \cdot \sum_{1}^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}} \left(\tfrac{1}{2} H(O, O) + \sum_{1}^{\infty} H(m\,U, m\,V)\right). \tag{16}$$

Dies bedeutet: *Man wähle sich einen Interferenzstreifen von nicht zu hoher Ordnungszahl h, damit (15) nicht verletzt wird. In diesem wird es eine Stelle, d. h. ein Wertepaar U und V geben, an welcher die Schwingungszahl*

$$\nu = \frac{2h\pi - V}{U},$$

falls sie für sich allein vorhandcn wäre, ein Helligkeitsmaximum geben würde. An dieser Stelle messe man $J(U, V)$ und berechne nach (13) daraus $H(U, V)$. Dasselbe wiederhole man im $2\,h^{\text{ten}}$, $3\,h^{\text{ten}}$ etc. in inf. Interferenzstreifen, dann findet man $H(2U, 2V)$, $H(3U, 3V)$ etc. und daraus nach (16) $f(\nu)$. Denn

$$H(O, O) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu)\, d\nu \cdot \sum_{1}^{p-1} A_{n,p}$$

ist nur von der Gesamtintensität abhängig und diese haben wir schon oben als bekannt vorausgesetzt. In dem Fall, daß man die Dispersion vernachlässigen und $\vartheta = 0$ setzen kann, kann man der Gleichung (16) noch eine einfachere Form geben, indem man $2h\pi / U = \nu$ setzt. V verschwindet dann nämlich nach (7) und man erhält:

$$(16\,a) \qquad f(\nu) = \frac{h}{\nu} \frac{1}{\sum_{1}^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}} \left(H(O) + \sum_{m=1}^{m=\infty} H\left(\frac{2mh\pi}{\nu}\right)\right).$$

Mit den erwähnten Messungen muß man so lange fortfahren, bis man in das Gebiet kommt, in welchem die Interferenzstreifen endgültig verschwinden. Nach (9) tritt dies dann ein, wenn U so groß geworden ist, daß auch das erste der dort auftretenden Integrale von Null nicht mehr merklich verschieden ist. Der Punkt, von dem an dies Gebiet beginnt, ist also unabhängig von p.

Die Ordnungszahl h des Interferenzstreifens, bei dem man zu messen anfangen muß, ist aber nach (15), da die den Gangunterschied messende Größe U und h einander annähernd proportional sind, etwa umgekehrt proportional zu $(p-1)$. *Um bei Anwendung der Gleichung (16) möglichst wenig Interferenzstreifen zu berücksichtigen zu haben, muß man also p möglichst klein, d. h. gleich 2 wählen.* Damit kämen wir wieder auf die früheren Untersuchungsmethoden zurück, mit dem Unterschied,

daß man sich nicht mit der Bestimmung der Sichtbarkeit begnügen dürfte, sondern in den Interferenzstreifen Messungen ausführen müßte.

§ 6. Über ein von Lummer und Gehrcke angewandtes Beweisverfahren für die Interferenzfähigkeit des Lichtes bei großen Gangunterschieden.[1])

Auf Grund der hier entwickelten Theorie können wir nun der Deutung nicht zustimmen, die Lummer und Gehrcke in ihrer Abhandlung „Über die Interferenz des Lichtes bei mehr als 2 Millionen Wellenlängen Gangunterschied“ [1]) einem dort beschriebenen Versuch geben. Die Autoren beobachteten eine Veränderung des Interferenzbildes bei der Erhöhung der Zahl p der interferierenden Strahlen von 8 auf 9 in dem Sinn, daß dabei die Maxima schärfer werden. Auf Grund der Airy-Lummerschen Formel führen sie dies darauf zurück, daß der 9te, neu hinzukommende Strahl mit dem ersten noch interferenzfähig ist, und schließen daraus, daß das benutzte grüne Quecksilberlicht selbst bei einem Gangunterschied, der das 8fache des Gangunterschiedes zwischen dem ersten und zweiten Strahl beträgt, seine Interferenzfähigkeit nicht verliert.

Wie oben erwähnt, drückt sich das Aufhören der Interferenzfähigkeit in Gleichung (9) dadurch aus, daß von einem gewissen Wert von U an alle dort auftretenden Integrale verschwindend klein werden. Der von Lummer und Gehrcke gezogene Schluß bedeutet also: Unter den vorliegenden Verhältnissen ist $\int f(\nu)\cos 8(U\nu + V)\,d\nu$ noch merklich von Null verschieden.

Wie wird dies nun bewiesen? Indem man zuerst nach (9)

$$J(U, V) = \tfrac{1}{2}\int f(\nu)\,d\nu + \sum_{1}^{7} A_{n,8}\int f(\nu)\cos n(U\nu + V)\,d\nu$$

und dann

$$J(U, V) = \tfrac{1}{2}\int f(\nu)\,d\nu + \sum_{1}^{9} A_{n,9}\int f(\nu)\cos n(U\nu + V)\,d\nu$$

beobachtet und besagten Unterschied konstatiert. Dieser Unterschied ist aber keineswegs allein durch das Hinzutreten

1) O. Lummer u. E. Gehrcke, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 3. p. 337—346. 1902; vgl. besonders p. 344 u. f.

eines Gliedes, das $\int f(\nu)\cos 8(U\nu + V)d\nu$ enthält, bedingt, sondern es ist überall an Stelle von $A_{n,8}$, $A_{n,9}$ getreten. Also ist der Beweis hinfällig.

Um aber alle Zweifel zu heben, müssen wir noch in dem Gedankengang, der zu diesem falschen Resultat geführt hat, den ersten Irrtum nachweisen. Daß man das Licht als aus gedämpften und immer wieder erregten Schwingungen bestehend annimmt, steht mit unserer Behandlungsweise nicht in Widerspruch. Also liegt ein Trugschluß vor, der, wie man leicht sieht, auf Übertragung der Airy-Lummerschen Formel, die für reine Sinusschwingungen gilt, auf gestörte Schwingungen beruht. Um ihn richtigzustellen, wollen wir annehmen, die kohärenten Wellenzüge, welche die Lichtzentren aussenden, sind fähig, acht miteinander interferenzfähige Strahlenbündel zu liefern, nicht mehr und nicht weniger. Wir beweisen, daß trotzdem die beobachtete Änderung des Interferenzbildes eintritt, wenn man die Zahl der interferierenden Strahlen von 8 auf 9 erhöht. Die Zeit zwischen dem Ende einer Reihe regelmäßiger Schwingungen und dem Beginn der nächsten soll unendlich klein sein; auch wollen wir von der Dämpfung und der Schwächung bei der Reflexion absehen.

Das Leuchten eines Körpers gehört zu den ungeordneten Vorgängen. Daher gibt es bei acht interferierenden Strahlenbündeln in jedem Augenblick

1. solche Lichtzentren, die zu allen acht Strahlenbündeln interferenzfähige Wellen liefern. Diese rufen eine Helligkeitsverteilung hervor, die wir mit J_8 bezeichnen;

2. ebensoviel Lichtzentren, die nur für das zweite, dritte ... achte Strahlenbündel interferenzfähige Wellen liefern. Ins erste entsenden sie eine Welle, die mit den anderen in keinem gesetzmäßigen Zusammenhang steht. Von ihnen rührt eine Helligkeitsverteilung her, die wir mit $J_1 + J_7$ bezeichnen.

3. ebensoviel Lichtzentren, die einerseits zum dritten, vierten etc., achten kohärente Wellen liefern, andererseits zum ersten und zweiten. Diese ergeben $J_2 + J_6$, etc.

Man beobachtet demnach:

$$J_8 + (J_1 + J_7) + (J_2 + J_6) + \ldots + (J_7 + J_1) = J_8 + 2\sum_1^7 J_n .$$

Nimmt man nun noch ein neuntes Strahlenbündel hinzu, so liefern die Lichtzentren unter 1. $J_8 + J_1$, die unter 2. $J_1 + J_8$, die unter 3. $J_2 + J_7$ etc. Man beobachtet also in diesem Fall

$$(J_8 + J_1) + (J_1 + J_8) + (J_2 + J_7) + \ldots + (J_7 + J_2) = 2 \sum_1^8 J_n .$$

Man sieht es ist J_8 hinzugekommen, und dies wird natürlich nicht nur die Helligkeit im allgemeinen, sondern auch die Schärfe der Maxima vergrößern, da die Maxima von J_8 allein nach der Airy-Lummerschen Formel schärfer sind als die aller anderen der hier auftretenden J_n.

Der andere Schluß, den Lummer und Gehrcke in der genannten Arbeit aus dem Auftreten und der Schärfe des vierfachen Ringsystems auf die Interferenzfähigkeit von mindestens sechs aufeinander folgenden Strahlenbündeln ziehen, bleibt durch diese Erörterungen unberührt. Denn beobachtet man eine Intensitätsverteilung, die durch das Auftreten von J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 nicht zu erklären ist, so muß mindestens noch J_6 existieren. Dadurch ist dann die Interferenzfähigkeit des grünen Quecksilberlichtes bei $2{,}6 \cdot 10^6 \cdot \frac{5}{6} = 1{,}6 \cdot 10^6$ Wellenlängen Gangunterschied bewiesen und es ist wohl wahrscheinlich, daß auch noch höhere Gangunterschiede sie nicht aufheben würden.

§ 7. Berechnung von U und V für die planparallele Platte. Über die Berechtigung einiger Vernachlässigungen.

Ist n der Brechungsindex des Plattenmaterials, so ist der Gangunterschied:

$$\frac{c}{2\pi} u = 2 n d \cos\beta ,$$

wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, den die Strahlen in der Platte mit deren Normalen bilden. β hängt mit dem Einfallswinkel α zusammen durch die Gleichung

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} .$$

Berücksichtigt man dies bei der Bildung des Differentialquotienten

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} = \frac{4\pi d}{c} \frac{\partial (n \cos\beta)}{\partial \lambda} ,$$

so findet man aus (7)

$$U = \frac{4\pi d}{c}\left(n_0 \cos\beta_0 - \frac{\lambda_0}{\cos\beta_0}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_0\right),$$

$$V = \vartheta + \frac{4\pi d}{\cos\beta_0}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_0.$$

Dabei ist β_0 der Wert von β, den man aus $\sin\beta = \sin\alpha/n$ erhält, wenn man dort für n den zu λ_0 gehörenden Wert n_0 einsetzt. Da $dn/d\lambda < 0$ ist, gilt der Satz:

Wie beim Stufenspektroskop hat die Dispersion bei der planparallelen Platte eine scheinbare Vergrößerung des Gangunterschiedes zur Folge.

Bei der Lummerschen Versuchsanordnung ist s nicht, wie wir annahmen, konstant, sondern da für die eine Polarisationsrichtung

$$s = \sigma^2 = \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \cos\alpha}\right)^2$$

ist und für die andere einen nahezu gleichen Wert hat, so ist s durch n abhängig von λ, und durch α abhängig von dem mitbestimmenden Winkel β. Da nun α etwa 88^0 beträgt, so ist rund

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = -50,$$

und

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} < 2,$$

also kann man bei den geringen Wertdifferenzen von λ in einer Spektrallinie und bei den kleinen Änderungen von α im Bereich eines Interferenzstreifens σ ohne Bedenken als konstant betrachten.

Dagegen darf man die Dispersion bei dieser Versuchsanordnung keineswegs vernachlässigen. Nach (6) ist

$$u - v = u_0 - v_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_0 (\lambda - \lambda_0)\, v$$

$$= 4\pi d\left(\frac{n_0 \cos\beta_0}{\lambda} + \frac{1}{\cos\beta_0}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_0 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}\right).$$

Bei Flintglas ist ungefähr

$$\frac{dn}{d\lambda} = -10^{3}[\mathrm{cm}^{-1}],$$

der Größenordnung nach ist $\lambda - \lambda_0/\lambda_0$ gleich 10^{-4} und $4\pi d$ gleich 10 cm; also ist das Zusatzglied

$$\frac{1}{\cos\beta_0}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_0 \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$$

der Größenordnung nach gleich -1, unter dem Kosinuszeichen also durchaus nicht zu vernachlässigen, wie groß auch der andere Summand sein mag.

Zum Schluß möge es mir gestattet sein, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Planck, meinen ehrfurchtsvollen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und die mir erwiesene Unterstützung auszusprechen.

(Eingegangen 7. Oktober 1903.)

7. *Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung;*

von Anton Wassmuth.

(Aus den Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse 112. Abt. IIa. Mai 1903.)

In einer am 24. April 1902 der kaiserl. Akademie überreichten Untersuchung[1]) habe ich die Behauptung aufgestellt, daß bei der Biegung von Metallstäben eine meßbare *Abkühlung* auftreten müsse und daß es umgekehrt möglich sei, aus dem Vergleiche der Theorie und der Versuche die Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Temperatur zu bestimmen.

Die Biegungsversuche, die ich seit einem Jahre mit verschiedenen Stahlstäben durchführte, brachten mir nun in der Tat den Nachweis, daß das obige, für den Anfang etwas kühn gestellte Ziel wenigstens für dieses Material (Stahl) wirklich erreicht wurde.

Schon die Fälle *ungleichförmiger* Biegungen — die Stäbe lagen mit beiden Enden frei auf und wurden durch weiteres Anbringen von Zugkräften in der Mitte immer stärker gebogen — wiesen mit Hilfe des in der Mitte eingelöteten, sehr feinen Thermoelementes stets *Abkühlungen* ϑ bei Verstärkung der Biegung auf, die sich im Sinne der Rechnung wie $(P_2 h_2 - P_1 h_1) : (P_2 h_2 - P_3 h_3)$ verhielten, wenn zur Pfeiltiefe h_i der Zug P_i gehörte.

So waren z. B. diese Quotienten 1,272, 1,325, 1,680, während das Verhältnis der Abkühlungen 1,196, 1,315, 1,672 betrug.

Die Temperaturänderungen blieben die *gleichen*, wenn ich auch auf *verschiedenem* Wege von der Anfangsbiegung zu der Endbiegung überging (Summationsprinzip). So lieferte eine durch

1) A. Wassmuth, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 111. IIa. p. 1012. 1902.

einen Hebelarm bewirkte und an einem Zeiger mit Gradteilung ersichtliche Biegung eines 3 mm dicken Stabes:

von 20° auf 7° den Mittelwert . . . . . $\vartheta_3 = 0{,}00389°$
und die von 7° auf 5° den Mittelwert . . . . . $\vartheta_5 = 0{,}00119°$,
d. h. es war . . . . . $\vartheta_3 + \vartheta_5 = 0{,}00508°$.

Wurde der Stab von 20° auf nur 9° gebogen, so war $\vartheta_1 = 0{,}00296°$
und bei der Biegung von 9° auf 5° . . . . . $\vartheta_4 = 0{,}00200°$
und es war . . . . . $\vartheta_1 + \vartheta_4 = 0{,}00496°$,

d. i. nahe *gleich* $\vartheta_3 + \vartheta_5$.

Eine direkte Biegung von 20° auf 5° lieferte eine Abkühlung (bez. Erwärmung bei Entlastung) $\vartheta_2 = 0{,}00465$, also etwas kleiner als $\vartheta_3 + \vartheta_5$ oder $\vartheta_1 + \vartheta_4$.

War das feine Thermoelement nicht in der Mitte, sondern seitwärts von derselben angebracht, so ergaben sich immer *kleinere* Temperaturänderungen ϑ, je näher man an die Enden herankam. Zweifellos war es, daß bei dieser Anordnung der Biegung eine *Wärmeleitung* ins Spiel trat, die sich nur schwierig bestimmen ließ; immerhin wies das Mittel der beobachteten ϑ für mehrere Stellen, d. i. 0,00192°, keine bedeutende Abweichung vom berechneten Werte 0,00209° auf.

Um die Wärmeleitung zwischen den einzelnen Querschnitten des Stabes möglichst auszuschließen, wurde daher auf den Rat des Hrn. Prof. W. Voigt in Göttingen hin statt der bisher verwendeten ungleichförmigen Biegung von nun an die *gleichförmige* in der Art zur Anwendung gebracht, daß (vgl. die Figur) der Stab auf zwei Drehschneiden, die von den Stabenden *gleich weit* entfernt waren, frei auflag; an den Enden des Stabes wirkten gleiche Zugkräfte, die gleiche Drehungsmomente M rechts wie links erzeugten. Der Stab bog sich dann zwischen den beiden Schneiden gleichförmig *nach oben* und konnte (der Kontrolle wegen) mittels einer Marke am Stabe und einer Spiegelskala die Pfeilhöhe h gemessen werden. Für die Temperaturänderung $\tau_b - \tau_a = \vartheta_{ab}$ bei der Biegung vom Drehungsmomente M_a in das Drehungsmoment M_b gilt die Formel:

$$\text{(I)} \qquad \gamma(\tau_b - \tau_a) = \gamma \cdot \vartheta_{ab} = T_0 \cdot \frac{1}{E}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}\right)\frac{M_b^2 - M_a^2}{(\frac{1}{2}\pi^2 a^6)},$$

worin γ die spezifische Wärme der Volumeneinheit, T_0 die absolute Anfangstemperatur, E den Elastizitätsmodul und a den Halbmesser des kreisförmigen Stabquerschnittes bedeutet.

Diese fundamentale Beziehung soll von nun an kurz die *Voigtsche Gleichung* heißen und sei nur noch bemerkt, daß für andere Querschnitte Q statt $(\frac{1}{2}\pi^2 a^6)$ der Ausdruck $2\,Q^2 \varkappa_\gamma^2$ zu nehmen ist, wo $\varkappa_\gamma$ den horizontalen Trägheitsradius senkrecht zur Längsachse vorstellt (für den Kreis ist $\varkappa_\gamma^2 = \frac{1}{4} a^2$).

Die Lehre von den Temperaturänderungen bei der Deformation vollkommen elastischer Körper wurde bekanntlich von W. Thomson (1857) begründet, von Schiller (1879) und

Planck (1880) erweitert und von W. Voigt (1889) nicht allein auf kristallinische Körper, sondern auch auf *größere* Temperaturänderungen — ein Fall, der gerade hier zur Anwendung kommt — ausgedehnt.

Die mit zwei Stahlstäben von verschiedener Dicke (3 mm bez. 1,964 mm) und verschiedenen Drehungsmomenten M seit einem Jahre durchgeführten Versuche bestätigen die obige, thermodynamische *Voigtsche Beziehung*, die der von W. Thomson für die Abkühlung bei der Dehnung gegebenen Gleichung ebenbürtig an die Seite gestellt werden kann.

Um ganz sicher zu sein, daß bei der Messung der Drehungsmomente grobe Fehler nicht vorkamen, wurden in beiden Fällen aus den zusammengehörigen Werten eines Drehungsmomentes M_i und der Pfeilhöhe h_i der Elastizitätsmodul E berechnet nach der leicht ableitbaren Gleichung:

$$(II) \qquad M = 2\,E\,\pi\,a^4\,\frac{h}{(2u)^2},$$

worin $2u$ die Distanz der festen Drehschneiden und, wie oben, a den Halbmesser des Querschnittes vorstellen.

So ist z. B. für den zweiten, dünneren Stab:

$$a = 0{,}0982 \text{ cm}, \quad 2u = 13{,}94 \text{ cm},$$

$$(III) \qquad \log M = \log(\text{Last} \times \text{Arm}) = 0{,}4781 - 6 + \log E + \log h.$$

Es ergaben die Beobachtungen:

Pfeilhöhe h	Last	Arm	$\log M$	$E \cdot 10^{-12}$
0,10 cm	125 g	5,941 cm	5,8624	2,42
0,19	225	5,937	6,1175	2,30
0,28	325	5,931	6,2767	2,25
0,37	425	5,922	6,3925	2,22
0,46	525	5,912	6,4836	2,20
0,54	625	5,900	6,5585	2,23
0,685	825	5,875	6,6772	2,31
0,825	1025	5,844	6,7691	2,37
0,88	1125	5,831	6,8086	2,43

woraus als Mittelwert des Elastizitätsmoduls sich ergibt:

$$E = 2{,}307 \times 10^{12} \text{ C.G.S.} = 23510 \text{ kg/mm}^2.$$

Einen *ganz ähnlichen* Wert, nämlich 23100 kg/mm², hatten die Beobachtungen am ersten, dickeren Stab ergeben.

Es sei gleich hier bemerkt, daß auf den Rat Prof. W. Voigts hin die *Arme* des zweiten, dünnen Stabes so verstärkt wurden, daß jede Biegung derselben auch hier ausgeschlossen war. Bei der gleichförmigen Biegung des *mittleren* Teiles verkürzten sich die Arme ein wenig, nämlich um je $h^2/6{,}97$ cm, was in Rechnung gebracht wurde. Eine allerdings nur geringe Korrektur der ursprünglichen Länge der Arme des ersten Stabes wurde dadurch nötig, weil an jedem Ende dieses Stabes rechtwinklig zur Achse kleine eiserne Fortsätze zur Verhinderung der Drehung angebracht waren, an deren Enden erst mittels Darmsaiten die Zugkräfte wirkten.

Für die Abnahme des Elastizitätsmoduls E mit der Temperatur, d. i. für $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}$, wurde die von Cl. Schäfer[1]) für Eisen gegebene Zahl $2{,}25/10^4$, die von der von Katzenelsohn erhaltenen $2{,}33/10^4$ nur wenig abweicht, genommen.

Für den ersten Stab von der Länge von 253 mm und einem $2u = 174{,}8$ mm ergab sich das Drehungsmoment in Gramm-Millimetern = Last $\times$ $[39{,}1 - 0{,}0114 \times h(h + 60{,}8)]$.

Die spezifische Wärme γ der Volumeneinheit gleich

$$7{,}8 \times 0{,}118 \times 419 \times 10^5$$

und

$$T_0 = 290^0$$

gesetzt, lieferten die Beobachtungen bez. die Berechnungen die in Tab. 1 angegebenen Zahlen.

Das Thermoelement (Eisen–Konstantan) war ungemein fein und — wie erwähnt — in der Mitte des Stabes seitlich hineingelötet. Die Enden desselben standen durch *fein gewalzte Kupferstreifen* — um Deformationsströme zu vermeiden — mit dem Galvanometer in Verbindung. Es wurde in erster

1) Vgl. Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 5. p. 233. 1901.

Tabelle 1.

Die Pfeilhöhen	Quadrate der Drehungsmomente in C.G.S.	Biegungen, gemessen am		Differenz der Quadrate der Drehungsmomente	Temperaturänderungen			
		Gradbogen	Spiegel		*berechnet* nach Voigts Formel			beobachtet (vgl. unten)
					mit Schäfers Zahl	mit Katzenelsohns Zahl		
$h_0 = 1{,}2$ mm	$M_0^2 = 0{,}051 \cdot 10^{14}$	—	—	—	—	—		—
$h_1 = 5{,}0$	$M_1^2 = 1{,}005 \cdot 10^{14}$	25,8—22,0°	$h_1 - h_0$	$M_1^2 - M_0^2 = 0{,}954 \cdot 10^{14}$	0,00127°	0,00132°		0,00204°
$h_2 = 7{,}2$	$M_2^2 = 3{,}081 \cdot 10^{14}$	25,8—18,8	$h_2 - h_0$	$M_2^2 - M_0^2 = 3{,}030 \cdot 10^{14}$	0,00404	0,00419		0,00470
$h_3 = 7{,}7$	$M_3^2 = 4{,}125 \cdot 10^{14}$	25,8—18,3	$h_3 - h_0$	$M_3^2 - M_0^2 = 4{,}074 \cdot 10^{14}$	0,00543	0,00563		0,00565

ie darauf gesehen, den *Gesamtwiderstand* $r = 0{,}51$ Ohm *recht* s zu machen. So wurden z. B. die vier Rollen des Spiegel-anometers (bezogen von Keiser & Schmidt in Berlin) allel geschaltet und für das Thermoelement *dickere* Drähte, an den einzulötenden Stellen möglichst *abgeätzt* waren, vendet. Nur so konnte es erreicht werden, daß bei einer wingungsdauer $T = 4{,}29''$ (also „*mäßiger* Astasierung") und r Skaladistanz von 2,26 m eine Ablenkung (erster Aus-lag) $A = 40$ mm bei einer Temperaturänderung *von rund* 6° erhalten wurde. Außer dem ersten Ausschlage A, der en und zweiten Distanz der Umkehrpunkte $(x_1 - x_2,\ x_2 - x_3)$ de das Dämpfungsverhältnis k, die Schwingungsdauer T l nachher sorgfältig die thermoelektrische Konstante E_1, i. der Ausschlag, der beim Widerstande von 1 Ohm der nperaturdifferenz von 1° entspricht, ermittelt. Biegungs-)arat, Zuleitung und Galvanometer waren durch Watte und ppdeckel möglichst vor Luftströmungen geschützt.

Die Berechnung der Beobachtungen erfolgte nach den rmeln:

$$X_0 = \frac{k}{1+k}\,\frac{x_1 - x_2}{1 + z\left(k^2 - \frac{k}{1+k}\right)},$$

$$X = A - X_0,$$

$$\vartheta_{ab} = \frac{X \cdot r}{(1-z)\,E_1}.$$

Dabei war für den ersten Stab:

$$k = 1{,}2745,$$

$$E_1 = 2210 \text{ zu } T = 4{,}29'',$$

$$r = 0{,}51,$$

$$z = 0,$$

$$X_0 = 0{,}56\,(x_1 - x_2),$$

$$X = A - X_0,$$

$$\vartheta_{ab} = \frac{X r}{E_1}.$$

In der folgenden Tab. 2 sind Beobachtungen vom 20. März 903 wiedergegeben, aus denen die bereits mitgeteilten Werte rechnet wurden.

Nr.	Biegung	Erster Ausschlag	Erste Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$	$X_0 = 0{,}56(x_1 - x_2)$	$X = A - X_0$	Temperaturänderungen		
						$\vartheta_{ab} = X \cdot \frac{0{,}51}{2210}$	Mittel: beobachtet	berechnet, vgl. oben (mit Schäfers Zahl)
1	von $h_0 = 1{,}2$ mm auf $h_1 = 5{,}0$	13,8	8,8	4,9	8,9	0,00205°	0,00204°	0,00127°
2		13,8	8,8	4,9	8,9	205		
3		14,4	9,8	5,46	8,94	206		
4		14,0	9,6	5,35	8,65	199		
5	von $h_0 = 1{,}2$ auf $h_2 = 7{,}2$	31,9	18,9	10,53	21,37	0,00493	0,00470°	0,00404°
6		31,4	20,3	11,30	20,1	464		
7		31,8	20,2	11,23	20,57	475		
8		32,2	21,7	12,10	20,1	464		
9		31,7	21,6	12,03	19,67	454		
10		31,5	20,1	11,20	20,3	469		
11	von $h_0 = 1{,}2$ auf $h_3 = 7{,}7$	41,6	28,2	15,70	25,9	0,00598	0,00565°	0,00543°
12		36,4	23,6	13,15	23,25	537		
13		38,8	26,1	14,53	24,27	560		
14		36,9	22,2	12,36	24,54	566		

Der Vergleich von Beobachtung und Rechnung zeigt ferner, daß auf diese Art, wenn nur die zwei *größeren, sicherer meßbaren* Drehungsmomente betrachtet werden, auch ein angenäherter Wert von $-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}$ sich ermitteln läßt (2,62.10^{-4}, bez. 2,34 × 10^{-4}).

Ähnliche Werte ergaben die Versuche mit dem zweiten, dünneren Stab. Es war für diesen Stab $a = 0{,}0982$ cm, der Elastizitätsmodul $E = 2{,}307.10^{12}$ und $T_0 = 290°$. Vgl. hierzu Tab. 3.

Die Beobachtungen lieferten ferner $k = 1{,}266$, $T = 4{,}11$, wozu $E_1 = 2028$ gehört, $r = 0{,}51$, $z = 0{,}037$, $X_0 = 0{,}538\,(x_1 - x_2)$; $\log \vartheta = 0{,}4169 - 4 + \log X$. Vgl. Tab. 4.

Sieht man wieder von den schwächsten Biegungen ab, so ergeben die zwei stärkeren Biegungen nach dieser Methode für

$$-\frac{1}{E}\frac{dE}{dT}$$

die Werte:

$$2{,}45 \times 10^{-4} \quad \text{und} \quad 2{,}33 \times 10^{-4},$$

deren Mittel 2,34 × 10^{-4} mit dem von Katzenelsohn für Eisen gegebenen 2,33 × 10^{-4} fast zusammenfällt.

Die Versuche bestätigen ferner, wie zu erwarten, die *Unabhängigkeit* der Temperaturveränderungen ϑ_{ab} von einer *Zwischenstation*, d. i. das Gesetz $\vartheta_{ab} = \vartheta_{a,k} + \vartheta_{k,b}$. So waren z. B. beim ersten Stabe die Temperaturänderungen

bei einer Biegung von 20° über 15° auf 5°:
$\vartheta = 0{,}00120° + 0{,}00518° = 0{,}00638°$,

bei einer Biegung von 20° über 10° auf 5°:
$\vartheta = 0{,}00312° + 0{,}00367° = 0{,}00679°$,

bei einer Biegung von 20° über 12° auf 5°:
$\vartheta = 0{,}00209° + 0{,}00457° = 0{,}00666°$,

bei einer Biegung von 20° über 8° auf 5°:
$\vartheta = 0{,}00426° + 0{,}00235° = 0{,}00661°$,

so daß die größte Abweichung dieser Summen von ihrem Mittelwerte 0,006607° kleiner als 3 Proz. ist.

Bei direkter Biegung von 20° auf 5° erhält man wohl etwas weniger, allein dies ist keine befremdende Erscheinung, da sie öfter, z. B. auch bei Summation der Pfeilhöhen, beobachtet wird.

Die eingehende Begründung der obigen Daten bringt die nachstehende Tab. 5 der Versuche vom 21. April 1903 am

Tabelle 3.

Lasten	Arme	M	$M_b^2 - M_a^2$	Berechnet $\vartheta_{ab} = \tau_b - \tau_a$	Beobachtet (vgl. unten)
125 g	5,941 cm	$M_0^2 = 0{,}531 \cdot 10^{12}$	—	—	—
425	5,922	$M_1^2 = 6{,}096 \cdot 10^{12}$	$M_1^2 - M_0^2 = 5{,}565 \cdot 10^{12}$	$\vartheta_{1,0} = 0{,}000923°$	0,00144°
765	5,883	$M_2^2 = 19{,}500 \cdot 10^{12}$	$M_2^2 - M_0^2 = 18{,}969 \cdot 10^{12}$	$\vartheta_{2,0} = 0{,}003145$	0,00342
1100	5,884	$M_3^2 = 39{,}645 \cdot 10^{12}$	$M_3^2 - M_0^2 = 39{,}114 \cdot 10^{12}$	$\vartheta_{3,0} = 0{,}006483$	0,00643

Tabelle 4.

Nr.	Biegung	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X_0	$X = A - X_0$	ϑ	Mittel	Berechnet (vgl. oben)
1	von 20° auf 14°	8,6	6,5	8,9	3,49	5,11	0,00133°	0,00144°	0,000928°
2		9,3	6,7	4,4	3,60	5,70	149		
3		9,6	5,0	4,1	2,69	6,91	180		
4		8,5	7,6	4,9	4,09	4,41	115		
5	von 20° auf 8°	24,0	19,8	12,6	10,65	13,35	0,00349	0,00342	0,003145
6		21,9	17,8	15,1	9,55	12,35	328		
7		24,0	18,6	13,0	10,00	14,00	366		
8		22,2	17,8	13,1	9,57	12,63	331		
9	von 20° auf 2,9°	41,5	31,7	23,4	17,04	24,46	0,00639	0,00643	0,006483
10		40,1	31,4	22,9	16,88	23,22	607		
11		42,3	31,7	24,0	17,06	25,24	659		
12		43,0	33,6	24,8	17,52	25,48	665		

Tabelle 5.

Biegung von — bis	B / E	Erster Ausschlag	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_4$	X	$\delta = X \frac{0,51}{2875}$	Mittel	Summen
20°—15°	B	11,0	7,9	6,8	6,58	0,00141°	0,00120°	0,00688°
	E	8,8	7,5	4,7	4,60	99		
15 — 5	B	40,2	27,6	19,1	24,74	0,00531	0,00518	
	E	39,4	28,4	21,8	23,50	505		
20 — 5	B	47,3	35,2	25,9	27,59	0,00592	0,00585	0,00585
	E	43,6	29,9	23,5	26,86	577		
20 —10	B	24,8	19,2	13,9	14,05	0,00302	0,00312	0,00679
	E	24,9	17,8	12,9	14,93	321		
10 — 5	B	28,7	19,7	13,8	17,67	0,00380	0,00367	
	E	27,2	19,1	15,1	16,50	354		
20 —12	B	17,0	12,4	10,2	10,06	0,00216	0,00209	0,00666
	E	16,5	12,7	10,0	9,39	202		
12 — 5	B	32,7	22,3	15,8	20,21	0,00434	0,00457	
	E	35,3	23,2	18,6	22,31	479		
20 — 5	B	46,9	34,9	26,1	27,86	0,00588	0,00595	0,00595
	E	45,8	31,8	25,2	28,00	602		
20 — 8	B	34,1	24,2	17,5	20,55	0,00442	0,00426	0,00661
	E	30,2	19,9	15,1	19,06	409		
8 — 5	B	15,8	11,7	6,8	9,25	0,00199	0,00235	
	E	19,7	12,7	8,9	12,59	270		

dickeren Stabe, wobei $E_1 = 2375$ bei einem $T = 4{,}447''$ und $z = 0$ war und $B =$ Belastung (Abkühlung), $E =$ Entlastung (Erwärmung) bedeutet.

In der so genau erfüllten Bedingung des Summationsprinzipes, d. h. des Gesetzes der Unabhängigkeit von der Zwischenstation, verbunden mit der Befriedigung der Voigtschen Gleichung, sehe ich die Beweise für die Richtigkeit der angewandten Methode und zugleich die Möglichkeit, die Größe von

$$-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}$$

auf diese *neue* Art zu bestimmen. Es fanden sich, wie erwähnt, hierfür aus den Beobachtungen mit *beiden* Stahlstäben die Werte $2{,}62 \times 10^{-4}$, $2{,}34 \times 10^{-4}$, $2{,}45 \times 10^{-4}$, $2{,}23 \times 10^{-4}$, deren Mittel $\mathbf{2{,}41 \times 10^{-4}}$ von dem Mittel $2{,}29 \times 10^{-4}$, wie es die Versuche von Katzenelsohn ($2{,}33 \times 10^{-4}$) und Cl. Schäfer ($2{,}25 \times 10^{-4}$) für Eisen lieferten, um weniger als 5 Proz. abweicht.

An den Versuchen und Zusammenstellungen der Biegungsvorrichtungen hat Hr. Dr. J. v. Pallich, Assistent am hiesigen physikalischen Institute, regen und ersprießlichen Anteil genommen, wofür hier meinen Dank auszusprechen ich mich verpflichtet fühle.

Graz, im September 1903.

(Eingegangen 27. September 1903.)

8. *Zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente;*
von A. Denizot.

Für die Verwandlung der chemischen in elektrische Energie gilt für umkehrbare Elemente bekanntlich die Helmholtzsche[1]) Beziehung:

$$E - q = T\frac{dE}{dT}. \tag{1}$$

E ist die elektrische Energie des Elementes, q die mit dem chemischen Umsatz verbundene Wärmetönung, T die absolute Temperatur. Wird q auf 1 g-Äquivalent des chemischen Umsatzes bezogen, so ist die vom Element geleistete Arbeit numerisch gleich seiner elektromotorischen Kraft, indem hierbei 1 g-Äquivalent des positiven Metalls sich an dem positiven Pol niederschlägt und 1 g-Äquivalent des Metalls des negativen Pols in Lösung geht.

Die obige Beziehung beruht auf dem zweiten Hauptsatz und man kann sie daher benutzen, um die absolute Temperatur des Elementes zu bestimmen, wobei es dahingestellt werden mag, ob in dieser Beziehung diese Idee eine praktische Verwendung finden kann; die im folgenden durchgeführte Untersuchung soll vielmehr einen bisher nicht beachteten Zusammenhang zwischen dem Temperaturkoeffizienten der im Element stattfindenden Wärmetönung und den übrigen in Beziehung (1) vorkommenden Grössen aufweisen.

§ 1. Wir denken uns die absolute Temperatur T als Funktion einer beliebigen konventionellen Temperaturskale t

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 2. p. 958. 1883.

dargestellt und betrachten daher E und q als meßbare Funktionen der Temperatur t; alsdann schreiben wir (1):

$$E(t) - q(t) = T \frac{dE}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} \tag{1a}$$

oder

$$\frac{dT}{T} = \frac{\frac{dE}{dt}\,dt}{E(t) - q(t)},$$

und die Integration ergibt

$$\log \text{nat} \frac{T}{T_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dE}{dt}\,dt}{E(t) - q(t)}, \tag{2}$$

wo T_0 der zu t_0 gehörige Anfangswert der absoluten Temperatur ist.

Der Integrand in (2) stellt das Verhältnis der durch einen unendlich kleinen umkehrbaren Kreisprozeß gewonnenen (positiven oder negativen) Arbeit zu der zugeführten (positiven oder negativen) Wärmemenge dar, wenn durch das Element bei der konstanten Temperatur t eine unendlich kleine Elektrizitätsmenge hindurchgeht; der Integrand ist also der Ausdruck für den Wirkungsgrad eines unendlich kleinen umkehrbaren Kreisprozesses, welcher überdies unabhängig vom Element und nur eine Temperaturfunktion ist; die absolute Temperatur ist — im Einklang mit einer bereits früher angestellten Untersuchung[1]) — durch den Wirkungsgrad einer Reihe von unendlich kleinen umkehrbaren Kreisprozessen bestimmt.

Die durch den Ausdruck (2) vollständig definierte absolute Temperatur will ich im Gegensatz zu anderen Temperaturskalen, z. B. der thermodynamischen, die *elektrochemische* Temperaturskale bezeichnen.

§ 2. Für die weitere Untersuchung nehmen wir den einfachen Fall an, daß $E(t)$ und $q(t)$ in einem gewissen Bereiche lineare meßbare Funktionen der konventionellen Skala sind, daß also

$$E(t) = E_0 + \lambda t$$

und

$$q(t) = q_0 + \mu t$$

1) A. Denizot, Ann. d. Phys. 7. p. 358—368. 1902.

ist. E_0 und q_0 sind die Werte der elektromotorischen Kraft bezw. Wärmetönung bei $t_0 = 0^0$, λ und μ die Temperaturkoeffizienten von E und q, und zur Unterscheidung will ich einfach λ den elektrischen und μ den thermischen Koeffizienten nennen.

Die Beziehung (2) liefert dann

$$\log \text{nat} \frac{T}{T_0} = \int_0^t \frac{\lambda\, dt}{E_0 - q_0 + (\lambda - \mu)\, t}$$

und hieraus folgt

$$T = T_0 \left\{1 + \frac{\lambda - \mu}{E_0 - q_0} t\right\}^{\frac{\lambda}{\lambda - \mu}}. \tag{3}$$

Sind also E_0 und q_0 und außerdem λ und μ bekannt, so können wir aus der beobachteten konventionellen Temperatur t die absolute Temperatur T des Elements bestimmen, wenn noch über T_0 passend verfügt wird.

§ 3. Ist für alle Temperaturen $E(t) = q(t)$, so ist auch $E_0 = q_0$ und $\lambda = \mu$, und da in diesem Falle gemäß der Differentialgleichung (1a) $\lambda = 0$ ist, so ist auch $\mu = 0$, und wir haben den bekannten Satz: Ist die Wärmetönung gleich der maximalen Arbeit im Element, so sind beide von der Temperatur unabhängig ($\lambda = \mu = 0$). Aber wir sehen, daß nicht jede Umkehrung dieses Satzes gilt, denn es kann in Gleichung (3) $\mu = 0$ sein, ohne daß die maximale Arbeit gleich der Wärmetönung ist. In diesem Falle, für $\mu = 0$, erhalten wir aus (3):

$$T = T_0 \left\{1 + \frac{\lambda}{E_0 - q_0} t\right\}. \tag{4}$$

Nur wenn hierin noch $\lambda = 0$ ist, dann muß auch $E_0 = q_0$ und $E(t) = q(t)$ sein.

Aus (3) ist noch ersichtlich, daß $E_0 - q_0$ und $\lambda - \mu$ stets von demselben Vorzeichen und der Exponent $\lambda/\lambda - \mu$ stets positiv sein müssen.

Um weitere Schlüsse zu ziehen, entwickeln wir (3) (unter Voraussetzung der Gültigkeit der Bedingung $\frac{\lambda - \mu}{E_0 - q_0} t \leqq 1$) in eine Reihe:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\lambda}{E_0 - q_0} t + \frac{\lambda \mu}{2(E_0 - q_0)^2} t^2 + \frac{\lambda \mu (2\mu - \lambda)}{6(E_0 - q_0)^3} t^3 + \ldots \tag{3a}$$

Da dieser Ausdruck für die absolute Temperatur ebenso wie ihr Anfangspunkt unabhängig vom Element ist, so müssen die einzelnen Koeffizienten in (3a) Konstante sein. Insbesondere ergibt sich für die bei t und t^2 stehenden Koeffizienten (die anderen ergeben nichts Neues):

$$\frac{\lambda}{E_0 - q_0} = a \tag{5}$$

und

$$\frac{\lambda\mu}{2(E_0 - q_0)^2} = b; \tag{6}$$

mit Hilfe von (5) geht (6) über in

$$\frac{\mu}{E_0 - q_0} = \frac{2b}{a} \tag{7}$$

und aus (5) und (7) geht hervor

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2}{2b}. \tag{8}$$

Unsere Betrachtung führt daher zu folgendem Schluß:

Für reversible Elemente besteht außer der bisher bekannten Konstanz:

$$\frac{E_0 - q_0}{\lambda} = \frac{1}{a}, \tag{5a}$$

noch die Konstanz

$$\frac{E_0 - q_0}{\mu} = \frac{a}{2b}, \tag{7a}$$

und ebenso wie λ hat auch μ mit $E_0 - q_0$ dasselbe Vorzeichen gemein, wobei λ und μ einander proportional sind. Hieraus folgt auch ohne weiteres, daß der Exponent der Beziehung (3):

$$\frac{\lambda}{\lambda - \mu} = \frac{a^2}{a^2 - 2b}, \tag{9}$$

sowie der in der Klammer bei t stehende Koeffizient als Differenz von (5) und (7):

$$\frac{\lambda - \mu}{E_0 - q_0} = \frac{a^2 - 2b}{a} \tag{10}$$

Konstante sein müssen.

Die hier aufgestellten Beziehungen (5) etc. können — wie leicht zu übersehen ist — noch in folgende mathematische Form gekleidet werden: *Die beiden Verhältnisse* $\lambda / E_0 - q_0$ *und* $-\mu / E_0 - q_0$ *sind Wurzeln der quadratischen Gleichung:*

$$\xi^2 - \frac{a^2 - 2b}{a}\xi - 2b = 0. \tag{11}$$

§ 4. Die numerischen Werte für die Konstanten a und b erhält man durch Vergleichung der Beziehung (3) bez. (3a), des Ausdrucks für die elektrochemische Temperaturskala, mit dem Ausdruck einer anderen, z. B. der thermodynamischen Temperaturskala, wobei selbstverständlich in den beiden Ausdrücken für die absolute Temperatur (T) dieselbe konventionelle (t) vorausgesetzt wird. Für diese Berechnung habe ich drei von Weinstein[1]) für das Kohlensäurethermometer auf Grund der Beobachtungen von Andrews, Roth, Regnault, Wüllner, E. Wiedemann und nach dem Vorgange von Jochmann aufgestellte Beziehungen benutzt. Die betreffenden Ansätze lauten:

$$(12)\qquad \begin{cases} \frac{T}{T_0} = (1 + 0{,}0036000\, t)^{1{,}01238} \\ \frac{T}{T_0} = (1 + 0{,}0036080\, t)^{1{,}01077} \\ \frac{T}{T_0} = (1 + 0{,}0035913\, t)^{1{,}01377} \end{cases}$$

Aus diesen ergeben sich für die zu t und t^2 gehörigen Koeffizienten:

	a	b
	0,003 644 6	$\frac{1}{2}$. 0,000 000 162 43
	0,003 646 9	$\frac{1}{2}$. 0,000 000 141 71
	0,003 640 8	$\frac{1}{2}$. 0,000 000 180 04
Mittel	0,003 644 1	$\frac{1}{2}$. 0,000 000 161 39

Aus den drei verschiedenen Werten von a und b erhält man für die Beziehungen (5a), (7a), (8), (9), (10) im Mittel:

$$(13)\qquad \begin{cases} \frac{E_0 - q_0}{\lambda} = 274{,}4 \\ \frac{E_0 - q_0}{\mu} = 22792 \\ \frac{\lambda}{\mu} = 83{,}1 \\ \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 1{,}012 \\ \frac{E_0 - q_0}{\lambda - \mu} = 277{,}8\,. \end{cases}$$

1) M. B. Weinstein, Inaug.-Diss. p. 27. Berlin 1881.

Für die Gleichung (11) erhält man:

$$\xi^2 - 0{,}00359998\,\xi - 0{,}000000161\,39 = 0.$$

Werden die Wurzeln dieser Gleichung mit ξ_1 un zeichnet, so folgt für die obigen Verhältnisse, aus durch ξ_1 und ξ_2:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_1} = 274{,}4 \\ -\dfrac{1}{\xi_2} = 22578 \\ -\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = 82{,}3 \\ \dfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2} = 1{,}012 \\ \dfrac{1}{\xi_1+\xi_2} = 277{,}8. \end{cases}$$

Die Verschiedenheit dieser letzteren gegen die verzeichneten Werte ist nicht groß, läßt aber erken den hier angegebenen Konstanten und ebenso den a dieser letzteren weiter unten berechneten Werten mehr oder weniger angenäherte Gültigkeit zuzuschre

Von den unter (13) aufgeführten Beziehungen bereits erwähnt, die Konstanz des ersten Verhältnisses aber zu diesem Resultat ist man durch eine andere Üb gelangt, indem die Anwendung und Prüfung der Bezi bisher in der Weise geschah, daß in die Beziehun vornherein $T = 273 + t$, also $dT/dt = 1$ gesetzt wu besondere ergab sich für $t = 0^\circ$ C.:

$$E_0 - q_0 = 273 \,.\, \lambda.$$

Die Konstante ist also hier gleich dem angenäh fangswert der absoluten Temperatur ($T_0 = 273$) geset sehen aber, daß die Kenntnis der absoluten Anfangste die nur durch gewisse willkürliche Festsetzungen un polation ermittelt wird, hierbei gar nicht in Betracht Auch für eine beliebige Temperatur, z. B. $t = t_0$ ist

$$\frac{E_{t_0} - q_{t_0}}{\lambda} = \text{konst.}$$

Der Wert der Konstanten ist aber nicht, wie geschah, gleich $273 + t_0$ zu setzen, sondern ergibt sich e

derselben Weise wie oben, nur muß der Anfangspunkt der willkürlichen Skala nach t_0 verlegt werden.

§ 5. Was nun die in Beziehung (3) oder (3a) vorkommenden Konstanten anlangt, so können E_0, q_0 und λ experimentell bestimmt werden; den Temperaturkoeffizienten μ kann man, solange die Reaktionen unter konstantem Druck vor sich gehen, aus der Differenz der Wärmekapazitäten einmal vor der Umwandlung, das andere Mal nach vollendeter Umwandlung berechnen.[1]) Der so ermittelte Wert für den Temperaturkoeffizienten μ wird um so genauer sein, je genauer die betreffenden spezifischen Wärmen bestimmt sind. Allein die so gefundenen Zahlen wird man wegen ihrer Kleinheit und der Verschiedenheit in der Angabe der spezifischen Wärmen nur mit großem Vorbehalt betrachten müssen. *Entschieden sicherer wird sich μ mit Hülfe der Beziehung (7) oder (8) und des unter § 4 Gesagten ermitteln lassen.*

§ 6. Die obigen Entwickelungen gelten für vollständig reversible Elemente. Wenn man daher auf diese Eigenschaft hin verschiedene Elemente untersucht, so kann man wegen der Schwierigkeit der direkten Bestimmung von μ nur die Beziehung (5a) durch direkte Messung prüfen. Dieses ist zuerst von H. Jahn[2]) geschehen, der die Wärmemessungen verschiedener in sich geschlossenen galvanischen Elemente mittels Bunsenschen Eiskalorimeters ausführte. F. Streintz[3]) hat in *Sekundärelementen* $E_0 - q_0$ dadurch direkt gefunden, daß er die im Elemente auftretende Wärmemenge einmal während der Ladung, das andere Mal während der Entladung mittels Bunsenschen Eiskalorimeters maß und aus der Differenz dieser beiden Wärmemengen und der Stromstärke den Wert für $E_0 - q_0$ fand. Andere Forscher haben in ihren zum Teil sehr ausgedehnten und interessanten Untersuchungen bei der Prüfung und Anwendung der Beziehung (1) die Wärmetönung aus den vorhandenen thermochemischen Daten bestimmt; da diese Zahlen aber eine Genauigkeit von nur einigen Prozenten bürgen, was in g-Kal. ausgedrückt, mehreren Hunderten der

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **104.** p. 614. 1858. Vgl. auch M. Planck, Thermodynamik p. 70. 1887.

2) H. Jahn, Wied. Ann. **28.** p. 21. 1884 und **50.** p. 189. 1893.

3) F. Streintz, Wied. Ann. **49.** p. 564. 1893.

Einheit entspricht, und die Untersuchungen eine für die Berechnung nötige und der Beobachtung zugängliche Größe zu wenig enthalten, so sind sie zur Illustration obiger theoretischen Entwickelungen nicht verwendet worden.

§ 7. An der Hand der von H. Jahn und F. Streintz gelieferten Daten ist im Anschluß an obige Auseinandersetzungen die weiter unten folgende Tabelle zusammengestellt.

Die von H. Jahn angegebenen Werte für E_0 und q_0 sind auf 1 g-Äquivalent des abgeschiedenen Kupfers bez. Silber reduziert. E_0 bedeutet dann die Arbeit, welche das Element leistet, wenn bei 0° C. 1 g-Äquivalent des einen Metalles (Cu bez. Ag) sich an dem positiven Pol niederschlägt und 1 g-Äquivalent des Metalles des negativen Poles (Zn bez. Pb) in Lösung geht. Hiernach sind auch der Temperaturkoeffizient λ der elektromotorischen Kraft und die von F. Streintz angegebenen Zahlen auf 1 g-Äquivalent des chemischen Umsatzes bezogen und aus Volt in g-Kal. (durch Division mit 0,0000434) umgerechnet.

Zur Erklärung der nachstehenden Tabelle diene folgendes.

In der zweiten Horizontalreihe sind die bei (13) angegebenen, aus den Koeffizienten a und b des Kohlensäurethermometers berechneten Werte vermerkt. Wenn auch bei den hier angeführten experimentellen Untersuchungen die Temperaturangaben sich nicht auf das Kohlensäurethermometer beziehen, so sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Thermometern zu geringfügig, um sich bei den hier angegebenen Zahlen, namentlich auch in Anbetracht der gemachten Beobachtungen geltend zu machen.

Kolumne 5 enthält die nach den Angaben für E_0, q_0 und der genannten Autoren berechneten Werte für das Verhältnis $E_0 - q_0/\lambda$ und können mit dem auf andere Weise berechneten Werte 274,4 verglichen werden.

Kolumne 7 enthält die aus dem Ansatz

$$\frac{E_0 - q_0}{\mu} = 22792$$

mit Hülfe der beobachteten Größen $E_0 - q_0$ berechneten Werte μ.

In Kolumne 8 sind die Werte für das Verhältnis $\lambda/$ verzeichnet, das sich aus den von den Beobachtern angegebenen λ und den eben berechneten μ zusammensetzt.

Element	$E_0 - q_0$ g-Kal. beob.	Temperaturkoeff. λ pro 1° C. Volt	g-Kal.	$\frac{E_0 - q_0}{\lambda}$	$\frac{E_0 - q_0}{\mu}$	Temp.-Koeff. μ g-Kal.	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\lambda - \mu$	$\frac{\lambda}{\lambda - \mu}$	$\frac{E_0 - q_0}{\lambda - \mu}$
	—	—	—	274,4	22792	—	83,1	—	1,012	277,8
I. Cu, $CuSO_4 + 100 H_2O$ / Zn, $ZnSO_4 + 100 H_2O$	+ 208	+0,000034 [1]	+0,7834	265,5	—	+0,009	85,5	+0,774	1,012	268,6
II. Cu, $Cu(CH_3.COO)_2$aq / Pb, $Pb(CH_3.COO)_2 + 100 H_2O$	+2076	+0,000385 [1]	+8,871	234,0	—	+0,091	97,4	+8,780	1,010	236,5
III. Ag, AgCl / Zn, $ZnCl_2 + 100 H_2O$	−2570	−0,000409	−9,4238	272,7	—	−0,113	83,6	−9,311	1,012	276,0
IV. Ag, AgCl / Zn, $ZnCl_2 + 50 H_2O$	−1310	−0,00021	−4,8387	270,7	—	−0,058	84,2	−4,781	1,012	274,0
V. Ag, AgCl / Zn, $ZnCl_2 + 25 H_2O$	−1327	−0,000202	−4,8387	274,2	—	−0,058	83,1	−4,781	1,012	277,6
VI. Ag, AgBr / Zn, $ZnBr_2 + 25 H_2O$	− 744	−0,000106	−2,4424	304,6	—	−0,033	74,8	−2,410	1,014	308,7
VII. Sekundärelement Dichte d. Schwefels. $\delta = 1{,}155$	+2170,5	+0,000326	+7,5115	289	—	+0,095	78,9	+7,416	1,013	292,7
VIII. Sekundärelement Dichte d. Schwefels. $\delta = 1{,}153$	+2053	+0,000316	+7,2811	282	—	+0,090	80,8	+7,191	1,013	285,5
IX. Sekundärelement Dichte d. Schwefels. $\delta = 1{,}237$	+1071,4	+0,000015 [2]	+3,4562	310	—	+0,047	73,5	+3,409	1,014	314,3

1) Von A. Gockel beobachtet, Wied. Ann. 24. p. 618. 1885.
2) Vgl. F. Dolezalek, Theorie d. Bleiakkumulatoren p. 54. 1901.

Die in Kolumne 9 angegebenen Differenzen sind ebenfalls aus den beobachteten λ und den berechneten μ gebildet.

Kolumne 10 gibt das Verhältnis $\lambda/\lambda - \mu$ an, wobei für λ die in Kolumne 4 und für $\lambda - \mu$ die in Kolumne 9 angegebenen Werte gesetzt sind.

Endlich enthält Kolumne 11 vergleichshalber die Werte für $E_0 - q_0/\lambda - \mu$, wobei der Zähler aus den beobachteten und der Nenner aus den in Kolumne 9 angegebenen Zahlen gebildet ist.

Die in den Kolumnen 8, 10 und 11 angegebenen Werte, obwohl sie aus den teils experimentell gefundenen, teils durch Rechnung ermittelten Werten zusammengesetzt sind, lassen immerhin mit den rein berechneten Werten einen Vergleich zu, der zu gunsten der hier angestellten Betrachtung ausfällt.

Zu dieser Tabelle ist folgendes hinzuzufügen: Die ausgeführten Rechnungen werden unter Zugrundelegung linearer Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft und Wärmetönung von der Temperatur ihre volle Gültigkeit nur bei denjenigen Elementen behaupten können, welche die Bedingung der Reversibilität möglichst erfüllen. Dieses trifft zweifellos bei den Elementen mit einem Elektrolyten und einem festen Depolarisator zu, also bei dem Typus des Warren de la Rueschen Elementes (III, IV, V). Hier zeigt auch die Tabelle sowohl in der Kolumne 5 wie auch in den Kolumnen 8, 10 und 11 am meisten übereinstimmende Werte mit den aus den Angaben für die Kohlensäurethermometerskala gewonnenen Werten. Weniger günstig in bezug auf die Reversibilität liegen die Verhältnisse bei den Elementen mit zwei Flüssigkeiten, wenn nicht bei den Messungen — wie es Streintz bei der Untersuchung der Sekundärelemente eingerichtet hat — der Strom einmal in der einen Richtung und dann in der anderen Richtung geht. Die bei dem Element II — Kupfer in Kupferacetat, Blei in Bleiacetat — angegebenen Zahlen (abgesehen vom Sekundärelement IX, bei dem die Unsicherheit in der Bestimmung von λ in der Abweichung jedenfalls die größte Rolle spielt) weisen in allen Rubriken mit die größte Abweichung von den auf andere Weise ermittelten Werten auf; dieses Element ist auch sicher nicht streng reversibel: Das

Bleiacetat bildet leicht basische Salze und aus dem Kupfercetat scheidet sich kein reines Kupfer, sondern ein Gemenge von Kupfer und Kupferoxyd ab. Für die Messungen an den drei Sekundärelementen hat F. Streintz den reversiblen Zustand dadurch geschaffen, daß unter Vermeidung einer Abscheidung von freien Gasen die Bildung von Bleisulfat aus metallischem Blei auf der negativen Platte, aus Bleisuperoxyd an der positiven Platte während der Ladung, Rückbildung der genannten Substanzen aus diesem Salze während der Ladung vor sich ging. Etwas merkwürdig erscheint es nur, daß die aus den Jahnschen Angaben erhaltenen Werte im allgemeinen viel besser in das hier zusammengestellte Schema hineinpassen, als die aus den F. Streintzschen Angaben berechneten. Ich möchte aber nicht die namentlich beim Sekundärelement IX auftretende sehr starke Abweichung auf die von dem zuletzt Genannten zur Messung von $E_0 - q_0$ getroffene vorzügliche experimentelle Anordnung, sondern auf die ungenaue Bestimmung des Temperaturkoeffizienten λ zurückführen. Möglich ist aber auch, daß hier ebenso wie in anderen Fällen die einfache Annahme der linearen Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft und Wärmetönung von der Temperatur nicht mehr ausreicht, welchen Fall ich später zu behandeln gedenke.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß zur weiteren Beleuchtung der vorliegenden Auseinandersetzung einige neue Versuche geplant sind.

§ 8. *Zusammenfassung.* Wird die von Helmholtz für umkehrbare galvanische Elemente aufgestellte Beziehung als eine die absolute Temperatur definierende Differentialgleichung aufgefaßt, so ergibt sich unter Zugrundelegung einer linearen Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft und Wärmetönung von einer beliebigen konventionellen Temperaturskala:

Die absolute Temperatur ist in einem gewissen Bereiche als Funktion der konventionellen Skala bekannt, wenn die elektromotorische Kraft und Wärmetönung bei dem Anfangspunkt der konventionellen Skala sowie die als elektrischer und thermischer bezeichneten Temperaturkoeffizienten irgend eines umkehrbaren Elementes bekannt sind.

Außerdem ergeben sich für reversible Elemente außer der bekannten Tatsache:

I. Das Verhältnis der bei dem Anfangspunkt der konventionellen Skala gemessenen elektrischen Energie und Wärmetönung zum elektrischen Temperaturkoeffizienten ist konstant,

noch die Sätze:

II. Das Verhältnis derselben Differenz zum thermischen Koeffizienten und

III. das Verhältnis des elektrischen zum thermischen Koeffizienten ist konstant.

Die numerischen Werte für die erwähnten konstanten Verhältnisse erhält man durch Vergleichung des aufgestellten Ausdruckes für die elektrochemische Temperaturskala mit der einer anderen, z. B. der thermodynamischen.

Die Sätze II oder III liefern die Bestimmung des thermischen Koeffizienten in verschiedenen Elementen.

Dieser ist nach den von H. Jahn für einige galvanische Elemente, sowie den von F. Streintz für Sekundärelemente vorhandenen Versuchsergebnissen ermittelt und die theoretischen Betrachtungen werden durch diese Versuche bestätigt.

Charlottenburg, August 1903.

(Eingegangen 16. Oktober 1903.)

9. *Einige Bemerkungen über Entladungen in Vakuumröhren mit nur einer Elektrode;* von *K. v. Wesendonck.*

In einer kleinen Arbeit „Über den Kathodenwiderstand“[1]) hat Verfasser auch das Verhalten von evakuierten Glasgefäßen *mit nur einer Elektrode* kurz besprochen.[2]) Wie dort erwähnt, hatte bereits Magnus bei Verbindung *der betreffenden einen Elektrode* mit dem *einen isolierten Pole* eines Induktoriums, dessen anderer Pol abgeleitet worden, folgendes gefunden: Sowohl wenn der genannte isolierte Pol für den Öffnungsstrom *Kathode*, wie wenn er *Anode* war, zeigte sich an der Elektrode im Glasgefäße schön ausgebildetes *negatives Glimmlicht*, die Erscheinungen waren in beiden Fällen *kaum zu unterscheiden.* Schon einmalige Unterbrechung des primären Stromes genügte, um, selbst wenn dadurch der isolierte Pol Anode wurde, das genannte Phänomen hervorzurufen, obwohl also hierbei gar kein Schließungsstrom zur Wirkung kam. Ein ebensolches Verhalten fand nun auch Verfasser, und beobachtete im Drehspiegel, wie das nach Magnus' Angaben ja auch der Fall sein mußte, *keine Zerlegung* der Lichterscheinung in eine solche, welche dem Öffnungs-, und eine andere, welche dem Schließungsstrome entsprochen hätte. Ebensowenig ließ sich mit den vorhandenen Hilfsmitteln überhaupt eine Entladung, die von der Elektrode zur Glaswand ging, von einer solchen in der umgekehrten Richtung unterscheiden.[3]) Mit Rücksicht auf die bereits erwähnte Angabe von Magnus, wonach schon *einmalige nur positive* Ladung der Elektrode Kathodenlicht hervorruft, ohne daß also eine negative Elektrisierung der betreffenden

1) K. Wesendonck, Wied. Ann. 41. p. 463—472. 1890.

2) l. c. p. 469—471. Ein Apparat, ganz ähnlich wie der Fig. 5 hier p. 469 angegebene, diente zu den Versuchen der vorliegenden Arbeit. Statt Hahn o waren deren zwei angebracht, die bei den Untersuchungen verschlossen wurden, ebenso wie der zur Pumpe führende Hahn.

3) Versuche mit einem besonders schnell rotierenden Spiegel sind allerdings nicht angestellt worden.

Elektrode überhaupt eingetreten, schloß nun Verfasser, man müsse, wenn man *die übliche Erklärung* festhalten wolle, recht schnell alternierende Entladungen zwischen Elektrode und Glaswand annehmen. Hierbei dachte Verfasser an G. Wiedemanns Auseinandersetzungen[1]), wonach sich bei den Magnusschen Versuchen das Glas im Innern des Vakuumrohres abwechselnd durch den Induktionsstrom lade und durch die Rolle des Induktors wieder entlade.[2]) Die Rückströmung vom Glase zur Elektrode (deren Dasein Verfasser übrigens damals als durch das magnetische Verhalten nachgewiesen angesehen), für welche also in unserem Falle die Elektrode zur Kathode wird, muß nun jedenfalls relativ schnell verlaufen, sonst wäre ja im Drehspiegel die betreffende negative Lichterscheinung in die Breite gezogen erschienen. Ein schwach leuchtender, *nicht momentan* verlaufender Rückstrom wurde bei Versuchen mit der Influenzmaschine gefunden (l. c. p. 470—471). Entspräche aber dem das Kathodenlicht, welches sich zeigt, wenn die Elektrode Anode des Öffnungsstromes ist, so müßte es erheblich lichtschwächer sein als in dem anderen Falle, wo der Öffnungsstrom die Elektrode negativ lädt. Das stimmt aber mit den Tatsachen nicht überein, das Kathodenlicht ist unter den zuletzt genannten Umständen nur wenig heller als im anderen Falle. Das deutet aber doch wohl auf eine nur *kurz dauernde, relativ starke Rückentladung von* der Glaswand aus hin. Eine solche erscheint aber am plausibelsten unter der Auffassung, sie finde unmittelbar nach der Ladung der Glaswand statt. So gelangt man denn in der Tat fast von selbst zu der Annahme *schnell alternierender Ströme* bei den vorliegenden Erscheinungen. Bereits im Sommer 1900 hat Verfasser seine früheren Versuche aus dem Jahre 1890 ergänzt durch solche mittels eines Doveschen Disjunktors, wie er von G. Wiedemann beschrieben worden ist.[3]) Auf diese Weise kann man

1) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, III. Aufl. 4. p. 483. § 601. 1885.

2) Die Herren E. Wiedemann und H. Ebert unterscheiden auch noch späterhin (Wied. Ann. 50. p. 37. 1893) ihre dort beschriebenen Beobachtungen an Entladungsgefäßen mit nur einer Elektrode von den *rekurrenten Strömen* bei gewissen Entladungen der Induktorien.

3) Vgl. G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, II. Aufl. 4. p. 6—7. 1898.

der einen Elektrode im Entladungsgefäße beliebig viele, mehr oder minder schnell aufeinander folgende, cet. par. lediglich positive oder negative Öffnungsstromstöße zuführen. Diese damals mit nur schwachen Induktorentladungen angestellten Versuche wurden im Sommer 1903 mit stärkeren solchen wiederholt. Dabei wurde (wie auch schon 1900) noch besonders zu konstatieren versucht, daß wirklich nur *negative* bez. *positive* Stromstöße die Elektrode luden. Hierzu diente eine an eine Toeplersche Quecksilberpumpe angesetzte Geisslersche Röhre, die man so weit evakuierte, daß sie auch bei schwachen Entladungen des Induktors noch deutlich wahrnehmbar dem Schließungsstrome den Durchgang gestattete, wie besonders schön ausgebildetes Kathodenlicht an der Anode[1]) des Öffnungsstromes zeigte. Man konnte dabei als Unterbrecher die eine Rolle des Disjunktors verwenden. Wurde dann auch die zweite Rolle zur Wirkung gebracht, so zeigte sich nur noch an einer Elektrode der Geisslerschen Röhre Kathodenlicht, selbst wenn man nun den primären Strom und also auch die Entladungen erheblich verstärkte. Diese waren dann also in der Tat nur von einseitiger Richtung, es machten sich also auch *keine elektrischen Schwingungen in der sekundären Induktorrolle bemerkbar*, an welche man zur Erklärung des uns hier beschäftigenden Phänomens hätte denken können. Man muß bei diesen Versuchen allerdings darauf achten, daß an dem Disjunktor keine „falschen" Unterbrechungen (etwa durch starke Schwingungen der Kontaktfedern) eintreten, dann zeigt sich sofort mehr oder minder deutlich das dem Schließungsstrome entsprechende Leuchten.

Das Vakuumgefäß mit der einen Elektrode zeigte nun, wenn diese durch lediglich *positive bez. negative Öffnungsstromstöße* mittels des Disjunktors geladen wurde, in beiden Fällen *nahezu ganz gleiche Lichterscheinungen.*[2]) Man konnte auch noch in die Zuleitung zu der betreffenden einen Elektrode eine

1) Die eine Elektrode der Geisslerschen Röhre wurde mit dem isolierten Pole des Induktoriums verbunden, die andere Elektrode, ebenso wie der zweite Induktorpol, dagegen mit der Erde.

2) Der isolierte Pol des Induktoriums blieb stets derselbe und man kommutierte den primären Strom, um jenen zur Anode bez. Kathode des Öffnungsstromes zu machen.

Wasserröhre einschalten, das bewirkte nur eine etwas geringere Helligkeit des betreffenden Phänomens cet. par. Dieses trat, wenn etwa infolge der Verdunkelung unklar geworden, wieder ganz deutlich auf, sobald man den primären Strom verstärkte. Auch danach ist also *nicht anzunehmen*, daß elektrische Schwingungen in den sekundären Windungen des Induktors von merklichem Einfluß sind. Die Lichterscheinungen sind in den eben genannten Fällen wesentlich dieselben, nur weniger hell, wie wenn man den Disjunktor ausschaltet und den Wagnerschen Hammer in Tätigkeit setzt: An[1]) der Elektrode ein Lichtüberzug, dann dunkler Kathodenraum, dann das sogenannte *negative* Glimmlicht, dann wieder dunkler Raum, dann ein Lichtnebel, der einen großen Teil des Vakuumgefäßes einnimmt, aber von der Glaswand durch dunklen Raum getrennt bleibt. Das ganze leuchtende Gebilde erscheint etwas kleiner, aber dafür heller, wenn die Elektrode Kathode für den Öffnungsstrom ist, als im umgekehrten Falle, aber das ist auch fast der einzige Unterschied. Pumpt man sehr weit aus, so tritt das bekannte gelbgrüne Fluoreszenzlicht der Glaswand hauptsächlich als leuchtende Ringe auf, und zwar unabhängig von der Richtung des Öffnungsstromes. Nur ist es heller, wenn für diesen die Elektrode als Kathode sich ergibt. Auch mit dem Disjunktor eingeschaltet kann man das besagte Fluoreszenzlicht erhalten, wenn auch nicht sehr hell, so doch deutlich wahrnehmbar, selbst im Falle nur *positive* Stromstöße die Elektrode laden.

Hr. Lehmann[2]) sieht Verfassers Anschauungen als nicht zutreffend an, das beobachtete positive Licht[3]) sei nichts anderes als der zu dem negativen Glimmlicht gehörige negative Büschel, das der folgenden positiven Entladung zugehörige Licht sei überhaupt nicht sichtbar, oder die Entladung finde nicht statt. Hr. Lehmann weist dann auf die Versuche von Wiedemann und Ebert hin und beschreibt weiter eine interessante Beobachtung mit einem mäßig evakuierten großen

1) Bei geeigneter Verdünnung innerhalb des Entladungsgefäßes.

2) O. Lehmann, Elektrische Entladungen, p. 397. Halle, Knapp 1898.

3) Nämlich der soeben erwähnte Lichtnebel, den man wohl geneigt sein könnte für ein *positives* Phänomen zu halten. Nach Lehmann gehört auch die geschichtete positive Lichtsäule der Geisslerschen Röhren zu dem negativen Teile der Entladung, wie l. c. p. 298 näher ausgeführt wird.

elektrischen Ei bei Anwendung eines mit Wechselstrom gespeisten Funkeninduktors. Es entstanden beiderseits negative Büschel, bestehend aus blauem Glimmlicht und einem durch den dunkeln Trennungsraum davon geschiedenen kurzen roten Büschel, positives Glimm- und Büschellicht fehlten gänzlich. Die beiden roten Büschel bildeten nur scheinbar eine einzige Lichtmasse, bei Annäherung eines Magneten trennten sie sich aber und wandten sich nach entgegengesetzten Richtungen.

Bei den damaligen (1890) Kenntnissen über die elektrischen Entladungen war es aber gewiß gerechtfertigt, nach einer leuchtenden positiven Entladung zu suchen, zumal bei den Experimenten mit Hilfe der Influenzmaschine sich ein vom negativen deutlich verschiedenes positives Licht gezeigt hatte. Auch nach den so bedeutungsvollen Untersuchungen der Herren E. Wiedemann und Ebert ist Verfassers Fragestellung noch berechtigt, wenn man die Angaben genannter Forscher über stärker gedämpfte Schwingungen beachtet.[1]) Ist die positive Entladung wirklich unsichtbar, so hindert das nicht an der Annahme schneller Alternationen. Findet jene gar nicht statt, so kann bei positiven Öffnungsströmen auch kein Rückstrom zur Bildung negativen Lichtes Veranlassung geben, dann wäre also die Erscheinung bedingt lediglich durch Ladung und Entladung der Elektrode und rekurrente Ströme existierten dann gar nicht. Schnelle Schwankungen (nicht nur schneller Wechsel) der Ladung, auch wenn diese *positiv*, würden dann schon eine Kathode ergeben.[2])

Versuche mit einem Magneten erwiesen sich als untunlich wegen starker elektrostatischer Einwirkung auf die geladene Glaswand des Vakuumgefäßes.

1) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. **50.** p. 33, 46, 223 u. 249. 1893.

2) Vgl. E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. **50.** p. 37. 1893.

(Eingegangen 20. Oktober 1903.)

10. *Über die Beziehungen zwischen Druck und Brechungsexponent der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre;*

von Wilhelm Kaiser.

(Auszug aus der Münsterer Inaugural-Dissertation.)

Die bisherigen Untersuchungen von Amagat[1]), Fuchs[2]), Mendelejeff[3]), Siljeström[4]) und van der Ven[5]) über die Abweichungen der Gase Luft, Wasserstoff, Kohlendioxyd und Schwefeldioxyd vom Boyleschen Gesetze bei Drucken von einigen Zentimetern Quecksilber bis zu einer Atmosphäre haben noch nicht zu übereinstimmenden Ergebnissen geführt. Eine erneute Prüfung der Frage erschien daher angebracht.

Die Untersuchung wurde auf Veranlassung von Prof. Heydweiller in der Weise geführt, daß die Abhängigkeit des Brechungsexponenten n der genannten Gase vom Druck bestimmt wurde, da die genaue Proportionalität zwischen $n - 1$ und der Dichte innerhalb weiter Grenzen gültig zu sein scheint.[6])

Die Versuche wurden mit demselben Interferenzrefraktor ausgeführt, mit dem mein verehrter Lehrer Prof. E. Ketteler[7]) seine grundlegenden Untersuchungen über die Dispersion der Gase ausgeführt hat. Zwischen die Platten des Refraktors wurden zwei mit Spiegelglasplatten verschlossene Messingröhren von 80 cm Länge und 1,2 cm Weite in gemeinsamem Wasserbade eingelegt, mit den zu untersuchenden, gehörig gereinigten und getrockneten Gasen gefüllt, und die Streifenverschiebung bei allmählich abnehmendem oder wachsendem Druck in der einen Röhre beobachtet, während in der anderen der Druck kon-

1) E. H. Amagat, Compt. rend. **82.** p. 914. 1876.

2) F. Fuchs, Wied. Ann. **35.** p. 430. 1888.

3) D. Mendelejeff u. M. Kirpitschoff, Ann. de chim. et phys. (5) **2.** p. 427. 1874; D. Mendelejeff u. Hémilian, l. c. (5) **9.** p. 111. 1876.

4) P. A. Siljeström, Pogg. Ann. **151.** p. 451 u. 573. 1874.

5) E. van der Ven, Arch. Teyler (2) **3.** p. 349. 1890; Beibl. **14.** p. 867. 1890.

6) Vgl. J. Chappuis u. Ch. Rivière, Ann. de chim. et phys. (6) **14.** p. 5. 1888; J. R. Benoit, Journ. de Phys. (2) **8.** p. 451. 1889; H. G. Gale, Phys. Rev. **14.** p. 1. 1902.

7) E. Ketteler, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase, Bonn 1865; Theoretische Optik p. 459. Braunschweig 1885.

stant gehalten wurde. Für jedes Gas wurden 5—7 ausgedehnte Versuchsreihen teils mit wachsendem, teils mit abnehmendem Drucke ausgeführt und auf graphischem Wege zu Mittelwerten vereinigt, die für gleiche Druckintervalle von je 20 mm Hg interpoliert in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind.

Dieselben enthalten in der ersten Kolumne den mittleren Druck p in mm Hg für jedes Intervall, in der zweiten die einer Druckänderung von 1 mm Hg entsprechende Streifenverschiebung, die der Änderung des Brechungsexponenten proportional ist, korrigiert für die kleinen Temperaturschwankungen, in der dritten die Abweichungen Δ der einzelnen c vom Mittelwerte der ganzen Reihe, in der vierten die nach der linearen Formel $c' = A(1 + \alpha p)$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte c' und in der fünften die Differenzen $\Delta' = c' - c$ zwischen den so berechneten und den beobachteten Werten.

Tabelle 1.

Luft.

p	c	Δ	c'	Δ'	p	c	Δ	c'	Δ'
0	—	—	0,52183	—	400	0,5220	+0,0002	0,52223	+0,00023
20	—	—	0,52185	—	420	0,5221	+0 0001	0,52225	+0,00016
40	0,5221	+0,0001	0,52187	−0,00023	440	0,5224	−0,0002	0,52227	−0,00018
60	0,5223	−0,0001	0,52189	−0,00041	460	0,5226	−0,0004	0,52226	−0,00031
80	0,5224	−0,0002	0,52191	−0,00049	480	0,5227	−0,0005	0,52231	−0,00039
100	0,5225	−0,0003	0,52193	−0,00057	500	0,5228	−0,0006	0,52233	−0,00047
120	0,5224	−0,0002	0,52195	−0,00045	520	0,5228	−0,0006	0,52235	−0,00045
140	0,5221	+0,0001	0,52197	−0,00013	540	0,5228	−0,0006	0,52237	−0,00043
160	0,5218	+0,0004	0,52199	+0,00019	560	0,5227	−0,0005	0,52239	−0,00031
180	0,5217	+0,0005	0,52201	+0,00031	580	0,5227	−0,0005	0,52241	−0,00029
200	0,5216	+0,0006	0,52203	+0,00043	600	0,5227	−0,0005	0,52243	−0,00027
220	0,5215	+0,0007	0,52205	+0,00055	620	0,5226	−0,0004	0,52245	−0,00015
240	0,5216	+0,0006	0,52207	+0,00047	640	0,5223	−0,0001	0,52247	+0,00017
260	0,5217	+0,0005	0,52209	+0,00039	660	0,5221	+0,0001	0,52249	+0,00039
280	0,5217	+0,0005	0,52211	+0,00041	680	0,5223	−0,0001	0,52251	+0,00021
300	0,5218	+0,0004	0,52213	+0,00033	700	0,5224	−0,0002	0,52253	+0,00013
320	0,5219	+0,0003	0,52215	+0,00025	720	—	—	0,52255	—
340	0,5219	+0,0003	0,52217	+0,00027	740	—	—	0,52257	—
360	0,5219	+0,0003	0,52219	+0,00029	760	—	—	0,52259	—
380	0,5219	+0,0003	0,52221	+0,00031	M. 0,5222				

Scheinbar sind hier und mehr noch bei den folgenden Gasen die Abweichungen mehr oder weniger periodisch. Das rührt jedoch daher, daß die Druckdifferenzen der Versuche größer sind, als die der Tabelle, so daß erstere jedesmal auf mehrere der letzteren ihren Einfluß ausüben.

Tabelle 2.

Kohlendioxyd.

p	c	Δ	c'	Δ'	p	c	Δ	c'	Δ'
0	—	—	0,7696	—	400	0,7797	±0,0000	0,7805	+0,0008
20	—	—	0,7701	—	420	0,7803	−0,0006	0,7811	+0,0008
40	0,7703	+0,0094	0,7707	+0,0004	440	0,7812	−0,0015	0,7816	+0,0004
60	0,7711	+0,0086	0,7712	+0,0001	460	0,7818	−0,0021	0,7821	+0,0003
80	0,7720	+0,0077	0,7718	−0,0002	480	0,7824	−0,0027	0,7827	+0,0003
100	0,7729	+0,0068	0,7723	−0,0006	500	0,7833	−0,0036	0,7833	±0,0000
120	0,7737	+0,0060	0,7728	−0,0009	520	0,7839	−0,0042	0,7838	−0,0001
140	0,7741	+0,0056	0,7734	−0,0007	540	0,7845	−0,0048	0,7844	−0,0001
160	0,7744	+0,0053	0,7739	−0,0005	560	0,7850	−0,0053	0,7849	−0,0001
180	0,7747	+0,0050	0,7745	−0,0002	580	0,7856	−0,0059	0,7855	−0,0001
200	0,7749	+0,0048	0,7750	+0,0001	600	0,7860	−0,0063	0,7860	±0,0000
220	0,7754	+0,0043	0,7756	+0,0002	620	0,7866	−0,0069	0,7865	−0,0001
240	0,7761	+0,0036	0,7761	±0,0000	640	0,7872	−0,0075	0,7871	−0,0001
260	0,7769	+0,0028	0,7767	−0,0002	660	0,7878	−0,0081	0,7877	−0,0001
280	0,7778	+0,0019	0,7772	−0,0006	680	0,7883	−0,0086	0,7883	±0,0000
300	0,7785	+0,0012	0,7778	−0,0007	700	0,7889	−0,0092	0,7888	−0,0001
320	0,7789	+0,0008	0,7783	−0,0006	720	—	—	0,7894	—
640	0,7790	+0,0007	0,7789	−0,0001	740	—	—	0,7899	—
360	0,7790	+0,0007	0,7794	+0,0004	760	—	—	0,7905	—
380	0,7792	+0,0005	0,7800	+0,0008	M.	0,7797			

Tabelle 3.

Schwefeldioxyd.

p	c	Δ	c'	Δ'	p	c	Δ	c'	Δ'
0	—	—	0,9733	—	400	1,0134	−0,0078	1,0137	+0,0003
20	—	—	0,9753	—	420	1,0148	−0,0092	1,0157	+0,0009
40	0,9775	+0,0281	0,9773	−0,0002	440	1,0168	−0,0112	1,0177	+0,0009
60	0,9794	+0,0262	0,9794	±0,0000	460	1,0187	−0,0131	1,0198	+0,0011
80	0,9814	+0,0242	0,9814	±0,0000	480	1,0206	−0,0150	1,0218	+0,0012
100	0,9834	+0,0222	0,9834	±0,0000	500	1,0225	−0,0169	1,0238	+0,0013
120	0,9852	+0,0204	0,9854	±0,0002	520	1,0246	−0,0190	1,0258	+0,0012
140	0,9868	+0,0188	0,9874	+0,0006	540	1,0270	−0,0214	1,0278	+0,0008
160	0,9884	+0,0172	0,9895	+0,0011	560	1,0299	−0,0243	1,0299	±0,0000
180	0,9902	+0,0154	0,9915	+0,0013	580	1,0330	−0,0274	1,0319	−0,0019
200	0,9922	+0,0134	0,9935	+0,0013	600	1,0360	−0,0304	1,0339	−0,0021
220	0,9951	+0,0105	0,9955	+0,0004	620	—	—	1,0359	—
240	0,9980	+0,0076	0,9975	−0,0005	640	—	—	1,0379	—
260	1,0008	+0,0048	0,9996	−0,0012	660	—	—	1,0400	—
280	1,0033	+0,0023	1,0016	−0,0017	680	—	—	1,0420	—
300	1,0050	+0,0006	1,0036	−0,0014	700	—	—	1,0440	—
320	1,0068	−0,0012	1,0056	−0,0012	720	—	—	1,0460	—
340	1,0087	−0,0031	1,0076	−0,0011	740	—	—	1,0480	—
360	1,0104	−0,0048	1,0097	−0,0007	760	—	—	1,0501	—
380	1,0119	−0,0063	1,0117	−0,0002	M.	1,0056			

Tabelle 4.

Wasserstoff.

p	c	Δ	p	c	Δ
0	—	—	400	0,2484	+0,00007
40	—	—	440	0,2485	−0,00003
80	0,2485	−0,00003	480	0,2484	+0,00007
120	0,2486	−0,00013	520	0,2484	+0,00007
160	0,2485	−0,00003	560	0,2484	+0,00007
200	0,2485	−0,00003	600	0,2484	+0,00007
240	0,2485	−0,00003	640	0,2485	−0,00003
280	0,2485	−0,00003	680	0,2485	−0,00003
320	0,2485	−0,00003	720	—	—
360	0,2484	+0,00007	760	—	—

Mittel 0,24847

Der wahrscheinliche Fehler in c erreicht bei keiner dieser Reihen 0,1 Proz.

Es ergeben die Versuche also, daß innerhalb dieser Genauigkeit beim Wasserstoff c unabhängig vom Druck, also $n - 1$ proportional dem Drucke ist; für die anderen Gase sind die Ergebnisse dieser Arbeit mit denen anderer Beobachter nachfolgend zusammengestellt, und zwar die ersten Differentialquotienten des Brechungsexponenten n bez. der Dichte ϱ nach dem Drucke p als lineare Funktion des letzteren für die nebenstehenden Druckintervalle.

Luft.

$\frac{\partial n}{\partial p} = A(1 + 0{,}0_5 19\ p)$	zwischen $^1/_{30}$	und 1	Atm.	
$= A(1 + 0{,}0_5 145\ p)$	„ 1	„ 7	„	Mascart[1])
$= A(1 + 0{,}0_5 13\ p)$	„ 1	„ 20	„	Chappius u. Rivière[2])
$= A(1 + 0{,}0_5 18\ p)$	„ 1	„ 7	„	Perreau[3])
$\frac{\partial \varrho}{\partial p} = B(1 - 0{,}0_5 48\ p)$	„ $^1/_8$	„ $1^1/_8$	„	Fuchs
$= B(1 + 0{,}0_5 22\ p)$	„ 1	„ 30	„	Regnault[4])

1) E. Mascart, Beibl. 5. p. 262. 1877.

2) J. Chappius u. Rivière, Ann. de chim. et phys. (6) 14. p. 22. 1888.

3) F. Perreau, Ann. de chim. et phys. (7) 7. p. 321. 1896. Als Mittelwert aus sämtlichen Reihen würde sich für Luft der Druckkoeffizient $0{,}0_5 22$ anstatt des obigen Wertes ergeben, den Perreau für wahrscheinlicher hält.

4) J. D. van der Waals, Kontinuität d. gasf. u. flüss. Zustandes, 2. Aufl. 1. p. 77. Leipzig 1899.

Kohlendioxyd.

$\frac{\partial n}{\partial p} = A(1 + 0{,}0_4356\,p)$	zwischen $^1/_{20}$ und 1 Atm.		
$= A(1 + 0{,}0_4145\,p)$	„ 1 „ 7 „		Mascart[1])
$= A(1 + 0{,}0_4148\,p)$	„ 1 „ 20 „		Chappius u. Rivière[2])
$\frac{\partial \varrho}{\partial p} = B(1 + 0{,}0_4144\,p)$	„ $^1/_3$ „ $1^1/_3$ „		Fuchs
$= B(1 + 0{,}0_417\,p)$	„ 1 „ 30 „		Regnault[3])

Schwefeldioxyd.

$\frac{\partial n}{\partial p} = A(1 + 0{,}0_3104\,p)$	zwischen $^1/_{20}$ und 1 Atm.	
$= A(1 + 0{,}0_450\,p)$	„ 1 „ 7 „	Mascart
$\frac{\partial \varrho}{\partial p} = B(1 + 0{,}0_463\,p)$	„ $^1/_3$ „ $1^1/_3$ „	Fuchs
$= B(1 + 0{,}0_466\,p)$	„ 1 „ 30 „	Regnault

Bei CO_2 und SO_2 zeigt sich mithin in diesen Versuchen $\partial n/\partial p$ stärker wachsend mit p, als $\partial \varrho/\partial p$ nach den Versuchen von Fuchs in nahe demselben Druckintervall und auch stärker, als nach den übrigen Versuchen $\partial n/\partial p$ oberhalb einer Atmosphäre.

Es liegt nahe, eine Fehlerquelle zu vermuten, etwa die Adsorption dieser Gase an den Verschlußplatten der Röhren; indessen ergibt eine einfache Rechnung, unter Zugrundelegung von Bunsens quantitativer Bestimmung der CO_2-Adsorption, daß diese bei der beträchtlichen Länge der Röhren nicht in Betracht kommt, und gegen das Vorhandensein anderer systematischer Fehlerquellen sprechen die Versuche mit Luft und Wasserstoff.

Es bleibt daher noch die Möglichkeit, daß $\partial n/\partial p$ in Wirklichkeit keine lineare, sondern eine verzögert zunehmende Funktion des Druckes ist. Diese Möglichkeit wäre mit den vorliegenden Versuchen nicht in Widerspruch, aber ihre Genauigkeit ist nicht ausreichend, sie mit Sicherheit zu beweisen.

Die von Mendelejeff unterhalb 200 mm Hg-Druck bei CO_2 und SO_2, sowie von demselben, von Fuchs und van der Ven unterhalb einer Atmosphäre bei Luft gefundenen Anomalien werden durch die vorliegende Untersuchung nicht bestätigt.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Heydweiller für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie deren stetige Förderung meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Münster i. W., Physikalisches Institut 1903.

1) E. Mascart, l. c.
2) J. Chappius u. Ch. Rivière, l. c.
3) J. D. van der Waals, l. c.

(Eingegangen 6. Oktober 1903.)

11. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. B. Walter; von J. Wallot.*

Auf die Bemerkungen des Hrn. B. Walter[1]) zu meiner Abhandlung über „Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Konzentration“[2]) erlaube ich mir das Folgende zu erwidern:

Ich habe der von Hrn. Walter entdeckten Proportionalität zwischen der Zunahme des Brechungsexponenten und dem Prozentgehalte vieler Salzlösungen keineswegs jede theoretische Bedeutung abgesprochen, sondern an der betreffenden Stelle meiner Arbeit[3]) nur festgestellt, daß sich für das sogenannte „Refraktionsinkrement“ des Hrn. Walter zwar aus der mathematischen *Form* seiner Beziehung — daher der Ausdruck „formell“ — eine gewisse „physikalische Bedeutung“ ergibt, daß diese Bedeutung aber mit der Erfahrung nicht übereinstimmt, mit anderen Worten, daß die Waltersche Beziehung für das feste Salz ungültig wird.

Von der Herleitbarkeit dieser Beziehung aus der Landoltschen Regel ist in meiner Arbeit nur ganz *nebenbei* die Rede. Allein aus diesem Grunde habe ich es unterlassen, die Widersinnigkeit der dazu notwendigen Annahmen besonders zu betonen. Ich bin natürlich nie im Zweifel darüber gewesen, daß dem Walterschen Gesetz durch diese durchaus nicht neue, sondern ohne alle Rechnungen direkt einleuchtende formelle Ableitung keine theoretische Grundlage gegeben werden kann.

Giessen, Physik. Inst. d. Univ., im Oktober 1903.

1) B. Walter, Ann. d. Phys. **12.** p. 671. 1903.
2) J. Wallot, Ann. d. Phys. **11.** p. 593. 1903.
3) p. 594.

(Eingegangen 22. Oktober 1903.)

12. *Berichtigungen zur Arbeit: Über die Anwendung der mechanischen Prinzipe auf reibende Bewegungen*[1]; *von Zemplén Győző.*

p. 365, Zeile 7 von oben lies:

$$- \Phi_i(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t)\tau = 0$$

statt

$$- \Phi_i(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t)\tau.$$

p. 365, Zeile 2 von unten lies: Gleichungen (11) statt Gleichungen (1).

1) Zemplén Győző, Ann. d. Phys. 12. p. 356. 1903.

(Eingegangen 14. November 1903.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

!! Selen-Zellen und -Apparate !!

für

Telephonie ohne Draht

sowie sämtliche elektrophysikalische Demonstrations-Apparate liefern

CLAUSEN & v. BRONK, Berlin N 4, Chausseestrasse 3.

Man verlange gratis und franco illustr. Preisliste.

Diapositivplatte

mit Entwicklung

für Projektions-, Stereoskop- und Fensterbilder.

Otto Perutz, Trockenplattenfabr., München.

Illustrierter Katalog für Platten und Apparate gratis.

Buchhandlung GUSTAV FOCK, G. m. b. H.

Leipzig

bietet in sauberen antiquarischen Exemplaren an:

Annalen der Physik und Chemie. Herausg. v. Poggendorff. 102 Bde. 8 Erg.-Bde. Nebstbd. nebst Fortsetzg. Wiedemann's Annalen. Bd. 1—69 nebst Beiblättern dazu Bd. 1—22. 1824—98. ℳ 3650.—.

Annalen der Physik und Chemie. *Neue Folge.* Hrsg. v. Wiedemann. Bd. 1—68. 1877—99. Gebunden ℳ 680.—

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 1—26 und Register zu Bd. 1—15. 1877—1902. ℳ 360.—

Fortschritte der Physik. Dargestellt von der Physikal. Gesellschaft in Berlin. Für die Jahre 1845—93. Jahrg. 1—49. 1845—93. ℳ 750.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. von Ohrtmann und Müller Bd. 1—30. 1871—1901. Gebunden ℳ 400.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Hrsg. v. Schlömilch. Bd. 1—47. Mit Suppl. u. Reg. zu Bd. 1—25. 1856—1902. Gebunden ℳ 715.—

Zeitschrift für physikalische Chemie. Hrsg. v. Ostwald u. van't Hoff. Bd. 1—43 u. Reg. zu Bd. 1—34. 1887—1902. Gebunden ℳ 730.—

Physikalischer Handapparat.

Sammlung von 1000 Abhandlungen aus dem Gesamtgebiete der Physik. ℳ 350.—

Schöne reichhaltige, alle Gebiete der Physik umfassende Kollektion, zum Teil aus dem Besitze des † Herrn Professor Bankel, zumeist aus den letzten 20 Jahren stammend.

Anfragen werden prompt beantwortet, Dissertationen- und Bücherlitteratur gern angegeben.

Katalog 200: Mathematik und Physik u. Katalog 203: Chemie, Pharmazie, Technologie etc. gratis und franko.

Wir kaufen

stets einzelne Bände, größere und kleinere Serien von *Annales de chimie et de physique, Gilberts Annalen, Zeitschrift für Elektrochemie* etc. etc.

Man verlange gratis und franko das soeben ers

Spezialpreisverzeichnis

über

Selen-Zelle und Appar

System Ruhm

von

RUHMER'S

Physikalischem Laboratoriu

Berlin S.W. 48.

Neu: **Selen-Zellen flacher Form** in rundem Hart gehäuse, für wissenschaftliche und Gebrauchs
D.R.P. 146262. D.R.P. ang. D.R.G.M. 201

Selen-Zellen zylindrischer Form in evakuierte birne mit Gewindefassung.
D.R.P. 147113. D.R.P. ang. D.R.G.M. 169

Komplette Instrumentarien zum Nachweis der empfindlichkeit des Selens.

Selen-Zündapparate. D.R.P. 136094.

Apparate für intermittierende Beleuchtung des

Apparate für Lichttelephonie mittels Acetyle Bogenlichts.

Photographophone neuester Konstruktion.

Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hilfe derselbe eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von herbeizuführen, ein bisher von keiner anderen Seite auch nähernd erreichtes Resultat.

LEPPIN & MASCHE, Berlin S.O.,

Engelufer 17.

Elektrische Centrifugalmaschine.

D.R.G.M.

Für Anschluß an Starkstromleitungen.
Gleichzeitig Antriebsmotor.
Tourenzahl regulierbar und meßbar.
Vorhandene Nebenapparate verwendbar.
Näheres „Berichte".

Preis Mk. 160.—.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

SOCIETE GENEVOISE

pour la Construction

D'INSTRUMENTS DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE

Genf. 5 Chemin Gourgas.

Kreis- und Längentheilmaschinen, Comparatoren, Kathetometer, Mikrometrische Schrauben, Normalmasse,

Normalmeter

in verschiedenen Längen, aus Nickelstahl (Invar), Nickel, Bronze, in der H-Form, 5 Meter lang in Invar.

Höchste Garantie der sauberen Ausführung der exaktesten Arbeiten.

Astronomische, optische, elektrische Instrumente.

Vollständige Ausstattung für Universitäten.

Funkentelegraphische Apparate (hohe Frequenz), nach Tesla, Oudin etc.

Kataloge zur Verfügung.

Optisches Institut

C. REICHERT

WIEN

VIII, Bennogasse 24 und 20

Specialität:

MIKROSKOPE

I. Qualität

beehrt sich mitzutheilen, dass erschienen sind:

Hauptkatalog Nr. 28 über Mikroskope, Mikrotome, Hämometer, Ferrometer etc.

Specialkatalog Nr. 1 über Polarisationsapparate zur quantitativen Bestimmung der Rüb- und Traubenzucker.

Specialkatalog Nr. 2 über Projectionsapparate für physikalische Zwecke.

Specialkatalog Nr. 3 über Mikrophotographische Apparate.

Specialkatalog Nr. 4 über Projectionsapparate zur Projection von mikroskopischen Präparaten und Dispositiven.

Diese Kataloge werden den P. T. Interessenten auf Verlangen gratis und franco zugesendet.

UNGER & HOFFMANN

Gegründet 1878 DRESDEN-A. 16 Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion:

Alle Lichtquellen. Laterndiapositive in reichster Auswahl.

Preislisten und technische Auskunft jederzeit zu Diensten.

Carl Zeiss, Optische Werkstaette, Jena.

Berlin NW., Dorotheenstrafse 29. II.
London W., 29 Margaret Street, Regent Street.
Wien IX/3., Ferstelgasse 1, Ecke Maximilianplatz.
Frankfurt a. M., Kaiserstrafse 16.
Hamburg, Rathausmarkt 8. St. Petersburg.

Spektrometer und Refraktometer (14 verschiedene Modelle);
Prismen jeder Art und optisch-physikalische Präparate, Spektroskope;
Dickenmesser, Komparatoren, Sphärometer und Fokometer;

Pulfrich's Stereo-Komparator, grofses Modell, für Platten 24 × 30 cm.

Dilatometer, Interferenzmefsapparate, Interferenztischchen etc., Interferenzrefraktometer und Schlierenapparate;
Stereo-Telemeter und Stereo-Komparatoren;
Neues Stereoskop, Stereo-Mikrometer und Stereo-Diapositivbilder;
Abbe'sches Diffraktionsmikroskop (Neukonstruktion).

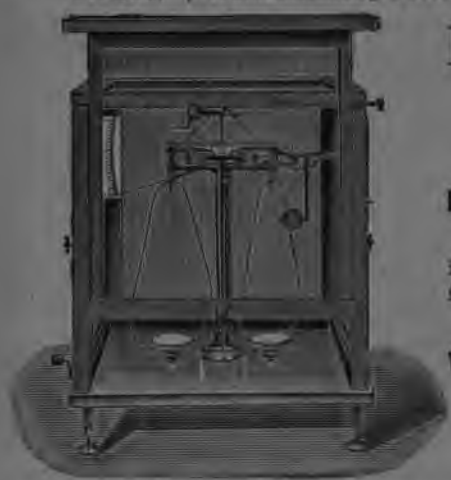
Beschreibungen und Preislisten gratis und franko.
Bei Bestellungen Bezugnahme auf diese Annonce erbeten.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämmtlichen beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.



Mechanisches Institut,

gegründet 1866.

Specialität:

Physikalische und analytische Waagen

in garantirt vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Schnellschwingende

Waagen für Chemiker.

Preislisten kostenfrei.

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20.

Ampèremeter und Voltmeter

nach Deprez-d'Arsonval, D. R.-P.

Funkeninduktoren, Condensatoren, Spiegelgalvanometer.

Thermosäule

nach Angabe des Herrn Prof. Dr. Rubens.

Pyrometer

zum Messen von Temperaturen bis 1600° Celsius.

Galvanometer

zu Linde'schen Kältemessungen.

= Preisverzeichnisse kostenfrei. =

E. LEITZ,

Optische Werkstätte,

Wetzlar.

Zweiggeschäfte: Berlin NW., Luisenstr. 45.
New York 411 W., 59th Str. Chicago 32—38, Clark Str.
Vertreter für München:
Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Neuestes Modell 1902.

Mikroskope,

Mikrotome, Mikrophotogr. und Projektions-Apparate.

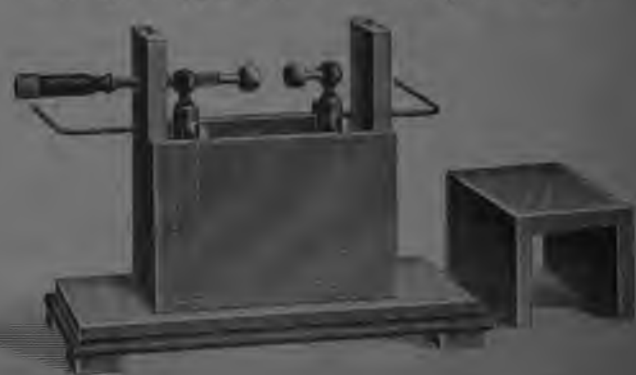
Preislisten kostenfrei.

J. Robert Voss,
Mechaniker,
Berlin N.O. 18, Pallisadenstr. 20.

Specialität:
Influenz-Elektrisir-Maschinen
aller Systeme
(auch die dazu gehörigen Nebenapparate)
und
Metall-Spiral-Hygrometer
in allen Ausführungen.

Physikalische Apparate.

Original-Konstruktionen.
Röntgen-Apparate. Modelle jeder Art.



Neue Preisliste, über
4000 Nummern und 1600 Abbildungen enthaltend,
erschienen.

Ferdinand Ernecke,

Hoflieferant Seiner Majestät des Kaisers.
Königgrätzerstr. 112, **Berlin S.W.**, Königgrätzerstr. 112.
— Begründet 1859 —

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Specialitäten: Momentplatten für Astronomische und **Röntgen**-aufnahmen, für Aufnahmen fliegender Geschosse, **Microphotographie** und Spectralphotographie. — Orthochromatische Platten. **Abzieh**-platten für Lichtdruck, Celluloïdfolien. — Rollfilms für Tageslicht-cameras.

Trockenplattenfabrik u. Actien
vormals **Dr. C. Schleussner** in **Frankfurt a. M.**

Doppelwandige Glasgefäße
Pentanthermometer bis — 200° C. } zur flüssigen Luft,
einfache und automatische **Quecksilberluftpumpen, Röntgenröhren** mit und ohne **Vakuumregulierung, ff. Glasschliffe** und **-Hähne, Markonröhren** etc. empfiehlt

R. BURGER, Berlin N. 4, Chausseestr. 3E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke,

sowie **Räder, Triebe, Zeigerwellen, schräge Triebe** und **Zahnstangen**

fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

A. Eberhard vorm. R. Nippe,

Berlin NW.,
Platz vor dem neuen Thor 1a.

Chemische und physikalische Apparate und Gebrauchsgegenstände.

Glas-Präcisions-Instrumente und volumetrische Messapparate.
Feinste Thermometer von —200 bis +550 Grad.
Quecksilber-Luftpumpen neuester Construction.
Vacuum-Röhren
nach *Braun, Crookes, Geissler, Hittorff, Puluj, Röntgen* etc.
Spectral-Röhren.
Mikroskope, Photometer,
Projectionsapparate, Spectralapparate aller Werkstätten
zu Originalpreisen.
Physikalisch-analytische Waagen und Gewichte aller Systeme.
Complete Einrichtung von Laboratorien u. Vorlesungsräumen.
Sachgemässe Kostenanschläge. Aeusserst billige Preise.
Grosse illustrirte Preislisten kostenlos.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik.

— Gegründet 1890. —

Alleinvertrieb u. Alleinberechtigung zur Fabrikation der patentierten

Geryk-Öl-Luftpumpen

in Deutschland.

Leistung bis zu 3 Kubikmeter pro Minute;
Vakuum bis zu $^1/_{5000}$ mm Hg.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Kein Glas. — Kein Quecksilber. — Kein Versagen.

Komplette Pumpeinrichtungen für Hand- und Motorbetrieb, **auf Tisch montirt.**

Apparate in Originalkonstruktionen

für Untersuchungen und Demonstrationen im **hohen Vakuum.**

— Prospekte auf Wunsch. —

Die *Zeitschrift für phys. u. chem. Unterricht* schreibt über Geryk-Pumpen: „Die Duplexpumpe Nr. 1 leistet in einer Minute soviel wie eine Sprengelsche Pumpe in einer Stunde"; „mit einer guten Trockenröhre hat man Verdünnungen bis zu $^1/_{1000}$ mm erreicht"; „es erfordert ihr Betrieb nur so geringe Kraft, daß selbst ganz schwächliche Lehrer sie ohne Anstrengung während des Unterrichts bedienen können." „Als Schulapparate ist sie geradezu als unverwüstlich zu bezeichnen."

Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.

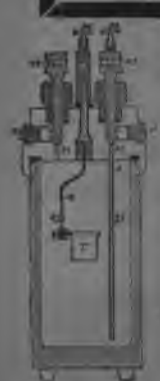
Keine Dämpfe kein Geruch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

Alleiniger Fabrikant: **Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstr. 72/73.**

Niederlage auch bei **E. Leybold's Nachf., Cöln a. Rhein.**



Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler,
verbessert nach Dr. Kroeker
(gesetzlich geschützt).

Hartmann & Braun A.-G., Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Messinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Preussische Goldene Staatsmedaille.

Kompensationsapparat mit Kurbelschaltung.

Kataloge auf Verlangen zur Verfügung.

W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. Dr. M. APEL.

Gründungsjahr 1869. Göttingen. Gründungsjahr 1869.

Chemische und physikalische Apparate.

Spezialität:

Rauchgasapparate, Calorimeter zur Bestimmung des **Brennwertes** der verschiedenen **Brennstoffe** und von **Gasen**, nach **Ferd. Fischer.**

Thermometer nach **Ferd. Fischer.** (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach **Nernst.** (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.)

Totalreflectometer nach **Kohlrausch.**

Demonstrationsapparate n. **Behrendsen** und **Grimsehl.**

Krystallmodelle aus Holz und Glastafeln nach **Klein, Naumann** und **Rose.**

Milchprüfungsbestecke nach **Tollens.**

MEISER & MERTIG,

Dresden-N. 6.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate jeder Art

in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

Funkeninduktoren.

Hochspannungsapparate.

Apparate für drahtlose Telegraphie.

Röntgenapparate.

Chemische Geräte.

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

Neue Preisliste kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Auszeichnungen: *Staatsmedaillen.*

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.

Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 Goldmedaille.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

Ausführung von Uhrwerken und Apparaten für wissenschaftliche und technische Zwecke. Mikrometerstasser $^1/_{200}$—$^1/_{500}$mm direkt Ablesg.

Max Stuhl, Berlin.

Glastechnische Werkstätte

jetzt

130 Friedrichstrasse 130

(früher Philippstr. 22).

Elektrische und mechanische

Apparate nach Angabe.

Werkstatt für Feinmechanik, elektrotechnisches Laboratorium

H. BICHTELER, Glashütte i. S.

NEW WAVE-LENGTH SPECTROSCOPE

ADVANTAGES:— **(CONSTANT DEVIATION).**

Collimator & telescope are fixed at right angles; thus the spectroscope will **stand in a corner**, and is **always ready for use & in adjustment.** The prism is of special form and automatically sets itself at **minimum deviation.**

Can be supplied **reading in wavelengths direct. Great accuracy** readily obtainable in wavelength measurements.

Descriptive Pamphlet of this Spectroscope price free on application to

ADAM HILGER, 75A. Camden Road, LONDON N.W.

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig.

Schlömilchs
Handbuch der Mathematik.

Zweite Auflage.

Bearbeitet von

Prof. Dr. **R. Henke** und Prof. Dr. **R. Heger** (Dresden).

Band I. **Niedere Mathematik.**
Band II. **Höhere Mathematik.** I. Teil.
Band III. **Höhere Mathematik.** II. Teil.

Broch. à Band ℳ 20.—, geb. à Band ℳ 22.50.

Bd. I. gr. 8°. XII. 611 S. Mit 321 Figuren.
Bd. II. gr. 8°. VIII. 765 S. Mit 281 Figuren und 12 Tafeln.

Band III (unter der Presse).

Schlömilchs Handbuch der Mathematik, das in seiner ersten Auflage innerhalb des Rahmens der Encyklopädie der Naturwissenschaften erschien, gelangt jetzt, gänzlich umgearbeitet und **auf drei Bände erweitert** wieder zur Ausgabe. Der Schlußband ist zu Ostern 1904 zu erwarten.

Es soll den Leser so weit führen, daß er eine ganze Reihe von Hauptwerken über Astronomie, Mechanik, Physik und Ingenieurwissenschaften lesen und sich nötigenfalls weiter helfen kann.

PARIS 1900
GRAND PRIX
Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-
Reisszeuge
Astronomische Uhren,
Compensationspendel.
Clemens Riefler
Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. München.
Gegründet 1841.

Physikalisch-mechanisches Institut
von Prof. Dr. M. Th. Edelmann in München.
Präcisions-Messapparate im Bereiche von Elektrizität, Erdmagnetismus, Elektrotechnik etc.
(Preisverzeichniss, reich illustrirt, gratis.)

Otto Wolff. Werkstatt für elektrische Messinstrumente.
Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890:
Präcisions-Widerstände a. Manganin
nach der Methode
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1890, Nov.-December 1896.)

Normal-Widerstände von 0,5001—100000 Ohm. — **Abzweig-Widerstände** von 1—0,01001 Ohm mit Petroleum- oder Luftkühlung, für Stromstärken bis 8000 Amp. — **Rheostaten, Wheatstone'sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken** für alle Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — **Kompensations-Apparate** für genaue Spannungsmessung in 6 Modellen. — **Normal-Elemente**, beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präcisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

— Illustrierte Preisliste. —

Günther & Tegetmeyer.
Werkstatt für Präcisions-Mechanik
Braunschweig.
Wasserstrahl-Duplicatoren, Actinometer, Quadrantenelectrometer, Electroscope mit Natriumtrockung (D. R. G. M.), Apparate zur Messung der Electricitätszerstreuung in der Luft, etc. nach **Elster** und **Geitel.**

Registrir-Electroscope nach **Birkeland** (konstruirt für den Gebrauch bei der norwegischen Nordlicht-Expedition 1899).

Photothеodolite für meteorologische Zwecke nach **Koppe.**

Ableseferarohre.

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Berliner Werk

Berlin SW., Markgrafenstrasse 94.

Kompensationsapparat für genaue Strom- und Spannungsmessungen.

Normalwiderstände für Strommessungen.

Messbrücken für **Thomson**'sche und **Wheatstone**'sche Schaltung.

Widerstände aus **Manganindraht** von 1 und 10 Megohm in je 10 Stufen.

Spiegelgalvanometer nach **Deprez-d'Arsonval.**

Spiegel-Elektrodynamometer.

Panzergalvanometer.

Apparate für Eisenuntersuchungen.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

Vertreter in allen Ländern.

Fabrik-Marke.

Emil Gundelach, Gehlberg i. Thüringen.

Glashütte mit Regenerativ-Gasofen. ❀ Glasbläserei mit eigener Gasanstalt.

Schleiferei. Tischlerei. Dampfbetrieb.

Röhren, Kolben, Bechergläser, Kochflaschen etc. aus Glas von hohem Widerstand gegen chemische Agentien und gegen Temperaturwechsel.

Sämmtliche Glasapparate und Instrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Doppelwandige Flaschen nach Dewar für flüssige Luft, versilbert und unversilbert.

Elektrische Vacuumröhren nach *Geissler, Crookes, Hittorf, Tesla, Moore* etc.

speciell:

Röntgenröhren von hervorragender Qualität.

(Röntgenröhren für Wehnelt-Unterbrecher; D.R.P. No. 109449, Röntgenröhren mit Regenerirvorrichtung, D.R.P. No. 103189.)

Bis jetzt wurden über 37000 Stück Röntgenröhren geliefert.

Die Firma besteht seit 1852.

Neues Widerstand oder Brücke mit 180- u. 1000-Teilung.
D. R.-Patent a.

Elektrizitätsgesellschaft

Gebr. Ruhstrat,

Göttingen.

Schlitten-, Schiefer- und Porzellanwiderstände von 15 *oh* an.

Schalttafeln
auf Schiefer oder Marmor
für physikalische,
medizinische und technische Zwecke.

Dynamo-Maschinen, Elektromotoren,
sowie
Messinstrumente jeder Art.

Anfertigung elektrischer Apparate nach Zeichnung oder näherer Angabe.

Hauptkatalog gratis.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.

Thermometer
für
Wissenschaft und Technik,
von —200 bis +575°.

Barometer
mit constantem Nullpunkt,
eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren
nach
Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen, Puluj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

Induktorien

mit Präcisions-Spiralstaffelwicklung Pat. Klingelfuss
von bisher unerreichter Leistungsfähigkeit und Haltbarkeit.
Auf wissenschaftlicher Basis construirt.
Für physikalische Arbeiten, Röntgenapparate, Hertz'sche Schwingungen, drahtlose Telegraphie, Teslaströme und zum Laden von Condensatoren
— auch bei Dauerbetrieb —
gleich hervorragend. Reich illustrirte Preisliste zu Diensten.
Fabrikanten: Fr. Klingelfuss & Co. Basel (Schweiz).

GEORG WESTPHAL,
Celle (Hannover).
Mechanisches Institut
(gegründet 1860).

Wagen und Gewichte für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke

in vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Kristallisieren und Schmelzen.
von **Dr. Gustav Tammann,**
Professor an der Universität Göttingen.
8°. X, 048 S. und 88 Abbildg. 1903. broch. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

E. DUCRETET
PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

Grands-Prix | Paris 1889 — Anvers 1894
Expositions Universelles | Bruxelles 1897 — Paris 1900

Cabinets de physique complets.
Appareils de Mesures électriques.
Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet adoptée pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1902, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence.
Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.
Fils primaires du Dr. A. Vincent.

Paul Kröplin.

Bützow i. M.,

mech. Werkstätte für Lehrmittel,

Maferbetrieb,

liefert als Specialität

Apparate

nach Hertz, Marconi, Tesla, Röntgen, Lodge und Lecher.

Funkeninductoren und polarisirte Relais.

Ableiterbetrieb für Oesterreich-Ungarn:

A. Pichlers Wittwe u. Sohn, Wien.

Rich. Magen,

Optiker und Mechaniker,

Berlin NW. 40, Scharnhorststr. 34a.

Für Spiegelgalvanometer:

Planparallel-Spiegel v. 4 bis 30 mm Durchm. Ganz dünn u. leicht, sowie Hohlspiegel von 15 mm Durchm. 1—$1_{/10}$ etc. bis 2 Mtr. Focus. Glasscalen von $^1/_2$ bis $1_{/10}$ Mtr. lang. Maassstäbe in Glas u. Metall (in beliebigen Intervallen) bis $^1/_{100}$ mm genau. Interferenzgitter (für Schulen von 10—400 Striche per mm. Planparallelglas jeder Stärke. Glasprismen. Metallspiegel in Spiegelmetall.

Preisverzeichniss gratis.

C. A. Steinheil Soehne,

optisch-astronomische Werkstätte,

Gegründet 1855. **MÜNCHEN.** Gegründet 1855.

Astronomische Fernrohr-Objektive, zwei- und dreiteilig in allen Dimensionen bis 1 Meter Durchmesser, normaler Konstruktion und ohne sekundäres Spektrum.

Okulare, Prismen, Lupen, Plan- und Planparallelgläser.

Komplette astronomische Fernrohre mit und ohne Stativ.

Ablesefernrohre, terrestrische Hand- und Stativfernrohre, Prismenfernrohre.

Spektralapparate verschiedenster Konstruktion, mit und ohne photograph. Einrichtung.

Spektroskope, Spektrographen und Goniometer.

Preislisten frei auf Verlangen, auch über photographische Objektive und Zubehör.

RICH. SEIFERT & CO., Hamburg 13.

Elektrotechnische Werkstatt.

Komplette Röntgeneinrichtungen nach Dr. Albers-Schönberg und Dr. Walter.

Schutzvorrichtungen — gegen Röntgenstrahlen. —

Starkstrom-Dekadenwiderstände,

und genau nach Zehnern, Einern und Zehntel Ohm abgestuft, ermöglichen eine sehr feine Einstellung, sowie eine genaue Voraussberechnung der Stromstärke und sind besonders für Versuchszwecke zu empfehlen.

Die Ablesbaren Regulierstöpsel werden auf Wunsch überstöpsel mit Ohm-Dekaden versehen und können ausser zu Röntgenzwecken auch zu allen sonstigen Starkstromwiderstandszwecken benutzt werden.

Kostenanschläge und Preislisten gratis.

Alt, Eberhardt & Jäger,

Ilmenau (Thüringen).

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläserei, Glasschleiferei, Holzwaarenfabrik, Mechanische Werkstatt, Schriftmalerei und Emaillieranstalt.

Glas-Apparate, -Instrumente und -Utensilien

für chemischen, physikalischen und wissenschaftlichen Gebrauch.

Apparate für Vorlesungen, botanische Studien u. s. w.

Chemische Glasgeräthschaften für Laboratorien von Schulen, höheren Lehranstalten, Fabrikslaboratorien des chemischen Grossbetriebes.

Standgefässe für Museen.

Elektrische Röhren, Röntgen-Röhren.

Normal-Thermometer, Chem. Thermometer — 200 + 550°.

Normal-Aräometer in feinster Herstellung.

Glasröhren und -Stäbe.

Geaichte chemische Messgeräthe.

Anfertigung neuer Apparate nach Skizzen und Angaben.

Eigenes chemisches Laboratorium.

Exakte Ausführung.

Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

Darmstadt.

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate. Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Welttheilen.

C. M. J. Bodien, Hamburg IV. 200.

fertigt als Specialität alle Arten Electrische Glühlichtlampen nach Muster oder Zeichnung.

ferner: Geissler-Röhren, Crookes-Apparate &

Glasinstrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Max Kohl, Chemnitz i. S.

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

fertigt als Spezialität:

Funkeninduktoren für Gleichstrom mit veränderlicher Selbstinduktion für jede Spannung bis 250 Volt durch Induktionskommutator nach Kohl; für **Wehnelt-Unterbrecher** mit **einem** oder **mehreren Kontaktstiften; gleichgut** geeignet für **Anwendung weicher, mittelweicher** oder **harter** Röntgenröhren; für **ganz langsame** und **allerschnellste** Unterbrechungen verwendbar; die Einrichtung ermöglicht größte **Schonung** der Röntgenröhren bei sehr geringem Stromverbrauch und liefert **großartige Durchleuchtungen.** Bei Anwendung der **Schaltung** für **mittelweiche Röhren** kann **jeder rotierende Unterbrecher** in **voller Leistung** betrieben werden.

Experimentier-Schalttafeln!

A) zum Anschluß an 110—160 Volt für Stromstärken bis 12 bezw. 24 Ampere.

B) zum Anschluß an 220 Volt für Stromstärken bis 10 bezw. 20 Ampere.

Man verlange ausführlichen Spezial-Prospekt!

Neu! **Wechselstrom-Gleichrichter** *Neu!*

zum direkten Laden von **Akkumulatoren** an einer **Wechselstrom-Anlage** und zum **Betrieb von Funkeninduktoren** durch **Wechselstrom, ohne daß ein weiterer Unterbrecher nötig ist.**

Projektionsapparate für Bogenlicht, Gleich- oder Wechselstrom, Kalklicht, Acetylen- oder Zirkonbeleuchtung, mit angesetzter optischer Bank.

Durch Aufsetzen einzelner Ansätze ist es möglich, die Projektions-Apparate für alle Polarisations-, Doppelbrechungs-, Interferenz- und Lichtbrechungsversuche zu verwenden!

Fabrikation physikalischer Instrumente, Apparate nach Tesla, Hertz, Marconi.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen u. chem. Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Neu! Spinthariskope, Neu!

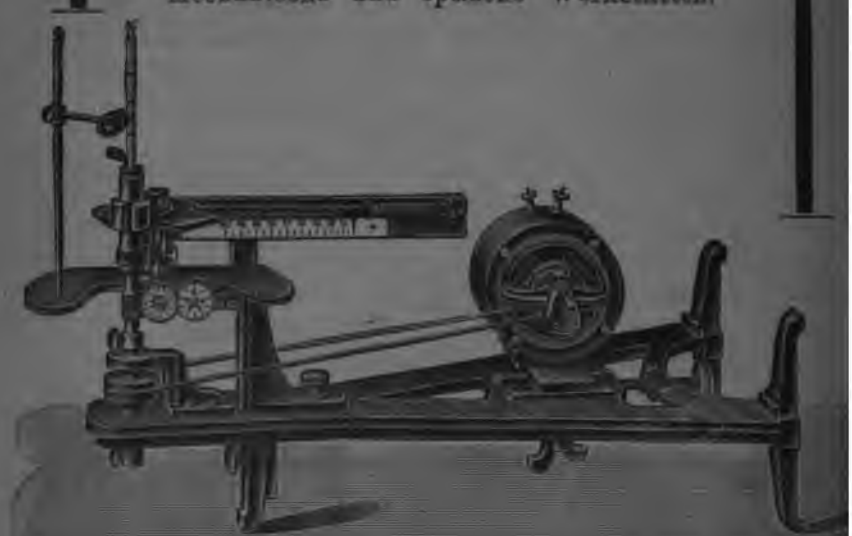
mit Fluorescenzschirm und einer kleinen Menge Radium auf bewegbarem Zeiger, um die außerordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen. **Preis Mk. 24.—**

Spezial-Listen auf Wunsch.

E. Leybold's Nachfolger,

Köln a. Rh.

Mechanische und optische Werkstätten.



Neue Schwungmaschine mit Elektromotor zum Anschluſs an eine Starkstromleitung.

Mit dem Apparat lassen sich sämtliche Versuche bequem anstellen. Die Abbildung zeigt die Centrifugalmaschine in Verbindung mit dem Apparat nach Slotte zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes.

Preisliste über Neue Apparate und Versuche auf Verlangen.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Böhmestr. 9

Mit vier Beilagen von: Reuther & Reichard, Berlin. J. C. B. Mohr, Tübingen, B. G. Teubner, Leipzig und Gebr. Borntraeger, Berlin.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1904. № 2.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

Stanford University JUN 14 1904

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13. HEFT 2.

DER GANZEN REIHE 318. BANDES 2. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT SECHS TAFELN.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (or 3 Bänden) erscheinenden Jahrgang 45 M.

Inhalt.

Seite

1. G. Quincke. VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc. 217
2. Ferd. Kirchner. Über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen 239
3. R. Hartmann-Kempf. Über den Resonanzverlauf erzwungener Schwingungen. (Hierzu Taf. IV—VII.) 271
4. H. du Bois. Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel. (Hierzu Taf. VIII.) 289
5. R. Hollmann. Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische I 325
6. Hans Happel. Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung 340
7. Aug. Hagenbach. Über den Dopplereffekt im elektrischen Funken. (Hierzu Taf. IX, Figg. 1—4.) 362
8. J. Stark. Sekundäres und primäres negatives Glimmlicht . 376
9. A. Becker. Über den Einfluß von Kathodenstrahlen auf feste Isolatoren 394
10. K. Schaum und F. A. Schulze. Zur Demonstration elektrischer Drahtwellen 422

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude,** zu senden. Seine Adresse ist **Giessen,** Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Gebrüder Borntraeger
BERLIN SW 11
Dessauer Strasse 29

Anfang 1904 beginnt zu erscheinen:

Physikalisch-chemisches Centralblatt

Physico-chemical Review — Revue physico-chimique

Vollständiges internationales Referatenorgan
für die physikalische Chemie und die angrenzenden Gebiete
der Chemie und Physik

in Verbindung mit

Bancroft Ithaca — **Brühl** Heidelberg — **Classen** Aachen — **Cohen** Utrecht — **Colson** Paris — **Dieffenbach** Darmstadt — **Goldschmidt** Christiania — **Goodwin** Boston

Jahn Berlin — **Jones** Baltimore — **Kahlbaum** Basel — **Kahlenberg** Madison — **Konovalov** St. Petersburg — **Küster** Clausthal — **van Laar** Amsterdam — **Loomis** Princeton

Lorenz Zürich — **Magnanini** Modena — **Morgan** New-York — **Nasini** Padua — **Noyes** Boston — **Sir W. Ramsay** London — **Richards** Cambridge — **Sakurai** Tokio — **Schmidt** Erlangen

Spring Lüttich — **Staedel** Darmstadt — **Tamman** Göttingen — **van der Waals sen.** Amsterdam — **Walden** Riga — **Young** Bristol — **Zelinsky** Moskau

und zahlreichen anderen Fachgenossen

herausgegeben von

Privatdocent Dr. Max Rudolphi-Darmstadt

Der Aufschwung und die Entwickelung der physikalischen Chemie in den letzten Jahrzehnten steht nahezu einzig da. Diese Entwickelung hat auch reich befruchtend auf chemischem

wie auf physikalischem Gebiete gewirkt.

Die speziell physikalisch-chemische Originalliteratur wie die Zahl der bedeutungsvollen Arbeiten auf den beiderseitigen Grenzgebieten wächst ständig und in ausserordentlichem Masse. Die Zahl der Zeitschriften, auf die sich die betreffenden Arbeiten verteilen, ist nicht gering. Deshalb soll nicht etwa ein weiteres Publikationsorgan für Originalarbeiten, sondern ein

umfassendes, centralisirendes

physikalisch-chemisches Sammelorgan

geschaffen werden, das über alle hierher gehörigen Arbeiten möglichst **schnell und in durchaus sachlich gehaltenen** Referaten Bericht erstattet.

Ein solches Organ kann nur dann vollständig sein, wenn es **international** ist. Es werden daher ebensowohl englische und französische wie deutsche Referate erscheinen. Eine Beschränkung auf diese drei Sprachen erschien indess geboten. Keineswegs besteht die Absicht, ein Organ für **ein** Land **zu** schaffen: es soll vielmehr angestrebt werden, dass hier jedes Land im eigentlichen Verhältnis zu seiner wissenschaftlichen Produktivität vertreten ist.

Von einer Aufzählung der einzelnen Hauptgebiete sei abgesehen. Es werden das ganze Gebiet der allgemeinen und physikalischen Chemie und die beiderseitigen Grenzgebiete, soweit sie irgend für den Physiko-chemiker in Betracht kommen, volle Berücksichtigung finden. Ein solches internationales Sammelorgan wird nicht nur für den wissenschaftlich arbeitenden Forscher, sondern auch für den Mann der Praxis von hervorragender Bedeutung sein.

Soweit irgend möglich, sollen von den **Autoren selbst verfasste** Referate gebracht werden. Dabei wäre erwünscht, dass die Autoren ihre Referate über ihre Arbeiten alsbald nach Fertigstellung der Hauptarbeit an die Redaktion des Central-[illegible] Autoren-Referate werden dann **sofort** nach

dem Erscheinen der Hauptarbeit unter Beifügung des Eingangsdatums und des betreffenden Instituts publiziert.

Die Referate werden **rein sachlich** und in einem der Originalarbeit entsprechenden Umfang gehalten sein. In Fällen, wo ein Autoreferat nicht vorliegt, wird über die Arbeiten nach Sonderabzügen oder nach den betreffenden Zeitschriften durch geeignete Referenten möglichst bald referiert werden.

Alle der Redaktion zugehenden Bücher werden besprochen, soweit nicht die Verfasser „Selbstanzeigen" einsenden, die dann publizirt würden.

Das Centralblatt erscheint jährlich in 24 Heften von je ca. 2 Bogen Gross-Oktav. Am Schlusse eines Jahrganges wird ein genaues Sach- und Autorenregister beigegeben.

Darmstadt
der technischen Hochschule
Physikalisches Institut

Der Herausgeber
Privatdocent Dr. Rudolphi

Die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung ladet zum Abonnement ein. Der Preis des Jahrganges beträgt 20 Mk. Probenummern stehen gratis und franko zu Diensten.

Berlin SW 11
Dessauer Strasse 29

Gebrüder Borntraeger

1904. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *VIII. Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc.* von *G. Quincke.*[1]

(Fortsetzung von p. 65.)

§ 138. *Die Beugungsspektra der Leimchromatlamellen.* Der Abstand der feinen dunkeln Streifen parallel dem Umfang der Leimchromatlamellen, welche auf Quecksilber eingetrocknet sind, wie ein Beugungsgitter wirken und Perlmutterfarben im reflektiert gebeugtem Lichte geben, läßt sich direkt mit dem Okularmikrometer eines Mikroskopes messen, oder aus dem Beugungswinkel berechnen.

Man kann durch die vertikal gestellten Streifen auf eine E cm entfernte vertikale Lichtlinie (Spalt mit Sonnenlicht oder elektrische Glühlampe mit einem Kohlefaden) blicken und das q^{te} Beugungsspektrum auf schwarzem Hintergrund über einer horizontalen Zentimeterskala beobachten.

Ist s der Abstand der Lichtlinie von einer Farbe des q^{ten} Beugungsspektrums mit der Wellenlänge λ, so ist[2]

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{s}{E}, \quad \alpha = q\,\frac{\lambda}{\sin\gamma},$$

wo γ den Beugungswinkel bedeutet.

In seltenen Fällen liegen die Gitterstreifen parallel dem Radius der Leimchromatlamelle.

Der Abstand der Gitterstreifen ist im allgemeinen kleiner, als bei den Rowlandschen Metallgittern (0,0017 mm) und in derselben Lamelle nicht konstant; bald am Rande, bald in der Mitte größer. Gewöhnlich gehen die Spektra ineinander

1) G. Quincke, Fortsetzung von Ann. d. Phys. 7. p. 57—96, 631—682, 701—744. 1902; 9. p. 1—43, 793—836, 969—1045. 1902; 10. p. 478—521, 673—703. 1903; 11. p. 54—95, 449—488, 1100—1120. 1903; 13. p. 65—99. 1904.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 146. p. 12. 1872.

über, wenn man mit dem Auge durch die verschiedenen Stel derselben Lamelle blickt. Der der Lichtquelle zugewan Rand des Beugungsspektrums erscheint blau, der abgewan Rand rot. Durch ein rotes und blaues Glas, das Licht bekannter Wellenlänge durchließ, konnte man die betreffe Spektralfarbe kontrollieren.

Zuweilen war bei einzelnen Gittern der Abstand der Gitt stäbe so klein, daß nur blaues Licht in gewöhnlicher We gebeugt erschien und daß das rote Licht des Spektrums fel oder über den ganzen Raum verbreitet war.

Die Gitterstreifen waren bei Lamellen aus Lösungen 8 und 4 Proz. Kaliumbichromat auf 10 Proz. Gelatine nur einer 3—7 mm breiten Randzone sichtbar. Bei geringer Gehalt an $K_2Cr_2O_7$ gab der ganze mittlere Teil der Lam von 2—4 cm Durchmesser Perlmutterfarben und wirkte ein Beugungsgitter.

Ältere Lamellen, die lange eingetrocknet waren, zeig Perlmutterfarben und Gitterspektra auch nach Behandlung heißem Wasser. Bei frisch eingetrockneten Lamellen v schwanden die Perlmutterfarben und Spektra durch diese handlung.

Tabelle 1.

Beugungsgitter von Leimchromatlamellen auf Quecksilber eingetrock

Nr.	E	s	$\lambda \cdot 10^6$ mm	γ	Streifenabstand α ber.	α beob.
	A. 5 Proz. Gelatine + 4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
	cm	cm			mm	mm
d	464	267	589	29° 56′	0,00177	—
d_1	100	70	589	35	0,00103	0,001
d_2	100	40	444	21 48	0,00120	0,001 Ra
d_3	100	110	589	47 44	0,00080	0,001 Mit
	B. 10 Proz. Gelatine + 4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
1	100	50	444	26° 34′	0,00099	0,0007
1	100	80	589	38 40	0,00099	0,0007
2	100	50	444	26 34	0,00099	0,001
2	100	70	589	35	0,00103	0,001
	C. 7,5 Proz. Gelatine + 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
e	464	55	444	6° 45′	0,00378	0,004
e	464	100	589	12 12	0,00279	0,004

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	E	s	$\lambda \cdot 10^6$ mm	γ	Streifenabstand α ber.	Streifenabstand α beob.
	D. 10 Proz. Gelatine + 0,4 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
	cm	cm			mm	mm
3	100	75	589	36° 52′	0,00098	0,0007 Mitte
3	100	130	589	52 26	0,00074	0,0007 Rand
4	100	70	444	35	0,00077	0,0007
4	100	150	589	56 19	0,00071	0,0007
5	100	70	589	35	0,00108	0,001 Mitte
5	100	140	589	54 28	0,00072	0,0006 Rand
	E. 10 Proz. Gelatine + 0,04 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
6	100	50	444	26° 34′	0,00099	0,001
6	100	70	589	38 40	0,00103	0,001
7	50	65	589	58 34	0,00069	Mitte
7	50	100	589	63 26	0,00066	Rand
8	50	50	444	45	0,00062	unmeßbar
8	50	70	589	54 32	0,00072	„
10	100	50	444	26 34	0,00099	
10	100	80	589	38 40	0,00099	
21	500	550	444	47 45	0,00060	
21	500	975	589	62 51	0,00066	
27	100	200	444	63 26	0,00050	Rand
27	100	200	589	63 26	0,00066	Mitte
	F. 10 Proz. Gelatine + 0,004 Proz. $K_2Cr_2O_7$ + NH_3.					
35	100	100	444	45°	0,00062	
35	100	200	589	63° 26′	0,00066	
36	100	30	444	16 42	0,00154	Mitte
36	100	150	589	56 18	0,00070	Rand
38	100	40	444	21 48	0,00120	
38	100	200	589	63 26	0,00066	
	G. 10 Proz. Gelatine + 4 Proz. $K_2Cr_2O_7$.					
a	464	268*	444	30° 1′	0,00177	0,0016
a	464	330*	589	60 48	0,00135	0,0012
f	464	170	444	20 7	0,00129	0,0012
f	464	270	589	30 17	0,00112	0,0012
	H. 16 Proz. β-Leim + 1,31 Proz. $Na_2Cr_2O_7$.					
b	100	18	444	10° 12′	0,00252	0,0025
b	100	24	589	13 30	0,00252	0,0025
c	464	120	444	14 30	0,00170	0,002
c	464	500	589	47 9	0,0008	unmeßbar

Bei den mit einem * bezeichneten Messungen mit Leimbichromatlösung *G* wurde das zweite Beugungsspektrum beobachtet.

Die letzte Kolumne enthält den mit Okularmikrometer gemessenen Abstand der Gitterstreifen, die vorletzte Kolumne den aus dem Beugungswinkel berechneten Abstand. Beide Werte stimmen nahe überein.

Während bei den Gelatinelösungen *A B G* die Perlmutterfarben auf 3—6 mm breiten Zonen von 30—40 mm äußerem Durchmesser sichtbar waren, zeigten sich dieselben Farben bei den chromatarmen Leimlösungen *C D E* auf einer zentralen Fläche von 20—40 mm Durchmesser. Bei der Lösung *G* mit *β*-Leimchromat auf einem 6 mm breiten Ringe von 20 mm äußerem Durchmesser.

Bei Leimbichromatlösung *G* traten nach längerer Belichtung mit Tageslicht plötzlich undurchsichtige braune Schaummassen am Boden der klaren Gallerte auf, die sich dann weiter verbreiterten.

Bei den chromatarmen Leimchromatlösungen *D* und *E* waren die Gitter schon im Dunkeln entstanden, da die Perlmutterfarben schon beim Abnehmen der Blechkappe sichtbar waren.

Bei der Leimchromatlösung *C* traten die Perlmutterfarben bei der Belichtung langsam auf, verschwanden beim Behauchen und erschienen nach Verdampfen des Wassers wieder in ähnlicher Weise.

Bei Leimchromatlösungen, welche auf Silberspiegeln oder Glasplatten, statt auf Quecksilber, im Dunkeln eingetrocknet waren und dann belichtet wurden, habe ich niemals Perlmutterfarben auftreten sehen.

Bei etwa 50 Platten, welche aus Leimchromatlösung auf Quecksilber eingetrocknet waren, erhielt ich im Mittel folgende Abstände der Gitterstriche:

10 Proz. Gelatine + Ammoniak.

	+ 4 Proz.	0,4 Proz.	0,04 Proz.	0,004 Proz. $K_2Cr_2O_7$
Strichabstand	$\alpha = 0{,}00100$ mm	0,00086 mm	0,00066 mm	0,00067 mm

Der Abstand α der Gitterstriche nimmt also mit dem Chromgehalt der Lamellen ab, und nähert sich einem kon-

stanten Wert, der nahezu gleich der Wellenlänge der Fraunhoferschen Linie *C* ist.

Da die Perlmutterfarben und Gitterspektra nur auftreten, wenn Leimchromatlösung auf Quecksilber eintrocknet und fehlen beim Eintrocknen auf Silber- oder Glasspiegeln, so ist zu vermuten, daß die Leimchromatlamelle mit Perlmutterfarben eine wellenförmige Oberfläche hat, und wie ein Furchengitter wirkt.

Wird warmer Siegellack auf die untere Fläche einer Leimchromatlamelle gedrückt, die auf Quecksilber eingetrocknet ist, so zeigt der Abdruck ebenfalls Gitterspektra oder Perlmutterfarben, wie die Leimchromatlamelle. Damit ist der Beweis geführt, daß dieselbe ein Furchengitter ist. Die Theorie der Furchen- und Hügelgitter habe ich früher gegeben (vgl. Gleichung 1).

Nach Brewster[1]) und J. F. W. Herschel[2]) zeigen die Abdrücke von Perlmutter in Wachs, arabischem Gummi und Metall ähnliche Farben, wie Perlmutter selbst. Es waren Furchen- und Hügelgitter mit einem Furchenabstand von 0,008 mm.

Herschel hat die Furchen gezeichnet. Dieselben gleichen wie die von Leimchromat in der Form den verzweigten und gewundenen Schaumwänden von Kieselsäurelamellen, welche ich früher (§ 70, Fig. 95, *a*, *b*) beschrieben habe. Nur war der Abstand α der Kieselsäurelamellen 25 bis 30mal größer als bei Leimchromat.

An der weißen Innenfläche großer Sardinischer Muscheln (Pinna squamosa, Gmelin) sah ich Perlmutterfarben und mit dem Mikroskop unter der 0,5 mm dicken Schicht ähnliche dunkle Streifen, wie bei dem auf Quecksilber eingetrockneten Leimchromat, aber von 0,027—0,014 mm Abstand.

Betrachtet man das Beugungsspektrum einer Leimchromatlamelle im durchgehenden Licht durch ein Nicolsches Prisma, so erscheint bei großen Beugungswinkeln häufig das Licht, parallel der Beugungsebene polarisiert, heller als das Licht

---

1) D. Brewster, Phil. Trans. 1814. p. 397; Abstracts 1. p. 503.

2) J. F. W. Herschel, Edinb. Journ. 2. p. 116. Pl. III. Fig. 1. 1819; On light. § 705. 1848.

senkrecht zur Beugungsebene polarisiert. Doch habe ich gelegentlich auch das Umgekehrte beobachtet.

§ 139. *Bildung von Falten, unsichtbaren Schaumwänden und Beugungsfarben durch Belichtung bei Bromsilbergelatine.* Ich habe schon oben § 123 gezeigt, daß einzelne Tropfen von ausgewaschener Bromsilbergelatine, welche unter einer Blechkappe im Dunkeln auf reinen Quecksilberflächen eingetrocknet waren, bei Belichtung mit Sonnenlicht in 20 Sek. radiale Randfalten bildeten. Mit Auerlicht erhielt ich ähnliche Randfalten in 1 Min. In den Lamellen waren kleine Linsen von 0,015 mm in Zonen parallel dem Umfang ausgeschieden, und lagen auf Kreisen von 0,15 mm verteilt.

Vier Tropfen einer wässerigen Lösung von 10 Proz. Bromsilbergelatine wurden 36 Stunden unter einer Blechkappe auf Quecksilber eingetrocknet. Bei Belichtung mit Sonnenlicht bildeten sich in $^1/_2$ Min. 20 starke und 3 mal mehr kleinere Randfalten auf der Lamelle von 5 cm Durchmesser.

Ebenso gab 1 proz. Lösung von Bromsilbergelatine nach 4 stündigem Eintrocknen im Dunkeln auf Quecksilber bei Belichtung mit Sonnenlicht radiale Falten in einer 1,5 cm breiten Randzone mit Newtonschen Farbenringen, welche sich während der Faltenbildung nicht verschoben. Die Lamellendicke blieb also bei der Bildung der Falten oder unsichtbaren Schaumwände im Innern der Lamelle ungeändert. In der noch flüssigen Mitte traten durch Belichtung keine Falten auf.

Die Falten entstanden durch Belichtung nur für einen bestimmten Wassergehalt der Bromsilberleimgallerte, wie bei Leimchromat.

Zuweilen zeigen die Bromsilberleimlamellen auch Perlmutterfarben, aber lange nicht so schön, wie Leimchromatlamellen. Die Farbe wechselt auch mit dem Winkel φ, welchen die Absehlinie mit der Normale der Quecksilberfläche bildet. Bei $\varphi = -45^0$ bis $\varphi = 60^0$ folgten sich die Farben, Weiß, Grau, Braun, Violett. Dabei nahm von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 45^0$ der Durchmesser des zentralen braunen oder violetten Fleckes von 29 auf 32 mm zu.

§ 140. *Kieselsäurelamellen mit Perlmutterfarben. Opal. Schaumwände durch Belichtung entstanden.* Läßt man wässerige Kieselsäurelösung auf Quecksilber eintrocknen, so zeigen häufig

größere oder kleinere Stellen der festen Lamelle schöne Perlmutterfarben. Ich habe oft bläulich opalisierende Stellen, zuweilen schöne tiefblaue zylinderförmige und schraubenförmige Flächen im Innern der eintrocknenden Kieselsäuregallerte auftreten sehen.

2 ccm Kieselsäurelösung I (1,0072), welche zwei Monate dialysiert und dann ein Jahr lang in einer verkorkten Glasflasche aufgehoben und dadurch ein wenig alkalihaltig war, trocknete zwei Tage lang auf einer reinen Quecksilberfläche unter einer Blechkappe im Dunkeln zu einem festen Ringe von 35 mm Durchmesser ein, mit 20 großen radialen Falten, der einen flachen Flüssigkeitstropfen *c* von 12 mm Durchmesser umschloß. Der äußere Rand *a* des festen Ringes war klar, der innere Rand *b* zeigte zahlreiche feine radiale Falten. Mit einer Auerlampe belichtet, entstanden und verschwanden in plötzlichem Wechsel in Zwischenräumen von 5 Sek. bis 2 Min. am Boden der Flüssigkeit *c* auf Flächen von mehreren Quadratmillimetern feine Falten oder Furchengitter mit lebhaften Farben. Feine Risse begrenzten Streifen von 0,1 bis 0,2 mm Breite mit feinen Querfalten normal zur Richtung der Risse. Die Querfalten hatten einen sehr kleinen Abstand α ($< 0{,}001$ mm), wirkten wie ein Beugungsgitter im reflektierten Licht und zeigten prächtige Spektralfarben, blau, rot, gelb, grün, violett, je nach dem Faltenabstand. Wurde das Licht mit der Blechkappe abgehalten, so waren nach 1 Stunde Falten und Gitterfarben verschwunden, sprangen aber bei Belichtung mit Auerlicht nach 1 Min. wieder auf, um dann in schnellem Wechsel plötzlich zu verschwinden und wieder zu erscheinen.

Ein ähnliches Spiel von Faltenbildung und Verschwinden der Falten bei Belichtung habe ich oben (§ 132) beschrieben, bei Leimchromat, doch fehlten dort die Beugungsfarben, weil der Faltenabstand zu groß war. Die Bildung der Falten am Boden der zentralen Flüssigkeit *c* beweist, daß die Falten nicht durch Verdampfung des Wassers erklärt werden können, sondern von festen Lamellen herrühren mit Schaumwänden im Innern, die durch Belichtung entstehen und von der darüber stehenden Flüssigkeit wieder gelöst werden.

Nach weiteren 12 Stunden war auch die Mitte *e* der Kieselsäure zu einer weißlichen Masse mit dicken radialen

Rippen erstarrt, die durch radiale Risse voneinander getrennt waren. Die Oberfläche der dicken Rippen zeigte feine radiale Risse und normal zu diesen viele feine Querfalten, die wie Furchengitter wirkten und schöne Spektralfarben reflektierten, besonders lebhaft in der Beugungsebene normal zur Richtung der Querfalten.

In der klaren Zone *a* lagen negative Sphärokristalle von 0,1—0,2 mm Durchmesser oder gewundene Röhren mit Anschwellungen und Querfalten und mit bläulich schimmernder Masse gefüllt. Der bläuliche Schimmer rührte von feinen Falten her, die sich normal zu den Querfalten gebildet hatten.

Diese Kieselsäurelamelle Nr. 10 zeigte feine parallele Falten normal zum Rande, deren Abstand, wie in § 137 aus der Lage der Beugungsspektra berechnet oder mit dem Okularmikrometer direkt gemessen wurde. Bei diesen Messungen muß man darauf achten, als Faltenabstand die Länge von Faltenberg + Faltental zu nehmen, welche unter dem Mikroskop gleich aussehen.

Tabelle 2.

Kieselsäure Nr. 10 auf Quecksilber eingetrocknet.

E	s	$\lambda . 10^6$	γ	α ber.	α beob.
400 cm	24 cm	449 mm	3° 26′	0,0074 mm	0,0072 mm
400	30	589	4 18	0,0079	0,0072

Berechnete und beobachtete Werte des Faltenabstandes α stimmen gut überein.

An einzelnen Stellen zeigte die eingetrocknete Kieselsäurelamelle blaue Färbung wie ein Opal. Die entsprechenden Gitterfalten waren aber für mikroskopische Messungen nicht mehr zugänglich.

Die festen Lamellen der Querfalten oder Furchengitter bestehen nach meinen oben § 64—70 angeführten Untersuchungen aus unsichtbaren Schaumkammern mit Wänden aus ölartiger wasserarmer Kieselsäurelösung *A*, welche mehr Alkali enthält, als die wasserreiche Kieselsäurelösung *B* im Innern der Schaumkammern. Bei weiterem Eintrocknen schwindet die letztere stärker, als die erstere und bildet die Risse zwischen den dicken Rippen und den Furchengittern.

9,8 proz Kieselsäurelösung II vom spez. Gewicht 1,057 war zwei Jahre in einer verschlossenen Glasflasche aufbewahrt worden und hatte also ein wenig mehr Alkali aus dem Glas aufgelöst als die oben benutzte Kieselsäurelösung I. Zehn Tropfen dieser Kieselsäurelösung II trockneten unter einer Blechkappe auf Quecksilber im Dunkeln einen Tag lang ein zu einer Lamelle von 3 cm Durchmesser mit 20 radialen Rissen. In den einzelnen Sektoren waren vertiefte Stellen wie Palmenblätter an einen radialen vertieften Zweig gereiht. Nahe der Mitte waren mit dem Mikroskop dicke Rippen mit Querstreifen zu erkennen (Fig. 185). Die Querstreifen bestanden aus aneinandergereihten Sphärokristallen, die von Querstreifen zu Querstreifen kleiner wurden und dann in schmale Spalten mit Querfalten übergingen. Die Querfalten wurden von Querstreifen zu Querstreifen mit abnehmendem Alkaligehalt schmaler und liefen normal gegen die Querstreifen oder die Spaltrichtung. Spalten mit unsichtbaren Querfalten parallel dem Fenster zeigten prächtige Perlmutterfarben oder Beugungsspektra, gelbgrün oder orange für großen Faltenabstand, oder blau für kleineren Faltenabstand. Zuweilen wechselten diese Farben in demselben Querspalt periodisch. Das Himmelslicht wurde von dem aus Hügeln und Furchen bestehenden Gitter reflektiert, ein Teil mit dem Beugungswinkel 45 oder 60° vertikal nach oben geworfen und zeigte hier je nach dem Abstand a der Furchen verschiedene Teile gefärbter Spektra. Diese Spektra waren auch mit bloßem Auge wahrzunehmen.

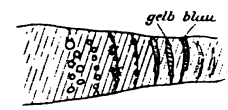


Fig. 185.

Leider läßt sich das Quecksilber nicht abgießen, ohne diese Kieselsäurelamellen mit Faltengittern zu zerbrechen.

Größere Mengen (1 ccm) derselben Kieselsäurelösung II gaben unter einer Blechkappe im Dunkeln auf Quecksilber eingetrocknet eine Lamelle aus durchsichtiger Gallerte von 25 mm Durchmesser mit einem weißlichen Rand von 2 mm Breite und einzelnen konzentrischen weißlichen Ringen.

Bei Belichtung mit Sonnenlicht bildeten sich in 15 bis 30 Sek. an einem Teil des Lamellenrandes (also für einen bestimmten Wassergehalt) tiefere Randfalten aus. Es waren also, wie bei Leimchromat (§ 130—132) oder Bromsilberleim

(§ 123, 138), durch Belichtung plötzlich neue Schaumwände im Innern der Kieselsäurelamelle entstanden, welche die obere und untere Lamellenfläche gegeneinandergezogen und die Lamelle verlängert hatten.

Bei weiterem Eintrocknen zog sich die Lamelle bedeutend zusammen. Es entstanden einzelne kreisförmige Risse. Rand und erste Zone hatten das michige Ansehen verloren und zeigten nach dem Abgießen des Quecksilbers unter dem Mikro-

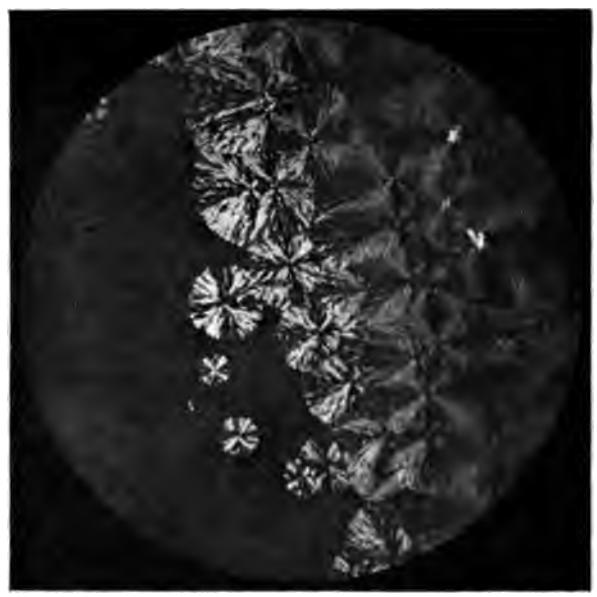


Fig. 186.

Kieselsäure, auf Quecksilber eingetrocknet, mit negativen Sphärokristallen.

skop einzelne oder aneinandergereihte Sphärokristalle von 0,015—0,04 mm Durchmesser mit dunklem Kreuz, zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen und negativer Doppelbrechung. Fig. 186 (Photographie) zeigt diese Sphärokristalle mit radial angeordneten Schaumkammern und einer feinen Streifung parallel dem Umfang mit etwa 0,001 mm Streifenabstand.

An der vor dem Fenster aufgestellten horizontalen Kieselsäurelamelle wirkt diese Streifung, die wohl auch aus vielen

Falten parallel dem Umfang besteht, wie ein Kreisgitter, wirft das Himmelslicht nach oben und seitlich mit großem Beugungswinkel und gibt dem Rand und der ersten Zone der durchsichtigen Kieselsäurelamelle Metallglanz.

Die innerste Zone und das Zentrum der Lamelle zeigen wieder dicke Rippen (aus wasserarmer ölartiger Kieselsäurelösung *A* entstanden) mit Querstreifen und in diesen feine Querfalten mit einem Faltenabstand von 0,001 mm und kleiner und prächtigen Beugungsspektren, wie sie oben beschrieben wurden.

Die zusammenhängenden Sphärokristalle gleichen auffallend der Abbildung, welche Carpenter[1]) von der Außenfläche einer Muschel (Lima squamosa) gegeben hat, oder den von Biedermann[2]) beschriebenen Sphäriten von Calciumkarbonat.

Die tausend schönen Farben, in denen ein *Opal* spielt, sind, wie die eben beschriebenen Farben der auf Quecksilber eingetrockneten Kieselsäurelamellen, Farben der Beugungsspektra von Reflexionsgittern, welche von feinen parallelen Falten in der erstarrten Oberfläche von Schaumstreifen mit unsichtbaren Schaumkammern gebildet werden. Diese Beugungsfarben ändern sich mit dem Beugungswinkel und treten am lebhaftesten auf in Ebenen normal zu der Richtung der Falten oder der Schichtung der Schaumbrocken, die man mit dem Mikroskop wahrnimmt. Diese Schaumbrocken haben große Ähnlichkeit mit den Schaumbrocken aus Kieselsäurelösung, die unter einem Deckglas in dicker Schicht eingetrocknet ist (§ 70, Fig. 95, *a*, *b*) und deren Wände aus ölartiger wasserarmer Kieselsäurelösung *A* entstanden sind, die sich in wasserreicher Kieselsäurelösung *B* periodisch abgeschieden hatten.

Wie bei den feinen Querfalten der oben beschriebenen auf Quecksilber eingetrockneten Kieselsäurelamellen wechselt der Faltenabstand α periodisch in den verschiedenen Schichten und damit die Farbe, welche bei unveränderter Absehlinie das Auge in den verschiedenen Schichten wahrnimmt.

1) W. Carpenter, Rep. Brit. Assoc., Plate XVIII. Fig. 42. 1844.

2) W. Biedermann, Verworns Zeitschr. f. allgem. Physiol. I. 2. p. 175. Fig. 1. Taf. 3.

Das Mikroskop läßt im Innern des Opals auch Röhren mit Anschwellungen und Einschnürungen oder große Schaumkammern erkennen, in deren Wänden dann Querfalten oder Querstreifen liegen, wie bei den Metallsalzvegetationen (§ 25, Figg. 8 *f*, 12, 13; § 27, Fig. 21; § 28, Fig. 23; § 29, Figg. 28 *c*, 29) oder bei den Rippen der auf Quecksilber eingetrockneten Kieselsäurelamellen.

Schon Brewster[1]) hat 1844 das Farbenspiel des edlen Opals richtig beschrieben als Farben, die im allgemeinen als parallele Banden auftreten und mit der Schiefe wechseln, in der sie gesehen werden. Er erklärt die Farben durch Hohlräume, die in parallelen Linien auf einer Ebene liegen. Mehrere Ebenen mit linear angeordneten Hohlräumen lägen dann nahe übereinander. Die Farbe soll von der verschiedenen Größe der Hohlräume abhängen. Der Nachweis der Hohlräume fehlt.

Der Abstand und nicht die Größe der linear angeordneten Hohlräume ähnlicher Gestalt bestimmt den Beugungswinkel γ oder die Farbe des Gitterspektrums, wie aus der von mir gegebenen Theorie der Furchen- und Hügelgitter folgt. Parallele Linien von Hohlräumen mit kleinerer Lichtbrechung als die Grundmasse, oder parallele Linien von Körnern mit größerer Lichtbrechung als die Grundmasse würden bei gleichem und genügend kleinem Linienabstand die Farben des Opals erzeugen können. Nach meinen oben beschriebenen Versuchen[2]) bestehen die farbengebenden Gitter der eingetrockneten Kieselsäurelösung oder des Opals aus parallelen Wellenlinien oder Falten einer Lamelle mit größerer Lichtbrechung als die Grundmasse, ähnlich wie bei den Gittern der auf Quecksilber eingetrockneten Leimchromatlamellen (§ 137).

In neuerer Zeit hat Bütschli[3]) die Struktur des Opals untersucht und in schönen Photographien abgebildet. Die Struktur des Edelopals von Vörösagar läßt ein Gitter mit parallelen Streifen von etwa 0,0022 mm Abstand erkennen. Die von mir beobachteten Farbenerscheinungen würden einem

1) D. Brewster, Rep. Brit. Assoc. 1844. 2. p. 9.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 146. p. 43. 1872.

3) O. Bütschli, Verh. d. naturf.-med. Ver. Heidelberg N. F. 6. p. 332. Taf. VI. Fig. 5. 1900.

kleineren Streifenabstand entsprechen, etwa 0,001 mm oder weniger.

§ 141. *Perlmutterfarben und Bildung von Falten oder Schaumwänden durch Belichtung bei Eiweiß.* Läßt man mehrere Kubikzentimeter filtriertes Hühnereiweiß auf Quecksilber in der oben (§ 66, 89) beschriebenen Weise 12 Stunden eintrocknen, mit einer Nadel in der Mitte, und hebt die oben erstarrte Lamelle mit der Nadel vom Quecksilber ab, so zeigt die Unterseite der Eiweißlamelle schöne dicke Wände, die im reflektierten Licht grünlich erscheinen, zum Teil normal zur Quecksilberfläche gestanden hatten, und zum Teil Kugeln, ebene Schraubenflächen, Röhren mit Einschnürungen oder Schaumzellen bilden. Die Farben wechseln mit der Schiefe, in der die Wände gesehen werden, ähnlich den Perlmutterfarben, und rühren auch von parallelen kleinen Falten her mit kleinem Faltenabstand α, die an der Oberfläche von ölartiger wasserarmer Eiweißlösung entstanden sind.

$^1/_2$ ccm filtriertes Hühnereiweiß trocknete auf Quecksilber unter einer Blechkappe im Dunkeln 15 Stunden lang zu einem festen Ringe von 32 mm äußerem Durchmesser ein, der eine Flüssigkeitsschicht *c* von 20 mm Durchmesser umschloß. Zwischen dem äußeren Rande *a* des Ringes mit zwölf großen radialen Randfalten und der Flüssigkeitsschicht *c* lag eine mittlere Zone *b* mit feineren Falten. Bei Belichtung mit Sonnenlicht wurden die großen Randfalten in wenigen Minuten bedeutend tiefer und höher, bis zu 3 mm. Am äußeren Rande der Flüssigkeitsschicht *c* entstanden durch Belichtung fortwährend neue Falten am Boden derselben, und verschwanden wieder in kurzen Zwischenräumen von 1 Sek. Diese Faltenbildung konnte also nicht von Wasserverlust der Flüssigkeit durch Verdampfung herrühren.

Wurde das Licht 1 Stunde lang wieder mit der Blechkappe abgesperrt, so verschwand die Hälfte der großen Randfalten. Bei neuer Belichtung mit Sonnenlicht kehrten die Randfalten wieder und vertieften sich wieder. Auch am Boden der zentralen Flüssigkeit *c* erschienen und verschwanden wieder feine Falten in schnellem Wechsel durch die Belichtung.

Andere im Dunkeln auf Quecksilber eingetrocknete Lamellen von Hühnereiweiß bildeten bei Belichtung mit Wolken-

licht oder Auerlicht neue Randfalten, oder vertieften die schon vorhandenen Falten in 15 Sek. bis 1 Min.

Bei einigen Lamellen wurde der Faltenabstand aus der Lage der Beugungsspektra berechnet, oder direkt mit dem Okularmikrometer des Mikroskopes gemessen in der oben § 137 beschriebenen Weise. Diese Messungen gibt die folgende Tab. 3.

Tabelle 3.

Hühnereiweiß auf Quecksilber eingetrocknet.

Nr.	E	s	$\lambda . 10^6$	γ	α ber.	α beob.
5	100 cm	5 cm	444 mm	2° 52′	0,0089 mm	0,010 mm
5	100	6	589	3 26	0,0099	0,010
6	100	3	444	1 43	0,0148	0,012
6	100	5	589	2 52	0,0118	0,012

Beide Methoden geben übereinstimmende Werte für den Faltenabstand.

Bei anderen Lamellen von Hühnereiweiß entstanden beim Eintrocknen auf Quecksilber viele feine Falten parallel dem Umfang und bildeten Kreisgitter. In seltenen Fällen erschien der Rand der eingetrockneten Lamellen bläulich gefärbt.

Bei Blutserum, welches in Probierröhrchen keimfrei eingetrocknet ist, kann man auch gelegentlich Perlmutterfarben wahrnehmen.

Frisches Menschenblut trocknete auf reinem Quecksilber in $2^1/_2$ Stunden unter einer Blechkappe zu einer Lamelle von 16 mm Durchmesser mit sieben radialen Randfalten ein, welche bei Belichtung mit Wolkenlicht höher und tiefer wurden.

Eine andere Lamelle von 20 mm, welche aus Blut auf Quecksilber belichtet eingetrocknet war, gab am Rande im reflektierten Licht Beugungsfarben, Braun, Rot und Bronzegrün, wenn die Absehlinie nahezu mit der Richtung der belichtenden Strahlen zusammenfiel. Es waren also auch feine parallele Falten entstanden.

§ 142. *Bildung von Falten und Rissen in kalkhaltigem Eiweiß durch Belichtung.* Zehn Tropfen filtriertes Hühnereiweiß breiteten sich auf einer reinen Quecksilberfläche zu einer Lamelle von 4 cm Durchmesser aus. Auf die Mitte der

Lamelle wurden zwei Tropfen wässerige Chlorcalciumlösung (1,085) gebracht, eine Blechkappe darüber gedeckt und nach 14 Stunden abgenommen. Das Eiweiß bildete eine oben feste Lamelle mit einer klaren Randzone *a* von 15 mm Breite, einer mittleren Zone *b* mit vielen feinen Falten parallel dem Radius von 0,15 mm Abstand und einem zentralen Fleck von 12 mm Durchmesser. Auf der klaren Zone *a* lag noch 2 mm vom Rande entfernt eine 2 mm breite äußere Faltenzone mit radialen Falten von 0,15 mm Abstand. Bei der Belichtung mit Sonnenlicht wurden die 28 breiten Randfalten der klaren äußeren Zone *a* höher und tiefer, und verlängerten sich in 2 Min. nach innen bis in den Raum zwischen beiden Faltenzonen. In letzterem erschienen 6 Min. nach Beginn der Belichtung viele kleine Kreise von 0,005 mm Durchmesser und verschwanden wieder plötzlich wie bei Leimchromat.

Nach 20 Min. wurde der zentrale Fleck *c* trübe von unzähligen kleinen Kugeln von 0,005 mm Durchmesser, die auf Kreisbogen (Schaumkanten) von 0,2 mm verteilt waren und in einzelnen Streifen (Falten) von 0,3 mm Abstand besonders zahlreich auftraten.

Nach Abgießen des Quecksilbers waren in der Mitte *c* einfach brechende Dendriten zu erkennen mit Astwinkeln von 90° (Fig. 187), daneben viele einzelne Sphärokristalle von 0,01 mm mit schwarzem Kreuz und dunklen Ringen zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen, auf Kreisen (Schaumkanten) von 0,06 mm verteilt. Auf der äußeren Faltenzone lagen ebenfalls viele Sphärokristalle mit schwarzem Kreuz von 0,01 mm auf Kreisen von 0,2 mm verteilt oder einzelne größere Sphärokristalle von 0,04 mm Durchmesser mit schwarzem Kreuz und dunklen Ringen, also Sphärokristalle der Klasse II. a. und b. § 42. Auf den Falten war ein Netzwerk feiner Linien mit Neigungswinkeln von 90° zu erkennen.

Fig. 187.

Eine andere Lamelle mit mehr Eiweiß und derselben Menge Chlorcalciumlösung gab bei Belichtung mit Sonnenlicht in 30 Sek. auf dem zentralen Fleck von 35 mm Durchmesser radiale und andere geradlinige Risse, die sich mit den angrenzenden Lamellenstücken mehrere Millimeter über das

Quecksilberniveau erhoben, und von ebenen Flächen begrenzt waren, wie die Kanten eines Kristalles (Fig. 188, *a*, *b*). Nach 1 Stunde waren diese Erhebungen erheblich niedriger, und etwa auf $^1/_3$ der ursprünglichen Höhe gesunken. Die geradlinigen Risse sind den geradlinigen Rissen ähnlich, welche Lamellen von β-Leimchromat bei Zusatz von Wasser zeigten (§ 132, *a*).

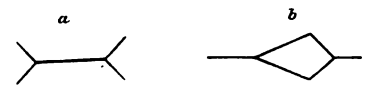


Fig. 188.

Flüssige Lamellen von filtriertem Hühnereiweiß auf Quecksilber, auf welche ein Stückchen geschmolzenes $CaCl_2$ oder ein Tropfen konzentrierte $CaCl_2$-Lösung (1,394) gelegt worden war und die dann 12—18 Stunden unter einer Blechkappe eingetrocknet waren, gaben bei Belichtung ähnliche Erscheinungen. Die Randfalten vertieften sich nach 50 Sek. Belichtung mit Sonnenlicht 1 Min. lang sehr erheblich. Außerhalb der äußeren Faltenzone lagen Sphärokristalle von 0,012 mm mit schwarzem Kreuz und zwei dunklen Ringen zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen und negativer Doppelbrechung.

Auf den radialen Falten der äußeren Faltenzone mit 0,1 mm Faltenabstand lagen feine Querfalten mit 0,008 mm Abstand oder quer nebeneinander gereihte Vertiefungen, wie bei Muschelschalen, oder unzählige kleine Kugeln und Sphärokristalle von 0,0005 mm. Diese feinen Querfalten oder Kugeln gaben schöne Beugungsspektra oder Perlmutterfarben, ähnlich wie die Falten von Leimchromat oder Kieselsäure und Opal (§§ 138, 140).

Kalkspatrhomboeder habe ich bei diesen Versuchen erwartet nach den Ergebnissen von §§ 35—38, aber niemals beobachtet.

§ 143. *Faltenbildung beim Leimtannat.* Alle Beugungsgitter, welche das Farbenspiel der auf Quecksilber eingetrockneten Lamellen von Leimchromat, Kieselsäure und Eiweiß oder des Opals und der Muschelschalen erklären, bestehen aus feinen parallelen Falten, die sich bei einem bestimmten Wassergehalt in der Oberfläche ölartiger Lamellen gebildet haben durch periodische Abscheidung unsichtbarer Schaumwände eines ölartigen flüssigen Niederschlages oder einer ölartigen wasserarmen Lösung, die später erstarrt sind.

Farbenspiel und Falten fehlen beim *Eintrocknen* der Kolloidlösungen, welche wie Leimtannat nicht durch Abgabe, sondern durch Aufnahme von Wasser den periodischen Niederschlag und Schaumwände von ölartiger Flüssigkeit (wasserarmem Leimtannat) bilden (§ 98, Fig. 132, *a*, *b*; § 100, Figg. 143, *a*, *b* u. 144). Diese müssen Falten bei *Wasseraufnahme* geben.

Setzte man auf eine Lamelle, die aus einer wässerigen Lösung von 10 Proz. Gelatine und 1 Proz. Tannin auf Quecksilber im Dunkeln eingetrocknet war, einen Wassertropfen, so bildeten sich in der Nähe des Tropfenrandes Falten parallel oder normal zum Tropfenrand, die im Mikroskop wie die dunklen Linien der Leimchromatlamellen aussahen und 0,004—0,007 mm Abstand hatten. Es waren aber zu wenig Linien oder Falten, um ein helles Beugungsspektrum zu geben.

§ 144. *Belichtung bildet Falten* nach den in §§ 130—142 beschriebenen Versuchen in wässerigen Lösungen oder Gallerte bei Lamellen von Leimchromat, Leimbichromat, Bromsilbergelatine, Kieselsäure, Hühnereiweiß, Blut für einen bestimmten Wassergehalt. Die Falten entstehen in Zeit von wenigen Sekunden bis einigen Minuten. Dabei scheiden sich im Innern der Lamelle unsichtbare oder sichtbare Schaumwände ab, welche die obere und untere Fläche der Lamelle gegeneinanderziehen und die Lamelle länger machen.

Ich sehe den Grund der Abscheidung der Schaumwände in der übersättigten Lösung eines Niederschlages von ölartiger wasserarmer Kolloidlösung *A*, welche sich beim Eintrocknen gebildet hat. Durch Belichtung wird dieser Niederschlag, diese ölartige Flüssigkeit ausgefällt, indem die Ätherschwingungen die in labilem Gleichgewicht befindlichen Teilchen des Niederschlages durch Resonanz erschüttern und veranlassen, Wasser abzugeben und sich auszuscheiden. Die Abscheidung erfolgt um so schneller, je größer die Resonanz ist, welche von der Lebensdauer des Niederschlages und der Konzentration der wässerigen Lösung abhängt. Die Erscheinung ist analog der Abscheidung von Kupferkristallen in altem klaren Arenturinglas durch Belichtung.[1])

1) G. Quincke, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 5. p. 107. 1903.

Falten und Schaumwände können für eine bestimmte Konzentration fehlen, und bei Wasserverlust oder Wasseraufnahme auftreten, oder bei einer bestimmten Konzentration vorhanden sein und bei Aufnahme oder Abgabe von Wasser wieder verschwinden. Die ölartige wasserarme Lösung *A*, welche die Schaumwände bildet, tritt dann also nur für ein bestimmtes Konzentrationsintervall auf.

Es wäre zu erwarten, daß bei konstanter Konzentration die Falten und Schaumwände für ein bestimmtes Temperaturintervall auftreten würden, und wäre dies eine analoge Erscheinung, wie die Abscheidung ölartiger Flüssigkeit in geschmolzenem Benzoylcholesterin und Azooxyanisol, deren Oberflächenspannung die von Hru. O. Lehmann als fließende Kristalle gedeuteten Erscheinungen erklärt.[1])

§ 145. *Resultate.* 1. Eine Lösung von Leimchromat in Wasser durch Mischen warmer wässeriger Lösungen von Gelatine, Kaliumchromat und Ammoniumchromat bei roter Beleuchtung erhalten, bildet bei Belichtung Flocken mit flüssiger Oberfläche, welche schnell erstarrt.

2. Leimchromatlösung auf Quecksilber eingetrocknet, gibt Lamellen mit Zonen parallel dem Umfang, in denen sich periodisch ölartiges wasserarmes Leimchromat *A* ausgeschieden und Tropfen, Blasen, aneinanderhängende sichtbare und unsichtbare Schaumkammern, Sphärokristalle, Falten oder unsichtbare Schaumwände gebildet hat.

3. Mit dem Chrom- und Wassergehalt des ölartigen wasserarmen Leimchromats *A* wechselt die Oberflächenspannung desselben an der Grenze mit der wasserreichen Leimchromatlösung *B*, und damit ändern sich die Randwinkel, unter welchen die Schaumwände zusammentreffen.

4. Durch Belichtung wird die Abscheidung der ölartigen Flüssigkeit oder die Bildung der Blasen, Schaumwände und Falten eingeleitet und beschleunigt.

5. Leimchromatlösungen mit demselben Leimchromat und verschiedenem Wassergehalt verhalten sich verschieden, geben beim Eintrocknen auf Quecksilber oder Glas Gallerte und Lamellen mit verschiedenen Gebilden.

---

1) G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 613. 1894.

Ebenso geben verschieden dicke Schichten derselben Leimchromatlösung beim Eintrocknen auf Quecksilber oder Glas verschiedene Gebilde.

Die Geschwindigkeit des Eintrocknens beeinflußt die entstehenden Formen.

6. Je nach der Dicke der Leimchromatschicht auf dem Quecksilber scheidet sich in dieser das ölartige Leimchromat aus in Kreisbogen mit Neigungswinkeln von 90°, in Dendriten mit feinen oder dicken Ästen mit Astwinkeln von 90—45°, oder in Palmenwedeln, oder in Schaummassen mit größeren Schaumkammern und runden Köpfen.

7. Beim Eintrocknen der Leimchromatlösungen auf Glasplatten oder in einem Uhrglas bilden sich unter dem Einfluß der Oberflächenspannung des ölartigen Leimchromats ähnliche Dendriten oder Vegetationen mit doppeltbrechenden Massen wie bei dem Eintrocknen auf Quecksilber.

Die wasserarme Leimchromatlösung bildet beim Eintrocknen Äste, die sich reliefartig von der dünneren, aus wasserreicher Leimchromatlösung entstandenen Lamelle abheben.

8. In den Schaumkammern der Dendriten und Palmenwedel sind doppeltbrechende Kristalle von Kaliumchromat oder Kaliumbichromat verteilt. Bei Zusatz von Wasser werden die Kristalle aufgelöst und die Doppelbrechung verschwindet.

9. Bei längerer Einwirkung des Wassers werden die braunen Schaumwände von ölartigem Leimchromat chromärmer und bilden eine hellgelbe ölartige Flüssigkeit, die durch Adhäsion an der Glaswand haftet und in kaltem oder heißem Wasser unlöslich ist. Die Schaumwände quellen dabei auf und bilden neue Schaumkammern in ihrem Innern.

10. Feste Schaumwände mit Randwinkeln von 90° bilden, wenn sie durch Wasseraufnahme flüssig werden, Randwinkel von 120° oder verändern ihre Größe.

11. Die ölartige Flüssigkeit aus hellgelbem Leimchromat überzieht die Schaumwände von ölartigem und erstarrtem braunen Leimchromat. Das braune Leimchromat kann dadurch vor der weiteren Einwirkung des Wassers geschützt werden.

12. Am Boden der auf Quecksilber oberflächlich eingetrockneten Leimchromatschicht entstehen durch Belichtung Blasen, welche von Ausbreitungswirbeln in schnellem Wechsel an der Oberfläche des Quecksilbers hin und hergetrieben werden in geradlinigen oder auch wohl in gekrümmten Bahnen. Die Blasen platzen und verschwinden. Die Blasenhülle besteht aus im Licht gebildeter ölartiger wasserarmer Leimchromatlösung, an deren Oberfläche sich eine chromatärmere Leimchromatlösung ausbreitet.

13. Bei Belichtung entstehen und verschwinden am Boden der flüssigen oder halb eingetrockneten Leimchromatschicht auf dem Quecksilber feine Falten oder unsichtbare Schaumwände in schnellem oder langsamem periodischen Wechsel.

14. Bei Belichtung der auf Quecksilber im Dunkeln eingetrockneten Leimchromatlamellen entstehen in 10 Sek. bis 10 Min. Falten am Rande oder in bestimmten Zonen mit bestimmtem Wassergehalt, wobei die durch Newtonsche Interferenzfarben bestimmte Lamellendicke ungeändert bleibt. Schon vorhandene Falten werden durch Belichtung höher und tiefer.

15. Bei den auf Quecksilber eingetrockneten Leimchromatlamellen entstehen im Lichte schnell, im Dunkeln langsam feine Falten parallel dem Umfang oder auf den größeren Falten kleinere Querfalten in regelmäßigen Abständen von 0,1 bis 0,0005 mm, die wie ein Beugungsgitter wirken und im durchgehenden oder reflektierten Licht prächtige Beugungsspektra oder Perlmutterfarben geben.

In seltenen Fällen liegen die feinen Falten auch parallel dem Radius der Lamelle.

16. Der Abstand α der feinen Falten oder Gitterstriche nimmt ab mit der Menge Kaliumchromat, welche der Gelatine zugesetzt wird. Bei 0,4 g Kaliumbichromat auf 1 g Gelatine betrug der Strichabstand 0,001 mm; bei 0,004 oder 0,0004 g Kaliumbichromat 0,00066 mm. Der Abstand der Gitterstriche war also nahezu gleich der Wellenlänge der Fraunhoferschen Linie *C*.

17. Zuweilen erhielt ich mit der auf Quecksilber eingetrockneten Leimchromatlamelle Furchengitter, deren Strichabstand zwischen roten und blauen Lichtwellen lag, bei denen das erste Beugungsspektrum nur blaues und violettes Licht enthielt, während Rot bis Gelb oder Grün fehlten.

18. Die feinen Falten fehlten an den auf Glasplatten oder im Uhrglase eingetrockneten Leimchromatlamellen.

19. Statt Kalium- und Ammoniumchromat kann man auch Kaliumbichromat der Gelatinelösung zusetzen und ähnliche Erscheinungen erhalten.

20. In der praktischen Photographie wird bei dem Swanschen Kopierverfahren mit Pigmentdruck eine in Wasser unlösliche gefärbte ölartige Flüssigkeit, wasserarme Leimchromatlösung *A*, auf eine Papier- oder Glasplatte gedrückt, an der sie adhäriert.

21. Lamellen, die aus wässerigen Lösungen von Bromsilbergelatine, Kieselsäure, Eiweiß oder Blut im Dunkeln auf Quecksilber eingetrocknet sind, geben wie Leimchromat bei Belichtung mit Tages- oder Sonnenlicht in 10 Sek. bis 10 Min. große Falten, feine Querfalten oder unsichtbare Schaumwände in bestimmten Zonen für einen bestimmten Wassergehalt.

Diese Lamellen können bei genügend kleinem Faltenabstand auch Perlmutterfarben zeigen.

22. Bei Kieselsäure und Eiweiß bilden die aus wässeriger Lösung auf Quecksilber eingetrockneten Lamellen feine Falten mit kleinem Abstand und dadurch Beugungsgitter, die besonders im reflektierten Licht prächtige Beugungsspektra und schöne Perlmutterfarben geben.

23. Bei Kieselsäure erschienen und verschwanden die feinen Falten und glänzenden Spektralfarben während der Belichtung am Boden der eintrocknenden Flüssigkeit auf dem Quecksilber in schnellem Wechsel. Wurde das Licht 1 Stunde lang mit einer Blechkappe abgehalten, so waren die feinen Falten und Beugungsfarben verschwunden, traten aber bei Belichtung sofort wieder auf.

24. Das Farbenspiel des Opals und der Perlmutter rührt ebenfalls von feinen Falten in der Oberfläche von dünnen Lamellen oder Schaummassen her, die sich durch unsichtbare Schaumwände bei der Entstehung des Opals und der Perlmutterschalen im Innern der Lamellen und Schaumwände abgeschieden haben.

25. Filtriertes Hühnereiweiß, welches nach Zusatz von einem Tropfen Chlorcalciumlösung auf Quecksilber eingetrocknet war, bildete beim Belichten gerade Risse und gegeneinander

geneigte ebene Flächen, die in den Rissen zusammenstießen, wie die Flächen eines Kristalls in den Kristallkanten.

26. Auf Quecksilber eingetrocknetes Leimtannat, in dessen Innern bei Wasseraufnahme (nicht bei Wasserabgabe) Schaumwände entstehen, bildet nicht beim Eintrocknen, sondern beim Befeuchten mit Wasser Falten.

27. Die unsichtbaren faltenbildenden Schaumwände entstehen aus der übersättigten Lösung eines ölartigen Niederschlages, der sich beim Eintrocknen der wässerigen Lösungen von Leimchromat, Leimbichromat, Bromsilbergelatine, Kieselsäure, Eiweiß oder Blut durch Belichtung in kurzen Zwischenräumen oder periodisch in Blasen- oder Schaumwänden abscheidet und später erstarrt.

28. Die Bildung von Falten und unsichtbaren Schaumwänden durch Belichtung ist analog der Abscheidung von Kristallen durch Belichtung.

29. Die Ätherwellen erschüttern die in labilem Gleichgewicht befindlichen Teilchen der übersättigten Lösung des Niederschlages. Die Abscheidung des Niederschlages erfolgt um so schneller, je größer die Resonanz ist, welche von der Konzentration der Lösungen und der Lebensdauer des Niederschlages abhängt.

Hrn. Dr. Rudolf Weber spreche ich für die freundliche und stets bereite Hülfe bei Herstellung der Photographien meinen besten Dank aus.

Heidelberg, den 13. August 1903.

(Eingegangen 2. Oktober 1903.)

2. *Über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen; von Ferd. Kirchner.*

(Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation des Verfassers.)

Einleitung.

Bei dem großen Aufschwung, den in den letzten Jahren die Photographie in natürlichen Farben genommen hat, und der Wichtigkeit, welche die dabei beobachteten Erscheinungen sowohl für den Physiker, als auch für den Photographen haben, war es von Interesse, nach den optischen Eigenschaften der dabei verwendeten Emulsionen zu fragen, da diese Eigenschaften für die richtige Farbenwiedergabe unter Umständen von einschneidender Bedeutung werden können. Schon vor etwa 3 Jahren hat Hr. Dr. Sharp im hiesigen physikalischen Institut Versuche in dieser Richtung angestellt, die aber nicht zu Ende geführt und daher nicht veröffentlicht wurden. Auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. Wiener habe ich die Sharpschen Versuche wieder aufgenommen. Hrn. Sharps Beobachtungsresultate, die er mir gütigst mitteilte, sollen an den betreffenden Stellen angeführt werden.

Bekanntlich beruht die Wiedergabe der Farben auf den Interferenzerscheinungen, welche durch ein System nahezu paralleler Silberschichten erzeugt werden.[1]) Diese Silberschichten entstehen dadurch, daß man in der Emulsion stehende Wellen erzeugt, an deren Bäuchen, wie die Arbeiten von Wiener, Lippmann und anderen[2]) gezeigt haben, dann die Reduktion des Silberhaloids stattfindet. Nun ist natürlich Bedingung für das Zustandekommen stehender Wellen völlige Durchsichtigkeit der Emulsion; die Emulsion muß, wie man zu sagen pflegt, kornlos sein. Daraus erhellt schon, daß ein solches Gemenge

1) G. Lippmann, Compt. rend. 112. p. 275. 1891.

2) O. Wiener, Wied. Ann. 40. p. 203. 1890; G. Lippmann, l. c.; R. Neuhauß, „Die Farbenphotographie nach Lippmann, Halle bei W. Knapp, 1898.

von Silberhaloid und Gelatine einen ganz anderen Körper darstellt, als die milchigen Emulsionen der gewöhnlichen hochempfindlichen Trockenplatten. Es läßt sich demgemäß auch erwarten, daß nach der Belichtung die Eigenschaften der fertigen Platte andere sein werden, als die einer gewöhnlichen, was denn auch der Fall ist.

Ein sofort in die Augen fallender Unterschied zwischen einer Lippmannphotographie und einem gewöhnlichen photographischen Negativ ist die völlige Homogenität, die Kornlosigkeit, der Lippmannplatte; ein zweiter ihre ausgesprochene Farbe, die im durchgehenden Licht bald braunrot, bald grün, bald auch blau ist. Mann kann so ziemlich alle Farben des Spektrums beobachten, wogegen eine gewöhnliche Platte stets mehr oder weniger schwarz bez. grau aussieht.

Um streng definierte Verhältnisse zu haben, vermied ich bei der Herstellung meiner Platten sorgfältig das, was man bei den Farbenphotographien gerade anstrebt, nämlich die Ausbildung stehender Wellen. Das wurde dadurch erreicht, daß die unbelichtete Platte in einem mit Benzol gefüllten Leyboldschen Trog getaucht wurde, parallel zu einer Trogwand, und dann mit weißem Licht (Kraterlicht einer Bogenlampe) von der Glasseite ans belichtet wurde. Die der Gelatineseite (es wurde ausschließlich Gelatineemulsion benutzt) gegenüber liegende Trogfläche war von außen mit Asphaltlack bestrichen, so daß keine Reflexion stattfinden konnte. Übrigens zeigte es sich später, daß diese ängstliche Vorsicht nicht nötig gewesen wäre, da die Platten, die man mit weißem Licht in Luft belichtete, dieselben Eigenschaften besaßen, wie die mit den erwähnten Vorsichtsmaßregeln hergestellten.

Die so behandelten Platten wurden dann entwickelt und fixiert. Je nach der Wahl des Entwicklers erhielt man verschieden gefärbte Präparate. Die braunrote bis rubinrote Farbe der gewöhnlichen Lippmannphotographien war sicher mit dem Pyrogallol-Bromkalium-Ammoniak-Entwickler zu erhalten. Oliv- bis grasgrün, ebenfalls sicher, mit Amidol. Metol an Stelle des Pyrogallols lieferte manchmal braune Töne, aber mit einer kleinen Beimischung von blau bez. violett, manchmal auch, namentlich, wenn die Metollösung alt war, rein blaue oder violette Farben. Jedoch war es stets ein

ıfall, wenn ich blaue Platten erhielt, absichtlich gelang es ir nur einmal, und zwar mit ganz altem, stark gebräuntem stol.

Außer von der Art des Entwicklers scheint die erhalne Farbe auch von der Feinheit des verteilten Bromsilbers zuhängen. Völlig kornlose Platten liefern am sichersten te, bez. braune Färbungen. Wird das Korn so grob, daß an die Schicht deutlich auf dem Glase sieht, so tritt leicht ün auf, jedoch scheint diese Ursache in den Hintergrund zu ten.

Interessant war folgende Erscheinung: Es wurden Platten t einem Gitter aus schwarzem Karton bedeckt und von der hichtseite aus belichtet. Dann kam es vor, daß die belichen Streifen die normale braunrote Farbe hatten, die unbehteten dagegen blau oder violett waren. Solche Platten ren, wie fast alle blauen, schleierig.

Wenn hier von der *Farbe* der Platten die Rede war, so darunter, wie oben erwähnt, zunächst natürlich die im rchgehenden Licht zu verstehen, ferner aber die Vorauszung gemacht, daß die Platten trocken sind. Es zeigte h nämlich, daß sie in nassem Zustande ganz anders ausıen, als in trockenem. Einerseits ist die Absorption der ssen Platte weit geringer als die der trockenen, ferner trat er bei den meisten ein Farbenumschlag ein, namentlich bei en blauen. Hier war die Erscheinung am eklatantesten, niger deutlich bei grünen und roten. Auf die Erklärung ses schönen Phänomens soll weiter unten näher eingegangen rden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die belichtete Emulsion ch hygroskopischer zu sein scheint, als die unbelichtete. if eine streifenförmig belichtete Schicht wurde eine ebene lasplatte aufgepreßt, und aus der Verschiebung der Interenzstreifen an der Grenze: Belichtet — unbelichtet die Aufıellung bestimmt.[1]) Gleichzeitig war dicht daneben im Unlichteten ein Stück der Schicht weggekratzt, so daß nach der-

1) Über die dazu benutzten Apparate vgl. C. H. Sharp, Ann. d. ys. 3. p. 210. 1900. — Das Steinheilsche Spektrometer diente mir ch zu den Absorptionsmessungen.

selben Methode die Dicke der unbelichteten Gelatine gemessen werden konnte. Die Aufquellung der belichteten Stellen betrug zwischen 1 und 2 Prozent der Dicke.

Daß es sich hier wirklich um eine *Aufquellung* und *nicht um eine Phasenverschiebung* handelt, entschied ich durch den Versuch, eine eventuelle anomale Phasenänderung bei der Reflexion direkt zu messen. Man kann das, wie es z. B. Hr. Walbott[1]) gemacht hat, so tun, daß man dünne Glimmer- oder Glasblättchen mit Emulsion überzieht. Das Glimmer- oder Glasblättchen muß so dünn sein, daß es Newtonsche Interferenzen im Spektrum gibt, wenn man weißes Licht senkrecht auffallen läßt. Hat man auf beiden Seiten des Blättchens Luft bez. ein optisch dünneres nicht metallisches Medium, so ist sowohl vorn wie hinten bei der Reflexion die Phasenänderung für die elektrische Kraft der Welle gleich Null. Wenn nun ein optisch dichteres nicht metallisches Medium auf der hinteren Fläche des Blättchens sich befindet, so ist die Phasenänderung hinten $\lambda/2$, vorn Null. Ist die Rückseite des Blättchens teilweise mit einem dichteren, teilweise mit einem dünneren Medium bedeckt, so erscheinen im Spektrometer die Interferenzstreifen des einen Systems gegen die des anderen an der Grenzlinie: dichteres Medium — dünneres Medium um eine halbe Streifenbreite gegeneinander verschoben. Ist das eine Medium auf der Rückseite des Blättchens metallisch reflektierend, so ist die Phasenänderung von Null oder $\lambda/2$ verschieden, und damit wird auch die Verschiebung der beiden Streifensysteme eine andere als Null oder $\frac{1}{2}$ Streifenbreite.

Es hätte nun nahe gelegen, zu den in genügender Feinheit und Ebenheit leicht erhältlichen Glimmerplatten zu greifen; aber dem stellte sich der Übelstand in den Weg, — an dem übrigens auch Hr. Sharp schon gescheitert war — daß es sich als unmöglich herausstellte, die Emulsion zum genügenden Festhaften zu bringen. Im Entwickler löste sich die Schicht stets ab, und die Flüssigkeit drang zwischen Emulsion und

1) H. Walbott, Inaug.-Diss. Giessen 1899; Wied. Ann. 68. p. 471. 1899. Über die Methode vgl. auch W. Wernicke, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 68. 1878.

Glimmerblatt, so daß man, hätte man die Emulsion auch wieder festtrocknen lassen, nicht mit Sicherheit hätte annehmen dürfen, daß sich Glimmer und Emulsion wirklich berührten.

Glasblättchen waren in geeigneter Beschaffenheit nur bis 0,04 mm Dicke zu beschaffen. Diese wurden nun mit Emulsion überzogen, entwickelt und getrocknet, und dann wurde ein Streifen der Emulsion herausgekratzt und die Lücke mit Kanadabalsam ausgefüllt. Wie die Messungen ergeben hatten, war die Emulsion optisch dichter als das Glas, ebenso der Kanadabalsam. Man durfte also keine Streifenverschiebung erwarten, falls die Phasenänderung bei der Reflexion an Emulsion normal verlief. Nun war in der Tat von einer Verschiebung nichts zu sehen, was auf nicht metallisches Verhalten schließen läßt.

Immmerhin war der Beweis noch nicht genügend, da die Streifen sehr nahe aneinander lagen. Es wurde deshalb anstatt des Glasblättchens ein auf Glas durch Kathodenzerstäubung niedergeschlagener Platinoxydspiegel benutzt, den mir Hr. P. Gräser vom hiesigen Institut gütigst zur Verfügung stellte. Dieser Spiegel war von zunehmender Dicke und zeigte sehr schöne, breite Interferenzen. Auch hier zeigte sich, daß eine anomale Phasenänderung bei der Reflexion nicht stattfand.

Brechungsindex.

Der Bestimmung des Brechungsindex der Emulsion stellten sich infolge der nicht unbedeutenden Absorption große Schwierigkeiten entgegen. Prismen aus der Emulsion herzustellen, war bei den ungünstigen Eigenschaften derselben nicht angängig. Zunächst schien nur die Grenze der Totalreflexion als Mittel übrig zu bleiben; eine zweite Methode wurde später gefunden und soll bei der Besprechung der Dispersion erläutert werden. — Inwieweit die erstere Methode erlaubt und möglich ist, soll im theoretischen Teile näher erörtert werden. — Diese Grenze war aber so verwaschen, daß für mehr als zwei Dezimalen nicht garantiert werden kann.

Es wurde eine Zahl von Beobachtungsreihen mit lufttrockener Emulsion angestellt. Später wurden die Platten stets sorgfältig im Exsikkator getrocknet. Zur Untersuchung ge-

langten nur zwei Varietäten, die braune und die grüne. Einerseits waren diese leichter mit denselben Eigenschaften reproduzierbar, als die blaue, und dann spielte der Zufall so unglücklich, daß allemal dann, wenn schön blaues Silber erhalten wurde, die Platte aus irgendwelchen anderen Gründen zu Meßzwecken nicht zu gebrauchen war, wenigstens nicht zur Bestimmung des Brechungsindex.

Ein Versuch, der zwar zunächst volles Zutrauen nicht zu verdienen schien, aber durch spätere Untersuchungen als berechtigt anerkannt wurde, möge hier zunächst angeführt werden. Ein Flintglasprisma vom brechenden Winkel 60° und dem Brechungsindex 1,7514 überzog ich auf einer Fläche mit schon entwickelter Emulsion in der Weise, daß ich in einer Schale mit destilliertem Wasser die Emulsionshaut, die von der Platte abgezogen war, mit der Prismenfläche auffing und dann festtrocknen ließ.

Dieses so vorgerichtete Prisma wurde nun auf den Tisch des Spektrometers gestellt und die der brechenden Kante gegenüberliegende Seite mit möglichst hellem diffusem oder konvergentem Na-Licht beleuchtet. Aus dem Winkel a zwischen den Visuren normal zur dritten Prismenfläche und nach der Grenze der Totalreflexion läßt sich dann n leicht berechnen.

Die Mittelwerte aus zwei Versuchsreihen waren für *braunes* Ag

$$n = 1{,}545.$$

Wurde die Emulsion bis zur Sättigung mit Wasser getränkt, so ergab sich mit ziemlicher Schärfe

$$n = 1{,}3504,$$

nach abermaligem Trocknen aus zwei Reihen $n = 1{,}535$. Im Mittel für *braunes*, lufttrockenes Ag also

$$n = 1{,}54.$$

Auf dieselbe Weise wurde für *grüne* Emulsion gefunden

$$n = 1{,}48.$$

Nach Sättigung der Schicht mit Wasser:

$$n = 1{,}3321.$$

Dieselbe Methode in der Weise anzuwenden, daß man die Emulsion, natürlich samt der sie tragenden Glasplatte, mit Kassiaöl oder dergleichen auf die Prismenfläche klebte, erwies

sich als untunlich, da es nicht gelang, der Schicht eine völlig ebene Oberfläche zu geben. Die an sich schon recht verwachsene Grenze der Totalreflexion wurde infolge dieser kleinen Unebenheiten so undeutlich, daß sie sich der Beobachtung völlig entzog. Es mußte deshalb zu einem anderen Mittel gegriffen werden. Es wurden Platten von schwerem Glase (Brechungsexponent 1,65 bez. 1,75; die leichtere widerstand den Einflüssen der Chemikalien völlig, die schwerere oxydierte sich mit der Zeit), die die Firma Zeiss geliefert hatte, in der üblichen Weise mit Emulsion versehen. Diese Platten wurden dann zwischen zwei rechtwinklige Prismen ($n = 1{,}75$) von der Gestalt der im Abbeschen Totalrefraktometer verwendeten, mit Kassiaöl geklebt und das Ganze auf den Tisch des Spektrometers gestellt.

Die Totalreflexion wurde dadurch gefunden, daß der Tisch solange gedreht wurde, bis das Spaltbild verschwand. Jedoch zeigte es sich, daß infolge der Absorption das Verschwinden nicht wirklich plötzlich eintrat, sondern das Bild des Spalts allmählich verblaßte. Dadurch wurde dann die Beurteilung des wirklichen Verschwindens natürlich sehr erschwert. Ich habe stets so gemessen, daß das Bild vollständig verschwand, das Gesichtsfeld also völlig dunkel war, und daß eine kleine Drehung in der betreffenden Richtung einen matten Schimmer des Spaltbildes erkennen ließ.

Die untersuchten Platten waren nur zur Hälfte belichtet, so daß auch die silberfreie Schicht an derselben Platte studiert werden konnte.

Zwei *braune* Platten lieferten in elf Messungsreihen mit relativ guter Übereinstimmung im Mittel

$$n = 1{,}537.$$

Die unbelichtete Hälfte im Mittel

$$n = 1{,}5315.$$

Der Wert 1.537 stimmt mit dem früher gefundenen gut überein.

Ein mit Amidol entwickelte *grüne* Platte ergab im Mittel

$$n = 1{,}49.$$

Die unbelichtete Hälfte

$$n = 1{,}532.$$

Diese Messungen waren alle an warmen hellen Sommertagen unter sehr konstanten Verhältnissen ausgeführt. Nun trat plötzlich nasses Wetter ein, und es zeigte sich, daß die Messungen andere Resultate ergaben. Nach allerlei Versuchen ergab sich, daß es tatsächlich der Feuchtigkeitsgehalt der Luft war, der die Eigenschaften der Gelatine so stark beeinflußte. Um daher konstante Verhältnisse haben zu können, wurden die Platten im Exsikkator über Phosphorpentoxyd aufbewahrt und, wenn sie untersucht werden sollten, rasch mit Kassiaöl zwischen die Prismen geklebt. Wie die folgenden Tabellen zeigten, war der Brechungsindex der Schicht durch das Austrocknen größer geworden.

Eine *braune* Platte gab mit relativ sehr guter Übereinstimmung im Mittel

$$n = 1{,}5565.$$

Eine andere, ganz gleich aussehende Platte, die aber unter Beobachtung der oben erwähnten Vorsichtsmaßregeln von der Glasseite aus belichtet war, gab im Mittel

$$n = 1{,}556.$$

Hier zeigt sich das oben erwähnte Resultat, daß durch die Art der Belichtung ein sicher nachzuweisender Unterschied im Brechungsindex nicht auftrat.

Daß die Brechungsindizes der getrockneten Emulsion etwas höher ausfallen, als die der nur an der Luft getrockneten, ist wohl ohne weiteres verständlich. Der Wassergehalt setzt ja, wie schon früher gezeigt wurde, das Brechungsverhältnis herab.

Auch für die grünen Platten trat durch das Austrocknen eine ganz geringe Erhöhung von n ein. Messungen mit anderen Lichtquellen, als Na-Licht, mißlangen infolge der großen Absorption der Platten. Es wurden die Tl- und die Li-Flamme versucht, jedoch war es unmöglich, diese hell genug herzustellen, daß eine einigermaßen deutliche Grenze der Totalreflexion zu beobachten gewesen wäre.

Dispersion.

Um erstens eine Kontrolle für die aus der Totalreflexion bestimmten Werte des Brechungsindex für die D-Linie zu

haben, dann aber auch, um einen, wenigstens angenäherten Wert der Dispersion zu gewinnen, wurde folgender Weg eingeschlagen: Es wurde die Platte keilförmig mit Emulsion begossen, was man dadurch verhältnismäßig leicht erreicht, daß man die frisch gegossene, noch nicht getrocknete Platte unter einer passenden Neigung gegen die Horizontalebene aufstellt Die Emulsion läuft dann gegen den unteren Rand und bildet eine Schicht von relativ gleichmäßig zunehmender Dicke. Eine solche Platte zeigt nun nach der Präparation, in monochromatischem Lichte betrachtet, Interferenzstreifen, die den Linien gleicher Dicke parallel laufen. Ist die Platte gut gegossen, so erhält man ein System von auch unter sich parallelen Streifen.

Ist nun der Brechungsindex für eine bestimmte Farbe λ gleich n_λ, so erscheint bei senkrechter Inzidenz ein Minimum an allen den Stellen der Platte, für welche die doppelte Dicke $2d$ der Gleichung

$$2d = m \cdot \frac{\lambda}{n_\lambda}$$

genügt, wo m eine ganze Zahl ist.[1]) Dabei ist aber vorausgesetzt, daß n_λ für die Schicht größer sei, als für die sie tragende Glasplatte. — Wenn man $2d$ kennt, so kann man aus dieser Formel n_λ leicht berechnen. Schon Hr. Sharp hatte versucht, auf diese Weise die Dispersion zu bestimmen, kam aber nicht zum Ziel, namentlich wegen der Schwierigkeit, die Dicke der Schicht, die in sich Interferenzen erzeugt, auf die gewöhnliche Weise zu bestimmen, da damals die Frage, ob bei der Reflexion an der Schicht eine anomale Phasenänderung eintritt, noch nicht entschieden war. Wie eine einfache Überlegung ergibt, kann man die Schwierigkeiten umgehen, wenn man den an den beiden Grenzflächen der Platte reflektierten Wellenzügen solche Amplituden gibt, daß der durch Absorption geschwächte von gleicher Größenordnung wird, wie der nicht durch Absorption geschwächte. Daraus folgt, daß man die Platte von der Glasseite aus beleuchten und betrachten muß. Die störende Reflexion an der unbelegten Fläche der Glasplatte wird durch Aufkleben eines Glaskeiles

1) Vgl. Theoretischer Teil (2.).

vernichtet. Unter Beobachtung dieser Kunstgriffe gelang es mir, mit Glasplatten von $n_D = 1{,}52$ sehr deutliche Interferenzen zu erhalten von der Glasseite aus, dagegen nur ganz schwache Andeutungen derselben von der Schichtseite aus, wodurch also die Möglichkeit der gewöhnlichen Dickenmessung gegeben war.

Die Versuchsanordnung war nun folgende: Platten von Spiegelglas im Format 5×5 cm wurden in der oben angegebenen Art mit keilförmigen Schichten versehen. Nachdem die Platte entwickelt, fixiert und getrocknet war, wurde sie bei Na-Licht betrachtet und der Verlauf der Dickenkurven bestimmt. Dann wurde senkrecht zu diesen mit der Teilmaschine ein 2—3 mm breiter Streifen der Schicht herausgekratzt. Mit Hilfe dreier Marken war es möglich, jeden Punkt der beiden Grenzlinien — Schicht : Loch — in jeder Lage wiederzufinden. Auf die Glasseite der Platte wurde ein flacher Glaskeil mit Canadabalsam aufgeklebt. Die so vorgerichtete Platte wurde in einen gläsernen Trockenkasten gebracht, der mit Phosphorpentoxyd beschickt war.

Das — weiße — Licht fiel nun durch die Glaswand des Trockenkastens auf den Glaskeil und gelangte so auf die Emulsion; hier wurde es senkrecht reflektiert und trat dann durch ein photographisches Objektiv, welches ein Bild des Blättchens auf dem Spalt des Spektrometers entwarf. Der Trockenkasten stand auf einem Tisch, dessen Verschiebung mit Skala und Nonius auf 0,1 mm genau abgelesen werden konnte Nun wurde das Fadenkreuz des Spektrometers auf die Wellenlänge eingestellt, für die der Brechungsindex gesucht war. Wenn der Tisch nun senkrecht zum einfallenden Lichte verschoben wurde, so wanderten die Interferenzstreifen in einer bestimmten Richtung durch das Gesichtsfeld. Jede Stellung des Tisches, bei der ein Minimum auf das Fadenkreuz fiel, wurde abgelesen. Es wurde übrigens immer nur ein Rand des Loches benutzt.

Nachdem auf diese Weise durch genügend oft wiederholte Einstellungen die Lage der Minima möglichst genau bestimmt war, wurde die Platte herausgenommen, eine zweite Glasplatte so auf die Schicht gepreßt, daß die Luftinterferenzen senkrecht zum Lochrand liefen, und das Ganze von neuem in den Trockenkasten gebracht. Aus der Verschiebung der Inter-

ferenzen an der Grenze Loch : Schicht bei senkrechter Inzidenz wurde dann die Dicke der Schicht nach der bekannten Methode bestimmt für eine passend ausgewählte Reihe von Punkten. Diese Messungen ergaben entweder direkt oder durch graphische Interpolation die Dicke der Schicht an den Stellen, wo Minima beobachtet worden war.

Zunächst wurde eine braunrote Platte untersucht. In der folgenden Tabelle sind die Resultate niedergelegt.

Tabelle 1.

Dispersion des braunen Silbers.

λ	500	525	550	560	570	575	589,5	600
λ/n	324,3	337,1	351,1	382,9	357,5	359,2	379,2	381,9
n	1,542	1,557	1,567	1,585	1,595	1,601	1,555	1,535

Eine graphische Darstellung der Resultate findet sich in Fig. 1. Die Kurve der Brechungsexponenten zeigt also ein Maximum.

Da die Streifen immerhin ziemlich breit sind, kann nur für zwei Dezimalen garantiert werden; die Abweichungen der Kurve von den gefundenen Werten sind also nicht übermäßig

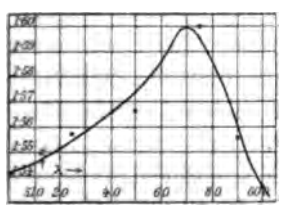


Fig. 1.

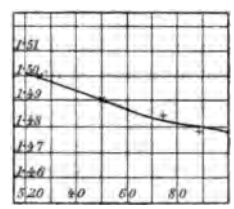


Fig. 2.

groß. Der für die Na-Linie gefundene Wert 1,555 stimmt mit dem früher aus der Totalreflexion gefundenen Wert 1,56 befriedigend überein.

Eine zweite Platte, die sehr gut keilförmig gegossen war, wurde mit Pyrogallol, dem anstatt des Ammoniaks Natronlauge zugesetzt war, entwickelt. Der Erfolg dieser Veränderung im Entwickler war eine rein grüne Farbe und große Klarheit der Platte.

Dieses Präparat wurde nun genau wie das vorige behandelt. Die Resultate finden sich in Tab. 2.

Tabelle 2.

Dispersion des grünen Silbers.

λ	525	550	575	589,5	600
λ/n	348,19	368,85	387,12	399,19	404,89
n	1,508	1,491	1,485	1,477	1,482

Graphische Darstellung auf Fig. 2.

Absorption.

Der Verlauf der Absorptionskurve wurde zwischen den Wellenlängen 450 und 650 bestimmt.

Im Gegensatz zu den Bestimmungen des Brechungsindex gelang es hier in verschiedenen Fällen, auch blaue Platten zu untersuchen.

Die Messungen wurden in der Weise ausgeführt, daß das Präparat von hinten, meist durch eine Glühlampe mit geradem Faden, beleuchtet und sein Bild mit Hilfe eines photographischen Objektivs auf den Doppelspalt projiziert wurde. Die Trennungslinie zwischen belichteter Emulsion und unbelichteter, bez. der geradlinige Rand eines in die Schicht gekratzten Loches wurde auf die gemeinsame Grenze beider Spalthälften eingestellt. Dann wurde das Spektrometer auf die betreffende Wellenlänge fixiert und die Spalte so lange verstellt bis gleiche Helligkeit der beiden übereinander liegenden Spektralbereiche erreicht war. In der Ebene des Fadenkreuzes war außerdem noch eine spaltförmige Blende angebracht, die einen schmalen Streifen der Spektren herausschnitt.

Die im folgenden mitgeteilten Messungen beziehen sich auf trockene, bez. lufttrockene Emulsionen, da, wie in einem späteren Abschnitt gezeigt werden wird, das Aufquellen der Gelatine eine Verschiebung des Absorptionsmaximums zur Folge hat.

Die Betrachtung der Emulsion[1]) unter dem Mikroskop bei Anwendung höchster Aperturen (1,30—1,40) zeigt, daß sie

1) Die hier angeführten Beobachtungen habe ich nach Abschluß dieser Arbeit im Physik. Institut zu Leipzig *nachträglich* zusammen mit Hrn. R. Zsigmondy in Jena gemacht.

zusammengesetzt ist aus einer optisch leeren Grundmasse und pigmentartigen Körnern, die regellos, aber relativ gleichmäßig darin verteilt sind. Nun ist durch die Versuche von Zsigmondy[1]) u. a. *bekannt*, daß eine analoge Struktur — homogene Grundmasse, festere knollenförmige Gebilde — schon reine Gelatine hat, und daß ferner das Verhältnis von Grundmasse zu Körnern durchaus variabel ist. Man wird also die Gelatineknollen als Träger des ausgeschiedenen Ag betrachten. Es ergibt sich weiter, daß, wenn die Größe und Anzahl der Knollen variiert wird, sich auch die Absorption der Emulsion ändern muß. Denn man ist gezwungen, einen Gelatineknollen als Träger *mehrerer* Ag-Teilchen anzusprechen. — Da nun zu den Faktoren, von denen die Größe der Gelatineknollen abhängt, unter anderem auch die Erstarrungstemperatur gehört, so kann man, selbst bei besser gegossenen Platten, wie meine, nicht erwarten, daß die Absorptionskurven genau dieselben sind für zwei anscheinend gleichbehandelte Präparate, ja für zwei verschieden gelegene Punkte eines und desselben Präparates.

Auf diese Weise erklärt es sich, wie man auf derselben Platte unter Umständen, trotzdem Interferenzwirkungen vermieden werden, eine ganze Anzahl Farben bekommen kann, namentlich in der Nähe der Ränder der Schicht.

Eine Berechnung des Absorptionskoeffizienten $n\varkappa$ ist aus diesen Gründen nur zur Erzielung von Näherungswerten angängig.

Ich habe für die Messungen natürlich möglichst in sich homogene Präparate benutzt.

Die berechneten Werte sind daher nur für das jeweils untersuchte Präparat gültig. Übrigens stimmen wenigstens die Absorptionskurven in ihrem allgemeinen Verlauf für Präparate derselben Farbe ziemlich gut überein.[2]) Die absoluten Werte ändern sich selbstverständlich auch mit dem Silbergehalt, der nur für eine Platte bestimmt wurde.

Die in den folgenden Tabellen gegebenen Werte der Messungen sind die Mittel aus durchschnittlich fünf Einzelmessungen.

1) R. Zsigmondy, Zeitschr. f. Elektrochem. 8. p. 686. 1902.

2) Auch mit denen von Hrn. Sharp.

Absorption des braunen Silbers.

Tabelle 3.

Braun mit einem Anflug von blau, belichtete Emulsion gegen unbelichtete. Lufttrocken.

λ	530	540	560	580	600	620	640	650
Proz. durchgel.	6,3	7,8	11,7	20,5	31,8	48,5	76,6	90,7

Dicke $d = 1362\ \mu\mu$. Graphische Darstellung Fig. 3, Kurve *a*.

Tabelle 4.

Absorption des braunen Silbers. Platte mit Pyrogallol-Ammoniak entwickelt. Belichtete Emulsion gegen Luft. Lufttrocken.

λ	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz. durchgel.	18,2	26,2	34,5	47,0	57,2	64,3	74,0	75,3

$d = 3619\ \mu\mu$. Graphische Darstellung Fig. 3, Kurve *b*.

Tabelle 5.

Absorption derselben Platte. Diesmal war die Platte im Trockenkasten eingeschlossen. Belichtete Emulsion gegen Luft.

λ	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz. durchgel.	34,9	45,8	52,3	64,3	67,1	73,4	79,2	82,2

Eine Dickenmessung war an dieser Stelle leider nicht möglich. Doch ist die Beobachtungsreihe als Vergleichsobjekt wohl zu gebrauchen. Graphische Darstellung Fig. 3, Kurve *c*.

Tabelle 6.

Absorption derselben Platte. Wieder im Trockenkasten. Belichtete Emulsion gegen Luft.

λ	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz. durchgel.	10,7	14,3	17,1	20,4	23,7	27,2	30,2	32,2

$d = 3612\ \mu\mu$. Graphische Darstellung Fig. 3, Kurve *d*.

Die Gestalt der Kurve stimmt mit der vorigen befriedigend überein. Ich mache auf diese Ähnlichkeit besonders aufmerksam, ebenso auf die der nächsten Kurve mit *b*.

Tabelle 7.

Absorption des braunen Silbers. Belichtete Emulsion gegen Luft. Die Platte zeigte starke Abnahme der Absorption beim Anfeuchten. Lufttrocken gemessen.

λ	450	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz. durchgel.	10,7	12,25	15,6	19,5	27,2	36,6	42,3	51,5	59,3

Leider fehlt auch hier eine Dickenmessung. Graphische Darstellung Fig. 3, Kurve *e*.

Es macht sich hier ein deutlicher Unterschied geltend zwischen den Kurven der absolut trockenen und der nur an

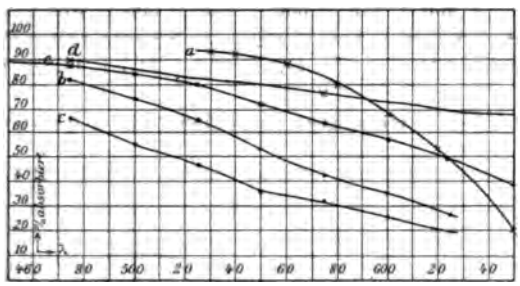


Fig. 3.

der Luft getrockneten Platten. Auf diese Erscheinung und ihre Erklärung wird im letzten Abschnitt näher eingegangen werden.

Absorption des grünen Silbers.

Tabelle 8.

Olivgrünes Silber; sehr klare, mit Amidol entwickelte, ziemlich dunkle Platte; lufttrocken; belichtete Emulsion gegen unbelichtete.

λ	450*	460*	480	500	520	540	560	580	600	620	640*
Proz. durchgel.	19,7	22,0	23,1	23,0	24,0	23,0	23,0	21,8	20,5	19,7	19,8

Bei den mit * bezeichneten Messungen war die Einstellung sehr schwierig.

$d = 2758$. Graphische Darstellung auf Fig. 4, Kurve *a*.

Tabelle 9.

Grünes Silber; Platte von schwerem Glase. Mit Amidol entwickelt. Belichtete Emulsion gegen Luft. Platte im Trockenkasten.

λ	480	500	525	550	575	600	625	6
Proz. durchgel.	17,2	18,6	22,9	23,7	22,4	21,7	21,2	2

d = 3950. Graphische Darstellung Fig. 4, Kurve *b*.

Tabelle 10.

Grünes Silber; mit Eisen-Oxalat entwickelt. Sehr klar. Belichtete Emulsion gegen Luft. Im Trockenkasten.

λ	450	475	500	525	550	575	600	6
Proz. durchgel.	6,15	8,7	11,7	11,7	11,7	11,5	10,4	1

d = 3161. Graphische Darstellung Fig. 4, Kurve *c*.

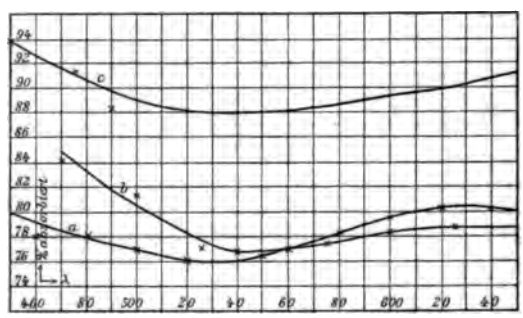


Fig. 4.

Absorption des blauen Silbers.

Tabelle 11.

Blauviolettes Silber. Belichtete Emulsion gegen unbelichtete. Lufttroc

λ	500	510	520	530	540	580	600	620
Proz. durchgel.	6,7	9,1	10,6	10,4	10,0	8,8	7,9	7,5

d = 1196. Graphische Darstellung Fig. 5, Kurve *a*.

Tabelle 12.

Blaues Silber. Sehr rein blau, ohne merklichen Schleier. Mit ganz altem Metol entwickelt. Belichtete Emulsion gegen Luft. Lufttrocken.

λ	446	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz. durchgel.	14,6	12,3	10,56	9,16	8,34	7,5	7,01	8,02	8,6

d = 1099. Graphische Darstellung Fig. 5, Kurve *b*.

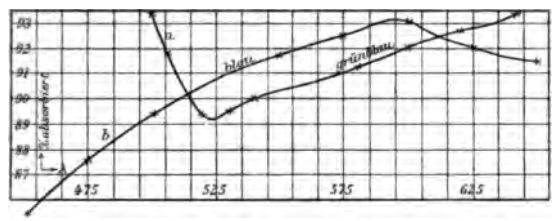


Fig. 5.

Silbergehalt.

Da der Gehalt einer Platte an Silber sehr gering ist — ca. 1 mg — so ist die Bestimmung durch die üblichen quantitativ chemischen Methoden kaum angängig. Ich benutzte daher die optische Methode, deren sich auch Hr. Sharp schon zu gleichem Zwecke bedient hatte.

Ein Stück der Emulsion wurde nach Länge, Breite und Dicke (an verschiedenen Stellen) ausgemessen und so sein Volumen bestimmt. Dam kann die Platte in verdünnte Salpetersäure, die das Silber herauslöste. Diese Silberlösung ließ sich, wenn nicht zuviel Salpetersäure angewendet war, also die Verdünnung nicht zu groß war, mit Salzsäure in Form einer Trübung ausfällen. Diese getrübte Flüssigkeit wurde nun photometrisch mit einer getrübten Silberlösung von bekanntem Gehalt verglichen, und die Voraussetzung gemacht, daß ceteris paribus gleiche Trübung dem gleichen Ag-Gehalt entspricht.

Es wurde so gemessen, daß ein Glastrog mit der betreffenden trüben Flüssigkeit zwischen eine konstante Lichtquelle und das Lummer-Brodhunsche Photometer eingeschaltet wurde, und dann die scheinbare Intensität der konstanten Lichtquelle durch Verschieben einer Hefnerlampe auf der anderen Seite des Photometers bestimmt wurde.

Diese Methode der Silberbestimmung ist natürlich sehr roh und gibt nur angenäherte Werte, namentlich auch, weil die Trübung sehr gering ist; doch erhielt ich relativ gut übereinstimmende Werte.

Bei Einschaltung der getrübten Emulsionssilberlösung zwischen Lichtquelle und Photometer ergab sich diese Lichtquelle im Mittel zu 5,91 Hefnerkerzen.

Bei Einschalten desselben Troges, aber jetzt mit bekannter Vergleichslösung, ergab sich die Helligkeit derselben Lichtquelle im Mittel zu 2,51 Hefnerkerzen. Der leere Trog allein im Mittel 10,40 Hefnerkerzen.

Ist nun die einfallende Intensität E, der Absorptionsindex g, so ist die austretende Intensität

$$A = E \cdot g^d,$$

wo d die Dicke der Schicht ist.

Für die Vergleichslösung (0,01 normal $AgNO_3$) ist:

$$A = E \cdot g = 2{,}51; \quad (d = 1),$$

$$E = 10{,}40,$$

$$g = \frac{2{,}51}{10{,}40}.$$

Ist ferner für die Emulsionslösung

$$A' = E \cdot g^y = 5{,}91,$$

so ist

$$y = \frac{\log 5{,}91 - \log 10{,}4}{\log 2{,}51 - \log 10{,}4} = 0{,}398.$$

Die Vergleichslösung müßte also die Dicke 0,398 haben, um genau so zu absorbieren, wie die Emulsionslösung von der Dicke 1.

Nun enthielt der Trog 45 ccm Flüssigkeit, von diesen waren 2 ccm 0,01 normale $AgNO_3$. Also enthalten 45 ccm Emulsionslösung ebensoviel Ag, wie 2,0 . 0,398 ccm 0,01 normale $AgNO_3$.

1000 ccm 0,01 normale $AgNO_3$ enthalten nun 1,08 g Ag; also 2 ccm 2,16 mg. Demnach ist in 45 ccm Emulsionslösung 2,16 . 0,398 = 0,86 mg Ag enthalten. Das ergibt für 78 ccm (mit soviel war das Silber ausgezogen worden) 1,524 mg oder 0,145 cmm Ag. Das Volumen der Gesamtschicht war 46,2 cmm gewesen. Also macht das Silber den 46,2/0,145^{ten} Teil gleich

318ten Teil des Gesamtvolumens aus. Bei der Roheit der Messungen können wir jedoch rund sagen, wenn alles Silber der Platte in eine Schicht gebracht würde, so bildete diese den 300ten Teil der Gesamtdicke. Dasselbe Resultat hatte übrigens Hr. Sharp auf demselben Wege gefunden. Da die Emulsion bei ihrer Bereitung etwa $^1/_{100}$ ihres Volumen Ag enthält (Rezept)[1]), so wird durch das Belichten und Entwickeln also etwa $^1/_3$ allen verfügbaren Silbers ausgeschieden.

Theoretischer Teil.

1. Einfluß der Absorption auf die Bestimmung des Brechungsindex durch Totalreflexion.

Es soll nun zunächst der Nachweis geführt werden, daß die Art und Weise der Messung bei der Bestimmung des Brechungsindex durch Totalreflexion berechtigt war.

Es kamen immerhin ziemlich dünne Schichten der Emulsion zur Verwendung, was geboten war, da im durchgehenden Lichte beobachtet wurde. Für solche Schichten gilt für die Amplitude des durchgehenden Lichtes die Formel

$$d = a \frac{1 - r^2}{1 - a^2 r^2}.$$

Dabei sind die mehrfachen Reflexionen im Innern der Schicht berücksichtigt und es bedeuten

$$a_s = a_p = e^{-2\pi i \frac{\delta}{\lambda}(n' \cos \zeta' - n \cos \zeta)},$$

$$r_p = \frac{n \cos \zeta' - n' \cos \zeta}{n \cos \zeta' - n' \cos \zeta}; \quad r_s = \frac{n \cos \zeta - n' \cos \zeta'}{n \cos \zeta - n' \cos \zeta'},$$

wo δ die Dicke der Schicht, n' ihr komplexer Brechungsindex, n der Brechungsindex des Prismas ist; ζ und ζ' sind Inzidenz- und Brechungswinkel. Die Indizes p und s bedeuten die Lage der elektrischen Kraft relativ (parallel oder senkrecht) zur Einfallsebene. Daher gelten die Beziehungen

$$n \cdot \sin \zeta = n' \sin \zeta'; \quad n' = N(1 - i\varkappa),$$

wo N und $\varkappa$ Brechungs- und Absorptionsindex der Schicht sind.

Da a eine kleine Größe ist, so kann man in erster Annäherung setzen

$$d = a \cdot (1 - r^2).$$

1) R. Neuhauss, l. c. p. 24.

Die durchgehende Intensität wird also

$$D = a \cdot a'(1 - r^2)(1 - r'^2),$$

wo a' und r' die zu a und r konjugiert komplexen Werte sind. Nun ist $\varkappa$ klein, so daß $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Man findet daher unter Rücksicht auf die Rechnungsregeln für kleine Größen leicht:

$$n' \cos \zeta' = \sqrt{N^2 - n^2 \sin^2 \zeta} \cdot \left(1 - \frac{i N^2 \varkappa}{N^2 - n^2 \sin^2 \zeta}\right),$$

$$n'' \cos \zeta'' = \sqrt{N^2 - n^2 \sin^2 \zeta} \cdot \left(1 + \frac{i N^2 \varkappa}{N^2 - n^2 \sin^2 \zeta}\right).$$

Hier sind n'' und ζ'' zu n' und ζ' konjugiert.

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$n \cos \zeta = \alpha; \quad \sqrt{N^2 - n^2 \sin^2 \zeta} = \beta; \quad N^2 \varkappa = \gamma,$$

so wird

$$a \cdot a' = e^{-2\pi i \frac{\delta}{\lambda} (\cos \zeta n' - \cos \zeta'' n'')} = e^{-4\pi \frac{\delta}{\lambda} \cdot \frac{\gamma}{\beta}}.$$

Ferner ist

$$(1 - r^2)(1 - r'^2) = 1 - (r^2 + r'^2) + r^2 r'^2;$$

es sei nun $\nu = N/n$, dann ist

$$r_p = \frac{\beta\left(1 - \frac{i\gamma}{\beta^2}\right) \cdot \frac{1}{\nu(1 - i\varkappa)} - \alpha\nu(1 - i\varkappa)}{\beta\left(1 - \frac{i\gamma}{\beta^2}\right) \cdot \frac{1}{\nu(1 - i\varkappa)} + \alpha\nu(1 - i\varkappa)}.$$

Nach geeigneter Umformung erhält man

$$r_p^2 = \frac{\beta(\alpha\nu^2 + \beta)(\alpha\nu^2 - \beta)^2 + 8i(\alpha\nu^2 - \beta) \cdot (c - b\varkappa)\alpha\nu^2}{\beta(\alpha\nu^2 + \beta)^2},$$

wobei $c = \gamma/2$; $b = \beta^2$ gesetzt wurde.

$$r_p^2 + r_p'^2 = 2\left(\frac{\alpha\nu^2 - \beta}{\alpha\nu^2 + \beta}\right)^2; \quad r_p^2 \cdot r_p'^2 = \left(\frac{\alpha\nu^2 - \beta}{\alpha\nu^2 + \beta}\right)^4,$$

also:

$$(1 - r_p^2)(1 - r_p'^2) = 1 - (r_p^2 + r_p'^2) + r_p'^2 r_p^2 = \left[1 - \left(\frac{\alpha\nu^2 - \beta}{\alpha\nu^2 + \beta}\right)^2\right]^2.$$

Demnach wird $D_p = 0$ für $\beta = 0$, d. h. für $\sin \zeta = N/n$. Gleichzeitig wird auch die Exponentialgröße zu Null. Analog wird für Licht, bei dem die elektrische Kraft senkrecht zur Einfallsebene liegt:

$$r_s = \frac{(\alpha - \beta)\beta + i\gamma}{(\alpha + \beta)\beta - i\gamma}$$

daraus folgt wie oben:

$$-r_s^2)(1-r_s'^2) = 1-(r_s^2+r_s'^2)+r_s'^2 \cdot r_s'^2 = \left[1-\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\right]^2$$

» auch $D_s = 0$ für $\beta = 0$ oder $\sin\zeta = N/n$.

Demnach war es ganz richtig, auf völliges Verschwinden Spaltbildes einzustellen.

Um sich ein Bild zu machen von der Schärfe der Grenze Totalreflexion, kann man für Winkel, die wenige Minuten iner sind als der Winkel der Totalreflexion, D berechnen. ter der Annahme, daß $\delta = 3\lambda$; $N = 1{,}55$; $N\varkappa = 0{,}03$ ist, :d so folgende für beide Polarisationszustände merklich iche Tabelle erhalten. Der Winkel der Totalreflexion 62° 21′.

ζ	62° 21′	62° 16′	62° 11′	62° 6′	62° 1′
$\log D_p$	$-\infty$	0,91 − 14	0,87 − 10	0,39 − 8	0,082 − 7

i sind gemeine Logarithmen angegeben und die einfallende tensität ist gleich Eins gesetzt.

Die Einstellung erfolgt nun auf den Winkel, für welchen e beobachtete Helligkeit von der Dunkelheit nicht mehr ıterschieden werden kann. Nun liegt die Reizschwelle des ıges nach König und Brodhun[1]) für gelbes Licht etwa i 0,008 der von ihnen benutzten Helligkeitseinheit. Diese nheit ist gleich derjenigen Helligkeit, in welcher dem durch ı Diaphragma von 1 qmm blickenden Auge eine mit Magneımoxyd überzogene Fläche erscheint, die im Abstand von m von der etwa 1,6 Hefnerkerzen betragenden Platinlichtıheit beleuchtet wird. Das ohne zwischengeschaltete Schicht trachtete Spaltbild in dem bei den vorliegenden Messungen nutzten Spektralapparat erschien aber schätzungsweise in etwa r 10fachen Helligkeit einer Hefnerkerze. Nimmt man diese elligkeit als Einheit, so würde das Auge noch eine Helligkeit ahrnehmen können, die unter Benutzung obiger Zahlen sich auf

$$\frac{1}{10} \cdot 0{,}008 \cdot \frac{1{,}6}{2\pi \cdot (10^3)^2} = 0{,}2 \cdot 10^{-9}$$

1) H. v. Helmholtz, Physiol. Optik, 2. Aufl., p. 404 u. 415. 1896.

berechnet, wobei angenommen ist, daß das erwähnte Magnesiumoxyd *alles* von der Platinlichteinheit empfangene Licht gleichförmig über eine Halbkugel zu zerstreuen imstande gewesen wäre. Selbst wenn also die Helligkeit des Spaltbildes nur den zehnten Teil der geschätzten Helligkeit betragen hätte, würde der durch die Verwaschenheit der Grenze der Totalreflexion bedingte Fehler noch unter 15′ und somit innerhalb der anderen Beobachtungsfehler gefallen sein, und nur einen Fehler von zwei Einheiten der dritten Dezimale im Brechungsexponenten bedingt haben.

2. Einfluß der Absorption auf die Bestimmung des Brechungsindex durch Interferenzen.

Es ist noch der Beweis zu führen, daß die Methode der Dispersionsbestimmung durch Newtonsche Interferenzen erlaubt war.

Sind die Brechungsindices von Glas, Emulsion und Luft bez. n_0, $n(1-ix)$, 1, so ist die von dem System: Glas–Emulsion–Luft reflektierte Intensität

$$J = R \,.\, R' = \frac{r_0 - r\,a^2}{1 - r_0\,r\,a^2} \cdot \frac{r_0' - r'\,a'^2}{1 - r_0'\,r\,a'^2},$$

wo

$$r_0 = \frac{n_0 - n(1-ix)}{n_0 + n(1-ix)}; \qquad r = \frac{1 - n(1-ix)}{1 + n(1-ix)}$$

und

$$a = e^{-2\pi i n (1-ix)\frac{\delta}{\lambda}}$$

ist, $r_0' r' a'$ sind die entsprechenden konjugiert komplexen Größen.

Man findet nun die dem Minimum entsprechende Dicke der Emulsion, indem man J nach δ differenziert und den Ausdruck Null setzt.

Wenn wir zur Abkürzung noch einführen:

$$K = \frac{4\pi n x}{\lambda}; \quad N = \frac{4\pi n}{\lambda}; \quad \varrho_0 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n}; \quad \varrho = \frac{1-n}{1+n};$$

$$P = \frac{(n_0+n)^2 + 2\,n_0(n_0+1)}{(1+n)(n_0+n)},$$

so wird die Bedingungsgleichung für das Minimum unter Vernachlässigung von $(n\varkappa)^2$ und ϱ_0^2:

$$\frac{1-K\delta}{\varrho_0}\cdot\varrho$$

$$= \left[1 + \frac{2n}{n_0+n}\cdot\frac{1-n_0}{1+n} + (1-2K\delta)\left(1+P\cdot\frac{n}{n_0}\right)\varrho^2\right]\cdot\cos N\delta$$

$$+ \left[\frac{1}{\varkappa} - \frac{2n\varkappa}{n_0+n}\cdot\frac{1-n_0}{1+n} - (1-2K\delta)\left(1+P\cdot\frac{n}{n_0}\right)\varrho^2\right]\cdot\sin N\delta.$$

Setzt man die linke Seite der Gleichung gleich ς, den Faktor von cos $N\delta$ gleich s, den von sin $N\delta$ gleich S, so wird

$$\varsigma = s\,.\cos N\delta + S\,.\sin N\delta.$$

Da nun cos $N\delta$ sehr nahe Eins ist, kann man schreiben

$$\sin N\delta = \frac{\varsigma - s}{S} = \omega, \quad N\delta = \omega + 2\pi m,$$

wo m eine ganze Zahl. Wird nun der Wert von N eingesetzt, so kommt

$$\frac{4\pi n}{\lambda}\cdot\delta = \omega + 2\pi m, \quad \frac{2n\delta}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} + m.$$

Für nicht absorbierende Medien würde $\omega/2\pi$ verschwinden. Es war nun so gerechnet, als ob dies der Fall sei. Der so erhaltene scheinbare Brechungsindex sei ν, dann ist

$$2\frac{n\delta}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} + m, \quad 2\frac{\nu\delta}{\lambda} = m, \quad n - \nu = \frac{\lambda}{2\delta}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\nu\,.\,\omega}{2\pi m}.$$

Also

$$n = \nu\left(1 + \frac{\omega}{2\pi m}\right) = \nu\,.f.$$

Für braunes Ag betrug der Absorptionskoeffizient $n\varkappa$ im Mittel 0,03 für Na-Licht, der Brechungsindex $n = 1{,}55$. Nehmen wir nun $m = 4$, so wird $f = 1{,}006$. Der Fehler würde also etwa $^3/_8$ Proz. betragen. Bei der Unschärfe der Interferenzstreifen sind die Messungen aber so wie so nicht genauer. — Für grünes Silber ist $n\varkappa$ noch kleiner, der Fehler würde also ebenfalls kleiner werden.

3. Die optischen Konstanten des Stoffs des Niederschlages.

Es wäre nun von Interesse zu erfahren, welche optischen Konstanten dem in der Gelatine suspendierten Körper — ob Silber oder eine Silberverbindung — zukommen. Bei der großen Nähe der einzelnen Teilchen hängt nun der Wert

dieser fraglichen Konstanten ab von der größeren oder geringeren Annäherung und gegenseitigen Beeinflussung. Jedoch wird man immerhin eine mittlere Distanz der Teilchen, also eine mittlere Dichte der Verteilung annehmen können. Denn unter sonst gleichen Vorbedingungen wird wenigstens angenähert immer derselbe Körper entstehen. Man kann also nach den Konstanten des Silbers fragen bei der *unter den hier vorliegenden Verhältnissen* gegebenen Verteilung.

Da nun keine Richtung in der Emulsion in bezug auf Silberausscheidung bevorzugt ist, würde man eine Mischungsregel anwenden können, die mit Hilfe der Lorenzschen Refraktionskonstanten[1]) zusammengesetzt ist. Lorenz leitet seine Formel ab für isotrope durchsichtige Medien, hier liegt aber ein isotropes Medium mit merklicher Absorption vor. — Die Ableitung wird bei Lorenz nun derart geführt, daß die Lichtgeschwindigkeit im Innern der Körper als eine rasch wechselnde periodische Funktion des Ortes angenommen wird und im übrigen die Differentialgleichungen der Lichtbewegung angenommen werden. Es erscheint daher zulässig, die Gültigkeit der erhaltenen Formel auch auf den Fall der Absorption auszudehnen, wobei dann in der bekannten Weise statt des reellen der komplexe Wert des Brechungsindex $n' = n(1 - i\varkappa)$ eingeführt wird. Man erhält also folgende Mischungsregel

$$\frac{N'^2 - 1}{N'^2 + 2} = v_1 \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} + v_2 \frac{n_2'^2 - 1}{n_2'^2 + 2},$$

wo

$$N' = N(1 - iK) = N - iK; \quad n_2' = n(1 - i\varkappa) = n - ik.$$

N' ist dabei der komplexe Brechungsindex der Emulsion, n_2' der ebenfalls komplexe des suspendierten Niederschlages, n_1 der der Gelatine. v_1 und v_2 bedeuten die relativen Volumina der Komponenten, d. h. das Verhältnis ihrer absoluten Volumina zum Gesamtvolumen, so daß

$$v_1 + v_2 = 1.$$

Subtrahiert man nun diese letztere Gleichung von der obigen, so erhält man die einfachere Beziehung

$$\frac{1}{N'^2 + 2} = \frac{v_1}{n_1^2 + 2} + \frac{v^2}{n_2'^2 + 2},$$

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

daraus ergibt sich:

$$n_2'^2 = \frac{2\,v_1(N'^2 - n_1^2) + N'^2 v_2(n_1^2 + 2)}{-\,v_1(N'^2 - n_1^2) + v_2(n_1^2 + 2)}.$$

Setzt man nun

$$\frac{v_2}{v_1}(n_1^2 + 2) = \zeta,$$

so kommt

$$n_2'^2 = \frac{2(N'^2 - n_1^2) + N'^2\zeta}{-(N'^2 - n_1^2) + \zeta} = P + iQ.$$

Daraus berechnen sich der reelle und imaginäre Teil zu:

$$P = -\frac{(\zeta + \gamma)(2\gamma - n_1^2\zeta + \gamma\zeta) + 4N^2K^2(2 + \zeta)}{4N^2K^2 + (\zeta + \gamma)^2},$$

$$Q = \frac{2NK.\zeta(2 + n_1^2 + \zeta)}{4N^2K^2 + (\zeta + \gamma)^2},$$

worin $\gamma = K^2 - N^2 + n_1^2$.

Nun ergibt sich aus $n_2'^2 = n^2 - k^2 - 2ink = P + iQ$

$$n^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{P^2 + Q^2} + P),$$

$$k^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{P^2 + Q^2} - P).$$

Mit den Werten

$$n_1 = 1{,}53, \quad N = 1{,}55, \quad K = 0{,}03, \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{300}$$

erhält man

$$n = 0{,}18, \quad k = 1{,}52.$$

Da die benutzten Ausgangswerte auf große Genauigkeit keinen Anspruch machen können, mögen noch die Werte von n und k angegeben werden, die man unter Benutzung anderer Ausgangszahlen erhält. Nähme man N zu 1,54 bez. 1,56 an, unter Beibehaltung der anderen Zahlen, so würde $n = 0{,}23$, $k = 1{,}47$; bez. $n = 0{,}13$, $k = 1{,}54$. Behielte man $N = 1{,}55$ und $K = 0{,}03$ bei, nähme aber v_2/v_1 statt zu $^1/_{300} = 0{,}0033$ zu 0,0023 ($\zeta = 0{,}01$) bez. zu 0,0046 ($\zeta = 0{,}02$) an, so würde man erhalten $n = 0{,}12$, $k = 1{,}69$; bez. $n = 0{,}25$, $k = 1{,}56$. Jedenfalls liegt n immer weiter unter Eins. Nun sind nach Drude (Optik, p. 338) für metallisches kohärentes Ag und gelbes Licht $n = 0{,}18$, $k = 3{,}67$. Es ergibt sich also, daß die Anwendung der erweiterten Lorenz-Lorentzschen Formel zur Berechnung der Konstanten des Niederschlages in der Lippmannschen Schicht zu Werten führt, die bezüglich des Brechungsindex dem des metallischen Ag nahekommen, wäh-

rend der Absorptionskoeffizient bedeutend kleiner ist. In der Tat sprechen die jetzt mitzuteilenden Versuche dafür, daß durch die feinere Zerteilung einer gegebenen Silbermenge der Absorptionskoeffizient herabgedrückt wird. Nun bezeichnet Wernicke Silber im Zustande feinster Zerteilung, wobei die Kohäsion herabgesetzt ist, als „molekulares" Silber[1]) und vermutet, daß die von Drude für Oberflächenschichten von Silberspiegeln gefundenen Werte $n = 4$, $k = 2{,}8$ als diejenigen des molekularen Silbers anzusprechen seien. Diese Zahlen stehen, besonders was den Brechungsindex angeht, in großem Gegensatz zu den hier gefundenen Werten für feinst zerteiltes Silber. Es muß also wohl vorläufig der Schluß gezogen werden, daß das Material jener Oberflächenschichten von dem Material der Lippmannschen Schichten wesentlich verschieden sei, vielleicht z. B. aus Oxydationsprodukten des Silbers bestehe, während für die hier vorliegenden Teilchen die Vermutung nahe liegt, daß sie nicht aus molekular verteiltem Silber, sondern aus größeren Molekülaggregaten bestehen, deren optische Konstanten denen des kohärenten Ag nahekommen.

Farbenumschlag und Absorptionsänderung.[2])

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, zeigen die Platten verschiedene Eigenschaften im nassen und im trockenen Zustande.

Die Erscheinung besteht sowohl in einer *Verschiebung* des Absorptionsmaximums, als auch in einer *Veränderung seiner absoluten Größe.* Sie wurde zufällig bei Platten beobachtet, welche streifenweise belichtet und mit Pyrogallol entwickelt waren. Nach dem Fixieren zeigten die noch nassen Platten an den belichteten Stellen eine gelbbraune, etwa ockerfarbige, Farbe und im übrigen einen gleichmäßigen Schleier von nicht näher zu definierender Färbung. Als die Platten nun getrocknet waren, zeigte sich, daß einerseits die belichteten Streifen viel dunkler geworden waren, andererseits der vorher an den unbelichteten Stellen nur als schwache Trübung zu

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 52. p. 523. 1890.

2) Auch schon in den Ber. der kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. p. 261. 1903.

erkennende Schleier eine deutlich blaue bis violette Farbe angenommen hatte. Erneutes Befeuchten der Schicht stellte den alten Zustand wieder her.

Durch diese zufällige Beobachtung aufmerksam gemacht, untersuchte ich andere Platten auf diese Eigenschaft hin und fand, daß sie bei allen mehr oder weniger stark ausgeprägt war. Am deutlichsten war das Phänomen bei den in trockenem Zustande blauen Platten, die durch Aufquellen oft beinahe karminrot wurden. Wenn nun auch bei einzelnen ausgezeichneten Präparaten dieser Farbenumschlag so stark war, daß das Absorptionsmaximum beim Aufquellen der Schicht von einem Ende des Spektrums bis ans andere zu wandern schien, so war dies doch nicht bei allen der Fall. Namentlich die grünen Platten haben sich als von großer Konstanz der Farbe erwiesen. Bei genauerem Zusehen fand man allerdings, daß von einer wirklichen Unveränderlichkeit nicht die Rede sein konnte, wenngleich die Färbung immer grün blieb.

Bei den nur schwer zu definierenden Farbentönen, welche das durchfallende Licht besitzt, da das Absorptionsmaximum sehr flach ist, konnte durch bloßes Betrachten der Platten nicht sicher festgestellt werden, in welcher Weise die Verschiebung des Maximums vor sich ging. Es schien ja so, als ob, wie z. B. ganz deutlich bei den blauen Platten, das Aufquellen eine Verschiebung des Maximums nach kleineren Wellenlängen zur Folge hätte; jedoch mußte das durch Aufnahme der Absorptionskurven verifiziert werden.

Was jedoch sofort in die Augen fiel, war der Umstand, daß der absolute Betrag der Absorption bedeutend geringer wurde, wenn man die Platten benetzte.

Um nun zu untersuchen, ob die Gegenwart des Wassers, das ich zum Aufquellen der Gelatine benutzte, nötig sei, um die Erscheinung hervorzurufen, d. h. ob chemische Wirkungen die Ursache seien, lockerte ich bei Platten, die deutlichen Farbenwechsel zeigten, die Gelatine mit wasserfreier Essigsäure (Eisessig) auf. Der Erfolg war derselbe wie beim Aufquellen mit Wasser, nur quantitativ ein wenig geringer. Ich nahm daher zu Messungen immer Wasser, das bequemer zu handhaben ist, da die Essigsäure die Platten leicht zerstört.

Die Absorptionskurven wurden nun, übrigens in derselben

Weise wie oben, so aufgenommen, daß die Platte in trockenem Zustande in einen Leyboldschen Trog gesetzt wurde. Dann wurde die Absorptionskurve in der bekannten Weise bestimmt. Darauf goß ich Wasser in den Trog, der samt der Platte dabei ruhig an seiner Stelle blieb, und bestimmte die Absorption von neuem.

Eine Bestimmung der absoluten Werte von $n\,\varkappa$ für diese Platten mußte aus dem Grunde unterbleiben, weil die Dickenmessung der aufgequellten Gelatine sich als untunlich erwies. Das Auflegen einer Glasplatte verbot sich ohne weiteres, und Interferenzen in der Schicht waren auch nicht zu beobachten, weil die Schicht viel zu dick geworden war und auch wohl nicht ganz gleichmäßig aufquoll.

In den unten angeführten Tabellen 13 und 14, sowie in Figg. 6 u. 7 sind die Resultate der Absorptionsmessungen zur Darstellung gebracht. Platte 15 war mit Rodinal unter ziemlich reichlichem Bromkali- und Ammoniakzusatz entwickelt und war trocken purpurfarben, naß schmutzig grün, Platte 20 mit Metol, und zwar mit einer ziemlich alten Lösung. Diese Platte war trocken rein blau, naß rot. Zum Aufquellen war in beiden Fällen Wasser benutzt worden.

Wie schon oben erwähnt wurde, hält der Farbenumschlag nur so lange an, wie die Aufquellung der Gelatine; beim Eintrocknen derselben stellt sich wieder die alte Farbe her.

Tabelle 13.

(Platte 15, purpur.)

λ in $\mu\mu$		450	480	500	520	540	560	580	589,5	600	625	650
Promille abs.	naß	984,4	983,8	975,5	972,7	966,5	963,0	962,3	966,2	970,8	964,3	963,3
	trocken	983,4	985,8	986,6	987,3	985,8	982,8	981,7	—	980,2	976,6	973,8

Die zugehörigen Kurven (Fig. 6) zeigen deutlich den Einfluß der Aufquellung. Die Kurve für die trockene Platte ist viel flacher[1]), gewissermaßen breit gezogen, wenn sie auch fast durchweg höher liegt. Ihr Hauptmaximum liegt weiter nach Rot. Das zweite, kleine Maximum bei 600 $\mu\mu$, das die andere

1) Wie dies auch schon oben bei den Absorptionskurven lufttrockener und absolut trockener Platten zu sehen war.

Kurve zeigt, kommt in dem untersuchten Spektralbereiche nicht mehr zum Ausdruck.

Tabelle 14.

(Platte 20, blau.)

λ in $\mu\mu$		446	450	475	500	525	550	575	600	625	650
Proz.	naß	—	84,86	87,26	88,80	90,02	91,08	90,60	89,78	85,66	81,22
abs.	trocken	85,4	—	87,70	89,44	90,84	91,66	92,50	92,94	91,88	91,40

Die Dicke der Emulsion in trockenem Zustande betrug an dieser Stelle etwa 1100 $\mu\mu$. Aus den Kurven (Fig. 7) wird deutlich, daß die trockene Platte blau, die nasse dagegen

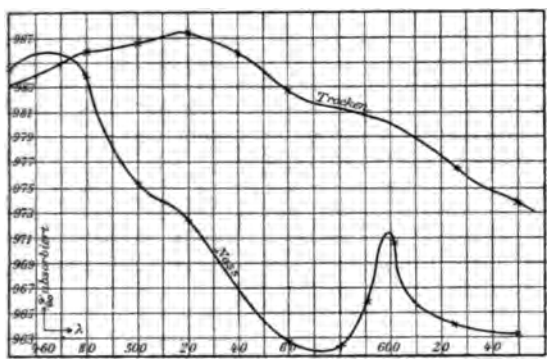


Fig. 6.

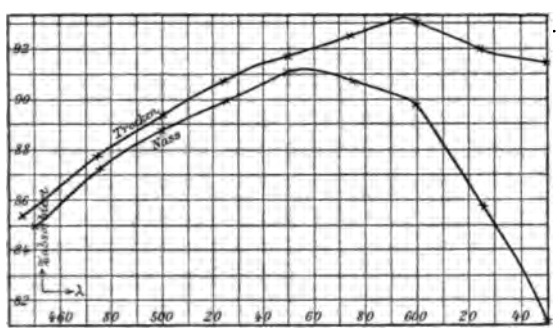


Fig. 7.

rot aussehen mußte, was bei diesem Präparat in großer Schönheit zu sehen war. Übrigens genügte hier schon ein Anhauchen, um den Farbenwechsel hervorzurufen.

Eine Erklärung dieser Erscheinungen suche ich in einer Art Resonanzwirkung. Wenn man sich in einem Dielektrikum verteilte leitende Körper von bestimmter Größe denkt, so kann man jeden als Resonator ansprechen. Die Schwingungsdauer eines solchen wird abhängen erstens von seiner Größe, zweitens von der Natur des umgebenden Dielektrikums, drittens von der größeren oder geringeren Nähe der benachbarten Resonatoren und der damit zusammenhängenden größeren oder geringeren Dämpfung.

Die Schwingungsdauer nimmt zu mit der räumlichen Ausdehnung des Resonators, ferner mit der Annäherung der benachbarten Resonatoren, und drittens mit der Vergrößerung der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums.[1])

Nun schirmt bekanntlich ein Resonator aus einem Komplex verschiedener Wellen gerade diejenige ab, die mit seiner Eigenperiode gleiche Schwingungsdauer hat.[2])

Die Größe der Absorption ist, wie Planck[3]) bewiesen hat, „proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität der Eigenschwingung des Resonators, ferner in seinem logarithmischen Dekrement und dem Kubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional der Schwingungszahl".

Eine Anordnung wie die oben besprochene liegt offenbar vor in der mit Silberteilchen durchsetzten Gelatine. Beim Aufquellen der Gelatine kann nun folgendes eintreten: Erstens, und das wird sicher eintreten, kann die Entfernung der einzelnen Resonatoren voneinander eine größere werden. Zweitens kann sich die Lichtgeschwindigkeit in der Gelatine ändern. Da diese aber wahrscheinlich von geringem Einfluß ist und, wenn die Absorptionskurve unter diesem Einfluß ihre Form ändern würde, diese Änderung ganz anders aussehen müßte, als wie sie bei meinen Präparaten zu beobachten war, so wird es um so wahrscheinlicher, daß infolge der geringeren Koppelung die Schwingungsdauer der einzelnen Resonatoren kleiner

1) E. Aschkinass u. Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 5. p. 489. 1901.

2) A. Garbasso, Atti. Acc. di Torino, 28. p. 475. 1893: „Un risonatore assorbe le onde aventi la lunghezza, che ad esso corrisponde secondo la teoria, e assorbe quelle sole".

3) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 92. 1900.

wird, wodurch dann das Absorptionsmaximum sich nach kleineren Wellen hin verschiebt. Aus demselben Grunde wird auch die Größe der Absorption abnehmen. — Inwiefern eine etwa erhöhte Leitfähigkeit der Gelatine von Einfluß ist auf die beobachteten Erscheinungen, lasse ich dahingestellt. Vermutlich wird der Entfernungszuwachs zwischen den Resonatoren den Hauptanteil haben.

Diese Folgerungen werden nun, wie die Tabellen und Kurven zeigen, durch die Beobachtung vollständig bestätigt.[1])

Im Zusammenhange mit den hier beschriebenen stehen auch die Beobachtungen von Wernicke[2]) an sog. „molekularem" Ag. Da man doch wohl den „molekularen" Zustand als einen solchen definieren muß, bei dem die Moleküle oder Molekülgruppen des Metalles durch irgend welche Zwischenlager getrennt sind, haben wir also bei dem molekularen Ag Wernickes und meinen mit Ag-Teilchen beladenen Gelatinklümpchen offenbar dieselben Verhältnisse. Nach Wernicke „bewirkt die Kohäsionskraft eines Metalles eine Verschiebung des Absorptionsmaximums nach der Seite der größeren Schwingungsdauer". — Die Wirkung der Kohäsionskraft ist nun doch zunächst ein Zusammendrängen der Moleküle bez. Molekülgruppen. Die Verschiebung des Absorptionsmaximums folgt dann sekundär aus dieser Zusammendrängung.

Als obige Untersuchungen und Überlegungen schon abgeschlossen waren, erschienen zwei Arbeiten, die in gewisser Weise dasselbe Thema berühren; eine theoretische von Planck[3]) und eine experimentelle von Wood.[4]) Wood beobachtete eine den hier berührten ganz analoge Erscheinung an dünnen Häuten von Alkalimetallen, die er durch Destillation im Vakuum herstellte, und sucht eine Erklärung in derselben Weise wie ich. — Planck stellt eine Dispersionstheorie für isotrope Dielektrika auf, unter der Annahme, daß im Äther ruhende Resonatoren verteilt sind und kommt zu dem Resultat,

1) Vgl. hierzu M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 480ff. 1903.

2) W. Wernicke, Wied. Ann. 52. p. 527. 1894.

3) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. Maiheft. 1902.

4) R. W. Wood, Phil. Mag. (6) 3. p. 396. 1902.

daß eine Zusammendrängung der Resonatoren eine Erhöhung des Absorptionsmaximums, sowie eine Verbreiterung desselben, und zwar schneller nach Rot als nach Blau, zur Folge hat. Namentlich dieser letztere Umstand ist von Interesse, da er bei meinen Präparaten deutlich ausgeprägt ist und es wahrscheinlich macht, daß man Plancks Theorie auf die von mir beobachteten Erscheinungen anwenden darf.

Ob nun die angenommenen Resonatoren im vorliegenden Falle wirkliche Moleküle sind oder ob es Komplexe von solchen sind, die aber immerhin klein gegen eine Wellenlänge sein können, läßt sich nicht sicher entscheiden. Jedoch halte ich es für wahrscheinlicher, daß die Ag-Teilchen aus Molekülgruppen bestehen, wegen der Analogie mit den kolloidalen Goldlösungen, in denen man die Teilchengröße ungefähr kennt.[1])

Leipzig, Physik. Institut der Universität.

1) Vgl. H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10 p. 1. 1903.

(Eingegangen 7. Oktober 1903.)

3. *Über den Resonanzverlauf erzwungener Schwingungen;*

von R. Hartmann-Kempf.

(Hierzu Taf. IV—VII.)

(II. Teil des Referates aus der Abhandlung: Elektroakustische Untersuchungen.)

Unter akustischer Resonanz wird meistens schlechtweg das auffällige Mitschwingen eines Klangkörpers verstanden, wenn Konsonanz, d. h. Gleichklang oder Frequenzgleichheit, mit einer periodischen Erregerkraft vorliegt. Richtiger aber spricht man von der Stelle eines Resonanzmaximums und von einem Resonanzgrad, d. h. dem Verhältnis irgend einer Resonanzamplitude zu der bei gleich starker Erregerfrequenz beobachteten maximalen Resonanzamplitude.

Dagegen läßt sich der Begriff der Konsonanz unzweideutig definieren, sobald es sich um konstante Schwingungszahlen oder Frequenzen zweier voneinander unabhängiger Körper oder pulsierender Kräfte handelt. Streng genommen kann die akustische Konsonanz nur unter zwei gleichartigen, von der Amplitude in gleicher Weise abhängigen Eigenschwingungen bestehen, da, wie wir im ersten Teil des Referates erneut gesehen haben, die Schwingungszahl eines Klangkörpers je nach seiner Beschaffenheit eine kompliziertere Funktion der Amplitude ist; somit leuchtet es ein, daß zwischen einem frei abklingenden Klangkörper und der konstant gehaltenen Frequenz eines pulsierenden magnetischen Feldes nur für eine einzige oder einzelne Amplitude Konsonanz bestehen kann, und daß man für den ganzen Tonverlauf nur von einer annähernden oder mittleren Konsonanz reden darf.

M. Wien[1]) hat bewiesen, daß die früher allgemein verbreitete Annahme, es falle die Schwingungszahl des Systems nach aufgehobener Dämpfung bei maximaler Resonanz mit der Frequenz der erzwingenden Kraft zusammen, unrichtig sei. Besagter Autor hat ausgerechnet, daß die Stelle maximaler Resonanz sogar noch tiefer liegt, als die Tonhöhe der gedämpften Schwingungen, und zwar um den nämlichen Betrag, um welchen letztere bereits von der sogenannten natürlichen, d. h. ungedämpften Schwingungszahl, abweicht. Für die musikalische Bedeutung der meisten Klangkörper deckt sich die Resonanzstelle mit der Konsonanzstelle.[2]) Wohl aber kommen die Verschiedenheiten in Betracht, wenn es sich darum handelt, einen Klangkörper auf eine bestimmte Frequenz maximal ansprechen zu lassen, z. B. ein Vibrationsrelais auf die konstant gehaltene Periodenzahl eines Erregerstromes von schwankender Intensität. Wir dürfen im voraus sagen, daß das Bereich maximaler Resonanz eines mit der Amplitude tiefer werdenden Klangkörpers, z. B. einer Stimmgabel, mit wachsender Amplitude in stets stärkerem Grade nach der tieferen Lage wandert, ohne damit zugleich alle Nebenerscheinungen überblicken zu können; dagegen ist es kaum möglich, das Resonanzbereich eines zungenförmigen Stahlfederbandes mit Hilfe mathematischer Spekulation zu ermitteln; wir sind bei Klangkörpern, deren Verstimmung in solch wechselnder Richtung von der Amplitude abhängig ist, wie wir es bei einer eingespannten Feder kennen gelernt haben, vollständig auf das Experiment angewiesen.

Auch liegt der Hauptreiz der Ergebnisse im Anschauen der Resonanzkurven, welche ich deshalb unverkürzt in den lithographischen Tafeln vorlegen will. Die Übersichtlichkeit der graphischen Darstellung gestattet eine knappere Form der Erläuterungen; selbstredend bedarf es zum Verständnis der

1) M. Wien, Über die Periode, für welche die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ein Maximum wird. Wied. Ann. 58. p. 725. 1895.

2) Es gehört ein sehr geschultes Ohr dazu, um das geringe Höherwerden des Tones im ersten Augenblick der plötzlichen Wegnahme des Bogens von einer gestrichenen leeren Geigensaite wahrzunehmen; der Unterschied ist geringer als die Schwankungen der Tonhöhe bei starkem und leisem Streichen.

meisten Eigentümlichkeit einer vorangehenden Kenntnisnahme der Resultate des ersten Teiles dieses Referates; nötigenfalls können etwaige Unklarheiten durch die ausführlichere Beschreibung in der Originalabhandlung gehoben werden.

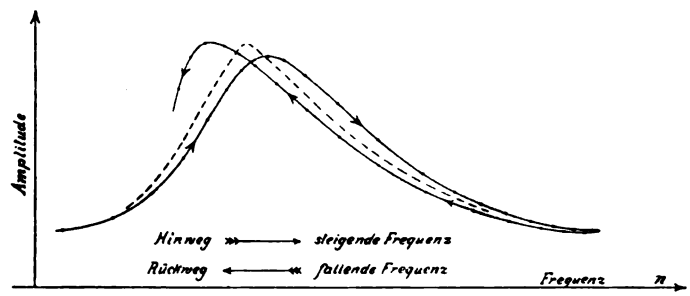
Es muß jedoch vorher noch eine kurze Kritik über die Zulässigkeit der bisher angewandten Methode Platz finden.

Zwei Wege können eingeschlagen werden: der absolut zuverlässige besteht in der Ermittlung des Resonanzbereiches aus stationär gehaltenen Amplituden, zu welchen nach dem früher (p. 131) beschriebenen optischen Schwebungsverfahren die Frequenz des Erregerstromes ermittelt werden kann. Es ist aber sehr schwierig, die Frequenz des erregenden Magnetfeldes so konstant zu erhalten, daß der Resonanzgrad keine Änderung erfährt. Mit einem gut gebauten Saitenunterbrecher läßt sich das unschwer bewerkstelligen; die Fälle der Praxis verlangen aber auch die Verwendung von Wechselströmen aus Generatoren, jedoch setzt es eine große Vertrautheit mit der Behandlung der Maschine voraus, um ihre Tourenzahl auf mindestens 1 Promille genau aufrecht zu erhalten. Diese Erfahrung gewann ich erst nach längerem Arbeiten an dem zum speziellen Zwecke angeschafften und jetzt im Besitz des Physikalischen Institutes zu Würzburg befindlichen Maschinensatze, einem sogenannten Gleichstrom-Drehstromumformer von Siemens & Halske, A.-G., welcher — relativ genommen — sehr gleichmäßig lief.

Das zweite, anfänglich von mir angewandte Verfahren ist leichter zu handhaben. Es schließt sich den Vorgängen bei der praktischen Handhabung von Resonanzinstrumenten insofern besser an, als es von dem Resonanzverlauf ein solches Bild wiedergibt, wie wir es beim Einstellen einer Frequenz zu sehen bekommen. Man läßt nämlich die Erregerfrequenz das Resonanzbereich nach zwei Richtungen passieren, d. h man steigert sie langsam von einer tieferen nach einer höheren Lage bis zur Überschreitung der Maximalresonanzstelle und durchläuft dann die nämliche Strecke in umgekehrter Richtung.

Wennschon es interessant ist, das der Wirklichkeit entsprechende Bild wiederzugeben und dabei manche Begleiterscheinungen photographisch festzuhalten, so muß man doch eine Fehlerquelle mit in Kauf nehmen, die in dem sogenannten

Phasensprung ihren Sitz hat. Bekanntlich besteht zwischen der Erregerperiode[1]) und der erzwungenen Schwingungsperiode ein Phasenabstand, der von dem Minimalwerte, woselbst der Eigenton viel tiefer liegt als die Erregerfrequenz, erst ganz langsam und dann ebenso schnell bis auf 90° anwächst, als die anfängliche schwache Resonanz zu voller Resonanz anschwillt. In dem Maße wie die Amplitude nach Überschreiten der Resonanzstelle nachläßt, vergrößert sich wiederum der Phasenabstand, um schließlich asymptotisch 180° zu erreichen. Wenn also die Resonanzkurve sehr steil aufschießt, so bezeichnet man das Wandern des Phasenabstandes sehr treffend mit Phasensprung. In unseren Kurven vollzieht sich dieser,



Schema einer Resonanzkurve für Stimmgabeln

wenn auch nicht mit einem Male, so doch ziemlich lebhaft. Wir setzten bisher stillschweigend Synchronismus zwischen der Periode des Magnetfeldes und der Schwingungsperiode voraus und durften daher die Dauer einer optischen Schwebungsperiode als genaues Maß für den Frequenzabstand des Stromes sowie des Klangkörpers von der normalen Frequenz des Stimmgabellichtblitzapparates ansehen. Nunmehr aber bleibt die Zahl der erzwungenen Schwingungen beim Passieren des Resonanzbereiches beim Hinweg um fast 180° zurück, und beim Rückweg eilt sie um ebensoviel vor (vgl. vorstehende Figur).

1) Als Periode der erzwingenden Kraft ist hier nicht etwa die Periode des Wechselstromes zu verstehen, sondern die Periode der magnetischen Wirkung eines Polwechsels, die immer — weil nur anziehend — im nämlichen Sinne erfolgt.

Es wird deshalb beim Hinweg die Stromfrequenz zu tief, und beim Rückweg zu hoch berechnet. Die Folge ist, daß zwei Resonanzkurven ermittelt werden, welche den wirklichen Verlauf umhüllen, und die sich ihm um so mehr nähern, je langsamer die Tourenzahl der Maschine variiert wurde, d. h. je mehr Schwingungen das Photogramm innerhalb des Resonanzbereiches aufweist. Dieses Maß findet in der Anzahl und Ausdehnung der auswertbaren Sehwebungsperioden seinen sichtbaren Ausdruck, daher wird man beim Schätzen des wirklichen Verlaufes kaum einen störenden Fehler begehen können.

Die durch Schätzen gefundenen Kurven (lithographische Farbentafel V u. VI) sind kräftig gestrichelt und in gleicher Farbe wie die dünneren, zusammenhängenden errechneten Kurvenlinien angelegt. Die aus stationären Amplituden ermittelten Resonanzkurven erhielten eine mittelstarke Strichdicke.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der Versuchsbedingungen ist wohl unnötig, da die Überschriften auf den lithographischen Tafeln die Orientierung ermöglichen werden.

Wir wollen uns zunächst den Resultaten zuwenden, welche über die Verwendbarkeit einer Stimmgabel als Resonanzinstrument Aufschluß geben.

Als brauchbar, wenngleich nicht ohne Einschränkung, hat sich die Stimmgabel von R. König erwiesen, dank ihrer zufällig vorhandenen relativ starken Dämpfung. Im Gegensatz zu der vielfach vorhandenen Meinung eignen sich gute Normalstimmgabeln von geringer Dämpfung, wie z. B. die von M. Kohl, sehr wenig zur Frequenzmessung, selbst nicht bei skalenartiger Anordnung. Erstens kann man die Tourenzahl eines Generators gar nicht so genau einstellen oder aufrecht erhalten, daß das Resonanzmaximum stehen bleibt, weil die Resonanz bei der geringfügigsten Störung oder Schwankung erlischt, und zwar unter gleichzeitigen starken Schwebungserscheinungen; außerdem braucht diese Stimmgabel sehr lange, um überhaupt in die maximale Resonanzamplitude hineinzuwachsen. Die Neigung zur Schwebungsbildung hängt mit der großen lebendigen Kraft der massiven Gabel zusammen, der gegenüber die Energie der erzwingenden Kraft sehr gering bleibt. Es wäre aber verfehlt, die Erregerkraft zu steigern, weil sonst die maxi-

male Resonanz die für das Material zulässige Höhe überschreiten würde. Dagegen verhält es sich mit der Verwendbarkeit schwach gedämpfter Stimmgabeln zu selbsttätigen Unterbrechern gerade umgekehrt; doch können wir hier dieser Betrachtung keinen Raum geben.

Kurvenblatt IX auf Taf. V zeigt den Resonanzverlauf der Stimmgabel König bei Erregung durch Wechselstrom und intermittierenden Gleichstrom. Die Resonanzmaxima sind durch gestrichelte Linien verbunden, desgleichen ist die Tonhöhe der frei abklingenden Stimmgabel angegeben. Wir sehen, daß das Wandern des Resonanzbereiches nach der Tiefe im großen Ganzen nur von der Verstimmung abhängig ist, welche die Stimmgabel durch den Einfluß der Amplitude erleidet. Die Resonanz bei Erregung durch Wechselstrom liegt sogar um ein Geringes höher, während die Resonanz auf intermittierenden Gleichstrom das Maximum allerdings nach der tieferen Frequenz verlegt. Mit Ausnahme der anormal starken Erregung (Aufnahme 18) ist das Hinuntergedrücktwerden des Resonanzmaximums merkwürdig gering und insofern auffällig, als die Theorie, wie schon eingangs des Referates erwähnt, die maximale Resonanz einer Frequenz zuspricht, welche um das Doppelte des Betrages, um den die Schwingungszahl des gedämpften Systems von derjenigen des ungedämpften differiert, weiter nach abwärts liegt. Die Frequenz der ungedämpften Eigenschwingung ist ca. 101,5; die Verstimmung, welche wir, solange nichts anderes bekannt ist, nur auf Kosten der Dämpfung zu setzen haben, beträgt z. B. bei $\alpha = 1{,}3°$ bereits 0,5 Schwingungen, d. h. der Eigenton wäre 101,0 Schwingungen. Das zugehörige Resonanzmaximum müßte demnach bei 100,5, also 0,5 Proz. tiefer liegen. Die weitere Vertiefung ist aber, wie die Kurve lehrt, nur 0,07 Proz. groß, bei Wechselstromerregung beobachten wir sogar eine Erhöhung um 0,02 Proz. Wir haben jedoch früher bereits gesehen, daß Verstimmung und Dekrement wohl in gesetzmäßigem Zusammenhang zu stehen schien, daß aber das Verhältnis mit der gewohnten theoretischen Berechnung nicht im entferntesten im Einklang stand, da diese noch nicht den hundertsten Teil der wirklich beobachteten Erniedrigung ausmacht. Diese Unstimmigkeit dürfte schon geeignet sein, uns auf diesen neuesten Wider-

spruch vorzubereiten. Glücklicherweise bringt die Resonanz nicht abermals eine wesentliche Verstimmung zu dem ohnehin reichlichen Betrag, denn sonst wäre die Brauchbarkeit einer Stimmgabel als Resonanzinstrument überhaupt ausgeschlossen, d. h. es würden die demnächst näher zu besprechenden Unzuträglichkeiten nicht erst bei großen, sondern schon bei mittelgroßen Amplituden überhand nehmen.

Betrachten wir genau die Autotypie der Aufnahme 22 auf Taf. VII. Diese ist wegen des charakteristischen Verlaufes fast unverkürzt wiedergegeben. Wir sehen zunächst bei steigender Erregerfrequenz einen allmählichen Anstieg zum Resonanzmaximum, ebenso vollzieht sich nach dessen Überschreitung die Abnahme. Auf dem Rückwege, also nach dem Umkehrpunkt, steigt die Amplitude wieder an; es entsteht aber nicht etwa das Spiegelbild der ersten Hälfte, sondern die Amplitude bleibt in maximaler Stärke an der fallenden Erregerfrequenz geradezu festhaften, bis endlich ein plötzlicher, von starken Schwebungen begleiteter Absturz der Resonanz ein Ende setzt. Die Erklärung dieser für den Resonanzverlauf an Stimmgabeln durchaus typischen Erscheinung macht keine Schwierigkeiten. Wir wissen, daß die wachsende Amplitude den Ton vertieft; also halten fallende Frequenz und wachsende Amplitude annähernd gleichen Schritt, und der nämliche Resonanzgrad bleibt eine Zeitlang aufrecht erhalten. Das Bild wäre ein ähnliches, wenn eine Anzahl in ganz feinen Intervallen abgestimmte, von der Amplitude unbeeinflußte Stahlzungen nacheinander von der fallenden Frequenz zur Resonanz gebracht würden; jede Zungenfeder repräsentierte dann eine bestimmte, durch die Amplitude gegebene Eigenschwingung der Stimmgabel.

Nach dem plötzlichen Aufhören dieses Zustandes treten starke Schwebungen auf, die steten Begleiterscheinungen bei irgend einem äußeren Anlaß, der zur ruckweisen Störung des Resonanzgrades bez. des Phasenabstandes führt (z. B. Ein- und Ausschalten des Stromes, Berühren mit dem Finger etc.). Auch bei schwächerer Erregung verderben die Schwebungen das Resonanzbild; wennschon hier der Abbruch nicht so hart erfolgt, so können doch Schwebungen eher auftreten, weil die Dämpfung bei kleinen Amplituden geringer ist.

Wir müssen also wohl zur Einsicht gelangen, daß auch die stark gedämpfte Stimmgabel entweder ein unbequemes oder — bei größeren Amplituden — ein ungenaues Resonanzinstrument zur Frequenzbestimmung ist.

Taf. VI zeigt uns den Resonanzverlauf an den übrigen, im ersten Teile des Referates besprochenen, federbandartigen Resonanzkörpern.[1]) Blatt XXX lehrt die Abhängigkeit der Resonanzmaxima von der Stärke der Erregung. Der kräftige Erregermagnet stand so weit von dem freien Federende ab, daß eine merkliche Vergrößerung der Dämpfung durch Luftwiderstand nicht zu befürchten war. Die hier nochmals aufgetragene Höhe des Eigentons bestimmt wiederum die ungefähre Lage der Resonanzmaxima; für kleine Amplituden freilich liegen sie höher, eine Erscheinung, die an das Verhalten der durch Wechselstrom erzwungenen Stimmgabelschwingungen erinnert, und die an selbsttätig sich erregenden Stimmgabeln auch von anderen Beobachtern erwähnt wurde. Das Resonanzbild der Aufnahmen ist bei kleinen Amplituden häufig durch Schwebungen gestört, deshalb läßt sich das Maximum nicht so gut ermitteln wie bei stärkeren. Bis zu Amplituden über $2\mathfrak{A} = 10$ mm ist eine genaue Frequenzmessung oder ein scharfes Einstellen auf Frequenzen von schwankender Stromstärke so wenig möglich, wie bei der Stimmgabel für deren gesamtes Amplitudenbereich. Anders gestaltet sich die Lage

1) Die Wiedergabe der Originalaufnahmen wurde hier naturgemäß tunlichst beschränkt, und zwar auf folgende typische Aufnahmearten: Aufnahme Nr. 92 auf Photographietafel IV und Nr. 80 auf Autotypietafel VII. Das Original zu letzterer eignete sich besonders wegen seiner photographischen Kontraste zur autotypischen Reproduktion; zudem illustriert es deutlich den nachteiligen Einfluß eines experimentell zu schnell hergestellten Resonanzverlaufes. Es vollzieht sich nämlich die Änderung der Erregerfrequenz an der sattelartigen, die Umkehrstelle einschließenden Abschnitt zu schnell; man vgl. hierzu die Auswertung, Kurve 80 auf Blatt XXXI, Taf. VI, unter Berücksichtigung des auf p. 274 über den Phasensprung Gesagten.

Das Photogramm 92 ist aus zwei kleinen Stücken der Originalaufnahme zusammengesetzt. Es soll das Verfahren charakterisieren, [illegible] Resonanz aus stationär gehaltenen Amplituden zu ermitteln. [illegible] weißen Flecke entsprechen den längeren Pausen, während [illegible] [illegible]erfrequenz geändert und die Filmfolie (bez. die [illegible] wurde, bis der gewünschte Resonanzgr

der Resonanzmaxima bei stärkerer Erregung, wie aus der strichpunktierten Verbindungslinie herausgeht. Da liegen die Kulminationspunkte der Kurven so senkrecht übereinander, daß von einer Abhängigkeit der Resonanzlage von der Amplitude der Erregung kaum mehr die Rede sein kann; und es ist interessant zu sehen, wie schön das beim Schwingen sich verkürzende Trägheitsmoment einer Feder alle vertiefenden Einflüsse gerade ausgleicht. In welchen Ursachen diese Vertiefung zu suchen ist, soll hier nicht weitläufig erörtert werden; doch sei an den tonvertiefenden Einfluß eines permanenten Feldes erinnert, wie wir ihn früher bei dem Stahlfederband, der Stahlzunge und am stärksten bei der schwachen Relaisfeder bemerkt haben.

In der Aufnahme 72 ist die Erscheinung festgehalten, daß zu einer bestimmten Frequenz zwei verschiedene Resonanzamplituden gehören können. Bei einer langsam und gleichmäßig vorgenommenen Frequenzänderung spricht die geringere Resonanzamplitude an; jedoch kommt es bei ruckweisem Steigern der Frequenz ziemlich häufig vor, daß sich zwischen dem mit der abklingenden Amplitude höher werdenden Eigenton der Feder und der erzwingenden Frequenz ein günstiger Resonanzgrad ausbilden kann, der erst bei wesentlich höher gestiegener Frequenz gestört wird. Es bildet dieser Fall, dem wir noch einige Male begegnen werden, in gewissem Sinne ein Analogon zu dem Haften der Resonanz der stark erregten Stimmgabel an der sinkenden Frequenz, wie wir es auf Taf. VII sahen.

Die Aufnahmen 78 und 79 wurden zur speziellen Erforschung eines etwaigen durch Erregung mit verschiedener Stromart herbeigeführten Unterschiedes angestellt. Das Ergebnis lautet wider Erwarten dahin, daß die Resonanzstelle bei Erregung durch intermittierenden Gleichstrom höher liegt. Eine sichere Erklärung vermag ich nicht zu geben; vielleicht spielt die Dämpfung durch Foucaultströme in den Metallmassen der Feder bei Wechselstrom eine wichtigere Rolle als bei pulsierendem Gleichstrom.

Für einzelne Fälle mag sich die Verwendung derartig [illegible] Stahlfederbänder zu Resonanzindikatoren empfehlen, [illegible]tätigen von Resonanzrelais mit verhältnismäßig [illegible]raft. Jedoch wäre eine etwas mehr symme- [illegible]esonanzkurve erwünscht.

Ein wohlgefälliges Aussehen zeigt Kurve 86 auf Blatt XXXII. Sie stellt das Resonanzbereich einer Stahlzunge bei sehr starker Erregung vor, welches zugunsten der Übersichtlichkeit der lithographischen Tafel nach einer tieferen Lage transportiert wurde. Der Maßstab dieses Blattes und der beiden folgenden ist der gleiche wie in Blatt XXX; jedoch ist zu bedenken, daß der Verbiegung des freien Zungenendes um 1 mm eine größere Bedeutung zukommt, als bei dem Stahlfederband; freilich ist wiederum die Zunge an der Stelle stärkster Durchbiegung wesentlich dünner als dieses, so daß sie eine relativ stärkere Amplitude vertragen sollte. Trotzdem darf man die Zunge mit einer Gesamtamplitude von $2\mathfrak{A} = 22$ mm nicht länger als etwa eine Minute schwingen lassen; ohne solche Unterbrechungen erleidet die Biegungsstelle Strukturänderungen, welche ein Tieferwerden des Eigentones bedingen.

Die mir neuerdings häufiger vorgelegte Frage, ob sich bei andauerndem Schwingenlassen keine Veränderungen zeigen, kann ich dahin beantworten, daß ich nicht den geringsten Einfluß der Dauererregung beobachtete, solange die Amplituden den Betrag von $2\mathfrak{A} = 15$ mm nicht überschritten. Ebenso bleibt eine kurze nur wenige Minuten dauernde Beanspruchung auf $2\mathfrak{A} = 20$ mm ohne jeden nachteiligen Einfluß. Hierbei kommt es natürlich in erster Linie auf die Beschaffenheit des Materiales an. Sehr gut bewährt sich dünnes, 0,4—0,7 mm starkes, gewalztes Stahlfederband. Außerdem gelten diese Erfahrungen nur für die Tonlage von 100 Schwingungen; denn offenbar kommt es weniger auf die absolute Stärke der Ausbiegung an, sondern weit mehr auf die Geschwindigkeit bez. auf die dem Quadrat der Tönhöhe proportionale lebendige Kraft der Bewegung, sowie auf den Reibungswiderstand. Folgender Versuch mag erwähnt werden: Es wurden zwei völlig gleiche Stahlfederbänder von 0,55 mm Dicke und 62 mm freier Länge verwendet; die Schwingungszahl des einen wurde durch Belasten des freien Endes von 100 auf 50 Schwingungen herabgesetzt. Jede wurde mit Hilfe des Saitenunterbrechers dauernd auf der überstarken Maximalresonanz von $2\mathfrak{A} = 30$ mm gehalten. Nach etwa 5 Min. wurde die Feder von $n = 100$ merklich tiefer und die Maximalresonanz schwächer, während die Feder von $n = 50$ unter gleichen Verhältnissen nach

2 Stunden noch keine Veränderung erkennen ließ. Im Zusammenhang mit dieser Frage sei erwähnt, daß seit länger als einem Jahr 0,5 mm dicke Stahlfederbänder von 88 bis 93 Schwingungen Tag und Nacht ununterbrochen schwingen. Diese befinden sich in den Resonanzrelais des Frankfurter Elektrizitätswerkes und erreichen bei voller Resonanz, welche aber wegen des häufigen, wenngleich nur geringen Schwankens der Maschinen nie länger als einige Minuten anhält, eine Amplitude von ca. $2\mathfrak{A} = 14$ mm.

Die Elastizitätsgrenze gewährt gar keinen Anhalt für die Beurteilung der dauernd zulässigen Schwingungsweite; denn eine Verbiegung von mehr als dem doppelten Ausschlag, welcher also etwa $2\mathfrak{A} = 45$ mm entsprechen würde, hat noch keine remanente Deformation bewirken können. Viel wesentlicher ist die Beanspruchung der Biegungsstelle beim Überwinden des Luftdruckes, wie aus den Versuchen im Vakuum hervorging. Wenn bei vollem Luftdruck eine stationäre Amplitude von $2\mathfrak{A} = 22$ mm nach einigen Minuten schon zu einer Strukturänderung der Biegungsstelle führte, so ließ sich an der mit noch größerer Amplitude im Vakuum schwingenden Zunge selbst nach längerem Betriebe kein Nachlassen der maximalen Resonanz bemerken. Die zum Antrieb erforderliche Stromstärke konnte wegen des Fortfalles der Luftdämpfung auf etwa $^1/_3$ vermindert werden. Infolge der geringeren Dämpfung ändert sich auch die Resonanzkurve nach Lage und Form. Es ergibt sich ein viel steilerer Verlauf, was aber keineswegs als Vorteil anzusehen ist. Außerdem zeigt sich hier wieder bei steigender Frequenz eine zweifache Resonanzmöglichkeit, die in dem Höherwerden des Eigentones bei starken Amplituden begründet ist. Diese Erscheinung kann das Gelingen der Messung sehr in Frage stellen; tatsächlich führte sie auch in zwei Fällen zum Abbrechen der Zunge; denn wenn die Tourenzahl der Wechselstrommaschine von der Resonanzstelle an langsam steigt, so nimmt die Resonanzamplitude so lange zu, bis die Biegungsstelle der Zunge reißt. Aus diesem Grunde ist es geraten, zur Ermittelung des Resonanzverlaufes mit anfänglich höher gelegener Frequenz zu beginnen. Im vorliegenden Fall geschah die Aufnahme bei stationären Amplituden, d. h. also absatzweise vergrößerten Schwingungen,

welches Verfahren, wie schon früher erwähnt, größere Übung verlangt.

Die Resonanzfiguren auf Blatt XXXI sind leicht zu verstehen. Die Dämpfung an der ohne Kasten (Metallrahmen) schwingenden Zunge bleibt so gering, daß weder diese noch die anderen vertiefenden Einflüsse die mit der Amplitude wachsende Erhöhung des Eigentones völlig kompensieren. Die Gesamtfigur rückt allerdings nach der Tiefe, aber die maximalen Resonanzgipfel behalten ihre Frequenz bei, woraus man einen erfreulichen Rückschluß auf die Zuverlässigkeit einer Frequenzmessung mittels derartiger Zungen ziehen kann. Freilich gilt diese Sicherheit nur für den Fall, daß man auf die geeichte Frequenzzahl, unbekümmert um die Stromstärke oder Spannung, einstellen will, oder wenn die aufzusuchende Frequenz den günstigsten Resonanzgrad hervorruft. Ist man dagegen auf das Verfahren angewiesen, aus den relativen Schwingungsweiten zweier in der abgestimmten Skala benachbarten Zungen Bruchteile der geeichten Werte zu interpolieren, so muß man eine kleine, höchstens 0,1 Schwingungen betragende Korrektion der geschätzten Zahl zufügen, um sicher zu sein, daß der Messungsfehler 1 Promille nicht überschreitet.

Die Resonanzlage ist bei einer mit Kasten versehenen, also laut tönenden Zunge in etwas stärkerem Maße von der Amplitude abhängig. Da aber bei Messungen die höchst zulässige Amplitude 15 mm nicht überschreiten soll, andererseits die geeichte Resonanztonhöhe sich auf diese Amplitude bezieht, so sind diese Abweichungen immer noch recht klein, so daß man beim Einregulieren einer Frequenzzahl keine Rücksicht auf genaues Einhalten der geeichten Amplitude bez. auf Spannungsschwankungen zu nehmen hat. Andererseits ist hier an den Kurven die günstige durch beiderseits gleiches und gemäßigtes Abfallen charakterisierte Form zu würdigen.

Die Ermittelung sämtlicher auf diesem Blatt abgebildeten Kurven geschah bei stationär gehaltenen Resonanzamplituden.

Es wurde noch versucht, die Zuverlässigkeit der Messungen zu prüfen, wenn durch Annähern der Polfläche des Erregermagnetes an das schwingende Zungenende sowohl durch Luftwiderstand als auch durch magnetische Wirkung die Dämpfung

vergrößert wurde. Die blaue Kurvengruppe zeigt, daß für die Fälle, wo eine Verringerung des Widerstandes des magnetischen Kreises notwendig wird (vgl. Beschreibung p. 127 dieses Bandes), ein nachteiliger Einfluß nicht zu bemerken ist, während die Resonanzkurve bei relativ starker Erregung einseitig verzerrt wird. Man wird also gut tun, von der auf p. 127 genannten Einrichtung nur dann Gebrauch zu machen, wenn die Resonanzamplituden zu schwach ausfallen.

Über den Einfluß der Magnetstellung wurden noch spezielle Versuche unternommen, von denen hier nur mitzuteilen ist, daß von einem gewissen Abstande ab (ca. 13 mm zwischen Ruhelage des freien Zungenendes und oberen Magnetpolfläche) die Resonanzkurven weder in Lage noch Form wesentliche Unterschiede aufweisen.

Blatt XXXIV auf Taf. VI zeigt eine Anzahl Kurven, die sich auf die Resonanz des schwachen Stahlfederbandes beziehen, das zu Kontaktrelais in Aussicht genommen war und dessen Tonhöhe und Dekrement an früherer Stelle einer Besprechung unterzogen worden ist (p. 150ff.).

Die Resonanzkurven sind leicht verständlich. Wenn man sich vergegenwärtigt, daß die Eigentonhöhe mit der Amplitude leicht steigt, so darf es kaum verwundern, daß die beiden Gipfel der blauen und der rot eingeränderten Resonanzfigur übereinanderliegen, wenn auch die Resonanzfiguren selbst infolge der Dämpfung durch Luftwiderstand und dergleichen nicht nur verbreitert, sondern insgesamt nach der tieferen Lage verschoben werden. Die erregende Stromstärke des intermittierenden Gleichstroms blieb bei sämtlichen Phasen dieses Versuches gleich gering; es sollte unter anderem dargetan werden, ob das Entfernen des Luftwiderstandes für ein empfindliches Relais vorteilhaft ist. Allerdings kann der Ausschlag fast das Doppelte erreichen, wie Kurve 93 lehrt, aber es dauert relativ lange, bis dieser maximale Ausschlag erreicht ist, und außerdem tritt auch wieder eine doppelte Resonanzmöglichkeit ein. Wir sehen letzteres auch aus Kurve 92[1]),

1) In der Farbenerklärung für Blatt XXXIV wolle man die rote Linie mit der grünen vertauschen.

deren Aufnahme leider für die rechte, vermutlich von dem roten Kurvenstück wenig abweichende Hälfte nicht auswertbar ausgefallen ist. Für die Erregung durch Wechselstrom, dessen Stärke jedenfalls viel geringer war, ist das Relais noch empfindlicher; man sieht dies aus der Steilheit der Resonanzkurve. Aber für Messungen von sinusartigen Wechselströmen kommen derartige Relais nur ausnahmsweise in Anwendung; ihre praktische Bestimmung wäre vorzüglich, als Resonanzrelais in Empfangsstationen für drahtlose Telegraphie zu dienen. Dies Relais müßte auf die Frequenz der Unterbrechungen an dem auf der Geberstation befindlichen Induktor abgestimmt sein, es würde dann durch die Gleichstromimpulse des Kohärers in Resonanzschwingungen versetzt. Die dahin zielenden Versuche erfordern aber ein Relais, das schnell anspricht, also von starkem Dekrement. Gewöhnlich bringt schon die magnetische Dämpfung des permanenten Feldes, wie es sich z. B. bei der Anordnung des Vibrationsgalvanometers von Rubens vorfindet, eine hinreichend starke Dämpfung mit sich. Wir haben aber gesehen, daß jegliche Art von Dämpfung die Tonhöhe beeinflußt[1]) und daß das Resonanzbereich mit wachsender Amplitude nach der Tiefe wandert, dies um so mehr, je zarter das System ist. Es stehen daher die meisten der bisher versuchten Vergrößerungen der Empfindlichkeit untereinander im Widerspruch, und es wäre eine nicht nur interessante, sondern auch praktisch wertvolle Aufgabe, Mittel und Wege zu finden, einen von der Amplitude nicht abhängigen Resonanzkörper zu finden, etwa dadurch, daß man den Eigenton für jede Amplitude im gleichen Maße durch Änderung der physikalischen Konstanten künstlich steigern würde, als er durch magnetische und andere Dämpfung herabgedrückt wird.

Solche Versuche würden zweckmäßig und viel bequemer nur mit unterbrochenem Gleichstrom ausgeführt.

Ein lehrreiches Photogramm ist auf Taf. IV in Aufnahme 94a reproduziert. Man sieht zunächst das Ansprechen der schwachen Feder bei einem vorher einregulierten möglichst

1) Die Patentanmelder des Rubensschen Vibrationsgalvanometers weisen ausdrücklich auf diese Eigenschaft hin, vermöge deren eine bequeme Abstimmung erzielt werden soll.

günstigen Resonanzgrad. Es sei nochmals hervorgehoben, daß es genau genommen nur für jedes kleine Amplitudeninkrement einen solchen günstigsten Resonanzgrad gibt, daher auch das Anwachsen viel langsamer dauert als das freie Abklingen. Es würde dann das erregende Feld durch Zusatz eines geringen permanenten Stromfeldes verstärkt, in ähnlicher Weise, wie es zum Abstimmen oder zum Empfindlichermachen solcher Relais durch Nähern von permanenten Magneten geschehen kann. Es treten dadurch starke Schwebungen auf, die uns zeigen, daß eine Tonerniedrigung von ca. 4 Proz. eingetreten ist. Dem entspricht der endgültige, in der Abbildung nicht mehr verfolgbare, geringe Resonanzgrad.

Die Erklärung der Resonanzkurve wäre hiermit zu Ende. Es sei mir aber gestattet, im Anschluß hieran auf eine der wichtigsten Begleiterscheinungen zu sprechen zu kommen, die allgemein unter dem Namen der Schwebungen bekannt ist. Obgleich das Phänomen der Schwebungen vielfach besprochen und auch theoretisch untersucht worden ist, glaubte ich doch, eine Anzahl von Abbildungen in meiner Originalarbeit (die verschiedenartigsten Schwebungsformen wurden daselbst durch 16 Photogramme reproduziert) leichtverständliche bildliche Darstellungen niederlegen zu sollen, da in der Literatur meines Wissens nur wenig instruktive figürliche Hinweise vorhanden sind. Auf der hier beigehefteten Taf. IV konnte ich nur zwei Photogramme wiedergeben, die aber die beiden hauptsächlichsten Fälle charakterisieren, nämlich vorübergehende und andauernde Schwebungen.

Die ersteren treten stets auf zu Beginn der Resonanzschwingungen, sofern das System schwach gedämpft und der Resonanzgrad nur angenähert erreicht ist. Es bildet sich nach einem asymptotischen Abschwellen der Schwebungsstöße ein gleichbleibender Resonanzgrad aus. Bei jeder ruckweisen Frequenzänderung der erzwingenden Kraft treten die Schwebungen wieder mehr oder weniger stark auf; das gleiche geschieht bei jeder schnellen Änderung des Phasenabstandes, wozu es z. B. genügt, den schwingenden Resonanzkörper zu berühren. Auch Ungleichmäßigkeiten im Antrieb, wie sie z. B. bei unterbrochenem Gleichstrom vorkommen, stören den vorhandenen Phasenabstand und führen dadurch zu Schwebungen.

Darin besteht auch eine der unangenehmsten Mißlichkeiten bei der Ermittelung des Resonanzverlaufes mit Hilfe von unterbrochenem Gleichstrom und es muß deshalb die Unterbrechungsstelle des hierzu benutzten Saitenunterbrechers in mechanischer Beziehung sehr sorgfältig behandelt werden.

Kontinuierliche Schwebungen treten beispielsweise bei der Übereinanderlagerung zweier Tonwellen von verschiedener Periode, sowie bei stroboskopischen Beobachtungen auf; ein schönes Beispiel bietet unter anderem auch das schwebungsartige Aufleuchten einer Glühlampe unter der Einwirkung zweier Ströme von verschiedener Frequenz. Dagegen ist es nicht ohne weiteres möglich, an einem mechanischen System dauernde Schwebungen zwischen dessen Eigenschwingungen und einer erzwingenden Kraft von anderer Periode hervorzubringen. Es gelingt dies aber sehr schön, wenn man ein auf einem Luftkasten befestigte stählerne Harmoniumzunge anbläst und gleichzeitig durch magnetische Erregung in Resonanzschwingungen versetzt. Da der Luftstrom immer wieder den Eigenton aufrecht erhält, so kann man Schwebungen von absolut gleichbleibender Andauer und Intensität und in beliebiger Anzahl pro Sekunde herstellen. Wie das Photogramm 109 lehrt, vollziehen sich die Schwebungen in solcher idealer Weise, wie sie auf anderem Wege kaum hergestellt werden können. Durch Anbringen eines kleinen Spiegels am freien Ende lassen sich diese Schwebungen auf einen Schirm produzieren und einem größeren Auditorium auch optisch vorführen, wiewohl die akustische Wirkung schon sehr deutlich ausfällt.

Die dem Schwebungsphotogramm übergelagerten Schwingungen stammen von einer gesondert erregten Stahlzunge, deren Schwingungen mit der magnetischen Erregerkraft isochron verlaufen. Es soll dadurch die Methode gekennzeichnet werden, mittels derer die Phasenänderungen des schwebenden Resonanzkörpers während einer Schwebungsperiode untersucht werden können.

Direkte photographische Reproduktion durch Rotationsdruck der Neuen Photographischen Gesellschaft Berlin-Steglitz.

Das in den Taf. I u. IV dieses Bandes dargestellte Reproduktionsverfahren ist an sich neuartig und findet sich auch in den Annalen zum ersten Male vor. Es mag daher eine kurze Besprechung der Herstellungsweise, sowie der Vorzüge am Platze sein.

Die bisher gebräuchlichen Reproduktionsarten für möglichst getreue Wiedergabe von Originalbildern sind die Autotypie und der Lichtdruck. Die Feinheit beider Verfahren erreicht aber bald eine Grenze an der Korngröße (des Netzes bei der Autotypie und des Kornes der lichtempfindlichen Substanz, womit die Lichtdruckglasplatte überzogen ist) Um derartig feine und scharf begrenzte Linien wiederzugeben, wie sie sich an den Originalnegativen der vorliegend besprochenen Aufnahmen vorfinden, reicht die Autotypie gar nicht und der Lichtdruck nur sehr unvollständig aus.

Die getreuesten Kopien würde man auf feinkörnigem Chlor- oder Bromsilberpapier liefern können, indessen eignet sich diese Reproduktion nicht zu größeren Auflagen (speziell nicht bei ungebundenen Heften). Das technisch durchaus einwandsfreie Verfahren der oben genannten Firma liefert aber ebenfalls sehr schöne Kopien, namentlich wenn direkt nach den Originalnegativen gearbeitet werden kann, wie dies bei der Anfertigung der zahlreichen Abbildungen für die relativ geringe Auflage meiner Abhandlung über Elektroakustische Untersuchungen möglich war. Anderenfalls müssen besondere Negative hergestellt werden. Es hängt dies mit folgender Einrichtung zusammen:

Die Negative werden auf einen sogenannten Druckrahmen aufgespannt, dessen Breite von maximal 64 cm, der Breite der Bromsilberpapierrolle entspricht. Die Höhe, allgemein 50 cm, kann geringer genommen werden. Um eine Rahmenbreite auszunützen, bedarf es also des Materiales für ca. vier Tafeln des Annalenformates. Da im vorliegenden Falle nur zwei Tafeln zu reproduzieren waren, wurden von jeder Tafel nach den Originalfilmnegativen ein Glasdiapositiv hergestellt, und davon je vier Dianegative, so daß der Rahmen zu 62 cm Breite und 47 cm Höhe ausgenutzt wurde.

Interessant ist nun, die Unterschiede zwischen Kopien nach Originalfilms und solchen nach Glasdianegativen zu verfolgen. Die Photogramme der Taf. I u. IV können entschieden noch als zartlinig angesehen werden, außerdem weisen sie gegen die Kopien nach Originalnegativen eine Verstärkung auf; sie sind härter und kontrastreicher geworden. Daran ist eben die mehrfache Übertragung schuld, wie ich schon gelegentlich früherer, eigener Versuche bemerken konnte. Wenngleich die Linien lange nicht so fein und die Übergänge viel plötzlicher sind, als bei den in meiner zitierten Abhandlung wiedergegebenen Photogrammen, so reicht doch die Schärfe noch vollkommen aus, um alle Einzelheiten der Auf-

nahme wahrnehmen und kritisieren zu können, was bei den anderen, vorhin erwähnten Methoden ausgeschlossen wäre.

Die Neue Photographische Gesellschaft übernimmt gegen eine mäßige Vergütung die Anfertigung solcher Glasdianegative, sowie das ganze Arrangement nebst Schriftsatz. Die Aufnahmen werden durch Abdecken mittels Seidenpapier etc. auf annähernd gleiche Lichtdurchlässigkeit gebracht. Die Belichtung durch elektrische Beleuchtung wird genau ausprobiert (ca. 5—10 Sek.), so daß die Tafeln eine erfreuliche Gleichmäßigkeit besitzen.

Die Kosten des Rotationsdruckverfahrens sind begreiflicherweise höher als die der sonst üblichen Reproduktionsarten, zumal sehr große Auflagen keine wesentlichen Ermäßigungen ermöglichen können; jedoch sind die Ausgaben bei einer Mindestauflage von ca. 3000 Stück solcher Tafeln nicht zu hoch, um diesem schönen Reproduktionsverfahren die Aufnahme in wissenschaftliche Werke zu erschweren, die es dank seiner gerade hierbei schätzenswerten Vorzüge verdient.

Die besprochenen Versuche wurden größtenteils im physikalischen Institut der Universität Würzburg unter freundlicher Unterstützung seitens des Hrn. Prof. Willy Wien ausgeführt; einige Vorversuche sowie nachträgliche Beobachtungen konnte ich in den Laboratorien von Hartmann & Braun, Frankfurt a/M. anstellen.

Paris, November 1903.

(Eingegangen 8. Dezember 1903.)

4. *Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel; von H. du Bois.*

(Hierzu Taf. VIII).

(Aus den Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wissensch. zu Amsterdam.) [1])

Bezeichnungen (vgl. §§ 2, 3).

E, Rotatorische kinetische Energie.
$\mathfrak{E}$, Progressive kinetische Energie.
E_1, Elliptisches Integral 2. Gattung.
E, Vollständ. ellipt. Integral 2. Gatt.
F, Elliptisches Integral 1. Gattung.
K, Vollständ. ellipt. Integral 1. Gatt.
J, Potentielle Energie.
K_X, K_Y, K_Z, Hauptträgheitsmomente.
M, Kreiselmasse.
T, Zeit.
U, Gesamtenergie.
W, Arbeit.
X, Y, Z, Kreiselfeste Koordinaten.

c_1, c_2, c_3, Richtungskosinus.
k_0, k_1, Module elliptischer Integrale.
m_1, m_2, m_3, Richtungskosinus.
x, y, z, Raumfeste Koordinaten.

$\mathfrak{C}$, Winkelgeschwindigkeit,
$\mathfrak{F}$, Feldintensität,
$\mathfrak{K}$, Drehmoment,
$\mathfrak{K}_C$, Zentripetalmoment,
$\mathfrak{L}$, Impulsmoment,
$\mathfrak{M}$, Polarisationsmoment,
} Vektoren.

$\alpha = \mathfrak{M}\mathfrak{F}/E$, Argument.
$\mathfrak{k}$, Trägheitskoeffizient.
$\mathfrak{m}$, Orientierungskosinus.

Δ, Trägheitsdifferenz.
α, Winkel zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{M}$.
β, Winkel zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{L}$.
θ, Winkel zwischen Z und z.
ψ, Hilfswinkel.
τ, Periode.
φ, Amplitude ellipt. Integrale.
$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, Funktion.

§ 1. Eine allgemeine Lösung der Aufgabe: „Die rein rotatorische — nicht translatorische — Bewegung eines im gleichförmigen richtenden Felde befindlichen, polarisierten starren Körpers um sein Massenzentrum zu bestimmen", liegt bisher nicht vor. Allerdings sind im letzten Jahrzehnt von mathematischer Seite Beiträge zur Theorie des *schweren* un-

1) Nach Versl. Afd. Nat. **10.** p. 415 u. 504. 1902 (Beibl. **26.** p. 605. 1902) vom Verfasser für die Annalen bearbeitet; wegen verschiedener Beweise, Erläuterungen etc. ist im vorliegenden Text auf jene Aufsätze als l. c. hingewiesen. Wesentlich neu sind die §§ 7—10, 19—26, 37—38.

symmetrischen Kreisels geliefert worden, insofern als verschiedene, mehr oder weniger integrierbare Sonderfälle in Betracht gezogen wurden.[1]) Leider ergeben diese scharfsinnigen Untersuchungen für physikalische Zwecke im allgemeinen noch keinen allzu großen Gewinn; und zwar wegen der vielfach — der Integrabilität zuliebe — in eigenartiger Richtung vorgenommenen Spezialisierung.

Im folgenden ist eine rein dynamische Erörterung des Problems versucht worden; sie soll in einer Untersuchung der Orientierung eines Kreiselschwarmes gipfeln, die einem weiteren Aufsatze vorbehalten sei. Dabei zeigt sich unter anderem allgemein, daß eine „*diapolare*" Orientierbarkeit eine dynamisch ebenso mögliche und wahrscheinliche Erscheinung ist, als der vielleicht eher vermutete entgegengesetzte „*parapolare*" Vorgang. Die Diskussion der Stabilität bleibt auf einige Sonderfälle beschränkt, wo „*hysteretische*" Orientierbarkeit auftritt.

Namentlich sind auch langsame stetige Änderungen des Feldes berücksichtigt worden, insbesondere dessen Entstehen und Vergehen; bisher wurde bei Untersuchungen über schwere Kreisel bez. Pendel das Erdfeld meines Wissens stets als unveränderlich angenommen, also $g = \text{const.}$ gesetzt. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß der Ausdruck „Kreisel" nur eine bequeme Abkürzung, dagegen keinerlei Beschränkung bedeutet. Die vorliegende Erörterung berührt zwar die Kreiseltheorie, sie soll aber auch als eine voraussetzungslose Vorarbeit zur Betrachtung speziellerer Orientierungsvorgänge gelten.

§ 2. Die positive Feldrichtung gelte als $+ z$-Achse eines rechtssinnigen „*raumfesten*" Koordinatensystems (O, x, y, z); die xy-Ebene dieses Raumkreuzes verläuft mithin der Schar Äquipotentialflächen parallel. Im Ursprung O befinde sich der im allgemeinen unbeweglich (vgl. § 12) gedachte Stützpunkt, zugleich Massenzentrum, des Kreisels, mit dessen Hauptträgheitskreuz das zweite, ebenfalls rechtssinnige, im Raume bewegliche, jedoch „*kreiselfeste*" Koordinatensystem (O, X, Y, Z) zusammenfalle. K_X, K_Y, K_Z seien die bezüglichen Hauptträg-

1) Vgl. das namentlich auch für Physiker anregende Werk von F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig 1898. — Hrn. Sommerfeld bin ich für manchen Kommentar zu Dank verpflichtet.

heitsmomente, $\mathfrak{k}$ ein näher zu bestimmender Trägheitskoeffizient (§ 14). $\mathfrak{F}$ bezeichne die Intensität des gleichförmigen Feldes, $\mathfrak{M}$ das von $\mathfrak{F}$ sowie von $\dot{\mathfrak{F}}$ unabhängig gedachte Polarisationsmoment. Bemerkt sei, daß in der spezielleren Theorie des schweren Kreisels allerdings vorausgesetzt wird, daß der Schwerpunkt *nicht* mit dem Stützpunkt identisch sei, sondern mit Bezug auf letzteren die Koordinaten $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ aufweise. Falls dann M die Gesamtmasse bezeichnet, so entsprechen $M\bar{X}$, $M\bar{Y}$, $M\bar{Z}$ den Komponenten $\mathfrak{M}_X$, $\mathfrak{M}_Y$, $\mathfrak{M}_Z$, und die Beschleunigung g bildet das Analogon zur Feldintensität $\mathfrak{F}$. Überdies ist ein Trägheitsellipsoid des Stützpunktes in diesem Falle nicht mehr identisch mit einem zentralen Trägheitsellipsoid des Massenzentrums.[1])

Falls die Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ einen Winkel α einschließen, ist $\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}\cos\alpha$, während $\mathfrak{M}\mathfrak{F}\sin\alpha$ den Tensor des Vektorproduktes $\mathsf{V}\,\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ mißt. Dieses stellt das äußere Drehmoment $\mathfrak{N}$ dar, welches im Felde auf den Kreisel ausgeübt wird; dessen Achse ist normal zur Ebene $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ gerichtet, wobei die zyklische Reihenfolge $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathsf{V}\,\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ wieder als eine rechtssinnige gelten soll. Jenes Vektorprodukt bildet zugleich das „vektorielle Variationstempo" $\dot{\mathfrak{L}}$ — d. h. den selbst wieder als Vektor aufzufassenden zeitlichen Differentialquotient $d\mathfrak{L}/dT$ — eines Vektors $\mathfrak{L}$ bezüglich seiner durch das Raumkreuz bestimmten Umgebung. In Ermangelung einer allgemein feststehenden Benennung soll dieser wichtige Hauptvektor im folgenden das *Impulsmoment* genannt werden.[2])

1) Übrigens ist der Unterschied zwischen jenen beiden Ellipsoiden unter Umständen ein verschwindender. Man vermag die Bewegung eines schweren Kreisels mittels eines kleinen exzentrischen Übergewichtes schon recht erheblich zu modifizieren, während dessen Einfluß auf die Gestalt des Trägheitsellipsoides bezüglich des Stützpunktes noch völlig zu vernachlässigen bleibt.

2) Rotationsmoment, Bewegungsmoment, statisches Moment der Bewegungsgröße, Drall, Drehstoß, Impulsvektor = couple d'impulsion = angular momentum, moment of momentum! Der namentlich vom didaktischen Standpunkte bedauerliche Mangel an einer einheitlichen internationalen Nomenklatur macht sich bei diesem fundamentalen, längst in die Dynamik eingeführten Begriff in recht verwirrender Weise bemerkbar.

§ 3. Zu obiger alphabetischen Liste der Bezeichnungen ist noch zu bemerken: E bedeutet die kinetische Energie der Rotation, τ ihre Periode, $\mathfrak{C}$ ihre Winkelgeschwindigkeit bez. das „Gyrationstempo"; die Richtung dieses Vektors soll zum Drehungssinn stets in rechtssinniger Beziehung stehen. Ein zeitlicher Mittelwert wird durch einen Balken, ein zeitlicher Differentialquotient (Variationstempo) durch einen Tüpfel über dem Buchstaben gekennzeichnet. Feldfreie Anfangswerte erhalten in der Regel den Index 0. Von den durch die verschiedenen Vektoren paarweise gebildeten Winkeln kommen folgende in Betracht: α zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ (oder $+z$); der Kürze halber sei der „Orientierungskosinus" $\cos\alpha = \mathfrak{m}$ gesetzt; β zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{F}$ (oder $+z$); θ zwischen der Z-Achse und der z-Achse; ψ zwischen der zZ-Ebene und der raumfesten zx-Ebene. Abgekürzt sei $c_1 = \cos(z, X)$, $c_2 = \cos(z, Y)$, $c_3 = \cos(z, Z) = \cos\theta$ gesetzt; ebenso seien m_1, m_2, m_3 die konstanten Richtungskosinus des Vektors $\mathfrak{M}$ im (O, X, Y, Z)-Kreuz.

§ 4. Solange die Feldintensität und damit auch der Wert von $\dot{\mathfrak{S}}$ unendlich gering bleibt, wird ein solcher „feldfreier" Kreisel im allgemeinen eine kräftefreie sogenannte Poinsot-Bewegung ausführen. Bekanntlich bildet der alsdann raumfeste Vektor $\mathfrak{S}$ die Normale zu einer invarianten Ebene. Die allgemeinste Fragstellung würde nunmehr lauten: Wie wird die Bewegung beeinflußt, wenn man die Feldintensität allmählich von 0 bis $\mathfrak{F}$ wachsen läßt, wodurch zunächst die Invarianz von $\mathfrak{S}$ aufgehoben wird? Eine ebenso allgemeine Beantwortung ist vorderhand ausgeschlossen (vgl. § 42); irgend eine Spezialisierung erscheint daher unumgänglich, ist aber derart anzusetzen, daß die vom physikalischen Standpunkte wichtigeren Eigenschaften der Bewegung möglichst hervortreten. Auf diesem Wege gelangt man immerhin dazu, die allgemeineren Hauptzüge der Beeinflussung der Bewegung durch das Feld beurteilen zu können.

In diesem Sinne sei nun zunächst angenommen, daß die feldfreie Bewegung sich auf eine stabile Gyration um die Z-Achse beschränkt; dazu muß das entsprechende „polare" Hauptträgheitsmoment K_Z entweder größer oder aber kleiner sein als die beiden „äquatorealen" Hauptträgheitsmomente K_X

und K_Y.[1]) Es seien der Reihe nach zwei Hauptfälle in Betracht gezogen, derart, daß einmal die Z-Achse anfänglich, d. h. für ein unendlich schwaches Feld, in der Richtung des letzteren liegt, oder zweitens dauernd senkrecht dazu gerichtet ist; daran wird sich dann die Betrachtung allgemeinerer Bewegungsfälle anschließen.

A. Koinzidenz der Gyrationsachse mit der Feldrichtung.

§ 5. Ein einfacher Bewegungsfall, die regelmäßige Gyration um eine „permanente Achse", ist von Hrn. Staude[2]) eingehend untersucht, und zwar ohne daß dabei irgendwelche Beschränkung betreffs der Massenverteilung eingeführt wäre. Die hier zu verwertenden analytischen Hauptergebnisse lauten nach passender Umformung für das vorliegende Problem wie folgt: Es gibt eine Kegelfläche zweiten Grades, welche mit einem zentralen Trägheitsellipsoid des Kreisels konzentrisch aber nicht koaxial ist. Sie bildet den geometrischen Ort der Geraden, welche folgende Sondereigenschaft aufweisen: Wird eine solche Achse dem Felde gleichgerichtet und läßt man den Körper um sie kreiseln mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, deren Quadrat in berechenbarem Verhältnis zur Feldintensität steht, so dauert dieser einfache „stationäre" Bewegungszustand ungeändert weiter fort. Die Gleichung jener Kegelfläche lautet in den laufenden Koordinaten X, Y, Z des Hauptträgheitskreuzes

$$(1)\quad m_1(K_Y - K_Z)YZ + m_2(K_Z - K_X)ZX + m_3(K_X - K_Y)XY = 0.$$

Näheres ist in der Staudeschen Abhandlung nachzusehen; dort wird auch sorgfältig die „Zulässigkeit" oder „Unzulässigkeit" einzelner Abteilungen der Kegelerzeugenden als permanente Achsen graphisch diskutiert. Hingegen fehlen Betrachtungen über die Stabilität der Bewegung, welche zwar keine allzu großen Schwierigkeiten bieten, sich indessen weitläufig gestalten dürften; aus diesem Grunde mußte mit Aus-

1) Selbstredend sind K_X, K_Y, K_Z rechnerisch nicht etwa als Vektorkomponenten zu behandeln. Einer Verwechslung ist übrigens schon dadurch vorgebeugt, daß das Trägheitsmoment nicht wie die Vektoren durch einen deutschen Kapitalbuchstaben bezeichnet ist.

2) O. Staude, Crelles Journal **113**. p. 318. 1894.

nahme weniger Fälle auch hier von einer Vervollständigung der Theorie nach jener Richtung im allgemeinen abgesehen werden (vgl. indes die Diskussion §§ 19—26).

§ 6. Aus den Eulerschen Differentialgleichungen, welche hier zu einfacheren algebraischen Beziehungen entarten, leitet Hr. Staude analytisch die Bedingungen her, denen die konstanten Richtungskosinus c_1, c_2, c_3 einer permanenten Gyrationsachse im (O, X, Y, Z)-Kreuze zu genügen haben; sie lauten nach geeigneter Transformation für den vorliegenden Fall:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{m_3}{c_3} - \dfrac{m_2}{c_2} = \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}(K_Y - K_Z), \\ \dfrac{m_1}{c_1} - \dfrac{m_3}{c_3} = \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}(K_Z - K_X), \\ \dfrac{m_2}{c_2} - \dfrac{m_1}{c_1} = \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}(K_X - K_Y). \end{cases}$$

Außerdem muß selbstverständlich

$$(3)\qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Von den drei Gleichungen (2) sind nur zwei unabhängig, indem offenbar jede einzelne die Summe der beiden übrigen mit entgegengesetztem Vorzeichen darstellt. Die durch (2) und (3) bestimmten Werte der Richtungskosinus lassen sich im allgemeinen nicht explizit darstellen; sie müssen neben m_1, m_2, m_3 die paarweisen Differenzen der Hauptträgheitsmomente, sowie den Parameter $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/\mathfrak{C}^2$ enthalten.[1]) Die Polarisationskomponente nach der Feldrichtung

$$(4)\qquad \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{M}(c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3)$$

ist bei der regulären Gyration offenbar ebenfalls konstant.

§ 7. Die dynamische Bedeutung dieser Ergebnisse tritt bei einer vektoranalytischen Betrachtungsweise klarer zutage; eine Meinung, die sich ja auch sonst immer mehr Geltung verschafft, wenn auch jenen Methoden ein besonderer heu-

1) $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ bedeutet hier wie im folgenden das gewöhnliche Produkt der betreffenden Tensoren; die Anwendung entsprechender lateinischer Buchstaben für letztere würde hier nur eine unerwünschte Häufung der Bezeichnungen bewirken.

ristischer Wert kaum innewohnt.[1]) In den nachstehenden ganz allgemeinen Vektorgleichungen der Kreiselbewegung

$$\mathfrak{K}_C = V\mathfrak{C}\mathfrak{L} = \dot{\mathfrak{L}} - \mathring{\mathfrak{L}} = \mathfrak{K} - \mathring{\mathfrak{L}} \tag{5}$$

bezeichnet der Volltüpfel das Variationstempo des Impulsmomentes bezüglich des Raumkreuzes, der Ringtüpfel dasjenige mit Bezug auf das Hauptträgheitskreuz; $\mathfrak{K}_C$ bedeutet das gesamte Zentripetalmoment.

Die reguläre Gyration mit drei Freiheitsgraden ist als Sonderfall dadurch charakterisiert, daß der $\mathfrak{C}$-Vektor, d. h. die Gyrationsachse dauernd raumfest und kreiselfest bleibt. Infolge der eindeutigen, durch eine bestimmte lineare Vektorfunktion bez. durch Poinsots Konstruktion im Hauptträgheitskreuze dargestellten Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ bleibt letzterer auch kreiselfest, daher $\mathring{\mathfrak{L}} = 0$; daraus folgt dann für diesen Fall die Spezialbedingung

$$\mathfrak{K}_C = V\mathfrak{C}\mathfrak{L} = \dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{K} = V\mathfrak{M}\mathfrak{F}. \tag{6}$$

Hieraus läßt sich einmal entnehmen, daß das zur dauernden Innehaltung der regulären Gyration erforderliche Gesamtsystem der Zentripetalbeschleunigungen aller sich im Kreise drehenden Körperelemente jederzeit gerade vom äußeren Drehmoment $\mathfrak{K}$ gestellt wird. Zweitens läßt sich aus der Gleichheit der beiden Vektorprodukte in (6) die ganze Theorie dieses Spezialfalles herausschälen.

§ 8. Schreibt man sie nämlich als Gleichung zwischen ihren Komponenten im Hauptträgheitskreuz, so führt eine kurze Umformung wieder zu den Gleichungen (2). Zwei Vektorprodukte bleiben nur dann einander gleich, wenn die vier Vektorfaktoren stets in einer Ebene liegen; außerdem ergibt sich leicht die dauernde Koinzidenz von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$, d. h. der Gyrationsachse und der Feldrichtung. Diese Bedingung ist von den Herren Klein und Sommerfeld auch unmittelbar dynamisch begründet und die entsprechende Determinante auf die Staudesche Kegelgleichung (1) reduziert worden.

---

1) Im Klein-Sommerfeldschen Buche kommen ähnliche vektoranalytische Betrachtungen gelegentlich vor. Hr. A. Föppl, Zeitschr. f. Math. u. Physik 48. p. 272. 1902, hat kürzlich einen Beitrag zur Behandlung des *symmetrischen* Kreiselproblems mittels Vektorrechnung veröffentlicht.

Auch die Skalarprodukte derselben Vektorfaktoren la sich übrigens rechnerisch verwerten, indem sie die kineti und potentielle Energie mittels der Gleichungen

$$E = \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \mathfrak{C} \mathfrak{L}, \tag{7}$$

$$J = - \mathrm{S} \mathfrak{M} \mathfrak{F} \tag{8}$$

darstellen. Variiert man nun die Energiedifferenz $J - E$, in man sich virtuelle Variationen der Richtungskosinus c_1, c_2 denkt — wobei selbstredend (3) zu beachten ist —, so gels man schließlich ebenfalls zu den Gleichungen (2).

§ 9. Hr. Staude betrachtet diese zunächst nur als Ausdruck einfach unendlich vieler *möglicher* Bewegungsf Diese unterscheiden sich von anderen Fällen auf den er Blick durch ihre Einfachheit; es scheint überdies, als ob i es hier mit einer gewissermaßen *bevorzugten* Bewegung zu tun hat; diese Meinung gründet sich zum Teil auf Be achtungstatsachen, welche unter verschiedenen Umständen wonnen wurden.[1]) Man erhält den Eindruck, daß die regu Gyration um die Feldrichtung den Charakter einer sekuls Fundamentalbewegung hat, die anzunehmen der Kreisel zugsweise bestrebt ist. Die je nach der Art des Einleit der Bewegung mehr oder weniger erheblichen Abweichun halten sich im Rahmen kleiner periodischer Schwankung analog der fast jegliche Präzession begleitenden Nutation.

Übrigens kann diese Gyration um eine permanente Ac als ein Spezialfall regulärer Präzession betrachtet werd wobei der Polhodien- und Herpolhodienkegel zu einer Gera entartet sind. Im allgemeinen könnte man auch in Anlehn an die von den Herren Klein und Sommerfeld vorgeschlag Benennung von einer *pseudoregulären* Gyration reden; da weichen die Instantanachsen nur äußerst wenig von einer manenten Richtung ab. Insofern als sich übrigens stets di pative Einflüsse — Reibung, Ausstrahlung und dergleichen geltend machen, werden jene kleinen Schwankungen zu aller abklingen; die ihnen entsprechende Energie wird hinw

1) H. du Bois, Arch. Néerl. (2) 5. p. 242. 1900 (Lorentz-F band); l. c. (2) 6. p. 581. 1901 (Bosscha-Festband); Hand. nat. geneesk. Congr. Rotterd. 8. p. 59. 1901; Beibl. 25. p. 535. 1901. I zusammenfassende Darstellung soll in diesen Annalen erscheinen.

gedämpft, während die Fundamentalbewegung noch sehr lange anhalten kann.

§ 10. Geht man von einem Bewegungszustand aus, bei dem bereits eine Gyration um eine zulässige permanente Achse stattfindet, so entspricht dem nach Gleichung (2) ein bestimmter Wert des Parameters $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/\mathfrak{C}^2$. Dieser erleide sodann eine kleine Zu- oder Abnahme während einer Zeit, welche um so mehr Gyrationsperioden umfassen möge, je geringer die dissipative Wirkung ist. Nun wird eine nahegelegene Kegelerzeugende die Rolle der Gyrationsachse übernehmen; währenddessen wird die alte Achse eine spiralige Kegelfläche von sehr geringer „Ganghöhe" um jene neue Achse beschreiben, welche zu der — dem stationären Bewegungszustande entsprechenden — Kreiskegelfläche hinüberleitet. Bei einer fortgesetzten stetigen und im Verhältnis zur auftretenden Dämpfung genügend langsamen Zu- oder Abnahme des Parameters wird demnach ein Sektor der Staudeschen Kegelfläche an der raumfesten Feldachse entlang gleiten.

Dabei sind freilich Schwankungen im obigen Sinne denkbar; aber auch wenn die vorhandene Dämpfung gegen Null konvergiert, können sie durch entsprechende Verlangsamung der Änderungen innerhalb beliebig geringer Grenzen gehalten werden. Derartige fast stationäre Änderungen des Bewegungszustandes dürften zugleich „quasi-reversibel", d. h. mit beliebiger Annäherung als umkehrbar zu betrachten sein, indem sie eine Aneinanderreihung wirklich stationärer Gyrationen darstellen; analoge Vorstellungen sind bekanntlich in der Thermodynamik allgemein gangbar. Die entsprechenden positiven oder negativen Variationen des Parameters $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/\mathfrak{C}^2$ können dadurch bedingt sein, daß entweder die Feldintensität $\mathfrak{F}$ oder das Gyrationstempo $\mathfrak{C}$, oder gar beide variieren; insbesondere also durch das allmähliche Entstehen oder Vergehen des Feldes. Mit welcher Annäherung auch raschere aperiodische oder periodische Änderungen der Feldintensität, entsprechend höheren Werten von $\dot{\mathfrak{F}}$, noch quasi-stationäre Bewegungsänderungen bedingen werden, hängt wesentlich von den vorhandenen dissipativen Einflüssen ab; unter Umständen kann das Verhältnis der verschiedenen zu berücksichtigenden Perioden eine Rolle spielen, was hier nicht näher zu untersuchen ist.

Es ist vorderhand kaum möglich, den zuletzt betrachteten Vorgänge einen formgerechten Ausdruck, geschweige einen Beweis dafür zu geben, welcher strengen mathematischen Anforderungen genügt. Genau genommen mag dieser Abschnitt daher nur als eine in passender Weise verallgemeinerte Beschreibung empirischer Tatsachen gelten.

§ 11. *Äquatoreale Polarisation.* Es sei nun zunächst der Fall ins Auge gefaßt, wo $\mathfrak{M}_Z = 0 = m_z$, die Polarisationsrichtung daher in die XY-Ebene fällt; da anfänglich die Z- und z-Achse identisch sein sollen, ist dann auch noch $\mathfrak{M}_{z0} = 0$. Erreicht indessen $\mathfrak{F}$ einen endlichen Wert, so wird im allgemeinen auch $\mathfrak{M}_z$ endlich; wir nennen diese die „orientierte Polarisationskomponente"; sie genügt der alsdann aus (2) und (4) einfach zu folgernden Fundamentalgleichung

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M}_z = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{C}^2}\left(\frac{\mathfrak{M}_X^2}{K_Z - K_X} + \frac{\mathfrak{M}_Y^2}{K_Z - K_Y}\right),$$

aus welcher sich sofort herauslesen läßt, daß $\mathfrak{M}_z$ und $\mathfrak{F}$ gleiche [bez. entgegengesetzte] Vorzeichen aufweisen, je nachdem K_z größer als K_X und als K_Y [bez. K_z kleiner als K_X und als K_Y] Dieses allgemeine Hauptergebnis kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

Das Feld bewirkt eine parapolare [*bez. diapolare*] *Orientierung, je nachdem die Gyration anfänglich um die stabile Hauptachse größten* [*bez. kleinsten*] *Hauptträgheitsmomentes erfolgte.*

Dieser Satz läßt sich auch geometrisch durch die Betrachtung des Vektors $\mathfrak{Q}$ erläutern; steht doch dieser nach Poinsot stets normal zur konjugierten Diametralebene der Gyrationsachse mit Bezug auf ein Trägheitsellipsoid. Die Herleitung der Gleichung (I) wird auf diesem Wege viel komplizierter als der rechnerische Beweis, läßt sich aber durchführen, wenn man die weitere vereinfachende Annahme macht. daß auch $\mathfrak{M}_Y = 0$, die Polarisation also ausschließlich nach der X-Achse gerichtet ist. Wegen dieser geometrischen, graphisch erläuterten Beweisführung sei auf l. c. §§ 10, 11 hingewiesen.

§ 12. Es ist nun der Übergang zu untersuchen zwischen der ursprünglichen feldfreien Gyration und der hier auftretenden Bewegungsart, wobei namentlich die Energieumwandlungen zu berücksichtigen sind. Es seien zunächst die Feld-

intensität $\mathfrak{F}$ und die kinetische Gyrationsenergie E als unabhängige Variabele betrachtet; zum Zwecke der Eliminierung der letzteren und der Substitution der ursprünglichen Energie E_0 ist der Energiegewinn bez. Verlust des Kreisels bei veränderlicher Feldintensität unter verschiedenen Umständen zu bestimmen. Bei diesbezüglichen Versuchen könnte man sich einen Kreisel dauernd mittels irgend eines Getriebes oder durch ein Gebläse angetrieben denken, welches gewissermaßen einen Energiespeicher bildet; die positive oder negative Energiezufuhr wäre z. B. in letzterem Falle mittels Wind bez. Gegenwind beliebig und stetig regulierbar.

Die Änderung des Vektorfeldes $\mathfrak{F}$ soll nur seinen Tensor, nicht seine Richtung betreffen, d. h. „Drehfelder" sollen vorderhand ausgeschlossen bleiben. Immerhin ist ein von der Zeit abhängiges Feld im Rahmen der Dynamik konservativer Systeme etwas ungewöhnliches. Beispielsweise sei daher eine Anordnung vorausgesetzt, wobei die Änderung der Feldintensität in der Weise erfolgt, daß sich die Lage des Stützpunktes mit Bezug auf ein ungleichförmiges Feld ändert; dabei soll indessen die Abweichung von der Gleichförmigkeit innerhalb des vom Kreisel eingenommenen Raumes eine Größe zweiter Ordnung bleiben. Damit nur die numerische Intensität, nicht die absolute Feldrichtung variiere, möge der Stützpunkt der Beschränkung unterworfen sein, daß er auf einer „Raumisokline" s bleibe. Eine solche Kurve ist offenbar der Ort der Berührungspunkte einer Schar Äquipotentialflächen mit einer sich der xy-Ebene parallel verschiebenden Ebene. In jedem Augenblicke beträgt die potentielle Energie des Kreisels infolge seiner Anwesenheit im Felde nach (8)

$$(8^*) \qquad J = -\,\mathrm{S}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F} = -\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}\cos\alpha = -\,\mathfrak{M}_z\,\mathfrak{F}.$$

Im gleichförmigen Felde variiert die potentielle Energie[1]) nur bei der Rotation, nicht bei der rein translatorischen Re-

1) Dabei ist das Normalniveau der potentiellen Energie derart gewählt, daß $J = 0$ für $\alpha = \pi/2$, d. h. für den Fall, daß die Polarisationsrichtung senkrecht zur Feldrichtung steht; es bedarf dann keiner Arbeit, um den ruhenden Kreisel vom Unendlichen her durch reine Translation längs einer Raumisokline in den Bereich des Feldes zu befördern; freilich wird infolge dieser Bestimmung J negativ für $\alpha < \pi/2$.

lativverschiebung eines *polarisierten* Körpers, so daß letztere bisher überhaupt nicht in Betracht kam.[1])

§ 13. Die Gesamtenergie ist gleich der Summe der progressiven, gyratorischen und potentiellen Energien:

$$U = \mathfrak{E} + E - \mathfrak{M}_z \mathfrak{F}. \tag{9}$$

Das Massenzentrum erleide nun eine — viele Perioden umfassende — Verschiebung von s bis $s+ds$; das vom Speicher auszugleichende Inkrement dU der Energie beträgt

$$dU = d\mathfrak{E} + dE - \mathfrak{M}_z d\mathfrak{F} - \mathfrak{F} d\mathfrak{M}_z,$$

oder anders geschrieben

$$d\mathfrak{E} + dE = \mathfrak{M}_z d\mathfrak{F} + \mathfrak{F} d\mathfrak{M}_z + dU. \tag{10}$$

Bei einer relativen Translation ds eines überhaupt nicht rotierenden polarisierten Körpers würde dieser bekanntlich der Kraft $\mathfrak{M}_z d\mathfrak{F}/ds$ unterliegen und das Feld daher die Arbeit $\mathfrak{M}_z d\mathfrak{F}$ zu leisten haben[2]); die progressive Energie würde um den gleichen Betrag zunehmen. In Gleichung (10) sind mithin die ersten Glieder links und rechts einander gleich zu setzen; daher gilt das auch für die übrigen, d. h.

$$dE = dU + \mathfrak{F} d\mathfrak{M}_z. \tag{11}$$

Es wäre möglich, daß überhaupt kein Energieausgleich mit einem besonderen Speicher stattfände, bez. daß letzterer nur gerade die durch Dissipation vergeudete Energiemenge ersetzte; es wird übrigens allemal angenommen, daß deren Betrag pro Gyrationsperiode zu vernachlässigen sei gegen die übrigen Energiebeträge. Dann wird $dU = 0$ und das Inkrement der kinetischen Gyrationsenergie wird einfach

$$dE = \frac{d\mathfrak{M}_z}{d\mathfrak{F}} \mathfrak{F} d\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}_z}{d\mathfrak{F}} d\mathfrak{F}^2. \tag{12}$$

Hieraus ergibt sich unter anderem, daß im parapolaren [diapolaren] Falle der Kreisel sich „von selbst" nach Orten stärkerer [bez. schwächerer] Feldintensität begeben wird, wobei das Feld Arbeit leistet und sowohl die progressive wie die gyratorische Energie zunimmt, und zwar um gleiche Beträge falls $\mathfrak{M}_z$ mit $\mathfrak{F}$ proportional ist (vgl. ferner l. c. § 14). Nach alledem ist

$$W = \int \mathfrak{F} d\mathfrak{M}_z \tag{13}$$

1) Für den *schweren* Kreisel gilt dies offenbar nicht ohne weiteres.
2) Vgl. hierzu J. C. Maxwell, Treatise 2. Ed. 2. p. 14, 69, 249, 261.

die vom Felde geleistete Arbeit, die bei einer Betrachtung der Kreiselbewegung, abgesehen von etwaiger gleichzeitiger Translation, ausschließlich in Betracht kommt und die positiv [negativ] ist, je nachdem $\mathfrak{F}$ und $d\mathfrak{M}_s$ gleiche [bez. ungleiche] Vorzeichen aufweisen. In den konkreten Fällen, auf welche die vorliegende allgemeinere Theorie sich anwenden läßt, fließt jene Arbeit schließlich aus verschiedenen Quellen, deren Diskussion hier zu weit führen würde.

§ 14. Diese Betrachtungen sollen nun auf den erwähnten vereinfachten Fall angewandt werden, wobei die Polarisation längs der Querachse X gerichtet ist, wie es in den folgenden §§ 14—26 stets vorausgesetzt wird; die Gleichungen werden dadurch weniger kompliziert, während doch der Charakter der Erscheinungen nicht wesentlich modifiziert wird. Der Staudesche Kegel entartet zu einem Ebenenpaare, die XY- und ZX-Ebene; in letzterer ist Fig. 1 abgebildet, aus welcher die Lage der verschiedenen Vektoren hervorgeht (vgl. § 8). Es ist hier $\mathfrak{c}_1 = 0$, $\mathfrak{C}_Y = 0$, $\mathfrak{L}_Y = 0$; während K_Y zunächst nicht in Betracht kommt, daher innerhalb der durch die bekannten Ungleichungen, sowie durch die vorgeschriebene Stabilität der feldfreien Gyration gebotenen Grenzen beliebig gewählt werden darf (vgl. § 20); die Gleichungen gelten daher auch unverändert für den äquatoreal polarisierten symmetrischen Kreisel ($K_Y = K_X$). Aus der Gleichung für das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse folgt sein Wert um die permanente Achse z

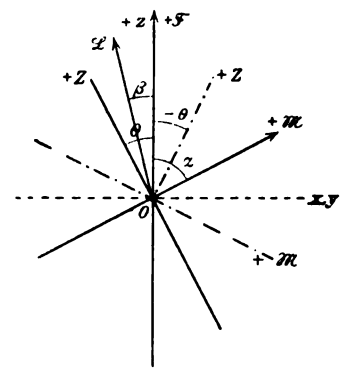


Fig. 1.

$$K_z = K_X \sin^2\theta + K_Z \cos^2\theta = K_Z - (K_Z - K_X)\sin^2\theta, \tag{14}$$

woraus erhellt, daß $K_z \lessgtr K_Z$ je nachdem $K_Z \gtrless K_X$. Schreibt man

$$K_z = K_Z(1 - \mathfrak{k}\sin^2\theta), \tag{15}$$

so ist $\mathfrak{k} = 1 - K_X/K_Z$ zu setzen; dieser „Trägheitskoeffizient" hängt zusammen mit der Exzentrizität des elliptischen

Hauptschnittes ZX; er ist positiv [negativ], je nachdem K_Z das größte [bez. kleinste] Hauptträgheitsmoment ist. Es muß für

$0 < K_X < K_Z$	$+1 > \mathfrak{k} > 0$	$K_Y < K_Z$
$K_X = K_Z$	$\mathfrak{k} = 0$	—
$K_Z < K_X < \infty$	$0 > \mathfrak{k} > -\infty$	$K_Y > K_Z$

Die anfängliche kinetische Energie der feldfreien Gyration um die Z-Achse beträgt

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_0^2 K_Z; \tag{16}$$

während sie im Felde folgenden Wert aufweist:

$$E = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}^2 K_z = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}^2 K_Z(1 - \mathfrak{k}\sin^2\theta). \tag{17}$$

Man erhält die Endgleichung unter anderem, wenn man in (I) $\mathfrak{M}_Y = 0$ setzt; dies ergibt

$$\mathfrak{m} = \cos\alpha = \sin\underset{\sim}{\theta} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{C}^2}\frac{\mathfrak{M}}{K_Z - K_X}. \tag{II}$$

In Fig. 1 ist der parapolare Fall $K_Z > K_X$ mittels ausgezogener Linien dargestellt; es liegt hier der Vektor $\mathfrak{C}$ zwischen den z- und Z-Achsen, und die Winkel θ und β haben das gleiche Vorzeichen. Die strichpunktierten Linien entsprechen dagegen dem diapolaren Falle $K_Z < K_X$; hier liegt die z-Achse zwischen dem Vektor $\mathfrak{C}$ und der Z-Achse und die Winkel θ und β haben entgegengesetzte Vorzeichen. Übrigens folgt dies auch aus der bekannten Tangentenkonstruktion Poinsots, wenn man diese an dem elliptischen Hauptschnitte XZ eines Trägheitsellipsoides ausführt. Nunmehr unterscheiden wir je nach der Art des Energieausgleiches drei verschiedene Hauptfälle, wobei stets vorausgesetzt wird, daß das Feld stetig und genügend langsam zu- bez. abnimmt.

§ 15. *Isoperiodische Feldeinwirkung.* Der Ausgleich wird derart reguliert — etwa mittels irgend eines denkbaren Mechanismus — daß Periode und Winkelgeschwindigkeit ungeändert ihren feldfreien Werten gleich bleiben. Man erhält (l. c. § 15), indem abgekürzt $a_0 = \mathfrak{M}\mathfrak{F}/E_0$ gesetzt wird, die Gleichung

$$2\mathfrak{k}\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}{E_0} = a_0. \tag{IIα}$$

Hieraus erhellt die Bedeutung des Trägheitskoeffizientes $\mathfrak{k}$, indem sein Vorzeichen zugleich dasjenige der Orientierung bestimmt; sein numerischer Wert dagegen ergibt einen Maß-

stab für die Feldintensität, deren es bedarf, um einen bestimmten Wert der orientierten Polarisationskomponente zu erzeugen, also auch für den Widerstand, den der Kreisel der Orientierung entgegensetzt. So schwindet beispielsweise dieser Widerstand für $K_Z = K_X$ und ein solcher Kreisel von höchster Orientierbarkeit müßte schon auf die Einwirkung eines unendlich schwachen Feldes reagieren. Nach Gleichung (17) ist

$$E = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}^2 K_Z(1 - \mathfrak{k}\sin^2\theta) = E_0 - E_0\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2. \tag{18}$$

Hieraus geht hervor, daß in dem parapolaren [diapolaren] Falle der Speicher einen Energiebetrag aufnehmen [abgeben] muß gleich der Summe der überschüssigen [fehlenden] kinetischen Energie $E_0\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2$ des Kreisels und der von dem entstehenden Felde geleisteten [aufgezehrten] Arbeit; diese letztere erreicht hier den gleichen Betrag, indem

$$W = \int_0^{\mathfrak{m}} \mathfrak{F}\, d\,\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}\int_0^{\mathfrak{m}} \mathfrak{F}\, d\,\mathfrak{m} = E_0\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2. \tag{19}$$

§ 16. *Isokinetische Feldeinwirkung.* Der Ausgleich ist ein vollkommener, derart, daß die vom Felde geleistete [aufgezehrte] Arbeit vom Speicher mittelbar wieder aufgenommen [abgegeben] wird; mithin verbleibt dem Kreisel kein Arbeitsüberschuß [Fehlbetrag], und seine kinetische Energie bleibt unveränderlich gleich ihrem feldfreien Anfangswerte; nach Gleichung (17) ist nunmehr

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}^2 K_Z(1 - \mathfrak{k}\sin^2\theta) = E = E_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_0^2 K_Z,$$

woraus sich ergibt

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C}_0}{\sqrt{1 - \mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}}, \qquad \tau = \tau_0\sqrt{1 - \mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2};$$

demnach wird im parapolaren [diapolaren] Falle bei Zunahme des Feldes die Winkelgeschwindigkeit größer [kleiner], die Periode kürzer [länger]. Die Hauptgleichung lautet (l. c. § 16)

$$\frac{2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}}{1 - \mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2} = \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}{E_0} = \mathfrak{n}_0. \tag{II$_\beta$}$$

Das entstehende Feld leistet die Arbeit

$$W = \mathfrak{M}\int_0^{\mathfrak{m}} \mathfrak{F}\, d\,\mathfrak{m} = E_0\int_0^{\mathfrak{m}} \frac{2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}}{1 - \mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}\, d\,\mathfrak{m} = E_0 \log\frac{1}{1 - \mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}. \tag{20}$$

§ 17. *Adiabatische Feldeinwirkung.* In diesem Falle gibt es keinen besonderen Energiespeicher und ist jeder Ausgleich ausgeschlossen[1]); der volle vom Felde geleistete [aufgezehrte] Arbeitsbetrag ist somit auf Rechnung der kinetischen Energie des Kreisels zu setzen, derart, daß diese um den gleichen Betrag zunimmt [abnimmt]; es ist daher

$$dE = dW = \mathfrak{M}\,\mathfrak{F}\,d\mathfrak{m};$$

andererseits ist nach dem Vorhergehenden auch

$$dE = \frac{\mathfrak{M}}{2}\,d\left(\frac{1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}}\,\mathfrak{F}\right).$$

Die aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für dE sich ergebende Differentialgleichung läßt sich nach Trennung der Variabeln integrieren und die Integrationskonstante aus einer Betrachtung der Anfangsbewegung bestimmen. (Näheres l. c. § 17); die Endgleichung lautet

$$(\mathrm{II}\gamma) \qquad \frac{2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}}{(1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2)^2} = \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}{E_0} = \mathfrak{a}_0\,.$$

Man findet außerdem leicht

$$E = \frac{E_0}{1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C}_0}{1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}, \qquad \tau = \tau_0\,(1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2);$$

demnach wird im parapolaren [diapolaren] Falle bei Zunahme bez. beim Entstehen des Feldes die Winkelgeschwindigkeit hier noch größer [kleiner], die Periode noch kürzer [länger] als es bei isokinetischer Einwirkung der Fall ist. Das Feld leistet die Arbeit

$$(21) \qquad W = E_0 \int_0^{\mathfrak{m}} \frac{2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}}{(1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2)^2}\,d\mathfrak{m} = E_0\,\frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}{1-\mathfrak{k}\,\mathfrak{m}^2}.$$

Bei Abnahme bez. beim Vergehen des Feldes verhält es sich umgekehrt.

§ 18. *Graphische Diskussion.* Es ergibt sich in jedem der drei erörterten Hauptfälle — wo $\mathfrak{M}$ stets längs der Quer-

1) Da die ursprüngliche Bedeutung des Wortes ἀδιάβατος = „übergangslos" keineswegs eine thermodynamische war, scheint es mir im vorliegenden Falle wohl verwendbar; vgl. H. Hertz, Mechanik, p. 240. Leipzig 1894. — Es sei nochmals betont, daß der Speicher gegebenenfalls wohl zur Kompensation dissipativer Wirkungen dienen kann (§ 13).

richtet ist — daß $\mathfrak{a}_0$ als explizite Funktion des
kosinus $\mathfrak{m}$ darstellbar ist, und zwar durch einen
tionalen Bruch. Die inverse Funktion sowie ihr
ind dimensionslose Zahlen, welche sich zu einer
Darstellung besonders eignen; zu bemerken ist,
bhängigen Variabeln $\mathfrak{F}$ und E_0 überall in reziproker
auftreten. Es sei daher $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/E_0 = \mathfrak{a}_0$ als Abszisse,
nate aufgetragen; betrachtet man E_0 als einen
gegebenen Parameter, so ist für jeglichen Wert
direkt proportional $\mathfrak{F}$; für einen beliebig vor-
n feldfreien Energiewert kann man daher aus dem
ebenso die orientierte Polarisationskomponente
ls Funktion der Feldintensität $\mathfrak{F} = \mathfrak{a}_0 E_0/\mathfrak{M}$ ablesen.
ch Gleichung (19)

$$\frac{W}{E_0} = \int_0^{\mathfrak{m}} \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}{E_0}\, d\mathfrak{m} = \int_0^{\mathfrak{m}} \mathfrak{a}_0\, d\mathfrak{m},$$

Verhältnis der vom Felde geleisteten bez. auf-
rbeit zur ursprünglichen Gyrationsenergie gleich
des von der Kurve, der Ordinatenachse und einer
const. umgrenzten Areals. Im Diagramm *A* (Taf. VIII)
ven berechnet für $\mathfrak{k} = \pm 1/3$ und $\mathfrak{k} = \pm 1$; im Sinne
llen sie quasi-reversible Vorgänge dar. Die iso-
ormel (II α) wird offenbar durch die ausgezogenen
dargestellt, deren Neigungstangente $1/2\,\mathfrak{k}$ beträgt.
raden tangieren die gestrichelten isokinetischen ($\beta\,\beta$)
nktierten adiabatischen ($\gamma\,\gamma$)-Kurven am Ursprung,
tere später im parapolaren [diapolaren] Falle nach
r Abszissen- [bez. Ordinaten-]Achse hin abbiegen.
in partieller Energieausgleich mit dem Speicher
le ein solcher Vorgang zwischen dem vollkommenen
a Ausgleich und dem gänzlich aufgehobenen des
a Hauptfalles die Mitte halten; die entsprechenden
den offenbar mit der gleichen Neigungstangente
daraufhin zwischen der betreffenden β- und γ-Kurve

Die parapolaren Kurven seien zunächst diskutiert.
bei queraxialer Polarisation ihren Höchstwert

$m = +1$ bereits für einen endlichen Wert der Abszisse a_0 erreichen[1]), und zwar liegt für die drei untersuchten Hauptfälle ihr Endpunkt bez. bei:

$$a_0 = 2f, \quad a_0 = \frac{2f}{1-f}, \quad a_0 = \frac{2f}{(1-f)^2}.$$

Dabei ist freilich vorausgesetzt, daß die Bewegung vorher nicht etwa labil wird. Steigert man die Abszisse weiter, so wird die unveränderliche Orientierung nunmehr durch die „Grenzgerade" $m = +1$ dargestellt, welche zu dem die Feldarbeit messenden Areal keinen Beitrag mehr zu liefern vermag. Der isokinetische Hauptfall ist im Diagramm A_1 für $f_0 = +1/6$ (Kurven $\beta_0 \beta_0$), $f_1 = +1/3$ ($\beta_1 \beta_1$) und $f_2 = +2/3$ ($\beta_2 \beta_2$) noch besonders dargestellt. Nimmt a_0 nach Erreichung eines Maximalwertes wieder ab, so bleibt der Bildpunkt auf jener Grenzgeraden, und zwar auch rückwärts über den Punkt M_0 bez. M_1 oder M_2 hinaus, wo er sie zuerst erreicht hatte. Er wird sie erst verlassen, wenn der entsprechende Bewegungszustand der Gyration um die Polarisationsachse labil werden sollte.

§ 20. Eine Diskussion der Stabilitätsverhältnisse für diesen Sonderfall wird dadurch nahegelegt. Dabei sei durchweg vorausgesetzt, daß zwischen den Hauptträgheitsmomenten die Ungleichung gelte

$$K_Z > K_Y > K_X.$$

Dann ist schon die feldfreie Gyration um die Z-Achse, sowie auch die im Felde schließlich um die Polarisationsachse X stattfindende eine stabile, und zwar bedarf es hierzu der stabilisierenden Wirkung des der Polarisation gleichgerichteten Feldes nicht, sodaß letzteres abnehmen und schwinden kann. Tritt aber Zeichenwechsel ein, dann entspricht die Gyration im „Gegenfelde" dem sogenannten „aufrechten" schweren Kreisel, dessen Labilitätsverhältnisse sich rechnerisch verfolgen lassen, freilich nur im Falle der Symmetrie.[2])

---

1) Nur für den tatsächlich niemals völlig erreichbaren Grenzfall $f = +1$ (entsprechend dem idealen Zentrifugalpendel, § 14) würde die isokinetische und adiabatische Kurve die Gerade $m = +1$ zur Asymptote haben und sich ihr in ersterem Falle nach der hyperbolischen Gleichung $(1-m)a_0 = 1$ anschmiegen; dagegen bei der adiabatischen Kurve nach der Gleichung dritten Grades $2(1-m)^3 a_0 = 1$.

2) F. Klein, American Math. Bull. 25. p. 129. 1897; sowie F. Klein u. A. Sommerfeld, l. c. p. 316 ff., Figg. 53, 54.

Es sei daher $K_Y = K_Z - \Delta$ angenommen, wo Δ eine beliebig kleine positive Trägheitsdifferenz bezeichnet, so daß mit beliebiger Annäherung Trägheitssymmetrie um die Polarisationsachse herrsche. Nimmt nun die numerische Intensität $|\mathfrak{F}|$ des Gegenfeldes wieder zu, so läßt sich nachweisen, daß

der Kreisel ein „starker" stabiler, solange $|\mathfrak{a}| < \frac{K_X}{2K_Z}$,

der Kreisel ein „schwacher" labiler, sobald $|\mathfrak{a}| > \frac{K_X}{2K_Z}$.

§ 21. Der isokinetischen Bedingung entsprechend sei dauernd $E = E_0$, daher auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$. Sobald nun der Bildpunkt den „Labilitätspunkt" L_0 bez. L_1 oder L_2 für

$$|\mathfrak{a}_0| = \frac{K_X}{2K_Z} = \tfrac{1}{2}(1 - \mathfrak{k}) \tag{22}$$

erreicht hat, wird die Bewegung labil; ein Punkt der Polarisations- und Figurachse beschreibt dann, selbst bei unendlich geringen störenden Anstoß, eine aus kongruenten Schleifen bestehende sphärische Rosette. Insbesondere sei eine solche betrachtet, welche auf einer um den Stützpunkt mit dem Einheitsradius beschriebenen Kugel liegt; der Durchstoßungspunkt mit der positiven [negativen] Feldrichtung heiße der Nordpol [Südpol]. Der Kosinus $\mathfrak{m}'$ des *größten* Winkels α', um den sich die Polarisationsrichtung dabei jedesmal mindestens von der positiven Feldrichtung entfernt, ist gegeben durch

$$\mathfrak{m}' = \cos\alpha' = -1 + \frac{K_X}{K_Z}\frac{E}{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}.$$

Nimmt man auch hierbei an, daß die Gyrationsenergie sich nicht ändert so ist wieder dauernd $E = E_0$, so daß die „Rosettenrandkurve" dann durch die Gleichung

$$(\mathfrak{m}' + 1)\mathfrak{a}_0 = \frac{K_X}{K_Z} = 1 - \mathfrak{k} \tag{23}$$

als gleichseitige Hyperbel gekennzeichnet ist, deren Asymptoten die Ordinatenachse und die Grenzgerade $\mathfrak{m} = -1$ bilden. Bei endlichen seitlichen Anstößen würde die Rosettenrandkurve niedriger, d. h. letzterer Geraden näher liegen.

§ 22. Die Berechnung des *mittleren*[1]) Kosinus $\bar{m}$ erscheint hier kaum durchführbar, und wäre auch zwecklos. Falls gar keine dissipativen Einflüsse vorhanden wären, würde die Rosette periodisch durch den Nordpol hindurchgehen und bei wachsendem $|a_0|$ den Südpol immer näher streifen; die Rosettenrandkurve sowie die mittlere Kosinuskurve wären wesentlich reversibel. Tatsächlich wird jedoch die Energie der pendelartigen Schwingungen vorzugsweise der Dissipation anheimfallen; die Rosette wird gewissermaßen gedämpft werden, sich vom Nordpol hinwegziehen, sich immer mehr um den Südpol konzentrieren und zuletzt gegen diesen konvergieren.

Der Bildpunkt wird dementsprechend eine steilere — unter Umständen der Ordinatenachse parallele —, jedoch im Diagramm nicht dargestellte irreversible Abfallkurve beschreiben; diese wird zur Grenzgeraden $m = -1$ hinüberleiten und mit ihr und der Ordinatenachse ein Areal einschließen, welches die vom Felde geleistete Arbeit mißt. Falls letztere gänzlich der Dissipation anheimfällt, bleibt die kinetische Gyrationsenergie des Kreisels ungeändert; anderenfalls kann mit Hülfe des Speichers die isokinetische Bedingung eingehalten werden. Sobald die Grenzgerade $m = -1$ erreicht ist, findet wieder eine stabile Gyration um die Polarisationsachse statt.

§ 23. Nimmt jetzt die numerische Intensität des Feldes wieder ab, so folgt der Bildpunkt zunächst der Grenzgeraden über die Ordinatenachse hinweg bis zum Labilitätspunkte L_0' bez. L_1' oder L_2', dessen Lage kongruent ist zu L_0, L_1 bez. L_2, und das Spiel beginnt aufs neue. Denkt man sich daher a_0 zwischen zwei Grenzwerten zyklisch variierend, so beschreibt der Bildpunkt teilweise entgegen dem Uhrzeigersinne eine Schleife, welche bei der angenommenen Konstanz der Gyrationsenergie eine geschlossene, bezüglich beider Koordinatenachsen kongruente, sich periodisch wiederholende Figur ist und einen irreversiblen Kreisprozeß darstellt. Der Schleifeninhalt ist nach § 18 gleich dem Verhältnis der vom Felde jeweilig während jeder vollen Periode geleisteten Arbeit zur kinetischen Energie; dabei entspricht den Grenzgeraden wie gesagt kein

1) Im Sinne des § 27; vgl. hierbei überhaupt die pendeltheoretischen Betrachtungen des Abschnittes *B*.

Anteil an der Gesamtarbeit. Wofern letztere keiner gänzlichen dissipativen Umsetzung unterliegt, muß sie vom Energiespeicher aufgenommen werden. Diese Eigenschaften des betrachteten Kreisprozesses legen die Bezeichnung „*Orientierungshysterese*" für jene typische Reihe von Vorgängen nahe.

Für die Abszissen des Labilitätspunktes L sowie des Punktes M gilt, daß

$$|a_0|_L \gtrless |a_0|_M \text{ je nachdem } t \lesseqgtr (3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}1716,$$

ferner ergibt sich folgende tabellarische Zusammenstellung:

$\frac{K_X}{K_Z}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1 > \frac{K_X}{K_Z} > 0$
t	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$0 < t < +1$
$\lvert a_0\rvert_L$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} > \lvert a_0\rvert_L > 0$
$\lvert a_0\rvert_M$	$\frac{2}{5}$	1	4	$0 < \lvert a_0\rvert_M < \infty$

§ 24. Nimmt man des weiteren an — nach wie vor unter Voraussetzung der Ungleichung $K_Z > K_Y > K_X$ — es sei $K_Y = K_X + \Delta$, dann ist wegen der Bedingung $K_X + K_Y > K_Z$ für K_X nur der Bereich $\frac{1}{2} K_Z < K_X < K_Z$ zulässig und es herrscht jetzt mit beliebiger Annäherung Trägheitssymmetrie um die Z-Achse. In diesem Falle wäre die feldfreie Gyration um die Polarisationsachse X bekanntlich eine nahezu indifferente bez. labile, so daß der Labilitätspunkt L von links her beliebig nahe an die Ordinatenachse gerückt werden könnte, falls nur Δ beliebig klein gewählt würde.

Die bisherigen Betrachtungen fußen auf der Annahme, daß die feldfreie Gyration um die Achse Z des größten Hauptträgheitsmomentes stattfinde und daß die Polarisation längs einer anderen Hauptträgheitsachse gerichtet sei. Bei gegebenen Ausgleichsbedingungen hängen nach § 18 alle quasi-reversiblen Kurven[1]) nur vom Verhältnis K_X/K_Z ab und bleibt das dritte

1) Bei künstlich veränderlichem Ausgleich könnten quasi-reversible Schleifen durch Zusammenfügung erhalten werden. Diagramm A_9 enthält z. B. eine vierteilige Schleife

$$O\,P\,M\,Q\ [t = +\,{}^1/_9,\ E_0 = 1{,}2\,\mathfrak{M},\ 1{,}2\,\mathfrak{M} < E < 1{,}5\,\mathfrak{M}];$$

sie besteht abwechselnd aus isokinetischen ($\beta\beta$) und adiabatischen ($\gamma\gamma$) Strecken. Die den letzteren entsprechenden Arbeitsbeträge heben sich nachweislich auf; beim Durchlaufen der Schleife in [entgegen] der Pfeilrichtung wird vom Felde Arbeit geleistet [aufgezehrt], welche der Speicher vollständig aufnimmt [abgibt].

Hauptträgheitsmoment K_Y ohne Einfluß auf sie; dagegen erscheint dieses nach dem vorigen wesentlich mitbestimmend für die hysteretische Schleife, sofern diese durch die Lage des Labilitätspunktes bedingt ist. Rückt doch der Punkt $L[L']$ um so weiter nach rechts [links] je mehr der Wert von K_Y unter den von K_Z herabsinkt; demnach ist zu schreiben

$$|\mathfrak{a}_0|_L = \text{funct.}(K_X, K_Y, K_Z), \qquad \mathfrak{H}_L = \frac{E_0}{\mathfrak{M}} \text{funct}(K_X, K_Y, K_Z).$$

§ 25. *Die diapolaren Kurven* haben die Eigentümlichkeit, daß sie im isokinetischen Falle für[1]) $\mathfrak{k} < -1$, im adiabatischen bereits für $\mathfrak{k} < -1/3$ ein Abszissenmaximum aufweisen; dabei schreitet $d\mathfrak{m}/d\mathfrak{a}_0$, und daher für $E = \text{const.}$ auch $d\mathfrak{M}_z/d\mathfrak{H}$, von negativen durch unendlich zu positiven Werten. Die eingehendere Diskussion dieser Frage würde zu weit führen, zumal bei den diapolaren Kurven vorwiegend der Anfangsverlauf Interesse bietet; auch hängt sie mit den allgemeinen Stabilitätsfragen zusammen. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß man bei der diapolaren Orientierung stets der eintretenden Bewegungslabilität gewärtig sein muß, sobald die Feldintensität im Verhältnis zur Gyrationsenergie einen gewissen Schwellenwert überschreitet. Wegen der Bedingungsungleichungen muß hier

$$K_Z < K_Y < K_X.$$

Es sei wieder angenommen, daß $K_Y = K_Z + \Delta$ und daß, entsprechend dem negativen Höchstwerte des Orientierungskosinus $\mathfrak{m} = -1$, die Gyration bereits um die Polarisationsachse stattfinde, derart daß die $-X$-Achse mit der $+z$-Richtung zusammenfalle. Die Bewegung ist dann wieder analog derjenigen des aufrechten schweren Kreisels; man findet als Schwellenwert

$$\mathfrak{a} > \frac{K_X}{2K_Z}. \tag{24}$$

§ 26. Nach Gleichung (II), § 14 entspricht aber dem negativen Höchstwerte $\mathfrak{m} = \sin\theta = -1$ die Gleichung

$$\mathfrak{a} = \frac{2\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}-1} = 2\left(1 - \frac{K_Z}{K_X}\right). \tag{25}$$

Aus dem Vergleiche von (24) mit (25) ergibt sich nun, daß der Schwellenwert bei dem Labilität eintritt ein größerer ist

1) Wofern $K_Y = K_X$, entspricht $\mathfrak{k} = -1$ (d. h. $K_X = K_Y = 2K_Z$) dem symmetrischen äquatoreal polarisierten Kowalevskischen Kreisel.

als derjenige, welcher der „aufrechten" Gyration entspricht. Wegen der Ungleichung $K_X < K_Y + K_Z$ muß $K_X < 2K_Z + \Delta$, da ja $K_Y = K_Z + \Delta$ angenommen wurde; der niemals ganz erreichbare Grenzfall $K_X/K_Z = 2$ oder $\mathfrak{k} = -1$ würde einer unendlich dünnen regelmäßig polygonalen — bez. kreisrunden — Scheibe in der YZ-Ebene entsprechen, welche in Richtung ihrer Normale polarisiert wäre. Hierbei würde dann in dem zum Felde senkrechten Stande bei der geringsten Steigerung der Intensität sofort Labilität eintreten. Obige Annahme $K_Y = K_Z + \Delta$ ist für die Stabilität am günstigsten; falls K_Y dagegen erheblich größer als K_Z ist, wird bereits früher partielle Labilität eintreten, der diapolare Höchstwert also überhaupt nicht erreicht werden. Die quantitative Diskussion der Stabilität bei allgemeineren Annahmen, auch betreffs der Polarisationsrichtung, wird recht kompliziert.

B. Senkrechte Lage der Gyrationsachse zur Feldrichtung.

§ 27. *Äquatoreale Polarisation.* In Fig. 2 ist die Bildebene äquatoreal gedacht; das Drehmoment $V\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ fällt stets mit der Z-Achse, und daher auch mit der ursprünglichen Richtung des Vektors $\mathfrak{L}$ zusammen; infolgedessen kann nur dessen Tensor variieren, während seine Richtung ungeändert bleibt. Es handelt sich offenbar um eine ebene Pendelbewegung, und es sind zwei Fälle zu unterscheiden je nachdem der Ausdruck $2\mathfrak{M}\mathfrak{F}/E_m$ — welcher der Kürze halber gleich $2a$ gesetzt sei — kleiner oder größer als eins ist; dabei bezeichnet E_m den Maximalwert der kinetischen Energie, für $\alpha = 0$; dagegen muß letztere im allgemeinen für beliebige Winkelwerte von α folgender Gleichung genügen

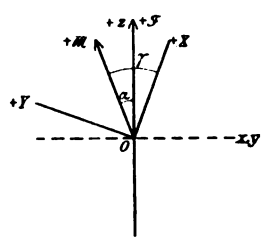


Fig. 2.

$$E = E_m - \mathfrak{M}\mathfrak{F}\,\mathrm{sinvers}\,\alpha; \tag{26}$$

hieraus ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\alpha} = \mathfrak{C} = \dot{\alpha}_m \sqrt{1 - \frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{F}}{E_m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \tag{27}$$

indem ihr Maximalwert

$$\dot{\alpha}_m = \sqrt{\frac{2E_m}{K_Z}}.$$

Zwei nahe verwandte Transformationen im Gebiete der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung:

$$k^2 \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \mathsf{F}(\varphi) - \mathsf{E}_1(\varphi) \tag{28a}$$

und

$$k^2 \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \mathsf{E}_1(\varphi) - (1 - k^2)\,\mathsf{F}(\varphi). \tag{28b}$$

gestatten eine erhebliche Abkürzung der immerhin etwas umständlichen Rechnung, auf deren Entwickelung hier indessen nicht näher eingegangen werden soll (vgl. l. c., §§ 20, 21). Sie ergibt für den zeitlichen Mittelwert des Orientierungskosinus, $\bar{\mathfrak{m}}$, zunächst bei vollem *Umschwung* des Kreisels

$$\bar{\mathfrak{m}} = 1 - \frac{2}{k_0^2}\left(1 - \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{K}}\right), \qquad [\text{mod. } k_0 = +\sqrt{2\,\mathfrak{a}}\,], \tag{III u}$$

dagegen bei hin und her alternierender *Schwingung*

$$\bar{\mathfrak{m}} = 2\,\frac{\mathsf{E}}{\mathsf{K}} - 1, \qquad \left[\text{mod. } k_1 = +\sqrt{\frac{1}{2\,\mathfrak{a}}}\right]. \tag{III s}$$

§ 28. Da K und E als bekannte Funktionen des Moduls allein (für $\varphi = \pi/2$) anzusehen sind, ergibt der Anschluß der Gleichungen (III *u*) und (III *s*) den analytischen Ausdruck für $\bar{\mathfrak{m}}$ als Funktion von $k_0^2/2$ bez. von $1/2\,k_1^2$ und daher auch von $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{F}/E_{\infty}$; letzteres Argument durchläuft dabei alle Werte von Null bis unendlich. Zum Zwecke der Eliminierung von E_{∞} und der Substitution der ursprünglichen feldfreien Energie E_0 müssen nun die energetischen Betrachtungen des § 12 in etwas abgeänderter Form zur Anwendung gelangen. Die Gleichung (26) lautet, indem sinvers $\alpha = 1 - \mathfrak{m}$

$$E = E_{\infty} - (1 - \mathfrak{m})\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}. \tag{29}$$

Sie gilt für jede Phase der Bewegung; letztere wiederholt sich nun in einem unveränderlichen gleichförmigen Felde periodisch; bildet man das Zeitintegral von (29) über den Zeitabschnitt zwischen zwei gleichen Phasen und dividiert durch diese Periode, so erhält man zeitliche Mittelwerte

$$\bar{E} = E_{\infty} - (1 - \bar{\mathfrak{m}})\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}, \tag{$\overline{29}$}$$

wobei E_m ebenso wie $\mathfrak{F}$ als konstant zu betrachten ist; diese Gleichung gestattet die Berechnung der mittleren kinetischen Energie $\bar{E}$ im Felde. Setzt man nun voraus, daß bei stetiger und genügend langsamer Zu- oder Abnahme des Feldes, in dem früher angegebenen Sinne (§§ 10, 12), die Gleichung (11) auch noch für die zeitlichen Mittelwerte gilt, so wäre zu schreiben

$$d\bar{E} = dU + \mathfrak{M}\mathfrak{F}\,d\bar{m}. \tag{14}$$

Falls man nun die Gleichung (29) differentiiert und dann mit Hülfe von (14) $d\bar{E}$ eliminiert, so erhält man die betreffende Differentialgleichung

$$\frac{d\frac{E_m}{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}} = 1 - \bar{m} + \frac{d\frac{U}{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}}. \tag{30}$$

Auf die Zulässigkeit dieser Schlußfolgerung wird bei der Theorie der Kreiselschwärme zurückzukommen sein. Die unten zu gewinnenden Ergebnisse für den adiabatischen Fall, bei deren Herleitung obige Differentialgleichung benutzt wird, sind daher bei einem einzelnen Kreisel noch mit einem gewissen Vorbehalt zu betrachten.

§ 29. *Graphische Diskussion.* Der mittlere Orientierungskosinus $\bar{m}$ wird als Funktion von a durch die gestrichelte Kurve 00 im Diagramm *B* (Taf. VIII) dargestellt. Diese ist als eine Art isokinetischer Kurve zu betrachten, bei der aber nicht die mittlere Energie $\bar{E}$, sondern ihr Maximalwert E_m fortwährend der feldfreien Energie E_0 gleichbleibt. Vom Ursprung ausgehend, beträgt zunächst die Neigungstangente $-1/4$, wie sich aus den bekannten Reihenentwickelungen für K und E ergibt; die Kurve erreicht später einen scharfen singulären Umkehrpunkt (für $\bar{m} = -1$, $a = 0{,}5000$) entsprechend dem „toten Punkte", d. h. dem labilen Gleichgewichte des Kreisels für $\alpha = \pi/2$. Darauf tritt die schwingende Bewegung an die Stelle des Umschwunges; die Kurve schneidet bald die Abszissenachse ($\bar{m} = 0$, $a = 0{,}6036$, $\alpha_m = 131^\circ 2' 4{,}6''$); darauf bleibt $\bar{m}$ positiv. Schließlich konvergiert der Modul k_1 wiederum gegen Null und es ergibt sich aus der Reihenentwickelung der Gleichung (III*s*) daß die Kurve sich ihrer Asymptote $\bar{m} = +1$ anschmiegt nach der hyperbolischen Gleichung zweiten Grades

$$2(1 - \bar{m})a = 1. \tag{31}$$

Indem man von dieser Funktion ausgeht, kann man nun wieder zu den drei verschiedenen Hauptfällen α, β, und γ übergehen, wobei ebenfalls $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/E_0 = a_0$ als neues Argument eingeführt wird. Es ergeben sich hier jedoch keine expliziten Ausdrücke; indessen kann man mittels des Kunstgriffes der Abszissentransformation die neuen Funktionen berechnen.

§ 30. *Isoperiodische Feldeinwirkung.* Bei der feldfreien Rotation gilt anfangs:

$$E_0 = \tfrac{1}{2} K_Z \mathfrak{C}_0^2, \qquad \mathfrak{C}_0 = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{K_Z}}, \qquad \tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K_Z}{2E_0}}.$$

Der Energieausgleich wird nun im Sinne des § 15 derart reguliert, daß die Periode und mithin die mittlere Winkelgeschwindigkeit ihre ursprünglichen Werte ungeändert beibehalten, d. h. $\tau = \tau_0$ und $\bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}_0$ bleiben. Aus dieser Bedingung ergibt sich dann (l. c. § 24)

$$(\mathrm{IV}\alpha) \qquad a_0 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}{E_0} = \left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\right)^2 a.$$

Die mittels dieser Formel berechneten neuen Abszissen ergeben die ausgezogene Kurve $\alpha\alpha$. Anfangs differiert a_0 nicht merklich von a, da für den Modul Null $\mathsf{K} = \pi/2$; alsbald wächst a_0 immer mehr, und der singuläre Umkehrpunkt ($a = 0{,}5000$) würde erst für $a_0 = \infty$, d. h. tatsächlich niemals, erreicht werden, indem für den Modul Eins $\mathsf{K} = \infty$. Demnach hat man es hier nur mit dem Umschwung des Kreisels zu tun, da es zu einer hin- und herschwingenden Bewegung nicht kommen kann; die Orientierung bleibt stets eine diapolare. Es läßt sich ferner zeigen, daß

$$(32) \qquad \bar{E} = \frac{4\mathsf{K}\mathsf{E}}{\pi^2} E_0;$$

hieraus geht hervor, daß in dem ausschließlich diapolaren isoperiodischen Falle der Speicher einen Energiebetrag abgeben muß gleich der Summe der fehlenden mittleren kinetischen Energie $\bar{E} - E_0$ und der von dem entstehenden Felde aufgezehrten Arbeit.

§ 31. *Isokinetische Feldeinwirkung.* Der Ausgleich ist wieder ein vollkommener im Sinne des § 16; es ergibt sich (l. c. § 25)

$$(\mathrm{IV}\beta) \qquad a_0 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}{E_0} = \frac{\mathsf{K}}{\mathsf{E}} a;$$

diese Transformation führt zu der gestrichelten Kurve $\beta\beta$; anfangs unterscheidet sich a_0 wieder nicht merklich von a, aber für $a = 0{,}5000$ wird auch hier die neue Abszisse unendlich, so daß der Kreisel durchweg im Umschwung beharrt und die Orientierung eine diapolare bleibt. Aus der Figur ist ersichtlich, daß die isokinetische Kurve auf einer erheblichen Strecke ihres Verlaufes nur wenig von der Geraden $\bar{m} = -a_0/4$ abweicht, welche sie im Ursprung tangiert und etwa bei der Abszisse 2,5 wieder schneidet, um sich dann von ihr abzubiegen und sich der Asymptote $\bar{m} = -1$ anzuschmiegen, und zwar nach der hyperbolischen Gleichung zweiten Grades

$$(1 + \bar{m})\, a_0 = 1. \tag{33β}$$

Bei wachsender Feldintensität wird die mittlere Winkelgeschwindigkeit kleiner, die Periode länger.

§ 32. *Adiabatische Feldeinwirkung.* Bei fehlendem Speicher kommt der volle vom Felde geleistete [aufgezehrte] Arbeitsbetrag der kinetischen Energie des Kreisels zu statten, bez. ist jener von ihr zu liefern; es ist wie in § 17 $dU = 0$ und die Gleichung (30) lautet nunmehr

$$\frac{d\,\frac{E_m}{\mathfrak{M}}}{d\,\mathfrak{F}} = 1 - \bar{m}. \tag{30*}$$

Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Umschwung. Mittels der Werte für $\bar{m}$ und für den Modul aus (IIIu) läßt sich obige Differentialgleichung nach Trennung der Variabeln wie folgt schreiben

$$2\,\frac{\mathsf{K}}{k_0\,\mathsf{E}}\,dk_0 = \frac{1}{\mathfrak{F}}\,d\mathfrak{F}.$$

Ihre Integration ergibt

$$2\int \frac{\mathsf{K}\,dk_0}{k_0\,\mathsf{E}} = -\,2\int \frac{-\frac{\mathsf{K}}{k_0^2}\,dk_0}{\frac{\mathsf{E}}{k_0}} = \log\mathfrak{F} + \text{const.} \tag{34}$$

Nun kann man nach (28 a) transformieren, und zwar für die vollständigen Integrale ($\varphi = \pi/2$)

$$-\frac{\mathsf{K}}{k_0^2} \equiv -\frac{1}{k_0^2}(\mathsf{K} - \mathsf{E} + \mathsf{E}) = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{k_0^2}\int_0^{\pi/2} \Delta\varphi\,d\varphi,$$

oder

$$-\frac{\mathsf{K}}{k_0^2} = \frac{d}{d\,k_0}\left(\frac{1}{k_0}\int_0^{\pi/2} \Delta\,\varphi\,d\varphi\right) = \frac{d\,\frac{\mathsf{E}}{k_0}}{d\,k_0}\,.$$

Bei der zweiten Schreibart des Integrals in (34) ist also der Zähler das Differential des Nenners und es ergibt sich ohne weiteres

$$-2\int \frac{d\,\frac{\mathsf{E}}{k_0}}{\frac{\mathsf{E}}{k_0}} = \log\frac{k_0^2}{\mathsf{E}^2} = \log C\mathfrak{F}\,.$$

Aus den Anfangsbedingungen findet man die Integrationskonstante $C = 8\,\mathfrak{M}/\pi^2 E_0$ und daraus schließlich

$$(\mathrm{IV}\,\gamma\,.\,u) \qquad \mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}{E_0} = \frac{\pi^2}{4\,\mathsf{E}^2}\,\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}{E_m} = \left(\frac{\pi}{2\,\mathsf{E}}\right)^2 \mathfrak{a}\,.$$

Nach dieser Gleichung ist der erste Ast der strichpunktierten Kurve $\gamma\gamma$ konstruiert bis zum Umkehrpunkt, welcher bei $\mathfrak{a}_0 = \pi^2/8$ liegt; es ist ferner

$$(35) \qquad \bar{E} = \frac{\pi^2}{4\,\mathsf{K}\,\mathsf{E}}\,E_0\,.$$

Die mittlere kinetische Energie nimmt in diesem Falle ab bis sie beim toten Punkte gänzlich aufgezehrt ist; dementsprechend ist der Inhalt des von jenem Kurvenaste, der Ordinatenachse und der Geraden $\overline{\mathfrak{m}} = -1$ umgrenzten Areals gleich eins.

§ 33. *Schwingung.* Die Integration der Differentialgleichung (30*) ergibt hier in ähnlicher Weise

$$(36) \qquad -2\int \frac{k_1\,\mathsf{K}\,d\,k_1}{\mathsf{E} - (1-k_1^2)\,\mathsf{K}} = \log\mathfrak{F} + \text{const.}$$

Nun ist unter diesem Integrale[1]) der Nenner nach der Transformation (28 b) für $\varphi = \pi/2$ gleich dem bestimmten Integrale

$$k_1^2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\,d\,\varphi}{\Delta\,\varphi}\,;$$

1) Die Integrale (34) und (36) verdanke ich in erster Linie der Gefälligkeit des Hrn. A. Sommerfeld; durch die im Text angegebenen Transformationsmethoden wird das Integrationsgeschäft erheblich gekürzt.

es läßt sich wieder der Nachweis führen, daß dessen Differential dem Zähler $k_1 \mathsf{K}\, d k_1$ gleich ist und daß daher

$$-\log\left(\mathsf{E} - (1 - k_1^2)\mathsf{K}\right)^2 = \log C' \mathfrak{F}.$$

Auch für diese Integrationskonstante ergibt sich der Wert $C' = 8\mathfrak{M}/\pi^2 E_0$ und man erhält

$$(\mathrm{IV}\gamma.s) \qquad a_0 = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\left(\mathsf{E} - \left(1 - \frac{1}{2a}\right)\mathsf{K}\right)^2};$$

mittels dieser Formel kann die adiabatische Kurve $\gamma\gamma$ weiter verfolgt werden; sie schneidet die Abszissenachse für $a_0 = 2{,}115$ und bleibt darauf im Gebiete parapolarer Orientierung. Schließlich konvergiert der Modul gegen Null; sobald k_1' zu vernachlässigen ist, ergeben die Reihenentwickelungen

$$(37) \qquad a_0 = 8a^2.$$

Daraus ergibt sich mit Berücksichtigung von (31) für die schließliche Anschmiegung an die Asymptote $\overline{\mathfrak{m}} = +1$ die Gleichung dritten Grades

$$(38\gamma) \qquad \tfrac{1}{2}(1 - \overline{\mathfrak{m}})^2 a_0 = 1.$$

Nachdem der tote Punkt überschritten, hat das Feld Arbeit zu leisten, da $d\overline{\mathfrak{m}}/d a_0$ nunmehr positiv bleibt; die mittlere kinetische Energie nimmt von Null ab fortwährend zu und übertrifft bald ihren feldfreien Wert; das gleiche gilt für die Winkelgeschwindigkeit, während umgekehrt die Periode immer kürzer wird.

§ 34. Die im Diagramm *B* enthaltenen Kurven sind als quasi-reversibele zu betrachten, hysteretische Erscheinungen sind hier nicht zu erwarten. Im Falle eines partiellen Ausgleiches mit einem Energiespeicher würde die entsprechende Kurve auch hier mit der, sämtlichen Fällen gemeinsamen anfänglichen Neigungstangente $-1/4$ ansetzen und darauf zwischen der β- und dem ersten Aste der γ-Kurve verlaufen. Ihre weitere Gestaltung würde durch die Beschaffenheit des Ausgleiches bedingt sein; indessen könnte ein toter Umkehrpunkt niemals erreicht werden, sofern nur stets ein endlicher Bruchteil der vom Felde aufgezehrten Arbeitsmenge dem Kreisel aus dem Speicher restituiert würde; die Orientierung würde dann durchweg eine diapolare bleiben. Wie bereits

hervorgehoben wurde, ist bei der Interpretierung dieser gebnisse im Falle eines einzelnen Kreisels eine gewisse V sicht angebracht.

C. Allgemeinere Bewegungsfälle.

§ 35. Die im vorigen versuchte Behandlung typis Sonderfälle ergibt auch Anhaltspunkte für die qualitative urteilung der im allgemeinen zu erwartenden Bewegungsar Dabei muß freilich auf mathematische Strenge verzichtet wer Man hat sich zunächst mit einer ungefähren Übersicht zu gnügen und wird zwecks Erreichung dieses Zieles auch legentlich die empirische Beobachtung heranziehen dürfen.

In allen bisher untersuchten Fällen war der mitt Orientierungskosinus

$$\text{(V)} \qquad \overline{\mathfrak{m}} = \text{funct}\left(\frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}{E_0}\right),$$

wobei im Argumente die unabhängigen Variabelen stet reziproker Verbindung auftreten und die algebraische transzendente Funktion anfänglich merklich linear mit in Regel endlichem positiven oder negativen Proportionalit faktor ist; Ausnahmen bilden dabei nur solche Fälle, wo e der Faktor $1/2\,\mathfrak{k} = \infty$ würde. Es erscheint die Vermut gerechtfertigt, daß etwas derartiges in allen möglichen Fä stattfindet; dabei ist es gerade die Anfangsstrecke der Ku welche meistens vorwiegend in Betracht kommt. Da nunn $\overline{\mathfrak{M}}_{z0}$ bereits bei der feldfreien Bewegung einen im allgeme von Null verschiedenen Wert aufweisen wird, ist als eig liche orientierte Komponente der Polarisation die Diffe $\overline{\mathfrak{M}}_z - \overline{\mathfrak{M}}_{z0}$, bez. in obiger Gleichung $\overline{\mathfrak{m}} - \overline{\mathfrak{m}}_0$ als Funktio betrachten. Es gibt übrigens polarisierte Kreisel, bei d diese Funktion unendlich gering bleibt; nämlich wenn

$$\mathfrak{M}_X = \mathfrak{M}_Y = 0,$$

d. h. falls die Polarisation gar nicht äquatoreal, sondern schließlich „polar" nach der Z-Achse gerichtet ist.

Im Falle A ergibt sich dann für $\alpha = \measuredangle(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = \measuredangle(Z, z)$ immer ein stabiler Zustand, sei es in Ruhe, sei es bei Rotation; für $\alpha = \pi$ dagegen wird die Bewegung labil

einem gewissen Schwellenwerte der Feldintensität; insbesondere beim symmetrischen Kreisel für

$$\mathfrak{F} > \frac{K_Z^2}{4\,\mathfrak{M}\,K_X}\,\mathfrak{C}_Z^2;$$

bez. wie bereits oben (§ 20) angegeben für

$$\mathfrak{F} > \frac{K_Z}{2\,\mathfrak{M}\,K_X}\,E.$$

§ 36. Im Falle B ist nun $\alpha = \pi/2$; der „polare" Kreisel gerät im Felde in ebene Präzession, deren Tempo $\dot{\psi}$ umgekehrt proportional dem Gyrationstempo ist:

$$\dot{\psi} = -\frac{\mathfrak{M}_Z\mathfrak{F}}{K_Z\mathfrak{C}} = -\frac{\mathfrak{M}_Z\mathfrak{F}}{\sqrt{2\,K_Z E}}. \tag{39}$$

Diese Gleichung folgt aus $\dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{K}$ [Gl. (6)], und bildet übrigens nur eine erste Annäherung; sie gilt für die zeitlichen Mittelwerte des Gyrations- und des Präzessionstempos, vorausgesetzt, daß letzteres von ersterem sehr erheblich — etwa tausende Male — übertroffen wird; Glieder, welche die Gestalt eines Trägheitsellipsoids verkörpern, sind dabei vernachlässigt.[1]) Die Präzession wird im allgemeinen nur eine pseudoreguläre sein; dabei dürfte die Art des Anwachsens der Feldintensität von Null bis zum Endwerte eine Rolle spielen, die rechnerisch zu verfolgen ziemlich aussichtslos erscheint. Sieht man von einer immerhin möglichen, wenn auch nur geringfügigen Nutation ab, so bleibt $\alpha = \pi/2$ und mithin $\mathfrak{m} = \cos\alpha = 0$. Das negative Vorzeichen in der Gleichung (39) besagt infolge der früheren Feststellung des Drehungssinns (§ 3), daß der Präzessionssinn in bezug auf die Feldrichtung $+z$ stets *entgegengesetzt* ist dem Gyrationssinne bezüglich der positiven Polarisationsrichtung.

Falls nun ferner der Winkel α einen willkürlichen Wert zwischen 0 und π aufweist, wird das Feld den Kreisel in konische Präzession geraten lassen, deren Tempo ebenfalls durch obige Gleichung (39) gegeben wird; und zwar ist nach der soeben erwähnten Regel die — im allgemeinen wieder pseudoreguläre — Präzession eine retrogressive [oder pro-

1) Vgl. W. Thomson u. P. G. Tait, Nat. philosophy 2. ed. 1. II. p. 411. Cambridge 1883.

gressive], je nachdem $\alpha < \pi/2$ [bez. $\alpha > \pi/2$]. Vernachlässigt man wieder eine etwaige Nutation, so behält der Orientierungskosinus auch im Felde seinen feldfreien Wert und es bleibt daher $\overline{\mathfrak{m}} - \overline{\mathfrak{m}}_0 = 0$. Eine ausschließlich „polare" Komponente bedingt daher im allgemeinen nur Präzession; die Funktion $\overline{\mathfrak{m}} - \overline{\mathfrak{m}}_0$ bleibt Null, oder streng genommen infolge möglicher Nutation[1]) eine kleine Größe zweiter Ordnung.

§ 37. Im Anschluß an das Vorhergehende ist zu untersuchen, inwiefern die bisherigen Ergebnisse eine Abänderung erfahren, wenn neben der früher vorausgesetzten rein äquatorealen Polarisation nun auch eine „polare" Komponente derselben in Betracht gezogen werden muß.

Was erstens den Fall A betrifft, so ist der jener Komponente entsprechende Anteil des Drehmoments $V\mathfrak{M}_Z\mathfrak{F}$ anfänglich unendlich gering, solange das noch für den zwischen beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel der Fall ist. Das resultierende Drehmoment unterscheidet sich demnach nur unendlich wenig von dem durch die äquatoreale Polarisationskomponente allein bedingten Anteil. Mithin ist auch der Wert von $\dot{\mathfrak{L}}$ und damit die ganze Bewegung anfänglich merklich identisch mit der früher betrachteten, von der sie um so eher abweichen wird, je größer die „polare" Komponente im Vergleich zur äquatorealen ist. Insbesondere gilt hier nach wie vor der Satz des § 11, welcher den para- bez. diapolaren Charakter der Orientierung bestimmt. Es darf daher behauptet werden, daß der nicht in expliziter Form bekannte Ausdruck

$$(4^*) \quad \mathfrak{M}_z - \mathfrak{M}_Z = \mathfrak{M}(\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0) = \mathfrak{M}(c_1 m_1 + c_2 m_2 + (c_3 - 1) m_3)$$

sich anfänglich nicht wesentlich von Gleichung (I) des § 11 unterscheidet, solange der Richtungskosinus c_3 merklich der Einheit gleich ist und c_1, c_2 geringe Werte aufweisen; dabei wird dann die Staudesche Kegelfläche zunächst kaum von ihrer Tangentialebene durch die Erzeugende Z abweichen. In dem Maße aber, wie der Parameter $\mathfrak{M}\mathfrak{F}/\mathfrak{C}^2$ allmählich wächst, wird die Abweichung immer erheblicher; der Kegel

1) Eine solche, bez. ihr verwandte kleine periodische Abweichungen konnten niemals beobachtet werden, und zwar weder beim unsymmetrischen noch beim symmetrischen Kreisel.

wird im Sinne des § 10 an der z-Achse entlang gleiten, bis diese sich der vom Vektor $\mathfrak{M}$ gebildeten Erzeugenden nähert.

Freilich kann jetzt dieser Vektor selbst als permanente Gyrationsachse im allgemeinen nur dann in Betracht kommen, wenn der Parameter unendlich wird, d. h. entweder bei unendlicher Feldintensität oder bei der Winkelgeschwindigkeit Null. Dieses Verhalten hängt damit zusammen, daß die Trägheitsprodukte oder „Zentrifugalmomente" mit Bezug auf eine beliebige Axe allemal endliche Werte aufweisen und bekanntlich nur dann schwinden, wenn man sie auf eine der Hauptträgheitsachsen bezieht. Streng genommen ist nach alledem eine absolut reguläre Gyration um die Polarisationsrichtung nur dann möglich, wenn letztere mit einer jener Hauptachsen zusammenfällt.

§ 38. Das trifft z. B. dann zu, wenn die Polarisation nach der X-Achse gerichtet ist, wie in §§ 14—26 vorausgesetzt wurde. Und zwar können, wie Hr. Staude nachwies, dem Parameter alsdann beliebige endliche Werte zukommen; freilich ist dabei die Frage der Gyrationsstabilität jeweilig zu diskutieren. Tatsächlich dürfte eine Bewegung möglich sein, welche um so weniger von jener einfachsten abweicht, je kleiner der Winkel, um den die Polarisation gegen eine Hauptachse geneigt ist.

Abgesehen aber von jenen Sonderfällen kann die Bewegung des Kreisels nur bei unendlicher Feldintensität eine reguläre Gyration um die Polarisationsrichtung werden, es sei denn, daß seine kinetische Energie vorher schon irgendwie gänzlich verbraucht sei. Mithin wird die Komponente $\mathfrak{M}_z$ gegen ihren Maximalwert $\mathfrak{M}$ auch nur asymptotisch konvergieren, und zwar nach einem Gesetze, zu dem man durch folgende Überlegung gelangt: Sowohl das Trägheitsmoment als die endlichen Trägheitsprodukte bez. das „Zentrifugalmoment" mit Bezug auf die $\mathfrak{M}$-Achse ist merklich das gleiche für Gyrationsachsen, welche mit letzterer einen sehr kleinen Winkel α bilden. Infolgedessen ist in erster Annäherung das Zentripetalmoment

$$\mathfrak{K}_C = \text{const}\,\mathfrak{C}^2 = \text{const}\,E,$$

wo der konstante Faktor von E in berechenbarer Weise von K_X, K_Y, K_Z, m_1, m_2, m_3 abhängt und E unveränderlich gleich der feldfreien E[illegible] sei, entsprechend einem

isokinetischen Ausgleich. Nach (6) ist, wenn man α für $\sin\alpha$ setzt:

$$\mathfrak{K}_C = \mathfrak{K} = V\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{F}\,\alpha.$$

Da außerdem

$$1 - m = \text{sinvers}\,\alpha = \frac{\alpha^2}{2} = \text{const}\left(\frac{E}{\mathfrak{M}\,\mathfrak{F}}\right)^2,$$

so ergibt sich für die schließliche Anschmiegung an die Asymptote die Gleichung dritten Grades

$$(40) \qquad (1 - m)\,\alpha_0^2 = \text{funct}\,(K_X, K_Y, K_Z, m_1, m_2, m_3).$$

Diese Formel läßt sich übrigens auch analytisch aus den Gleichungen (2) entwickeln und gilt nachweislich ebenso bei adiabatischer Einwirkung des Feldes, jedoch mit einem verschiedenen Werte der Konstanten.

Die Ausführungen der §§ 37—38 lassen sich schließlich dahin zusammenfassen, daß im Falle A die Anfangs- und Endstrecke derjenigen quasi-reversibelen Kurve als bekannt gelten darf, welche $m - m_0$ als Funktion von α_0 darstellt, so daß sich ihr mittlerer Verlauf unschwer schätzen läßt.

§ 39. Was zweitens den Fall B betrifft, so bedingt eine „polare" $\mathfrak{M}$-Komponente eine ebene pseudoreguläre Präzession; daneben wird die äquatoriale Polarisation die in §§ 27—34 eingehend diskutierte variabele Winkelgeschwindigkeit und ihre Folgeerscheinungen erzeugen. Die beiden Bewegungsarten treten nun gleichzeitig auf, sofern der Kreisel umläuft; solange dies noch mit großer Geschwindigkeit stattfindet, treten weder die Präzession noch die diapolare Orientierung in den Vordergrund und diese beiden „kleinen" Wirkungen superponieren sich einfach quantitativ. Falls dagegen die kinetische Energie eine geringe ist, namentlich wenn der Kreisel nur mehr hin und herschwingt, wird der Einfluß einer „polaren" Komponente höchst kompliziert und läßt sich weder theoretisch noch experimentell verfolgen.

§ 40. Betrachtet man ferner den Fall, daß die Z-Achse anfänglich bereits eine zur Feldrichtung geneigte Lage einnimmt, dann entspricht der Feldkomponente $\mathfrak{F}_A$ eine A-Wirkung, der dazu senkrechten Komponente $\mathfrak{F}_B$ eine B-Wirkung; beide

treten nun gleichzeitig mit einer konischen pseudoregulären Präzession auf. Die drei Erscheinungen superponieren sich wieder quantitativ, wofern die kinetische Energie einen erheblichen Wert aufweist; es folgt das aus den allgemeinen Grundsätzen über das gleichzeitige Auftreten verschiedener kleiner Bewegungen.[1]) Die beiden Feldkomponenten haben die Werte $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}\cos\theta$ und $\mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}\sin\theta$ (vgl. Fig. 3). Die A-Wirkung untersteht der etwas modifizierten Gleichung (I) (§ 11)

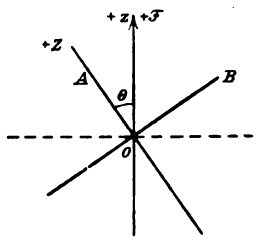


Fig. 3.

$$(I^*) \qquad \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_{A0} = \frac{\mathfrak{F}_A}{\mathfrak{C}^2}\left(\frac{\mathfrak{M}_X^2}{K_Z - K_X} + \frac{\mathfrak{M}_Y^2}{K_Z - K_Y}\right).$$

Es seien nunmehr ausschließlich schwache Wirkungen des Feldes vorausgesetzt, bei denen die kinetische Energie und die Winkelgeschwindigkeit noch keine merklichen Abweichungen von ihren feldfreien Werten aufweisen und der Unterschied zwischen isoperiodischer, isokinetischer und adiabatischer Einwirkung noch zu vernachlässigen ist; es ist dann $1/\mathfrak{C}^2 = K_Z/2E_0$ zu setzen und daher

$$(I^{**}) \qquad \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_{A0} = \frac{\mathfrak{F}}{2E_0}\left(\frac{\mathfrak{M}_X^2 K_Z}{K_Z - K_X} + \frac{\mathfrak{M}_Y^2 K_Z}{K_Z - K_Y}\right)\cos\theta.$$

§ 41. Für die B-Wirkung gilt anfänglich nach § 29, da die äquatoreale Polarisationskomponente $\sqrt{\mathfrak{M}_X^2 + \mathfrak{M}_Y^2}$ beträgt, und $\mathfrak{M}_B$ außerhalb des Feldes schwindet:

$$(III^* u) \qquad \bar{\mathfrak{M}}_B = -\tfrac{1}{4}\frac{(\mathfrak{M}_X^2 + \mathfrak{M}_Y^2)\,\mathfrak{F}_B}{E_0} = -\frac{(\mathfrak{M}_X^2 + \mathfrak{M}_Y^2)\,\mathfrak{F}}{4E_0}\sin\theta.$$

Nun folgt aus dem erwähnten Superpositionsprinzip:

$$\bar{\mathfrak{M}}_z - \mathfrak{M}_{z0} = (\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_{A0})\cos\theta + \bar{\mathfrak{M}}_B\sin\theta;$$

und es wird die orientierte Gesamtkomponente

$$(VI) \qquad \left\{\bar{\mathfrak{M}}_z - \mathfrak{M}_{z0} = \frac{\mathfrak{F}}{2E_0}\left(\frac{\mathfrak{M}_X^2 K_Z\cos^2\theta}{K_Z - K_X} + \frac{\mathfrak{M}_Y^2 K_Z\cos^2\theta}{K_Z - K_Y} - \frac{(\mathfrak{M}_X^2 + \mathfrak{M}_Y^2)\sin^2\theta}{2}\right).\right.$$

1) Dieses Superpositionsprinzip läßt sich übrigens auch durch ein „Experimentum crucis" erhärten.

Sie schwindet zugleich mit dem Klammerausdruck, nämlich für den Winkel

$$(41)\qquad \theta_0 = \arccos \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_X^2 + \mathfrak{M}_Y^2}{\mathfrak{M}_X^2 \frac{3K_Z - K_X}{K_Z - K_X} + \mathfrak{M}_Y^2 \frac{3K_Z - K_Y}{K_Z - K_Y}}}.$$

Die resultierende Orientierung ist demnach eine parapolare [oder diapolare], je nachdem $\theta < \theta_0$ [bez. $\theta > \theta_0$]; falls K_Z das kleinste Hauptträgheitsmoment ist, wird θ_0 übrigens allemal imaginär und mithin die Orientierung für alle θ-Werte eine diapolare.

§ 42. Schließlich ist noch einmal zurückzugreifen auf die erste allgemeinere Fragestellung betreffs des Einflusses eines allmählich wachsenden Feldes auf eine ursprünglich feldfreie Poinsot-Bewegung (§ 4) anstatt auf eine regelmäßige Gyration um die Z-Achse. Beim unsymmetrischen Kreisel kann man erstere bekanntlich darstellen, indem man ein zum raumfesten Stützpunkte gehöriges Trägheitsellipsoid auf einer raumfesten Ebene gleitungslos abrollen läßt. Sofern die Bewegung von der regulären Gyration wenig abweicht, wird der Herpolhodiën- und der Polhodiënkegel eine geringe Öffnung aufweisen und die gleichnamigen Kurven werden aus jener Ebene bez. aus dem Ellipsoide nur kleine Flächenstücke abgrenzen.

Diese kleinen Abweichungen werden sich nun im Felde den übrigen Wirkungen wieder superponieren und an und für sich die orientierte Polarisationskomponente nicht beeinflussen, wenigstens in erster Annäherung. Die kleine Herpolhodiën- bez. Polhodiënkurve wird durch das Feld zunächst nicht merklich deformiert, da sie ja bei der regulären Gyration je zu einem Punkt entarteten. Ebensowenig wird das Feld die von der „Pfeilspitze" des Ω-Vektors bezüglich des Kreisels beschriebene sphärische Kurve verzerren, während jener Punkt im Raume nach wie vor einen Kreis durchläuft.

Die behufs Bestätigung der vorliegenden Theorie erhaltenen Versuchsergebnisse sowie die rechnerische Untersuchung der Orientierung polarisierter Kreiselschwärme sollen den Gegenstand weiterer Abhandlungen bilden.

Utrecht, Universität, 15. September 1903.

(Eingegangen 18. September 1903.)

5. *Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische I;* von *R. Hollmann.*

Die äußere Analogie der Erscheinungen, welche den Schmelzprozeß und die Verdampfung begleiten, besteht nur bei niedrigen Drucken. Während die Dampfspannungskurve (p, T) einer Flüssigkeit im kritischen Punkt ihr Ende erreicht, können solche kritische Punkte nach der von G. Tammann[1]) aufgestellten Hypothese nicht auftreten, sobald eine der am Gleichgewicht beteiligten Phasen kristallisiert ist. Das zur Stütze dieser Hypothese erbrachte experimentelle Material[2]) widerspricht derselben in keinem Punkt, enthält vielmehr vielfach eine direkte Bestätigung auf Grund jener Hypothese vorhergesagter Erscheinungen. Da somit die den Zustandswechsel einheitlicher Stoffe begleitenden Erscheinungen verschieden sind, je nachdem es sich um Schmelzung oder Verdampfung handelt, muß eine ähnliche Verschiedenheit beim Schmelzen bez. Verdampfen von Gemischen erwartet werden.

Es ist nun Zweck dieser Abhandlung, auf den Gang der Volumenänderung während des Phasenwechsels näher einzugehen. Dabei werden in erster Linie binäre Gemische berücksichtigt, doch lassen sich folgende Ableitungen in manchen Fällen auch auf Gemische aus mehr, als zwei Komponenten anwenden.

Während sich der Phasenwechsel einheitlicher Stoffe und die Umwandlungen in zusammengesetzten nonvarianten Systemen bei einer bestimmten Temperatur (p = konst.) vollzieht, erstreckt sich bekanntlich der Phasenwechsel von Gemischen in der Regel über ein Temperaturintervall. Im allgemeinen ist dabei das Verhältnis der Komponenten in den koexistierenden

1) G. Tammann, Zeitschr. f. physikal. Chem. **21.** p. 17. 1896; Wied. Ann. **62.** p. 280. 1897.

2) Vgl. G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen 1903.

Phasen ein verschiedenes; haben die Phasen dieselbe Zusammensetzung, oder entspricht bei drei Phasen die Zusammensetzung einer von ihnen der Bedingung, daß die beiden anderen aus derselben gebildet werden können, so ist die Temperatur bei konstantem Druck ein Maximum oder Minimum, bez. der Druck bei konstanter Temperatur ein Minimum oder Maximum.[1]) Solche Gemische verhalten sich in vielen Beziehungen wie einheitliche Stoffe.

1. Das Volumen homogener Phasen.

Die Abhängigkeit des Volumens homogener Phasen v vom Mischungsverhältnis der Komponenten x und von der Temperatur T bei konstantem Druck p wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$(1) \qquad dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{p,\,T} dx + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,\,x} dT.$$

Bezeichnen wir mit v_0 das Volumen der Gewichtseinheit eines Gemisches bei der Temperatur T_0, ferner die spezifischen Volumina der beiden Komponenten bei derselben Temperatur bez. mit v_0' und v_0'', und mit x den Bruchteil der zweiten Komponente, so ist:

$$v_0 = (1 - x)\, v_0' + x\, v_0'' + \Delta_v,$$

oder

$$(2) \qquad v_0 = (v_0'' - v_0')\, x + v_0' + \Delta_v,$$

wo Δ_v, welches sowohl positive als auch negative Werte haben kann, die den Mischungsakt begleitende Volumenänderung bedeutet. Differenzieren wir Gleichung (2) partiell nach x und T, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{p,\,T} = v_0'' - v_0' + \left(\frac{\partial \Delta_v}{\partial x}\right)_{p,\,T}$$

und

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,\,x} = \left[\left(\frac{\partial v''}{\partial T}\right)_{p,\,x} - \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x}\right] x + \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x} + \left(\frac{\partial \Delta_v}{\partial T}\right)_{p,\,x}.$$

---

1) J. W. Gibbs, Thermodynam. Studien. Übers. von W. Ostwald, p. 150 u. 152. 1892.

Substituieren wir diese Gleichungen in Gleichung (1), so erhalten wir für dv folgenden Ausdruck:

$$dv = \left[v_0'' - v_0' + \left(\frac{\partial \Delta_v}{\partial x}\right)_{p,\,T}\right] dx + \left\{\left[\left(\frac{\partial v''}{\partial T}\right)_{p,\,x} - \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x}\right] x + \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x} + \left(\frac{\partial \Delta_v}{\partial T}\right)_{p,\,x}\right\} dT.$$

Beim Integrieren dieser Gleichung ergibt sich der Wert der Integrationskonstanten C zu v_0', da bei $T = T_0$ und $x = 0$ $v = v_0'$ ist.

Setzen wir in erster Annäherung $\Delta_v = 0$, so vereinfacht sich der Ausdruck für dv zu

$$(3)\quad dv = (v'' - v')\,dx + \left\{\left[\left(\frac{\partial v''}{\partial T}\right)_{p,\,x} - \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x}\right] x + \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_{p,\,x}\right\} dT.$$

Im folgenden werden wir uns stets dieser vereinfachten Gleichung bedienen.

Da die Annahme, daß $\Delta_v = 0$ ist, ohne Einschränkung in betreff des Aggregatzustandes gemacht worden ist, müssen wir jetzt zusehen, wie weit dieselbe mit der Erfahrung in Einklang steht.

Soweit homogene kristallisierte Gemische in Betracht kommen, wird unsere Annahme durch die bekannten Untersuchungen von Retgers über das spezifische Gewicht von Mischkristallen in weitgehendem Maße gerechtfertigt. Die Retgerssche Regel gilt genau genommen nur für die Temperatur seiner Versuche (Zimmertemperatur), doch ist es sehr wahrscheinlich, daß der Wert von Δ_v, der tatsächlich wohl vorhanden sein mag, auch bei allen anderen Temperaturen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

Anders steht es dagegen mit der Volumenisotherme von flüssigen Gemischen. Dieselbe ist durchaus nicht immer eine gerade Linie. Um nur eines von den bekanntesten Beispielen anzuführen, bei denen die Voraussetzung $\Delta_v = 0$ nicht zutrifft, seien die Alkohol-Wassermischungen erwähnt, wo $\Delta_v < 0$ ist. Da jedoch die den Mischungsvorgang begleitende Kontraktion bez. Dilatation oft nur unbedeutend ist, so kann die Annahme, daß $\Delta_v = 0$ ist, in solchen Fällen immerhin als Näherungsregel Anwendung finden.

Bei gasförmigen Gemischen kommt hier die Regel von Amagat[1]) in Betracht, welche für Gasgemische unter konstantem Druck dasselbe besagt, wie die Retgerssche Regel für Mischkristalle. Strenge Gültigkeit erlangt erstere als Grenzgesetz erst bei unendlicher Verdünnung. Da wir es jedoch hier mit gesättigten Dämpfen zu tun haben, gilt auch die Amagatsche Regel wohl nur mit einer gewissen Annäherung.

Die vereinfachte Gleichung (3) ist somit nur dann anwendbar, wenn den soeben besprochenen Regelmäßigkeiten genügt ist. In allen anderen Fällen ist $\Delta_v = f(x, T)$ durch den Versuch zu ermitteln.

2. Das Volumen heterogener Systeme.

Unterscheiden wir die bei der Temperatur T koexistierenden Phasen durch die Indizes 1 und 2 und bezeichnen den Bruchteil der zweiten Phase mit γ, so daß von der ersten Phase $1 - \gamma$ Gewichtseinheiten verhanden sind, so haben wir

$$v_T = v_{1\,T}(1 - \gamma) + v_{2\,T}\gamma$$

und

$$dv = (v_2 - v_1)\,d\gamma + (1 - \gamma)\,dv_1 + \gamma\,dv_2. \tag{4}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diese Gleichung auf die Form zu bringen

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{p,\,T} dx + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,\,x} dT.$$

Sei x die Konzentration des heterogenen Systems und x_1 und x_2 die bez. Konzentrationen der Phasen, so lehrt eine einfache geometrische Betrachtung, daß

$$\gamma = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}, \tag{5}$$

da x mit dem Schwerpunkt der in den Punkten x_1 und x_2 gedachten Massen der Phasen zusammenfällt.

---

1) E. H. Amagat, Compt. rend. 127. p. 88. 1898; vgl. auch J. D. van der Waals, Kontinuität 2. p. 53 ff. 1900.

Da bei koexistierenden Phasen

$$\begin{cases} x_1 = f_1(T), \\ x_2 = f_2(T), \end{cases} \tag{6}$$

so ist augenscheinlich

$$\gamma = F(x, T), \tag{7}$$

und für $d\gamma$ können wir setzen

$$d\gamma = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial T} dT. \tag{8}$$

Werden die Gleichungen (6) in die mit den Indizes 1 und 2 versehene Gleichung (3) statt x eingesetzt, so gehen dieselben über in

$$\begin{cases} dv_1 = \left\{(v_1'' - v_1')f_1''(T) + \left[\left(\frac{\partial v_1''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x}\right] f_1'(T) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x}\right\} dT, \\ dv_2 = \left\{(v_2'' - v_2')f_2''(T) + \left[\left(\frac{\partial v_2''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x}\right] f_2'(T) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x}\right\} dT, \end{cases} \tag{9'}$$

wofür wir abgekürzt setzen

$$\begin{cases} dv_1 = \varphi_1'(T)\, dT, \\ dv_2 = \varphi_2'(T)\, dT. \end{cases} \tag{9}$$

Durch Integration wird hieraus erhalten

$$\begin{cases} v_1 = \varphi_1(T), \\ v_2 = \varphi_2(T). \end{cases} \tag{10}$$

Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst, denn die Gleichungen (8) bis (10) in (4) substituiert, ergeben eine neue Gleichung, welche das Volumen eines heterogenen Systems in Abhängigkeit von x und T darstellt. Bevor wir jedoch substituieren, untersuchen wir noch den partiellen Differentialquotienten $\partial F/\partial x$, da sich dabei eine bemerkenswerte Eigenschaft ergibt, von der wir später Gebrauch machen werden.

Differenzieren wir Gleichung (5), welche augenscheinlich mit (7) identisch ist, partiell nach x, so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-1}{x_1 - x_2}.$$

Führen wir jetzt die angedeuteten Substitutionen aus, so erhält die gesuchte Gleichung folgende Gestalt:

$$(11)\quad \left\{ dv = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{f_2 - f_1}\, dx + \left[(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial F}{\partial T} + (1 - F)\, \varphi_1'(T) + F.\, \varphi_2'(T) \right] dT. \right.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, müssen x_1 und x_2 als Funktionen der Temperatur bekannt sein. Dieselben sind durch den Versuch zu ermitteln. Zugleich sind x_1 und x_2 die Grenzen, zwischen denen sich bei konstanter Temperatur x bewegen kann, ohne daß das System aufhört, ein heterogenes zu sein, denn bei $x = x_1$ ist $\gamma = 0$ und $v = v_1$, und ist $x = x_2$, so ist $\gamma = 1$ und $v = v_2$.

Setzen wir in Gleichung (11) $dx = 0$ und integrieren zwischen den Grenzen T_1 und T_2, welche die niedrigste bez. höchste Temperatur vorstellen mögen, wo ein Gemisch von gegebener Konzentration als heterogenes System bestehen kann, so erhalten wir die totale Volumenänderung beim Phasenwechsel eines binären Gemisches. Wir bezeichnen dieselbe mit $\Delta v_{2,1}$.

Da Gleichung (11) nicht sogleich erkennen läßt, welcher Anteil jeder Phase des Systems im gegebenen Augenblick zukommt, leiten wir den Inhalt der eckigen Klammer vor dT auf etwas anderem Wege noch einmal her, um ihn dann für den praktischen Gebrauch noch zu vereinfachen.

Bezeichnen wir mit v_{1T_1} das Volumen der Gewichtseinheit der ersten Phase des Gemisches bei der Temperatur T_1, wo der Phasenwechsel beginnt, mit λ und v_{1T} die Menge und das Volumen der Gewichtseinheit derselben Phase von einigermaßen geänderter Zusammensetzung bei einer höheren Temperatur $T > T_1$, und mit γ und v_{2T} die Menge bez. das spezifische Volumen der beim Phasenwechsel entstandenen zweiten Phase bei derselben Temperatur T, so ist die totale Volumenänderung beim Erwärmen von T_1 auf T

$$(12)\qquad \Delta v_{TT_1} = \lambda v_{1T} + \gamma v_{2T} - v_{1T_1},$$

wo λ und γ zwei positive Zahlen sind, welche außerdem nur noch der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Summe gleich 1 ist.

Substituieren wir an Stelle von v_{1T} und v_{2T} die mit den auf die entsprechenden Phasen bezüglichen Indizes versehenen Integrale der Gleichung (3), so geht Gleichung (12) über in

$$\begin{aligned}\Delta v_{T T_1} = {} & v'_{10}\lambda + (v''_{10} - v'_{10})x_1\lambda + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x}(T - T_0)\lambda \\ & + \left[\left(\frac{\partial v_1''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x}\right](T - T_0)x_1\lambda \\ & + v'_{20}\gamma + (v''_{20} - v'_{20})x_2\gamma + \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x}(T - T_0)\gamma \\ & + \left[\left(\frac{\partial v_2''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x}\right](T - T_0)x_2\gamma - v_{1T_1}.\end{aligned}$$

Bei der Differentiation dieser Gleichung ist darauf zu achten, daß v_{1T_1}, sowie T_0 konstant sind, somit nur nach x_1, x_2, T, λ und γ zu differenzieren ist ($T - T_0 = t$):

$$(13)\quad \begin{cases} d\Delta v = v'_{10}\,d\lambda + (v''_{10} - v'_{10})\,d(x_1\lambda) + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x} d(t\lambda) \\ \qquad + \left[\left(\frac{\partial v_1''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_1'}{\partial T}\right)_{p,x}\right] d(t x_1\lambda) \\ \quad + v'_{20}\,d\gamma + (v''_{20} - v'_{20})\,d(x_2\gamma) + \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x} d(t\gamma) \\ \qquad + \left[\left(\frac{\partial v_2''}{\partial T}\right)_{p,x} - \left(\frac{\partial v_2'}{\partial T}\right)_{p,x}\right] d(t x_2\gamma). \end{cases}$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, müssen x_1 und x_2, sowie λ und γ als Funktionen von T bekannt sein. Sind die Gleichungen (6) gegeben, so sind λ und γ ebenfalls bekannte Temperaturfunktionen:

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} = F_1(T), \\ \gamma = \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = F_2(T). \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (6) und (14) in (13) statt x_1, x_2, λ und γ eingesetzt, so läßt sich letztere integrieren. Der auf den ersten Blick etwas schwerfällige Ausdruck, der dadurch entstehen würde, kann jedoch bedeutend vereinfacht werden.

Die eckigen Klammern enthalten nämlich Differenzen sehr kleiner echter Brüche; x_1 und λ bez. x_2 und γ sind ebenfalls

echte Brüche, so daß diese Produkte neben den anderen in der Gleichung vorkommenden Größen vernachlässigt werden können. Kommt es nicht auf sehr große Genauigkeit an, oder sind die Werte der partiellen Differentialquotienten $\partial v_1'/\partial T$ und $\partial v_2'/\partial T$ durch den Versuch nicht genau genug festzustellen, um in die Rechnung eingeführt zu werden, so können auch die damit behafteten Glieder gegenüber den übrig bleibenden vernachlässigt werden, um so mehr da diese Differentialquotienten, die an und für sich sehr kleine Werte besitzen, echte Brüche als Faktoren neben sich haben.

Das Integral von (13) erhält nach diesen Vereinfachungen folgende Gestalt:

$$(15) \quad \begin{cases} \int d\,\Delta v = v_1' \int d\lambda + (v_1'' - v_1') \int d(x_1\,\lambda) \\ \qquad + v_2' \int d\gamma + (v_2'' - v_2') \int d(x_2\,\gamma) + C, \end{cases}$$

wobei x_1, x_2, λ und γ statt der Funktionen (6) und (14) geschrieben sind.

Wird diese Gleichung zwischen den Grenzen T_1 und T_2 integriert, so erhält man die gesuchte Größe $\Delta v_{2,1}$ mit einer Genauigkeit, die in vielen Fällen ausreichend ist.

Da bei $T = T_1$ $\Delta v = 0$ ist, so ist die Konstante C ebenfalls gleich Null.

Zur Ausführung der Integration empfiehlt es sich, statt der Gleichungen (6) die entsprechenden in Koordinatenpapier eingetragenen Kurven zu benutzen und die durch graphische Interpolation gewonnenen x_1- und x_2-Werte zur Berechnung von λ und γ nach Gleichung (14) zu verwerten.

3. Die $(v, x, T)_p$-Fläche für homogene Phasen und heterogene Systeme aus zwei Komponenten.

Stellen wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen v, x und T vor, wo x alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, so stellt Gleichung (3), mit den entsprechenden Indizes versehen, zwei Flächen vor, welche homogenen Phasen entsprechen. Das diese beiden Flächen verbindende Stück der Volumenfläche entspricht heterogenen Zu-

ständen; die Gestalt dieses Teiles wird durch Gleichung (11) wiedergegeben.

Die allgemeinen Eigenschaften der Fläche ergeben sich aus der Diskussion der entsprechenden Gleichungen.

a) *Schnitte für $T = konst.$* Setzen wir in Gleichungen (3) und (11) $dT = 0$, so zeigt zunächst Gleichung (3), daß diese Schnitte mit den Flächen für homogene Phasen gerade Linien sind, wenn $\Delta_v = 0$ ist.

Da Gleichung (11) bei $dT = 0$ übergeht in

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{f_2 - f_1},$$

wofür wir auch schreiben können (vgl. Gleichung (6) und (10))

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1},$$

so geht hieraus unmittelbar hervor, daß

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \text{konst.}$$

Da alle Eigenschaften koexistierender Phasen nur eine Funktion der Temperatur sind ($p = $ konst.), so sind sie bei konstanter Temperatur ebenfalls konstant.[1])

Diese Eigenschaft der Volumenfläche für heterogene Zustände, daß die Schnitte für konstante Temperatur sämtlich Gerade sind, ist um so mehr bemerkenswert, als sie vollständig unabhängig ist von der Voraussetzung, welche zur vereinfachten Form von Gleichung (3) geführt hatte, daß nämlich $\Delta_v = 0$ angenommen wurde.

Ist die Gestalt der Kurven $x_1 = f_1(T)$ und $x_2 = f_2(T)$ bekannt, welche wir Grenzkurven nennen wollen, da sie die Flächen, welche homogenen Phasen korrespondieren, gegen das heterogene Flächenstück abgrenzen, so kann man sich letzteres dadurch entstanden denken, daß eine Gerade längs den Grenzkurven gleitet, wobei sie sich parallel der v, T-Ebene bewegt.

b) *Schnitte für $x = konst.$* Wird in der Gleichung für homogene Phasen (Gleichung (3)) $dx = 0$ gesetzt, so gibt

1) Dasselbe Ergebnis folgt analytisch aus Gleichung (6), die nur noch differenziert zu werden braucht, und Gleichung (9), wenn $dT = 0$ gesetzt wird.

$(dv/dT)_x$ die gesuchte Richtung der Schnitte an. Setzen wir in erster Annäherung:

$$\frac{\partial v'}{\partial T} = \alpha' v'_0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v''}{\partial T} = \alpha'' v''_0,$$

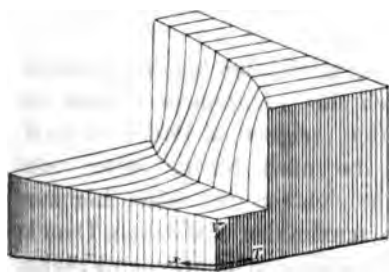
so sind auch diese Schnitte gerade Linien. Da die Wahl von T_0, wo $v = v_0$ ist, freisteht, kann diese Temperatur beliebig nahe von T_1 angenommen werden, so daß die Gleichung $v = F(T)$ innerhalb der gewählten Grenzen als Gleichung ersten Grades gelten darf. Wie wir jedoch später, bei Gelegenheit der Darstellung der kritischen Umstände, sehen werden, ist diese Annahme nicht immer statthaft.

Während die bisher betrachteten Schnitte gerade Linien waren oder nur unbedeutend von solchen abwichen, hängt die Gestalt der Schnitte für $x =$ konst. durch das heterogene Gebiet nicht nur von der Gestalt der Grenzkurven ab, sondern auch vom Vorzeichen von $\Delta v_{2,1}$ für die reinen Komponenten, sowie von der relativen Größe von v'_1, v''_1 und v'_2, v''_2. Die Gestalt dieser Schnitte ist aus der entsprechenden Gleichung ((11) oder (15)) nicht unmittelbar zu ersehen und läßt sich am einfachsten an der Hand räumlicher Modelle demonstrieren, welche zu diesem Zweck hier reproduziert sind.

Fassen wir zunächst den Phasenwechsel flüssig→gasförmig ins Auge, so ist $\Delta v_{2,1}$ positiv, höchstens gleich Null, niemals dagegen negativ. Nehmen wir den einfachsten Fall an, daß die Grenzkurven weder ein Maximum noch ein Minimum aufweisen, so hat die Volumenfläche die in Fig. 1 wiedergegebene Gestalt. Die Schnitte für $dx = 0$ sind durch schwarze Linien hervorgehoben. Die Richtung der Achsen ist aus der Figur ersichtlich. Die Projektionen der Grenzkurven auf die x, T-Ebene sind die bekannten Kurven, welche die Konzentration der siedenden Gemische und die Zusammensetzung des koexistierenden Dampfes in Abhängigkeit von der Temperatur darstellen.

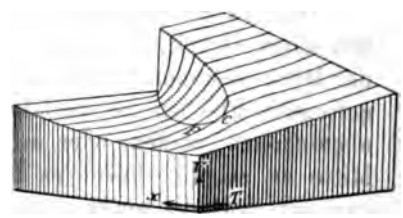
Haben dagegen die Grenzkurven ein Maximum oder ein Minimum, wo $x_1 = x_2 = x$ ist, so verhalten sich die Gemische dieser Konzentration beim Phasenwechsel wie einheitliche Stoffe, und der mittlere, geschwungene Teil der Volumenfläche weist an der betreffenden Stelle eine der v-Achse parallele Gerade auf, während sie zu beiden Seiten derselben ähnlich gestaltet ist, wie in Fig. 1.

Bleiben wir bei den einfachen daselbst dargestellten Verhältnissen, und betrachten die Veränderungen, welche die Volumenfläche bei steigendem Druck erleidet, so wird zunächst die Differenz der spezifischen Volumina oder $\Delta v_{2,1}$ auf der ganzen Strecke kleiner, während der Charakter der Grenzkurven im allgemeinen gewahrt bleibt. Beim kritischen Druck der einen Komponente verschwindet die senkrechte Gerade z. B. in der Ebene $x = 0$. Bei einem etwas höheren Druck geht dann der linke homogene Teil in der Nähe der Ebene $x = 0$ kontinuierlich in den rechten homogenen Teil über, was durch Fig. 2 veranschaulicht wird. Das nachgebliebene Flächen-



p = konst.

Fig. 1.



p = konst.

Fig. 2.

stück, welches noch heterogenen Zuständen entspricht, wird bei weiter steigendem Druck allmählich vom Beschauer weg abgeschoben, um beim kritischen Druck der zweiten Komponente zu verschwinden.

Der Punkt P der in Fig. 2 kontinuierlichen Grenzkurve, wo die Tangente parallel der v, x-Ebene ist, entspricht der kritischen Faltenpunktstemperatur T_f, wo $v_1 = v_2$ und $x_1 = x_2$, somit die van der Waals[1]) mit $v_{2,1}$ bezeichnete Größe

$$v_2 - v_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{p,\,T} = 0$$

ist, ohne daß dieses Nullwerden beim Überschreiten des Punktes P auf der Grenzkurve von einem Zeichenwechsel begleitet ist. Das zweite Mal wird $v_{2,1} = 0$ im Punkt C, wo die Tangente der Grenzkurve parallel der v, T-Ebene ist. Die entsprechende

1) J. D. van der Waals, Kontinuität 2. p. 109. 1900.

Temperatur ist die kritische Berührungspunktstemperatur T_{tg}, wo $v_{2,1}$ das Vorzeichen wechselt. Die zwischen den durch die Punkte P und C gehenden $(v, T)_{p,x}$-Kurven liegenden Gemische zeigen retrograde Kondensation I (Kuenen).

Da die dargestellten Verhältnisse so gewählt sind, daß dem Bestandteil mit der niedrigeren kritischen Temperatur auch der niedrigere kritische Druck zukommt, so liegt der Faltenpunkt auf der Seite der kleinen (Flüssigkeits)-Volumina. Dementsprechend ist bei der Konstruktion der Fläche Fig. 2 darauf Rücksicht genommen, daß $(d^2 v_1 / d x_1^2)_{p,T}$ in der Nähe des Punktes P positiv [1]), mithin Δ_v nicht gleich Null ist. Ebenso wenig ist $(d^2 v / d T^2)_{p,x}$ in der Umgebung des Punktes C gleich Null, worauf bereits hingewiesen wurde.

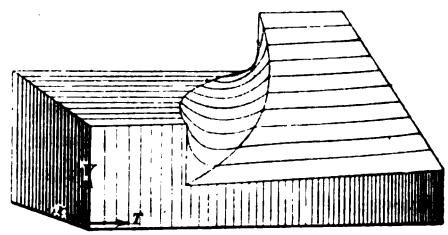
Gibt es ein Gemisch mit einem minimalen bez. maximalen kritischen Druck, so schnürt sich das heterogene Gebiet in der Mitte zusammen, um bei weiter steigendem Druck in zwei getrennte Flächen zu zerfallen, die nach beiden Seiten hin abgeschoben werden, oder es zieht sich von den Seiten her zur Mitte zu zurück, bevor es beim maximalen kritischen Druck ganz verschwindet, um einer ununterbrochenen homogenen Fläche Platz zu machen. In beiden Fällen wird je nach den näheren Umständen retrograde Kondensation I oder II in je zwei verschiedenen Konzentrationsintervallen zur Beobachtung gelangen müssen.

Da beim Phasenwechsel flüssig → gasförmig die bei höheren Temperaturen stabile Phase immer ein größeres oder höchstens gleiches spezifisches Volumen besitzt, wie die bei niederen Temperaturen stabile, so entsprechen die Volumenverhältnisse beim Sieden binärer Gemische immer den soeben in groben Zügen geschilderten. Durchaus anders liegen dagegen die Verhältnisse beim Phasenwechsel kristallisiert → flüssig, wo das spezifische Volumen der flüssigen Phase sowohl größer, als auch kleiner sein kann, als dasjenige der koexistierenden kristallisierten Phase.

Denken wir uns zunächst kristallisierte Gemische (Mischkristalle) von solchen Komponenten, welche beide unter Ausdehnung schmelzen, so hat die Volumenfläche für $p =$ konst.

1) J. D. van der Waals, l. c. p. 123.

einer solchen Kombination eine Gestalt, wie Fig. 1. Der einzige Unterschied besteht darin, daß $\Delta v_{2,1}$ vielmal kleiner ist, als in Systemen flüssig⟶gasförmig bei demselben Druck. Bei steigendem Druck wird der ganze heterogene Streifen schmäler, und schließlich wird die Differenz der spezifischen Volumina einer Komponente $\Delta v'_{2,1} = 0$. Bis hierher besteht noch große Ähnlichkeit mit der Verdampfung. Während jedoch dort bei noch höheren Drucken die homogenen Flächen allmählich zusammenfließen, behalten dieselben bei Systemen kristallisiert⟶flüssig ihre gegenseitige Neigung bei, so daß bei einer Komponente $\Delta v'_{2,1} < 0$ und bei der anderen $\Delta v''_{2,1} > 0$ ist. Daß der Δv-Wert, nachdem er von positiven Werten durch Null gegangen ist, negative Werte annimmt, während die Schmelzwärme nicht zu gleicher Zeit mit Δv gleich Null wird, ist zuerst von G. Tammann in seiner eingangs erwähnten Hypothese ausgesprochen worden. Beim Glaubersalz konnte Tammann[1]) das Null- und Negativwerden von Δv direkt beobachten und messen, während die Schmelzwärme erhebliche positive Werte beibehielt.



p = konst.

Fig. 3.

Die Volumenfläche für den Fall $\Delta v'_{2,1} < 0$ und $\Delta v''_{2,1} > 0$ ist in Fig. 3 wiedergegeben. Für die daselbst angedeuteten Verhältnisse liegt ein Beispiel in der Kombination

$$Na_2CrO_4.10\,aq + Na_2SO_4.10\,aq$$

beim Drucke $p = 1$ Atm. vor.[2])

Bei der dilatometrischen Untersuchung von Mischkristallen verschiedener Konzentrationen wurden die erwarteten Erscheinungen tatsächlich beobachtet. Da nicht die ganze

1) G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen p. 254 ff. 1903.

2) Wasserhaltige Mischkristalle sind eigentlich ternäre Gemische. Da jedoch das Verhältnis einer Komponente (H_2O) zur Summe der beiden anderen (der anhydrischen Salze) ein konstantes ist, ordnen sich solche Mischungen, wenn sie nur genau den von der Formel geforderten Wassergehalt besitzen, dem Schema für binäre Gemische unter.

Mischungsreihe des Dekahydrates, wie das reine Chromat, bei der Spaltung das Hexahydrat liefert, wurden nur solche Mischungen untersucht, bei denen die Spaltung in niederes Hydrat und gesättigte Lösung nach diesem Schema stattfindet. Dabei wurden folgende Tatsachen festgestellt:

1. Mischkristalle dieser Kombination, welche bis ca. 65 Proz. Sulfat enthalten, schmelzen, wie das reine Chromat, unter Kontraktion, die mit zunehmendem Sulfatgehalt kleiner wird.

2. Mischkristalle, deren Sulfatgehalt 65 Proz. übersteigt, spalten sich unter Ausdehnung.

3. Dazwischen gibt es eine Konzentration (ca. 65 Proz. $Na_2SO_4.10\,aq$), bei welcher das Volumen vor und nach dem Phasenwechsel gleich groß ist.

4. Zahlreiche thermometrische Versuche mit allen dargestellten Gemischen ergaben stets eine bedeutende Entropiedifferenz zwischen den koexistierenden Phasen.

Diese Tatsachen und der Vergleich von Fig. 2 mit Fig. 3 müssen als neue Bestätigung der von G. Tammann behaupteten und am Beispiel des Glaubersalzes erwiesenen Nichtexistenz eines kritischen Punktes kristallisiert → flüssig betrachtet werden.[1])

Die Versuchsdaten werden im Zusammenhang mit dem übrigen die Kombination $Na_2(Cr, S)O_4$ betreffenden Material in einer Arbeit über die Spaltung wasserhaltiger Mischkristalle an anderer Stelle demnächst ausführlich mitgeteilt werden. Auf eine qualitative Übereinstimmung des beobachteten Ganges der Volumenänderung mit dem nach Gleichung (15) berechneten sei hier nur noch hingewiesen.

Die von Figg. 1 und 2 abweichende Gestalt des heterogenen Gebietes der Fläche Fig. 3 rechtfertigt noch eine kurze Besprechung derselben mit einem Hinweis auf die charakteristischen Unterschiede.

Die Schnitte für $dT = 0$ weisen allerdings keine neue Gestalt auf, da sie auch hier gerade Linien sind, doch zeigt sich der Unterschied im Vorzeichen von $(dv/dx)_T$. Während bei Flächen, wie Figg. 1 und 2, der Wert von $(dv/dx)_T$ sich je nach der Richtung, in welcher x gemessen wird, zwischen

1) Vgl. auch die diesbez. Bemerkung des Verf. bei G. Tammann, l. c. p. 263.

$+\infty$ bez. $-\infty$ und einem endlichen positiven bez. negativen Wert bewegt, nimmt $(dv/dx)_T$ in Fig. 3 sukzessive alle Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ an.

Eine ähnliche Verschiedenheit zeigt sich im Vorzeichen von $(d\Delta v/dT)_x$, welches in Figg. 1 und 2 stets positiv ist, in Fig. 3 jedoch bei einer Reihe von Gemischen von negativen Werten durch Null zu positiven Werten übergeht, auch dann, wenn $\Delta v_{2,1} = 0$ ist. Der geometrische Ort der Punkte, in welchen $(d\Delta v/dT)_x = 0$ ist, kann mit der Geraden $(dv/dx)_T = 0$ unter Umständen zum Schnitt gelangen, so daß in diesem einen Schnittpunkt die Tangentialebene der Fläche parallel der x, T-Ebene ist.

Da die Zahl der bei $p = 1$ Atm. unter Kontraktion schmelzenden bez. sich umwandelnden bekannten Stoffe nur eine geringe ist, ist es um so mehr zu bedauern, daß sich die wenigen von A. Steger[1]) mitgeteilten dilatometrischen Messungen am System $HgJ_2 - AgJ$ nicht zur Verifikation unserer Gleichung verwerten lassen. Eine Wiederholung der Versuche mit $HgJ_2 - AgJ$-Mischungen ist daher sehr erwünscht.

Schließlich hat W. J. van Heteren[2]) bei Zinnamalgamen im Dilatometer eine Umwandlung unter Kontraktion gefunden, doch besteht über den Charakter der dabei beteiligten Phasen noch keine Gewißheit, obgleich vorläufig das Vorhandensein von Mischkristallen angenommen wird.

Zusammenfassung.

Für die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische wurde eine Differentialgleichung abgeleitet, welcher sich die Beobachtungen an Mischungen von $Na_2(Cr, S)O_4.10\,aq$ qualitativ anschließen.

Aus den Volumen- und Entropieverhältnissen beim Phasenwechsel obiger Gemische wurde auf die Nichtexistenz eines kritischen Punktes kristallisiert $\rightarrow$ flüssig geschlossen.

Dorpat, 8./21. September 1903.

1) A. Steger, Zeitschr. f. physikal. Chem. **43**. p. 515. 1903.
2) W. J. van Heteren, Dissert. p. 71 ff. Amsterdam 1902.

(Eingegangen 23. September 1903.)

6. *Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung;* *von Hans Happel.*

Obwohl vom Standpunkt der Gastheorie gerade das Verhalten einatomiger Substanzen besonders interessant ist, sind doch die Resultate der Theorie wohl infolge des Mangels an Beobachtungsdaten noch wenig an solchen Körpern geprüft. Immerhin ist es möglich, auf Grund der vorliegenden Messungen wenigstens einige Folgerungen für derartige Substanzen zu ziehen. Im ersten Teil vorliegender Arbeit habe ich mir die Aufgabe gestellt, das Verhalten einatomiger Stoffe zum Gesetz der korrespondierenden Zustände zu untersuchen. Der zweite Teil enthält Betrachtungen zur Zustandsgleichung, hier wird jedoch außer von einatomigen Stoffen auch von mehratomigen die Rede sein.

I. Verhalten einatomiger Stoffe zum Gesetz der korrespondierenden Zustände.

Bekanntlich fallen bei Anwendung von reduzierten Zustandsgrößen die Isothermen einer großen Anzahl von Stoffen, als deren Repräsentant wir Äther nehmen, wenn auch nicht genau, so doch mit großer Annäherung zusammen. Dies Resultat wurde zuerst von van der Waals[1]) erkannt und durch die Untersuchungen von Amagat[2]), Raveau[3]), van der Waals jun.[4]), Reinganum[5]) und K. Meyer[6]) sichergestellt.

Es soll nun gezeigt werden, daß die reduzierten Isothermen von Quecksilber sehr erheblich von denen von Äther abweichen,

1) J. D. van der Waals, Kontinuität d. gasf. u. flüssigen Zustandes 2. Aufl., p. 137. 1899.

2) E. H. Amagat, Compt. rend. 123. p. 30 u. 83. 1896.

3) C. Raveau, Journ. de phys. (3) 6. p. 432. 1897.

4) J. D. van der Waals jun., Kon. Acad. v. Wet. Amsterdam 5. p. 248. 1896/97.

5) M. Reinganum, Inaug.-Dissert. Göttingen 1899.

6) K. Meyer, Schriften d. Königl. Dän. Akad. d. Wissensch. 6. Reihe, math.-naturw. Abt. 9. p. 3. 1889; Beibl. 24. p. 20. 1900.

daß also beide Stoffe nicht korrespondi[illegible]
nach dem wir dabei verfahren, ist das [illegible]
hat van der Waals[1]) gezeigt, daß Äth[illegible]
korrespondierende Stoff bei gleicher r[illegible]
stets gleichen reduzierten Druck des g[illegible]
sitzt. Für alle diese Stoffe gilt also [illegible]
der Form

$$F\left(\frac{p}{p_\varkappa}, \frac{T}{T_\varkappa}\right) = 0.$$

wobei p den Druck des gesättigten D[illegible]
absolute Temperatur, $p_\varkappa$, $T_\varkappa$ den kri[illegible]
absolute kritische Temperatur bedeute[illegible]
Funktion von $p/p_\varkappa$ und $T/T_\varkappa$ ist. [illegible]
ferner auf empirischem Wege für [illegible]
folgende Gleichung aufgestellt:

$$(1) \qquad -\log^{10}\frac{p}{p_\varkappa} = f\,\frac{\cdot}{\cdot}$$

wobei f eine universelle Konstante [illegible]
Waals ermittelt. Angenommen nun [illegible]
korrespondierend, so muß die Beziehung [illegible]
Stoff gelten und aus zwei Beobachtungen [illegible]
des Quecksilberdampfes muß es möglich [illegible]
Größen $p_\varkappa$, $T_\varkappa$ für diesen Körper zu [illegible]
dieser Werte läßt sich dann zeigen, [illegible]
Verlauf der Dampfdruckkurve von [illegible]
richtig wiedergibt und hieraus folgt, [illegible]
nicht mit Äther korrespondiert.

Die Richtigkeit dieser Behauptung [illegible]
folgender Weise. Aus dem Z[illegible]
Isothermen zweier Stoffe hat [illegible]
gefolgert, daß für beide das Produkt [illegible]
peratur $T_\varkappa$ und dem Ausdehnungskoeffizienten [illegible]
gleicher reduzierter Temperatur und [illegible]
gleich groß sein muß. Wir wenden [illegible]
Quecksilber und beispielsweise [illegible]

r Wert von f
: nicht genau
ben sein, daß
hermen nur
rstehenden
$t = 0{,}700$
hme mit
lation (1)

eratur

ig des
$+ 280^0$
eraturen
illimetern

1) J. D. van der Waals, l. c.;
2) J. D. van der Waals, l. c.;
3) J. D. van der Waals, l. c.;

spondierenden Stoffe, nicht zutrifft, woraus wiederum folgt, daß die reduzierten Isothermen von Quecksilber und Äther sich nicht decken.

Es soll nun der erste Beweis näher ausgeführt werden. Um möglichst exakt zu verfahren, habe ich die Relation (1) nochmals mit den Beobachtungen verglichen und zwar habe ich dazu die Messungen von Ramsay und Young[1]) mit Äther, und diejenigen von Young[2]) allein mit Benzol, Fluorbenzol, Zinntetrachlorid und Tetrachlorkohlenstoff benutzt. Mit den beobachteten Werten von p, T, $p_\varkappa$, $T_\varkappa$ habe ich jedesmal nach (1) den Wert von f berechnet, die Resultate sind in den nachstehenden Tabellen mitgeteilt. Zu jedem Wert von T ist hier zugleich der zugehörige Wert der reduzierten Temperatur $t = T/T_\varkappa$ angegeben und außerdem die gewöhnliche Temperatur $t = T - 273$.

Äther.

$T_\varkappa = 273 + 194{,}4.$
$p_\varkappa = 27060$ mm Hg.

t	T	t	f
−20	253	0,541	3,061
0	273	0,584	3,042
+20	293	0,627	3,006
+40	313	0,670	2,976
+60	333	0,712	2,956

Benzol.

$T_\varkappa = 273 + 288{,}5.$
$p_\varkappa = 36395$ mm Hg.

t	T	t	f
+ 30	303	0,540	2,919
+ 60	333	0,593	2,873
+ 90	363	0,646	2,848
+120	393	0,700	2,829

Fluorbenzol.

$T_\varkappa = 273 + 286{,}6.$
$p_\varkappa = 33912$ mm Hg.

t	T	t	f
30	303	0,542	3,009
60	333	0,595	2,964
90	363	0,649	2,928
120	393	0,702	2,905

Zinntetrachlorid.

$T_\varkappa = 273 + 318{,}7.$
$p_\varkappa = 28080$ mm Hg.

t	T	t	f
50	323	0,546	3,061
80	353	0,597	3,013
110	383	0,647	2,969
140	413	0,698	2,947

1) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. of London R. S. p. 57. 1887.

2) S. Young, Journ. Chem. Soc. 54. p. 486. 1889; Trans. Chem. Soc. 59. p. 911. 1891.

Tetrachlorkohlenstoff.

$T_\varkappa = 273 + 283{,}2.$

$p_\varkappa = 34180$ mm Hg.

t	T	t	f
30	303	0,545	2,858
60	333	0,599	2,819
90	363	0,653	2,794
120	393	0,707	2,778

Daß bei gleicher reduzierter Temperatur der Wert von f für jeden der betrachteten Stoffe nur nahezu, aber nicht genau gleich groß ist, muß wohl dem Umstand zuzuschreiben sein, daß der Satz vom Zusammenfallen der reduzierten Isothermen nur genähert richtig ist. Man erkennt ferner aus vorstehenden Tabellen, daß etwa im Intervall von $t = 0{,}540$ bis $t = 0{,}700$ bei sämtlichen Körpern die Größe f eine kleine Abnahme mit wachsender Temperatur zeigt. Wir werden daher die Relation (1) ersetzen durch die folgende:

$$(2) \qquad -\log^{10}\frac{p}{p_\varkappa} = f\left(\frac{T}{T_\varkappa}\right)\frac{T_\varkappa - T}{T} = f\left(\frac{T}{T_\varkappa}\right)\left\{\frac{T_\varkappa}{T} - 1\right\},$$

wo $f(T/T_\varkappa)$ eine universelle Funktion der reduzierten Temperatur bedeutet.

Von den Beobachtungen über die Dampfspannung des Quecksilbers wollen wir die Messungen bei $T_1 = 273 + 280^0$ und bei $T_2 = 273 + 410^0$ wählen. Bei diesen Temperaturen erhielten Regnault und Young[1]) folgende in Millimetern Hg ausgedrückte Werte für den Dampfdruck:

	Regnault	Young	Mittelwert
Bei $T_1 = 273 + 280$	155,17	157,8	$p_1 = 156{,}5$
„ $T_2 = 273 + 410$	1863,73	1801,0	$p_2 = 1832{,}4$

In dieser Tabelle sind zugleich die Mittelwerte p_1 und p_2 aus den Beobachtungen beider Forscher angegeben. Unter Benutzung der Werte p_1 und p_2 findet man aus (2), indem

1) S. Young, Trans. Chem. Soc. **59**. p. 629. 1891.

man für f einen Mittelwert einsetzt, also zunächst f als konstant ansieht, daß $T_\varkappa$ etwa gleich 1000° ist. Um jedoch $T_\varkappa$ genau zu berechnen, muß der Variabilität von f Rechnung getragen werden. Nun entsprechen den Temperaturen T_1 und T_2 bez. die reduzierten Temperaturen

$$t_1 = \frac{273 + 280}{1000} = 0{,}553 \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{273 + 410}{1000} = 0{,}683 .$$

Die zugehörigen Werte von f ergeben sich aus unseren Tabellen und zwar findet man etwa $f_1 = 2{,}980$, $f_2 = 2{,}909$. Zur Bestimmung von $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ dienen also die zwei Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} -\log^{10}\frac{p_1}{p_\varkappa} = 2{,}980\,\frac{T_\varkappa - T_1}{T_1}, \\ -\log^{10}\frac{p_2}{p_\varkappa} = 2{,}909\,\frac{T_\varkappa - T_2}{T_2}, \end{cases}$$

aus welchen

$$(4) \qquad T_\varkappa = 1009, \quad p_\varkappa = 44700 \text{ mm Hg} = 59 \text{ Atm.}$$

folgt. Wäre der hier für $T_\varkappa$ erhaltene Wert nicht wenigstens nahezu gleich dem unter der Annahme $f =$ konst. berechneten, so hätte man mit Benutzung des zuletzt gefundenen Wertes für $T_\varkappa$ die Größen f_1 und f_2 neu zu berechnen und die Rechnung nochmals zu wiederholen. Dies Verfahren müßte man so oft fortsetzen, bis man zu einem Werte für $T_\varkappa$ gelangt, der mit dem hierfür bei der Berechnung von f_1 und f_2 benutzten identisch ist. Die unter (4) berechneten Größen müssen also bez. kritische Temperatur und kritischer Druck für Quecksilber sein, falls dieser Stoff mit Äther, Benzol etc. korrespondiert. Kürzlich haben nun Cailletet, Collardeau und Rivière [1]) die Dampfspannungen des Quecksilbers bis zur Temperatur $T = 273 + 880 = 1153$ gemessen, und zwar ergab sich bei dieser Temperatur ein Druck von 162 Atm. Die Messungen dieser Forscher schließen sich einigermaßen gut an die von Regnault erhaltenen Zahlen an. Die kritische Temperatur muß also höher als 1153° und der kritische Druck größer als 162 Atm. sein. Die von uns unter (4) berechneten Daten sind also bedeutend kleiner als die wirklichen. *Um diesem*

1) L. Cailletet, E. Colardeau u. P. Rivière, Compt. rend. **130.** p. 1585. 1900.

Widerspruch zu entgehen, bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß die reduzierten Isothermen von Quecksilber mit denen von Äther nicht zusammenfallen.

Wir gehen jetzt auf den zweiten Beweis für unsere Behauptung, daß Quecksilber und Äther bez. Benzol keine korrespondierenden Stoffe sind, näher ein. Wie im folgenden (vgl. p. 351) auseinandergesetzt wird, läßt sich durch Vergleichung von Quecksilber mit Argon die kritische Temperatur und der kritische Druck des zuerst genannten Stoffs berechnen, da die entsprechenden Größen für Argon bekannt sind. Man erhält in dieser Weise für Quecksilber folgende Werte:

$$T_\varkappa = 1370^0, \quad p_\varkappa = 456 \text{ Atm.}$$

Unter Atmosphärendruck und bei -25^0 C., also bei der reduzierten Temperatur 0,441 hat nun der Ausdehnungskoeffizient $1/v\,(\partial v/\partial T)$ von Benzol den Wert 0,00116. Zur Berechnung dieses Wertes wurde die von Kopp aufgestellte Formel für die Ausdehnung, welche zwischen den Grenzen 0^0 und 80^0 gültig ist, extrapoliert. Also ist

$$T_\varkappa \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} = 0{,}652 \text{ für Benzol.} \tag{5}$$

Bei derselben reduzierten Temperatur wie eben hat nun Quecksilber die absolute Temperatur $1370 \cdot 0{,}441 = 273 + 331^0$. Für den Ausdehnungskoeffizienten von Quecksilber bei 331^0 C. ergibt sich der Wert

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} = 0{,}000185.$$

Für diese Berechnung ist die von Wüllner[1]) aus Regnaults Beobachtungen — die sich allerdings nur bis zur Temperatur 300^0 beziehen — abgeleitete Formel benutzt. Mithin ist

$$T_\varkappa \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} = 0{,}253 \text{ für Quecksilber.} \tag{6}$$

Die beiden unter (5) und (6) angegebenen Größen beziehen sich auf den Druck von einer Atmosphäre. Einem solchen Druck bei Queksilber entspricht der Druck von

$$\frac{1}{456} \cdot \frac{36\,395}{760} = 0{,}105 \text{ Atm. bei Benzol.}$$

1) A. Wüllner, Experimentalphysik 2. p. 76. 1896.

Beziehen wir für beide Stoffe das Produkt

$$T_\varkappa \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}$$

auf den reduzierten Druck $\frac{1}{466}$, so geht der Wert von

$$T_\varkappa \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}$$

für Benzol über in

$$(7) \qquad T_\varkappa \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} = 0{,}652 + \varepsilon \text{ für Benzol } \varepsilon > 0,$$

wobei ε eine positive, übrigens sehr kleine Zahl ist; denn aus Amagats[1]) Untersuchungen wissen wir, daß bei ungeänderter Temperatur der Ausdehnungskoeffizient von Äther und der damit korrespondierenden Stoffe mit kleiner werdendem Druck zunimmt. Wie man sieht, sind die unter (6) und (7) gegebenen Zahlen sehr verschieden *und hieraus folgt wieder (vgl. p. 341), daß Quecksilber nicht zu den Stoffen gehört, die mit Äther übereinstimmen.*

Gegen den hier erbrachten Nachweis kann nicht eingewendet werden, daß die Werte für die Ausdehnungskoeffizienten durch eine möglicherweise unerlaubte Extrapolation gewonnen sind, denn selbst wenn jeder dieser Werte nur bis auf ± 10 Proz. genau ermittelt wäre, so würde es dennoch unmöglich sein, eine auch nur angenäherte Gleichheit der Werte von

$$T_\varkappa \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}$$

für beide Stoffe zu erzielen. Zweifellos aber sind die durch die Extrapolation bedingten Fehler bedeutend kleiner als ± 10 Proz.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Isothermen der ebenfalls einatomigen Stoffe Argon, Krypton und Xenon auch nicht mit denen von Äther zur Deckung zu bringen sind. Die kritische Temperatur und der kritische Druck ist für jeden der eben genannten einatomigen Stoffe von Ramsay und Travers[2]) experimentell ermittelt. Diese Forscher haben ferner den Siedepunkt beim Drucke von 760 mm Hg genau

1) E. H. Amagat, Compt. rend. 115. p. 919. 1892.

2) Vgl. M. W. Travers, The experimental study of gases. London 1901.

bestimmt. In nachstehender Tabelle sind alle diese Größen zu finden. Aus der kritischen Temperatur und der des Siedepunktes habe ich die reduzierte Siedetemperatnr berechnet, in analoger Weise ergab sich der reduzierte Siededruck.

	Argon	Krypton	Xenon
Kritischer Druck in Metern	40,2	41,24	43,5
Kritische Temperatur von -273 an gezählt . . .	155,6	210,5	287,7
Reduzierter Siededruck . .	0,0189	0,0184	0,0175
Siedetemperatur bei 760 mm Hg von -273 an gezählt	86,9	121,33	163,9
Reduzierte Siedetemperatur	0,5585	0,5764	0,5697

Wir nehmen zunächst ebenso wie bei Quecksilber an, daß Argon mit Äther korrespondiere und werden dann zeigen, daß daraus ein Widerspruch resultiert. Wie aus der Tabelle hervorgeht, ist die reduzierte Siedetemperatur von Argon gleich 0,5585. Bei dieser Temperatur hat die Größe f in Gleichung (2) etwa den Wert $f = 2{,}978$, wie man aus den Tabellen auf p. 342 u. 343 erkennt. Wenn also Gleichung (2) auf Argon anwendbar ist, so muß sich der reduzierte Druck seines Siedepunktes aus der Gleichung

$$(8) \qquad -\log^{10}\frac{p}{p_\varkappa} = 2{,}978\left\{\frac{1}{0{,}5585} - 1\right\}$$

berechnen lassen. Man findet hieraus:

$$(9) \qquad \frac{p}{p_\varkappa} = 0{,}00441\,,$$

eine Zahl, die von dem experimentell ermittelten und in der Tabelle angegebenen Werte

$$\frac{p}{p_\varkappa} = 0{,}0189$$

sehr verschieden ist.

Um nun zu untersuchen, ob diese Abweichung von Beobachtungsfehlern herrühren kann, habe ich angenommen, daß der beobachtete Druck des Argondampfes bei der Temperatur 86,9 bis auf $\pm$ 10 Proz. richtig bestimmt sei, ebenso möge der experimentell gefundene Wert des kritischen Druckes nur

bis auf $\pm$ 10 Proz. genau sein. Die kritische Temperatur von Argon habe ich bis auf $\pm$ 5 Proz. genau angenommen, während ich, was natürlich erlaubt ist, den Wert der Temperatur 86,9 als streng richtig betrachtet habe. Es ergibt sich dann als kleinstmöglichster Wert des reduzierten Druckes von Argon bei 86,9 $p/p_\varkappa = 0{,}0155$. Da wir die zu 86,9 gehörige reduzierte Temperatur als nicht exakt bestimmt angenommen haben, so kann sich auch der nach Gleichung (2) zu berechnende Wert von $p/p_\varkappa$ ändern, und zwar ergibt sich als größtmöglichster Wert $p/p_\varkappa = 0{,}0084$. Da auch jetzt noch die beiden Werte für $p/p_\varkappa$ beträchtlich differieren, so müssen wir schließen, daß die Abweichung nicht durch Beobachtungsfehler erklärt werden kann, daß vielmehr Gleichung (2) nicht auf Argon anwendbar ist, und *hieraus folgt, daß die reduzierten Isothermen von Argon sehr erheblich von denen von Äther, Benzol etc. abweichen.*

Die hier für Argon durchgeführten Betrachtungen lassen sich auch auf Krypton und Xenon übertragen. Im Falle von Krypton fand ich bei der reduzierten Temperatur seines Siedepunktes für $p/p_\varkappa$ nach (2) den Wert 0,00670, wobei ich $f = 2{,}958$ gesetzt habe, nach den Beobachtungen dagegen ist $p/p_\varkappa = 0{,}0184$. Bei Xenon ergeben die Messungen bei der Siedetemperatur für $p/p_\varkappa$ den Wert 0,0175, während der Rechnung zufolge mit $f = 2{,}961$ $p/p_\varkappa = 0{,}00580$ ist. Die Abweichungen sind hier zwar nicht ganz so groß wie bei Argon, immerhin sind sie groß genug, *um es wenigstens als sehr wahrscheinlich hinzustellen, daß auch Krypton und Xenon nicht mit Äther korrespondieren.* Bei allen drei Stoffen sind die beobachteten Werte für $p/p_\varkappa$ größer als die berechneten.

Durch Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen und auch aus anderen Gründen hat sich nun ergeben, daß die hier betrachteten Stoffe Quecksilber, Argon, Krypton und Xenon sämtlich einatomig sind. *Ich halte es daher für wahrscheinlich, daß alle einatomigen Stoffe nicht mit mehratomigen korrespondieren.* Dies Resultat ist vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie sehr plausibel, denn die Vorgänge beim Zusammenstoß in einem ein- und einem mehratomigen Gase sind jedenfalls sehr verschieden, es wird also höchst wahrscheinlich auch die Zustandsgleichung für beide

Stoffe verschieden sein müssen und also können die Isothermen eines ein- und eines mehratomigen Stoffs sich nicht zur Deckung bringen lassen.

Allerdings bleibt hier noch die Frage offen, wie es kommt, daß Stoffe, wie z. B. Wasserstoff und Äther, welche beide mehratomig sind, deren Moleküle aber sehr verschiedenartig gebaut sind, zusammen korrespondieren.

Eine zweite Frage, welche sich hier aufdrängt, ist die, ob vielleicht die reduzierten Isothermen aller einatomigen Stoffe zusammenfallen. Wie schon erwähnt, haben Ramsay und Travers für Argon, Krypton und Xenon den kritischen Punkt und auch den Siedepunkt näher untersucht. Außerdem haben diese Forscher[1]) für jeden dieser Stoffe für verschiedene Temperaturen den Druck des gesättigten Dampfes ermittelt. Für einige dieser Wertepaare p, T habe ich jedesmal den zugehörigen reduzierten Druck p und die zugehörige reduzierte Temperatur t berechnet und diese Größen in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Argon			Krypton			Xenon		
p	t	F	p	t	F	p	t	F
0,895	0,982	—	0,921	0,985	—	0,874	0,981	—
0,746	0,949	—	0,727	0,946	—	0,690	0,940	—
0,596	0,911	—	0,582	0,911	—	0,598	0,916	—
0,447	0,866	—	0,436	0,869	—	0,414	0,865	2,46
0,398	0,853	2,33	0,388	0,853	2,38	0,368	0,846	2,38
0,348	0,832	2,27	0,340	0,835	2,37	0,322	0,831	2,45
0,298	0,815	2,32	0,291	0,816	—	0,276	0,811	—
0,249	0,790	2,27	0,243	0,795	2,38	0,230	0,790	2,40
0,149	0,731	2,25	0,145	0,738	2,36	0,138	0,734	2,38
0,0995	0,691	2,24	0,0970	0,700	2,36	0,0920	0,695	2,36
0,0746	0,665	2,24	0,0727	0,675	2,36	0,0690	0,670	2,36
0,0497	0,630	2,22	0,0485	0,643	2,37	0,0460	0,636	2,34
0,0373	0,602	2,16	0,0364	0,615	2,30	0,0345	0,615	2,34
0,0199	0,565	—	0,0170	0,572	—	0,0184	0,573	—
0,0174	0,556	—	0,0146	0,563	—	0,0161	0,564	—
0,00995	0,523	2,20	0,00970	0,540	—	0,00920	0,534	—
0,00746	0,506	—	0,00727	0,525	2,36	0,00690	0,517	2,32

1) Vgl. M. W. Travers, The experimental study of gases. London 1901.

Man erkennt aus diesen Tabellen, daß die drei Stoffe bei gleichem reduzierten Druck des gesättigten Dampfes auch wenigstens nahezu dieselbe reduzierte Temperatur besitzen. Die reduzierten Isothermen der drei Stoffe fallen also zusammen. Die Genauigkeit, mit der dies statt hat, ist obigen Tabellen zufolge etwa ebenso groß wie bei den mit Äther korrespondierenden Stoffen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß, nachdem die Isothermen der einatomigen Stoffe genauer untersucht sind, sich zeigen wird, daß sie mit größerer Genauigkeit sich decken, als dies bei den Substanzen der Äthergruppe der Fall ist.

Wenn nun auch Quecksilber mit Argon, Krypton und Xenon korrespondiert, so sind wir in der Lage, den kritischen Druck und die kritische Temperatur von Quecksilber zu bestimmen. Für diese vier Stoffe muß sich dann die Beziehung zwischen dem Druck des gesättigten Dampfes und der Temperatur durch die Formel

$$(10) \qquad -\log^{10}\frac{p}{p_\varkappa} = F\left(\frac{T}{T_\varkappa}\right)\left\{\frac{T_\varkappa}{T} - 1\right\}$$

wiedergeben lassen, falls F eine passend gewählte universelle Funktion der reduzierten Temperatur ist. Diese Formel stimmt mit der für mehratomige Stoffe gültigen Beziehung (2) überein, nur ist die dort auftretende Funktion $f(T/T_\varkappa)$ verschieden von der Funktion $F(T/T_\varkappa)$in (10). Aus den bekannten Werten von $p/p_\varkappa$ und $T/T_\varkappa$ habe ich für eine Anzahl Temperaturen den Wert von F berechnet und zwar für jeden der drei Stoffe Argon, Krypton, Xenon. Diese Werte von F findet man ebenfalls in unseren Tabellen. Man erkennt, daß F wenigstens im Intervall von $t = 0{,}520$ bis $t = 0{,}850$, mit der Temperatur sich nur wenig ändert.

Betrachtet man daher zunächst F als konstant, so ergibt sich aus (10) mit Benutzung der schon erwähnten Beobachtungen von Cailletet, Colardeau und Rivière[1]), daß die absolute kritische Temperatur von Quecksilber etwa bei 1350° liegt. Zur genaueren Berechnung von $T_\varkappa$ wurden die Beobachtungen bei $T_1 = 880 + 273 = 1153$ und bei $T_2 = 600 + 273 = 873$ benutzt. Die zugehörigen Druckwerte sind bez. $p_1 = 162$ Atm.

1) L. Cailletet, Compt. rend. 130. p. 1585. 1900.

und $p_2 = 22{,}3$ Atm. Ferner entsprechen den Temperaturen T_1 und T_2 bez. die reduzierten Temperaturen $t_1 = 0{,}855$, $t_2 = 0{,}647$, sowie die Werte $f_1 = 2{,}39$, $f_2 = 2{,}30$. Mithin sind die Unbekannten $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ zu berechnen aus den zwei Gleichungen:

$$(11)\quad -\log^{10}\frac{p_1}{p_\varkappa} = 2{,}39\left\{\frac{T_\varkappa}{T_1} - 1\right\};\quad -\log^{10}\frac{p_2}{p_\varkappa} = 2{,}30\left\{\frac{T_\varkappa}{T_2} - 1\right\}.$$

Man erhält für die kritischen Größen von Quecksilber die Werte:

$$(12)\quad \begin{cases} T_\varkappa = 1370^0 \text{ (absolut)}, \\ p_\varkappa = 456 \text{ Atm.} \end{cases}$$

Die Berechnung dieser Größen beruhte auf der Annahme, daß Quecksilber mit Argon etc. korrespondiere. Diese Annahme soll nun noch nachträglich verifiziert werden. Zu dem Zwecke berechnen wir auf Grund der Messungen von Cailletet, Colardeau und Rivière und der unter (12) angegebenen Werte für $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ die reduzierte Dampfspannungskurve von Quecksilber und vergleichen dieselbe dann mit derjenigen von Argon etc. In nachstehender Tabelle findet man für eine Anzahl reduzierter Temperaturen t jedesmal den zugehörigen reduzierten Druck p von Quecksilber.

Quecksilber

p	t
0,224	0,783
0,110	0,710
0,0746	0,674
0,0303	0,601
0,00932	0,528

Die hier benutzten Messungen sind natürlich solche, welche bei der Berechnung von $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ nicht herangezogen sind. *Durch Vergleich vorstehender Tabelle mit denjenigen auf p. 349 erkennt man, daß Quecksilber in der Tat mit Argon etc. korrespondiert.*

Wenn, was auf Grund des Vorhergehenden sehr wahrscheinlich ist, die reduzierten Isothermen aller einatomigen Stoffe zusammenfallen, so haben wir damit ein neues Kriterium für die Einatomigkeit eines Stoffs: Eine Substanz ist einatomig, wenn sie mit Quecksilber etc. korrespondiert.

Da die Größe F in der für einatomige Stoffe gültigen Beziehung (10) kleiner ist als die Größe f der für mehratomige Substanzen aufgestellten Relation (2), so hat bei gleicher reduzierter Temperatur

$$-\log^{10}\frac{p}{p_\varkappa}=\log^{10}\frac{p_\varkappa}{p}$$

für einatomige Stoffe einen kleineren Wert als für mehratomige und mithin ist bei gleichem t für solche Körper $p/p_\varkappa$ kleiner als für einatomige Stoffe. *Die Dampfspannungen* p *der zur Quecksilbergruppe gehörigen Stoffe steigen also mit zunehmender Temperatur* t *stärker an, als dies bei den Stoffen der Äthergruppe der Fall ist.*

II. Bemerkungen zur Zustandsgleichung.

In diesen Annalen untersucht Dieterici[1]), ob durch Berücksichtigung der von van der Waals, Boltzmann und G. Jäger ermittelten Volumenkorrektion der van der Waalsschen Gleichung es möglich ist, dieselbe in Einklang mit den Beobachtungen zu bringen. Bekanntlich führen die Untersuchungen der genannten Forscher zu folgender Abänderung der van der Waalsschen Gleichung:

$$(13)\quad p=RT\frac{1}{v}\left\{1+\frac{b}{v}+\alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2+\alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^3+-\right\}-\frac{a}{v^2},$$

wo b das vierfache Volumen aller als kugelförmig vorausgesetzten Moleküle ist und a α_1, α_2, ... Konstanten sind. Dieterici zeigt, daß, falls α_1, α_2, ... sämtlich positiv sind, Gleichung (13) den Beobachtungen nicht entspricht. Hier soll die allgemeinere Gleichung untersucht werden, welche aus (13) entsteht, wenn man statt der Konstanten a eine ganz beliebige Funktion $F(T)$ der absoluten Temperatur T setzt, es soll also gezeigt werden, daß auch die so entstandene Gleichung, nämlich

$$(14)\quad p=RT\frac{1}{v}\left\{1+\frac{b}{v}+\alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2+\alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^3+\dots+\alpha_n\left(\frac{b}{v}\right)^n+\dots\right\}-\frac{F(T)}{v^2}$$

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **69**. p. 685. 1899.

die Beobachtungen für Äther und die damit korrespondierenden Stoffe nicht wiedergibt, falls α_1, α_2, ... sämtlich positiv sind, im übrigen aber ganz beliebige Zahlen sind.[1])

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{v}\left\{1+\frac{b}{v}+\alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2+\ldots\right\}=f(v), \tag{15}$$

so geht (14) über in

$$\frac{p}{RT}=f(v)-\frac{F(T)}{RTv^2}. \tag{16}$$

Für den kritischen Punkt ist nun

$$\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}=0,$$

oder mit Rücksicht auf (16)

$$0=f'(v_\varkappa)+2\frac{F(T_\varkappa)}{RT_\varkappa v_\varkappa^3}. \tag{17}$$

$$0=f''(v_\varkappa)-2\cdot 3\frac{F(T_\varkappa)}{RT_\varkappa v_\varkappa^4}. \tag{18}$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man (17) mit $v_\varkappa^2$ und (18) mit $\frac{1}{6}v_\varkappa^3$ multipliziert hat, zu der Gleichung

$$\frac{p_\varkappa v_\varkappa}{RT_\varkappa}=v_\varkappa f(v_\varkappa)-\frac{F(T_\varkappa)}{RT_\varkappa v_\varkappa},$$

so erhält man

$$\frac{p_\varkappa v_\varkappa}{RT_\varkappa}=v_\varkappa f(v_\varkappa)+v_\varkappa^2 f'(v_\varkappa)+\tfrac{1}{6}v_\varkappa^3 f''(v_\varkappa), \tag{19}$$

oder mit Rücksicht auf (15)

$$\frac{p_\varkappa v_\varkappa}{RT_\varkappa}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\sum_{n=2}^{n=\infty}n(n-1)\frac{\alpha_n b^{n+1}}{v_\varkappa^{n+1}}. \tag{20}$$

Sind nun sämtlich α_n von α_2 ab positiv, so muß

$$\frac{p_\varkappa v_\varkappa}{RT_\varkappa}>\tfrac{1}{3} \tag{21}$$

sein.

Diese Bedingung ist nun bei Äther und allen damit korrespondierenden Stoffen nicht erfüllt, denn für diese Substanzen ist $p_\varkappa v_\varkappa/RT_\varkappa$ stets gleich 1/3,6. *Mithin ist Gleichung (14), falls die α_n von α_2 ab sämtlich positiv sind, für die Stoffe der*

1) Auf einige Kürzungen in dem Beweis machte mich Prof. Lorentz gütigst aufmerksam.

Äthergruppe, also für die meisten Körper ungültig. Damit der Ungleichung (21) genügt wird, müßte $R T_\varkappa / p_\varkappa v_\varkappa$ kleiner als 3,6 sein. Folglich ist Gleichung (14), wiederum unter der Voraussetzung, daß die $\alpha_n > 0$ sind, auch auf die Stoffe nicht anwendbar, für welche $R T_\varkappa / p_\varkappa v_\varkappa > 3{,}6$ ist.

Wir lassen jetzt in Gleichung (14) die Annahme, daß die α_n sämtlich positiv sind, fallen, außerdem möge der Faktor von RT in der sehr allgemeinen Form $\varphi(v)$ geschrieben werden, wobei unentschieden ist, ob sich $\varphi(v)$ in eine Reihe entwickeln läßt oder nicht, hierdurch geht (14) über in:

$$p = RT\varphi(v) - \frac{F(T)}{v^2}. \tag{22}$$

Wir wollen zeigen, daß auch diese Gleichung, in der $\varphi(v)$ eine ganz beliebige Funktion von v und $F(T)$ eine ganz beliebige Funktion von T ist, den Beobachtungen an Äther und den damit korrespondierenden Stoffen nicht entspricht. Durch Differentiation nach v bei konstantem T folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = RT\frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} + 2\frac{F(T)}{v^3},$$

oder, falls man rechts und links mit $v/2$ multipliziert und die so entstandene Gleichung zu (22) addiert:

$$p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v} = RT\left\{\varphi(v) + \frac{v}{2}\frac{\partial \varphi(v)}{\partial v}\right\}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}}{T}, \tag{23}$$

in welchem wir p als Funktion von v und T betrachten, ergibt sich also als eine Funktion von v allein. Setzen wir speziell $v = v_\varkappa$, $T = T_\varkappa$, so sind, da

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\varkappa, T_\varkappa} = 0$$

ist:

$$\left(\frac{p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}}{T}\right)_{v_\varkappa, T_\varkappa} = \frac{p_\varkappa}{T_\varkappa}. \tag{24}$$

Da aber der Ausdruck (23) nur von v abhängt, so folgt, welchen Wert auch T haben mag:

$$\left(p + \frac{\frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}}{T}\right)_{v_\varkappa} = \frac{p_\varkappa}{T_\varkappa}. \tag{25}$$

Die Relation (24) gilt nun auch dann noch, wenn wir den Wert von

$$\frac{p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial r}}{T}$$

zwar für $T = T_\varkappa$, aber für einen Wert von v bilden, der etwas größer oder kleiner ist als das kritische Volumen; denn in der Nähe des kritischen Punktes verläuft die kritische Isotherme parallel zur v-Achse, p ändert sich also so gut wie nicht, und $\partial p/\partial v$ hat beständig einen verschwindend kleinen Wert. Dies hängt damit zusammen, daß im kritischen Punkt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0,$$

demzufolge ist dort auch

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{p + \tfrac{1}{2} v \frac{\partial p}{\partial v}\right\} = \tfrac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial v} + \tfrac{1}{2} v \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0.$$

Da nun

$$\frac{p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}}{T}$$

von T unabhängig ist, so muß auch Gleichung (25) dann noch gelten, wenn wir die linke Seite für einen Wert von v bilden, der etwas vom Werte $v_\varkappa$ abweicht. Dies ist insofern von Wichtigkeit, als das kritische Volumen im allgemeinen nur genähert bekannt ist; wir erkennen jedoch, daß die hierdurch hervorgerufene Ungenauigkeit nur sehr gering ist.

Die Relation (25), die unter der Annahme, daß die Zustandsgleichung sich in der Form (22) schreiben lasse, abgeleitet wurde, soll jetzt an den Messungen von Amagat[1]) mit Kohlensäure und Sauerstoff geprüft werden. Beide Stoffe korrespondieren mit Äther. Den Wert von p und $\partial p/\partial v$ für $v = v_\varkappa$ erhielt ich in der Weise, daß ich nach den beobachteten Werten von p und v eine Isotherme auf Millimeter-

1) E. H. Amagat, Ann. de chim. et phys. (6) 29. p. 69 u. 505. 1893.

papier zeichnete und an dieselbe, und zwar bei $v = v_k$, die Tangente legte, die Neigung derselben ergab den Wert von $\partial p/\partial v$, die Ordinate an derselben Stelle $v = v_k$ ergab den Wert von p. Dieses Verfahren wurde stets 2 mal ausgeführt. Für CO_2 habe ich gesetzt:

(26) $p_k = 72{,}9$ Atm., $T_k = 304{,}5$, $v_k = 2{,}20 \frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$,

und für O:

(27) $p_k = 50{,}7$ Atm., $T_k = 154{,}2$, $v_k = 2{,}15 \frac{\text{ccm}}{\text{gr}}$.

Der Wert für v_k bei Kohlensäure ist nach der Regel vom geradlinigen Diameter ermittelt, während der Wert von v_k für Sauerstoff sich mittels der Beziehung

$$\frac{p_k v_k}{R T_k} = \frac{1}{3{,}6}$$

ergab. Wählt man, wie dies Amagat tut, als Einheit des Volumens das Volumen, das 1 gr der Substanz bei 0° C. und Atmosphärendruck besitzt, so sind die oben für v_k angegebenen Zahlen noch durch das Volumen von 1 gr der Substanz bei 0° und dem Druck von 1 Atm. zu dividieren, man findet dann für CO_2: $v_k = 0{,}00435$, für O: $v_k = 0{,}00308$.

In nachstehenden Tabellen findet man für beide Stoffe die aus Amagats Messungen abgeleiteten Werte von

$$(p)_{v_k}, \quad \left(v \frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_k}$$

für verschiedene Temperaturen angegeben, wobei v stets gleich v_k gesetzt ist.

Kohlensäure.

$T = T_k = 273 + 31{,}5 = 304{,}5$.

p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_k}$
72,9	0	0,239

$T = 273 + 40$.

	p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_k}$
Bei der 1. Messung	87,6	−12,6	0,259
„ 2. „	87,6	−21,7	0,245

$T = 273 + 100.$

	p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\infty}$
Bei der 1. Messung	188,3	− 149	0,303
„ „ 2. „	188,7	− 174	0,274

$T = 273 + 198.$

	p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\infty}$
Bei der 1. Messung	350	−410,7	0,308
„ „ 2. „	349	−417,6	0,298

Sauerstoff.

$T = T_\infty = 154{,}2.$

p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\infty}$
50,7	0	0,329

$T = 273 + 199{,}5.$

	p in Atm.	$v\frac{\partial p}{\partial v}$ in Atm.	$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\infty}$
Bei der 1. Messung	738	−1062	0,438
„ „ 2. „	741	−1110	0,393

Es ergibt sich also sowohl bei Kohlensäure als auch bei Sauerstoff eine, wenn auch nicht starke, so doch deutlich nachweisbare Zunahme des Ausdruckes

$$\frac{1}{T}\left(p + \frac{v}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\infty}$$

mit steigender Temperatur. Da dieser Ausdruck zufolge der Gleichung (25) von T unabhängig sein muß, *so müssen wir schließen, daß Gleichung (22) für Kohlensäure, Sauerstoff, Äther und natürlich auch für alle damit korrespondierenden Stoffe ungültig ist.*

Nimmt man an, daß die Moleküle Kugeln von unveränderlichem Radius sind, und daß sich die von der gegenseitigen Anziehung der Moleküle herrührenden Kräfte im Innern eines Gases aufheben, so gelangt man zu einer Zustandsgleichung von der soeben diskutierten Form, welche jedoch, wie wir sahen, den Beobachtungen nicht entspricht; *man muß daher bei der Ableitung der Zustandsgleichung die eben erwähnten molekulartheoretischen Vorstellungen modifizieren.*

Wie Thiesen[1]) bemerkt, steht eine Zustandsgleichung von der Form:

$$p = AT + B, \tag{28}$$

wo A und B beliebige Funktionen von v sind, nicht im Einklang mit den Beobachtungen, denn sonst müßte, weil

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = T\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$$

ist, wobei c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bedeutet, $\partial c_v/\partial v = 0$ sein, c_v müßte also bei gleicher Temperatur im Gaszustand denselben Wert haben wie im flüssigen, was jedoch nicht der Fall ist. Insbesondere ergibt sich hieraus, was kürzlich auch Mie[2]) hervorhob, daß eine Gleichung von der Form (28) auch für das einatomige Quecksilber ungültig ist; denn für dampfförmiges Quecksilber ist c_v nur etwa halb so groß, wie für flüssiges. *Weiter folgt hieraus, daß Gleichung (28) auch für alle Stoffe ungültig ist, deren reduzierte Isothermen mit denen von Quecksilber zusammenfallen, sie ist also auch für Argon, Krypton und Xenon unbrauchbar.*

Was den festen Zustand betrifft, so hat Richarz[3]) folgende für die Metalle und auch einige der Metalloide gültigen Vorstellungen ausgearbeitet. Er nimmt an, daß diese Stoffe sämtlich einatomig sind und daß jedes Atom um eine mittlere Gleichgewichtslage Schwingungen ausführt, deren Amplitude klein ist gegenüber dem mittleren Abstand der Atome. Die

---

1) M. Thiesen, Wied. Ann. 63. p. 329. 1897.
2) G. Mie, Ann. d. Phys. 11. p. 657. 1903.
3) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 703. 1893.

Atome werden als punktförmig vorausgesetzt. Auf Grund dieser Vorstellungen hat Richarz das Dulong-Petitsche Gesetz und sogar den Wert der Konstanten desselben abgeleitet. Indessen ist dieser Beweis von Richarz nicht ganz exakt. Er greift nämlich ein Atom heraus und entwickelt die potentielle Energie desselben allein nach Potenzen von x_i, y_i, z_i, d. h. den Abweichungen des herausgegriffenen Atoms aus der Gleichgewichtslage; die Koeffizienten in dieser Entwickelung betrachtet Richarz gleichsam als konstant, während sie doch offenbar noch von den Größen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, also den Abweichungen der übrigen Atome aus ihrer Gleichgewichtslage abhängen.

Wie Prof. Lorentz mir gütigst mitteilte, braucht jedoch an der Beweisführung von Richarz nur sehr wenig geändert zu werden, um dieselbe völlig einwandsfrei zu machen. Entwickelt man nämlich nicht die potentielle Energie eines Atoms, sondern die potentielle Energie φ des ganzen Systems, also aller Atome nach Potenzen der $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 \ldots$, und setzt man fest, daß $\varphi = 0$ sein soll, wenn alle Atome ihre Gleichgewichtslage einnehmen, so verschwindet die additive Konstante in φ und zugleich die Glieder erster Ordnung; φ wird mithin für kleine Werte der $x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots$ eine homogene quadratische Funktion aller x_i, y_i, z_i. Bezeichnet man mit X_i, Y_i, Z_i die Komponenten aller auf das i-Atom wirkenden Kräfte, so ergibt sich für das gesamte Virial

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) &= -\sum\left(x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\right) \\ &= -2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Da nun der Mittelwert dieses Virials vermehrt um den Mittelwert der doppelten lebendigen Kraft L aller Moleküls gleich Null ist, so folgt

$$(30)\qquad \varphi = \bar{L}.$$

Wir haben hier, wie üblich, die Mittelwerte durch wagrechte Striche über den betreffenden Größen gekennzeichnet. Nimmt man jetzt mit Richarz an, daß auch im festen Zustand der Mittelwert der lebendigen Kraft eines Atoms gleich der mit einer universellen Konstanten multiplizierten absoluten Tem-

peratur ist, so folgt aus (30) in analoger Weise wie bei Richarz, daß der Mittelwert aus der kinetischen Energie des ganzen Systems vermehrt um den ebenso großen Mittelwert seiner potentiellen Energie gleich ist dem Produkt aus der Anzahl n der Atome, der absoluten Temperatur und einer universellen Konstanten. *Hieraus folgt das Dulong-Petitsche Gesetz ohne weiteres*, da $(\bar{L}+\varphi)/anT$ gleich der spezifischen Warme bei konstantem Volumen ist, falls a das Atomgewicht bedeutet. Man erkennt, wie auch Richarz hervorhebt, daß das Dulong-Petitsche Gesetz der theoretischen Ableitung nach für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen gültig ist.

Beachtenswert ist, daß das Dulong-Petitsche Gesetz natürlich nur in roher Annäherung auch noch für die meisten Grundstoffe im flüssigen Zustand gültig ist. Bis jetzt ist die spezifische Wärme, natürlich diejenige bei konstantem Druck c_p, für folgende Grundstoffe im flüssigen Zustand ermittelt: Quecksilber, Zinn, Wismut, Blei, Brom, Schwefel. Für Quecksilber kennt man auch die spezifische Wärme c_v bei konstantem Volumen, für die anderen Stoffe habe ich für den flüssigen Zustand c_v aus c_p berechnet, wobei ich annahm, daß das Verhältnis $c_p/c_v = 1{,}25$ ist. Dieser Wert ist etwas größer wie die entsprechende Zahl für Quecksilber; denn hier ergibt sich bei 0^0: $c_p/c_v = 1{,}14$; andererseits ist der angenommene Wert 1,25 kleiner als bei den meisten derjenigen mehratomigen Flüssigkeiten, für welche das Verhältnis der spezifischen Wärmen sich ermitteln läßt. Es ist daher anzunehmen, daß, wenn wir in der angegebenen Weise c_v für die betreffenden Grundstoffe berechnen, wir zu einem Werte für c_v gelangen, der wenigstens in roher Annäherung richtig ist. Für den festen Zustand dagegen darf c_p und c_v identifiziert werden. Nachstehende Tabelle lehrt, daß der Unterschied der spezifischen Wärmen im festen und flüssigen Zustand nur sehr gering ist, und daß das Produkt aus Atomgewicht a und der spezifischen Wärme c_v im flüssigen Zustand ungefähr ebenso groß ist, wie das entsprechende Produkt für den festen Zustand.[1])

1) Auf den geringen Unterschied der spezifischen Wärme c_p der Metalle im festen und flüssigen Zustand hat kürzlich auch G. Mie aufmerksam gemacht (vgl. Ann. d. Phys. 11. p. 657. 1903).

	$c_p = c_v$ fest	Atomwärme $a\,c_v$ fest	c_p flüssig	c_v flüssig	Atomwärme $a\,c_v$ flüssig
Hg	0,0314	6,27	0,0333	0,029	5,8
Sn	0,0562	6,67	0,0637	0,051	6,0
Bi	0,0308	6,40	0,0363	0,029	6,0
Pb	0,0314	6,47	0,0402	0,032	6,6
Br	0,0643	6,74	0,105	0,084	6,7
S	0,2026	6,49	0,234	0,18	5,9

Es scheint mir daher nicht unwahrscheinlich, daß für die genannten Stoffe die potentielle Energie für den flüssigen Zustand sich durch eine analoge Formel darstellen läßt wie im festen Zustand, und daß Gleichung (30) auch für den flüssigen Zustand gültig ist. Dies alles gilt natürlich nur in roher Annäherung.

Zum Schluß sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Lorentz auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen, für das wohlwollende Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte.

Leiden und Göttingen, Oktober 1903.

(Eingegangen 25. Oktober 1903.)

7. *Über den Dopplereffekt im elektrischen Funken; von Aug. Hagenbach.*

(Hierzu Taf. IX, Figg. 1—4.)

Das Dopplersche Prinzip sagt aus, daß, wenn sich ein Wellenzentrum oder ein Beobachter in der Beobachtungsrichtung bewegt, die ankommenden Wellen verkürzt oder verlängert erscheinen. Die Anwendung dieses Prinzipes in der Akustik ist eine ganz allgemeine und infolge der relativ kleinen Schallgeschwindigkeit ist auch die Richtigkeit derselben ohne weiteres experimentell verifizierbar. In der Optik liegen die Verhältnisse insofern anders, als ein irdischer Beweis, d. h. ein experimenteller Nachweis mittels Beobachtungen im Laboratorium nur ein einziges Mal erbracht worden ist. Belopolski[1]) ließ das Licht von zwei gegeneinander bewegten Spiegeln reflektieren und in einen Spektralapparat fallen, und bestimmte die Verschiebung der Spektrallinien gegen die vom nicht reflektierten Lichte erzeugten. Die Resultate dieser schwierigen Untersuchung tragen wohl mehr einen qualitativen wie quantitativen Charakter.[2]) Die Schwierigkeit liegt darin, daß es nicht möglich ist einer Lichtquelle, einem Spiegel oder Prisma, eine meßbare Geschwindigkeit zu erteilen, welche mit der großen Lichtgeschwindigkeit vergleichbar ist. In der Astrophysik wird das Dopplerprinzip ohne Bedenken zur Bestimmung von Sterngeschwindigkeiten im Visionsradius benützt, während die Anwendung desselben in molekularen Dimensionen zu mancherlei Diskussion geführt hat. Ich verweise hier auf die Ar-

1) A. Belopolski, Astron. Nachr. 137. p. 33—35; Astrophys. Journ. 13. p. 15—24. 1901.

2) Vgl. H. Kayser, Handb. d. Spektr. 2. p. 461 ff. 1902.

beiten von Lord Rayleigh[1]), H. Ebert[2]), F. Lippich[3]), L. Pfaundler[4]) und A. Michelson[5]) über die Breite der Spektrallinien. Jedenfalls aber liegt das Endresultat so, daß in den Leuchtvorgängen ein direkter Widerspruch mit dem Dopplerschen Prinzip nicht nachgewiesen ist.

Auf die Vorgänge bei elektrischen Entladungen ist das Dopplersche Prinzip zuerst von J. Ångström[6]) angewandt worden. Er beobachtete, ob ein Funke in der Längsdurchsicht Spektrallinien zeigte, welche verschoben wären gegen die Querdurchsicht. Aber sowohl seine Arbeit, wie auch viele anderer Beobachter[7]) lieferten ein negatives Ergebnis. Eine Bewegung der leuchtenden Gasteilchen konnte nicht nachgewiesen werden.

Ferner wurden die Leuchtvorgänge im elektrischen Funken in Hinsicht auf die Geschwindigkeit der leuchtenden Partikel nach anderen Methoden analysiert von Schuster, Hemsalech und Schenk. Auf die Resultate der genannten Forscher werde ich am Schlusse noch zurückkommen.

Wenn beim Überschlagen eines elektrischen Funkens Teilchen von den Elektroden abgeschleudert und zum Leuchten gebracht werden, so besitzen die einzelnen Wellenzentren, d. h. die Lichtquelle eine Geschwindigkeit. Sieht man in Richtung des Funkens, so ist nach dem Dopplerschen Prinzip eine Änderung der Farbe zu erwarten, d. h. im Spektrum müssen die Metallinien verschoben erscheinen.

Diese direkte Methode ist nur einmal von Mohler[8]) benutzt worden. Mohler stellt *einen* Funken senkrecht gegen den Spalt und photographiert mit einem Konkavgitter das Spektrum, dann dreht er den Funken um 180° und photographiert auf dieselbe photographische Platte nochmals. Die eventuellen

1) Lord Rayleigh, Phil. mag. **27**. p. 298—304. 1889.

2) H. Ebert, Wied. Ann. **36**. p. 466—473. 1889.

3) F. Lippich, Pogg. Ann. **139**. p. 465—479. 1870.

4) L. Pfaundler, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. **76**. p. 852—857. 1877.

5) A. A. Michelson, Phil. mag. **34**. p. 280—299. 1892.

6) J. Ångström, Pogg. Ann. **94**. p. 141—165. 1855.

7) Vgl. Literatur darüber in H. Kayser, Handbuch d. Spektr. **2**. p. 196. 1902.

8) J. F. Mohler, Astroph. Journ. **15**. p. 125—128. 1902.

Verschiebungen entsprechen dann der doppelten Geschwindigkeit der leuchtenden Partikel.

Ich habe diese Methode dahin abgeändert, daß *zwei* Funkenstrecken übereinander aufgestellt wurden, welche beide nach dem Spalt hingerichtet waren. Beide wurden von einem Induktor gespeist, so daß der Strom durch die Funkenstrecken nacheinander ging, aber im umgekehrten Sinne, d. h. der positive Strom ging z. B. im oberen Funken nach dem Spalt hin, im unteren vom Spalt weg. Es schien mir nicht nur zweckmäßig, sondern sogar notwendig, zwei Funken gleichzeitig springen zu lassen, weil nach Anderer und eigener Erfahrung ein Vergleich von Spektren, die nicht gleichzeitig aufgenommen sind, außerordentlich schwierig und nie ganz einwandsfrei ist, da Temperaturänderungen, Verwackeln etc. leicht kleine Verschiebungen hervorbringen können.

A. Untersuchungen mit dem Stufengitter.

Der erste Teil der Untersuchung wurde mit einem Stufengitter ausgeführt, welches von A. Hilger, London konstruiert war. Es war mir in liebenswürdigster Weise von Hrn. H. Hauswaldt in Magdeburg zur Verfügung gestellt, und ich erfülle hier die angenehme Pflicht, Herrn Hauswaldt meinen besten Dank dafür auszusprechen.

Das „echelon spectroscope" besteht aus 21 Stufen von je 1 cm Dicke. Für die Fraunhoferschen Linien *C D F C G* betragen die Brechungsindizes

$$\mu_C = 1{,}5706,$$

$$\mu_D = 1{,}5746,$$

$$\mu_F = 1{,}5845,$$

$$\mu_G = 1{,}5927.$$

Bei der Wellenlänge *D* 5890 beträgt die Winkeldifferenz für 0,1 A.-E. = 0,37 Bogenminuten und bei $\lambda = 4600$ 0,50 Bogenminuten, berechnet aus der Dispersionsformel für Stufengitter

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \frac{b\,t}{s\,\lambda} \quad \text{wo} \quad b = (\mu - 1) - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda};$$

hierin bedeutet t die Dicke der Platten, s die Breite einer Stufe (in diesem Falle = 1 mm), Θ den Winkel; $d\mu/d\lambda$ ist durch Interpolation gefunden.

Die Weglängendifferenz zweier Wellen, welche noch getrennt sind, beträgt 0,027 A.-E. für D und 0,016 A.-E. für 4600.

Ich habe an den Quecksilberlinien die Leistungen des Spektroskopes okular und photographisch geprüft und gefunden, daß wirklich das theoretische Auflösungsvermögen erreicht ist. Auf der Taf. IX stellen Figg. 1 und 2 Quecksilberlinien dar, wie dieselben mit dem Stufengitter beobachtet werden. Die Originalaufnahmen sind mittels eines Zeissschen Mikroskopes vergrößert worden. Die Vergrößerung wurde nachträglich durch Ausmessung der Originale und der Vergrößerung zu

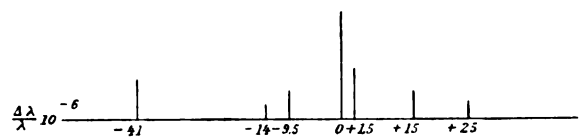


Fig. 1.

11,4 bestimmt. Wegen der sehr verschiedenen Intensität der einzelnen Komponenten kann man auf der Photographie nicht sämtliche Komponenten scharf getrennt erhalten, hingegen zeigen die mit verschieden langer Expositionszeit aufgenommenen Photographien in summa alles, was man mit dem Auge beobachten kann. Fig. 1 der Taf. IX zeigt die Linie 4560,97 in drei Ordnungen. Es sind in der Reproduktion drei Trabanten auf einer Seite der Hauptlinie deutlich erkennbar, die auf der anderen Seite fließen auf der photographischen Platte mit der Hauptlinie zusammen, sind aber auch noch sichtbar. Die Zeichnung (Fig. 1) giebt das von Fabry und Perot[1]) angegebene und von Zeeman[2]) publizierte Darstellung dieser Linie. Die Höhe der Linien stellt die Intensität dar. Man wird leicht die einzelnen Komponenten der Zeichnung in der Photographie erkennen. Fig. 2 der Taf. IX

1) Ch. Fabry und A. Perot, Astrophys. Journ. 13. p. 272. 1901.

2) P. Zeeman, K. Akad. d. Wissensch. Amsterdam. p. 247 bis 251. 1901.

ist die Vergrößerung der blauen Linie 4358,56. Die Struktur dieser Linie ist ziemlich symmetrisch. Ich reproduziere die beiden Vergrößerungen, weil es einiges Interesse hat, daß man diese delikaten Erscheinungen photographisch fixieren kann. Ich habe die Platten auch ausgemessen und soweit es möglich ist, mit den Resultaten von Perot und Fabry und Lummer und Gehrke[1]) verglichen; doch werde ich gelegentlich in anderem Zusammenhange darüber Mitteilung machen.

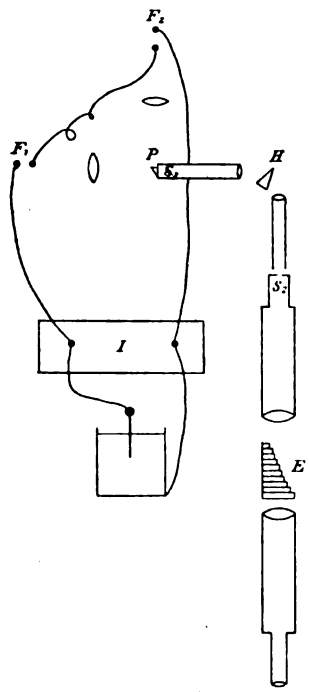


Fig. 2.

Um das Stufengitter für meine Zwecke verwendbar zu machen, wurde der Spalt des Hilfsspektroskopes mit konstanter Ablenkung, welches vor dem Kollimatorfernrohr des Stufengitters aufgestellt war, in zwei Teile geteilt durch ein kleines Prisma mit Totalreflexion. Von den beiden Funken F_1 und F_2 in Fig. 2 wurde der eine direkt, der andere durch das totalreflektierende Prisma P auf die beiden Spalthälften S_1 projiziert. Durch Drehen des Prismas im Hilfsspektroskop konnte jede gewünschte Linie in den Spalt S_2 des Stufengitters E gebracht werden. Die Funkenspektren waren mit dem Induktorium J verbunden, wie in der Zeichnung ersichtlich ist. Die Beobachtungen wurden teilweise okular, teilweise photographisch ausgeführt.

Mit dem Stufengitter können nur dann Interferenzen gesehen werden, wenn das einfallende Licht so homogen ist, daß die verschiedenen Ordnungen nicht übereinander fallen. Für die D-Linien liegen die Ordnungen etwa 0,6 A.-E., für blau etwa 0,5 A.-E. auseinander, das entspricht einer Winkeldifferenz von

1) O. Lummer u. E. Gehrke, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 2. p. 1—7. 1902.

zwei Bogenminuten. Es darf also eine Linie nicht diese Breite an und für sich besitzen, sonst stoßen die Interferenzen der verschiedenen Ordnungen aneinander und im Gesichtsfeld erscheint nur eine gleichmäßige Helligkeit. Berücksichtigt man noch, daß eine Linie im Stufengitter eine Intensitätsverteilung besitzt von der Form

$$I = \left[\frac{\sin \pi \frac{S}{\lambda} \Theta}{\pi \frac{S}{\lambda} \Theta} \right]^2,$$

d. h. bedenkt man, daß der Intensitätsabfall kein sehr steiler ist und zieht man außerdem noch die endliche Spaltbreite in Betracht, so ergibt sich, daß die Linienbreite noch wesentlich kleiner sein muß wie obengenannte Größe. Dies ist bei den Funkenlinien nicht der Fall. Das Experiment mit dem Funken, wobei eine kleine Leydener Flasche eingeschaltet war, zeigte zunächst im Stufengitter gar keine Linien, gleichgültig, welche Elektroden ich anwandte. Durch Verengen des Spaltes war nichts zu erreichen, das Licht war eben nicht homogen genug. Selbstverständlich ist hier unter der Unschärfe einer Linie die Breite verstanden, aufgefaßt als kurzes Stück eines kontinuierlichen Spektrums und nicht etwa die Zusammensetzung aus einzelnen scharfen Komponenten, denn diese zu trennen ist ja gerade die Fähigkeit des Stufengitters.

Ich suchte zunächst nach den Bedingungen, die Funkenlinien so scharf zu erhalten, daß die verschiedenen Ordnungen getrennt wurden. Es schien mir auch noch die Möglichkeit vorzuliegen, daß die zahlreichen Luftlinien im Spektrum so viel diffuses Licht erzeugten, daß dadurch das Gesichtsfeld allgemein erhellt würde. Die ausgedehnten Arbeiten von Hemsalech[1]) über die Einwirkung der Selbstinduktion auf die Intensität der Luft- und Metalllinien veranlaßten mich, mit Selbstinduktion Versuche anzustellen, aber der Erfolg blieb aus.

Zunächst wurden der Übersicht halber zahlreiche vergleichende Aufnahmen von Funkenspektren mit und ohne Selbstinduktion mit einem kleinen Rowlandschen Konkav-

1) G. A. Hemsalech, Spectres d'étincelles. Paris, libr. Hermann 1901.

gitter von 1 m Krümmungsradius angefertigt. Bei den Metallen Eisen, Nickel, Kobalt, Zink, Kadmium, Blei, Aluminium, Kupfer und Messing konnte wohl die Intensität der Luftlinien geändert, nie aber die Linien *ganz* zum Verschwinden gebracht werden, immer aber nahm zugleich die Intensität der Metalllinien ab.[1]) Ich habe nur eine einzige Aufnahme mit Zink, wo bei langer Exposition und sehr großer Selbstinduktion die Luftlinien nicht sichtbar sind, doch zweifle ich nicht daran, daß bei noch längerer Exposition des sehr lichtschwachen Funkens die Luftgruppe bei 460 sich auch gezeigt hätte.

Was die Schärfe der Linien angeht, so ist zu bemerken, daß, soweit dies bei der mäßig großen auflösenden Kraft des kleinen Gitters zu beurteilen ist, wenigstens bei einzelnen, wie Blei, die sehr diffusen Linien schärfer werden, bei den meisten Metallen aber ist es nicht möglich, ein sicheres Resultat anzugeben, weil eben die verschieden exponierten Spektren beim Entwickeln verschieden stark und auch verschieden breit zum Vorschein kommen können. Wie schon oben erwähnt, war der Erfolg für das Echelon-Spektroskop negativ.

Das einzige, was die Schärfe der Linien steigerte, war Vergrößerung der Kapazität. Mittels zweier großer Leydener Flaschen[2]) (ca. 40 cm hoch und 20 cm Durchmesser), sowohl bei Parallel, wie bei Hintereinanderschalten, gelang es bei mehreren Metallen die Ordnungen einzelner Linien im Stufengitter gut getrennt zu erhalten. Es wurde stets dafür gesorgt, daß die von beiden Funken herrührenden Bilder im Gesichtsfeld möglichst aneinander stießen.

Als Funkenelektroden wurden zum Teil gleiche, zum Teil auch verschiedene Metalle, z. B. Nickel gegen Aluminium, einander gegenübergestellt. Die Funkenstrecken wurden variiert zwischen 2 und 8 mm.

Während der okularen Beobachtung wurde im Induktorium der Strom gewendet, dabei war eine Verschiebung der beiden Linien gegeneinander zu erwarten nach dem Dopplerschen

1) Vgl. G. Berndt, Inaug.-Diss. Halle 1901; Eug. Néculcéa, L'éclair électrique. 28. p. 206—212. 1901; A. de Grammont, Compt. rend. 134. p. 1048—1050, 1205—1207. 1902.

2) Die Kapazität ist leider nicht gemessen worden; nachher sind die Leydener Flaschen beim langen Gebrauch durchschlagen worden.

Prinzip. Es war aber nicht möglich einen Effekt zu beobachten. Die Linien der beiden Funkenstrecken koinzidierten stets.

Es wird behauptet, daß man beim Stufengitter an den schärfsten Linien eine Verschiebung nachweisen könne, welche $^1/_{10}$ der auflösenden Kraft betrage. Dies würde in der Gegend der *D*-Linien etwa 0,003 A.-E. entsprechen, da die auflösende Kraft 0,027 A.-E. beträgt. Diese Größe würde einem linearen Abstande von etwa 0,0029 mm entsprechen, wie ich durch Ausmessen der Quecksilberphotographien feststellte. Die Funkenlinien sind aber weit davon entfernt, eine Schärfe zu besitzen, wie die im Vakuum erzeugten Hg-Linien. Nach meiner Messung sind dieselben rund viermal breiter und dementsprechend wird die *nachweisbare* Verschiebung etwa viermal größer anzunehmen sein, d. h. ca. 0,011 A.-E.

Um das negative Resultat der okularen Beobachtung zu bestätigen, wurden zahlreiche Photographien angefertigt mit beiden Stromrichtungen, aber ich konnte auch hier keine Verschiebung nachweisen.

Auf Taf. IX, Fig. 3 ist eine Reproduktion einer Vegrößerung (11,8 fach) der Nickellinie 4714 zu sehen. Man ersieht daran, daß die Linie wesentlich unschärfer ist wie die Komponenten der Hg-Linien; ferner erkennt man die Koinzidenz der oberen und unteren Linie. Die schärfsten Linien lieferten Nickel, Kobalt (Gruppe bei 48), Eisen, und zwar waren für die okulare Beobachtung Gruppen im Grün aus physiologischen Gründen am besten.

Man muß aus der Tatsache, daß keine Verschiebungen von Linien vorhanden sind, welche größer sind wie 0,01 A.-E., den Schluß ziehen, daß, wenn man das Dopplerprinzip für den Leuchtvorgang im Funken anerkennen will, keine größeren Geschwindigkeiten der leuchtenden Teilchen existieren als solche, welche dieser Größe entsprechen.

B. Untersuchungen mit dem großen Konkavgitter.

Bei den Untersuchungen mit dem großen Konkavgitter war die Methode vollkommen analog zu der beim Stufengitter angewandten. Vor dem Spalt befanden sich in einem Abstande von etwa 1 cm die beiden Funkenstrecken übereinander. Zur Isolierung wurde zwischen dieselben eine Glimmerplatte gelegt und vor den Spalt wurde zum Schutze eine Quarzplatte eingeschaltet.

Die Expositionszeit betrug zwischen 1 und 3 Stunden. Um die Platten messen zu können, wurde nachträglich das Spektrum des Eisenbogens dazu photographiert. Jede Aufnahme, welche also zwei Funkenspektren übereinander und das Eisenbogenspektrum enthielt, wurde ausgemessen und zwar je zweimal in der Höhe jedes Funkenspektrums mit der Teilmaschine des Instituts.[1]) Stellte man auf dieselbe Eisenlinie im oberen und im unteren Spektrum ein, so erhielt man einen Unterschied, welcher der mechanischen Verschiebung[2]) der Platte gegen das Mikroskop entsprach. Der Mittelwert aller Differenzen gab die mechanische Verschiebung möglichst genau. Nimmt man nun an, daß die Funkenlinien in den beiden Spektren in entgegengesetzter Richtung verschoben sind, so ergeben die Differenzen der Einstellungen den doppelten Dopplereffekt plus der mechanischen Verschiebung. Daraus war also der mittlere Wert des Dopplereffektes bestimmt. Da die zu messende Größe sehr klein zu erwarten war, durfte man ohne weiteres das arithmetische Mittel nehmen, obschon nach dem Dopplerschen Prinzip die Verschiebung proportional der Wellenlänge ist.

Was die Funkenrichtung anbelangt, so ist dabei zu bemerken, daß praktisch der Funken eine kleine Neigung gegen die Horizontale hatte. Die Neigung war auch nicht vollkommen konstant, weil die aufeinander folgenden Funken nicht immer an derselben Stelle des Elektroden überschlagen. Die Geschwindigkeit aus der Verschiebung der Linien gemessen wäre daher etwas zu klein, sie entspräche der wahren Geschwindigkeit dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels.

Für die Wahl des Elektrodenmaterials war vor allem die Schärfe, die Lage und Zahl der Linien in einem Bereich von etwa 1000 A.-E., der Länge einer photographischen Platte, maßgebend. Um nicht allzulange Expositionszeiten zu erhalten, war man gezwungen, eine Liniengruppe im bestphotographierbaren Teil zu wählen. Um über die Schärfe der Linien ein

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch d. Spektr. 1. p. 644. 1900.

2) Ging man von der Messung des oberen Funkenspektrums zu der Ausmessung des unteren über, so mußte die photographische Platte neu auf den Tisch der Teilmaschine aufgelegt werden und dabei war natürlich eine seitliche mechanische Verschiebung der Platte gegen das feststehende Mikroskop nicht zu vermeiden.

Urteil zu gewinnen, konnten die Erfahrungen am Stufengitter und die zahlreichen Funkenaufnahmen mit dem kleinen Konkavgitter dienen. Am zweckmäßigsten erschien mir die starke Liniengruppe zwischen 3600—3300 von Nickel zu sein. Auf Taf. IX, Fig. 4 ist ein Teil einer solchen Platte reproduziert. Sie zeigt die beiden Funkenspektren (ohne Eisen) entsprechend den beiden Stromrichtungen übereinander.

Anfänglich wurden die beiden Pole der Funkenstrecke aus Nickelelektroden angefertigt, bei den späteren Aufnahmen wurde aber die eine Elektrode in jeder Funkenstrecke, z. B. die positive durch ein anderes Metall (Aluminium oder Kupfer) ersetzt. Da auch im letzteren Falle in beiden Stromrichtungen die Nickellinien gleich erscheinen, so muß man daraus schließen, daß infolge der Oszillationen der Elektrodendampf von beiden Seiten in die Funkenstrecke gelangt. Ich muß aber betonen, daß die Aufnahmen sich im Resultat von den anderen nicht unterschieden.

Die Beobachtungen mit dem Stufengitter hatten ergeben, daß die Verschiebung nur sehr klein zu erwarten war, wenn dieselbe überhaupt vorhanden ist. Ich will nur kurz die Resultate, die ich beim Ausmessen der Platten erhielt, mitteilen. Bei den verschiedenen Platten sind nicht immer dieselbe Anzahl Linien gemessen, weil infolge verschiedener Expositionen bald mehr, bald weniger Linien sichtbar wurden. Zu der Berechnung des Mittelwertes setze ich aber jede Platte mit demselben Gewicht ein; es war unmöglich, das jeweilige Gewicht zu beurteilen, da außer der Anzahl der Linien auch noch die Schärfe der Linien zu berücksichtigen wäre. Die acht besten Platten wurden vermessen. Benützt wurden zwischen 10 und 20 Nickellinien und mindestens ebensoviel, meistens wesentlich mehr, scharfe Eisenlinien. Die Einstellungen auf die Eisenlinien stimmten stets besser untereinander, weil der Bogen nur kurze Zeit exponiert war, also Erschütterungen weniger einwirken konnten und die Linien an und für sich schärfer zu sein scheinen.

Die Mittelwerte für die verschiedenen Platten sind:

0,013 A.-E.	0,015 A.-E.
0,002	0,003
0,004	0,009
0,016	−0,006

Das negative Zeichen bedeutet, daß trotz Umkehrung des Stromes bei Anwendung verschiedener Elektroden die Verschiebung nach derselben Seite wie im vorherigen Falle eintrat.

Berechnet man den Mittelwert, so ergibt sich

$$0{,}0070 \text{ A.-E.}$$

Sucht man daraus die Geschwindigkeit nach der Formel für das Dopplersche Prinzip

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left(1 + \frac{a}{v}\right),$$

so ergibt sich für die Geschwindigkeit der Moleküle

$$280 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Diese Größe ist bereits vollkommen an der Grenze des Meßbaren. Der lineare Abstand auf der photographischen Platte würde nur 0,0035 mm betragen. Ich wage nicht, diesen Wert als wirklich bestehende Größe anzugeben, ich möchte viel eher denselben als obere Grenze der möglichen Geschwindigkeiten bezeichnen. Diese kleinen Werte können sehr wohl von einseitiger Unschärfe, von Verwackeln, überhaupt durch das verschiedene Aussehen der Funken- und Bogenlinien hervorgebracht werden. Ferner ist noch zu berücksichtigen, wenn man diesen Mittelwert der Geschwindigkeiten annehmen wollte, daß er eine mittlere Geschwindigkeit darstellte. Während die Teilchen sich auf den Spalt zu bewegen, wird die Geschwindigkeit sich ändern. Für den Fall, daß die Geschwindigkeit auf Null abfällt, würde während dieser Zeit die Spektrallinie verschoben und auf der photographischen Platte würde sich eine verbreiterte Linie finden. Die Messung der Mitte der Linie ergäbe dann einen zu kleinen Wert, der um so weniger zu klein wäre, je rascher die Leuchtkraft abnimmt mit abnehmender Geschwindigkeit.

Einwandsfreie Resultate könnten nur dann erreicht werden, wenn bestimmte Teile der Funken auf den Spalt projiziert würden. Auch wäre es zweckmäßig, an Stelle des oszillatorischen Funkens den intermittierenden Funken zu setzen, doch dürften sich wegen zu geringer Intensität erhebliche Schwierigkeiten bieten. Abgesehen von den genannten Fehlern, die beim Messen in Betracht kommen können, ist noch der Astigmatismus als Fehlerquelle zu nennen. Bekanntlich wird beim Konkavgitter

jeder Punkt des Spaltes als Linie abgebildet, und wenn nun der Spalt nicht den Furchen des Gitters parallel ist, so erhält die Spektrallinie Spitzen, die nicht symmetrisch zur Linie liegen, und zwar liegt z. B. die obere Spitze nach rechts, die untere nach links. Wenn nun zwei Spektren übereinanderliegen, so koinzidieren die Spitzen nicht, trotzdem die Linien an und für sich koinzidieren, und man darf deshalb nicht an den Spitzen messen. Bei der Justierung wurde selbstverständlich auf möglich torsionsfreie Einstellung geachtet und die Messung wurde in der Mitte der kurzen Funkenlinien ausgeführt.

Einen ebenso kleinen Wert lieferten Messungen am Zink-Kadmiumfunken. In diesem Falle erhielt man auf der photographischen Platte sowohl Zink- wie Kadmiumlinien. Die Verschiebung beider müßte in entgegengesetzter Richtung erfolgen, also der Abstand zwischen Zink- und Kadmiumlinien im oberen und unteren Funken müßten um den 4 fachen Dopplereffekt vergrößert oder verkleinert sein. Gefunden wurde aus zwei Platten für den 4fachen Dopplereffekt 0,013 A.-E., also ungefähr dasselbe wie vorher.

Die Messungen mit dem Konkavgitter stehen jedenfalls im vollen Einklang mit den Resultaten, die mit dem Stufengitter gefunden wurden. Die Verschiebungen sind kleiner wie 0,01 A.-E.

Dies Resultat steht aber in gewissem Widerspruch mit früheren Beobachtungen. Es kommen hier die schon früher genannten Arbeiten von Schuster und Hemsalech[1]), Schenk[2]) und Mohler[3]) in Betracht. Schuster und Hemsalech bestimmen ebenfalls die Geschwindigkeit der leuchtenden Teilchen im Funken. Wenn nämlich der Funke längs des Spaltes eines Spektralapparates springt und zugleich die photographische Platte am Ende des Fernrohres des Spektrographen sich senkrecht zur Spaltrichtung bewegt, dann werden die Spektrallinien eines Metalles keine Gerade, sondern Kurven. Aus der Gestalt dieser Kurven unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit des photographischen Films haben die Ver-

1) A. Schuster u. G. Hemsalech, Phil. Trans. **193**. p. 89—213. 1900.

2) Ch. C. Schenk, Astrophys. Journ. **14**. p. 116—135. 1901.

3) J. F. Mohler, l. c.

fasser die Geschwindigkeiten berechnet und haben Zahlen gefunden von mehreren Hundert Metern, ja bis 2000 m/sec.

Schenk hat nun in einer umfangreichen Arbeit gezeigt, daß die Photographien vielleicht zum Teil anders zu deuten sind, indem die Kurven, welche die vorher genannten Forscher gemessen haben, Enveloppen wären an einzelne kürzere stärker gekrümmte Kurven und daß die Geschwindigkeiten also zu groß berechnet sind. Er selbst fand allerdings für die Magnesiumlinie 4481 sogar eine Geschwindigkeit von 2500 m/sec.

Mohler hingegen findet aus der Verschiebung der Spektrallinien von Aluminium Geschwindigkeiten von nur 370 m/sec, ebenso für die kurzwelligen Magnesiumlinien, während für Eisen die Zahlen etwas kleiner, für Kadmium etwas größer ausfallen.

Die Geschwindigkeit des abgeschleuderten Metalldampfes läßt sich nun auch einigermaßen berechnen. Schenk bestimmt bei seinen Versuchen die Periode der oszillatorischen Entladung und findet, wenn keine Selbstinduktion eingeschaltet ist, für seine Kapazität rund 10^{-6} sec. Da nun bei der ersten Oszillation schon der Metalldampf bis über die Mitte der Funkenstrecke leuchtet, so muß man schließen, daß in dieser Zeit von den Elektroden Metalldampf bis dorthin geschleudert worden ist. Nimmt man für diese Strecke etwa 0,5 cm an, so wäre die Geschwindigkeit $0{,}5 \cdot 10^6$ cm/sec = 5000 m/sec. Dieser Wert ist nun größer wie alle gemessenen, er ist etwa 20mal so groß wie der von mir angegebene. Es scheint mir deshalb ungemein plausibel, daß der Metalldampf mit großer Geschwindigkeit in die Funkenstrecke geschleudert wird und dann erst unter den Oszillationen energisch zum Leuchten gebracht wird. Bei einem kontinuierlichen Funkenstrom, wie bei der Versuchsanordnung von Mohler und bei mir scheint das auf jeden Fall ganz einleuchtend. Es ist möglich, daß bei jeder Oszillation neuer Metalldampf dazu kommt, doch hauptsächlich wird der schon vorhandene mitleuchten, ohne wesentliche mechanische Verschiebung. Darum dürfte es auch unmöglich sein, aus der Verschiebung nach dem Dopplerschen Prinzip die Geschwindigkeit der abgeschleuderten Metallteilchen zu messen.

Bonn, Physik. Institut, 18. Oktober 1903.

(Eingegangen 20. Oktober 1903.)

8. *Sekundäres und primäres negatives Glimmlicht; von J. Stark.*

Inhalt: I. Kathodendunkelraum und negative Glimmschicht. § 1. Über die elektrische Konzentrationsänderung an der Kathode. § 2. Tatsachen und Erklärungshypothesen über die Leuchtintensität des Glimmlichtes. § 3. Methode zur Herstellung sekundären Glimmlichtes. § 4. Sekundärer Kathodenfall. § 5. Länge des sekundären Dunkelraumes. § 6. Folgerungen, Erklärung der Dunkelraumgrenze. — II. Erste Kathodenschicht, Länge des primären Dunkelraumes. § 7. Problemstellung, Erklärungshypothesen. § 8. Die erste Kathodenschicht im sekundären Glimmlicht. § 9. Langsame Kanalstrahlen. § 10. Primärer Dunkelraum, Herkunft der negativen Ionen an der Glimmstromkathode. § 11. Strömungen mit negativen Elektronionen aus der Kathode.

I. Kathodendunkelraum und negative Glimmschicht.

§ 1. *Über die elektrische Konzentrationsänderung an der Kathode.* — Indem die elektrische Strömung von der Kathode negative, von der Anode positive Ionen wegführt, ändert sie wie in einem Elektrolyten so auch in einem ionisierten Gase die Konzentration der Ionen in der Nähe der Elektroden. Hierauf hat für die Strömung in Gasen wohl als erster J. J. Thomson[1]) hingewiesen; ihm folgte der Verfasser mit einer ausführlicheren Behandlung[2]) der Erscheinung. „Durch die elektrische Strömung wird demnach in den Ladungsschichten (Gasschichten an den Elektroden) die Ionisation erniedrigt." — „Die spez. Ionengeschwindigkeiten sind im allgemeinen nicht gleich, vielmehr ist v_n immer größer als v_p. Aus diesem Grunde wird an der Kathode die Ionenkonzentration und damit das Leitvermögen durch die elektrische Strömung stärker vermindert als an der Anode. Die kathodische Ladungsschicht besitzt darum in Gasen einen größeren Widerstand als die anodische". (El. i. G. p. 283.) „Durch die

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. **47**. p. 253. 1899.

2) J. Stark, Wied. Ann. **68**. p. 945. 1899; Ann. d. Phys. **2**. p. 62. 1900; **3**. p. 500. 1900; Die Elektrizität in Gasen. p. 281. Leipzig 1902.

Konzentrationserniedrigung in den Ladungsschichten wird darum in diesen der Widerstand und damit das Spannungsgefälle um so mehr erhöht, je kleiner die anfängliche Ionisation an der Elektrode und je größer die Stromstärke ist". (El. i G. p. 284.) Beim Glimmstrom sind die Verhältnisse an der Kathode verwickelt, da hier ionisierende Strahlungen auftreten. Indes bedingt auch hier die elektrische Konzentrationsänderung ein Steigen des Kathodenfalles mit wachsender Stromdichte. (El. i. G. p. 286.) G. C. Schmidt[1]) hat neuerdings ebenfalls die Ansicht geäußert, daß an der Kathode des Glimmstromes eine Erniedrigung der Ionenkonzentration, „Verarmung" an Ionen, eintrete.

Daß die Leitfähigkeit bez. Zahl der Ionen im Gase in der Nähe der Kathodenoberfläche, im Dunkelraum in der Tat größer ist als in der negativen Glimmschicht, wurde von H. A. Wilson und dem Verfasser mittels der Methode der Querströme[2]) experimentell nachgewiesen. G. C. Schmidt (l. c.) ist mittels einer ähnlichen Methode zu dem gleichen Resultate gekommen; auch fand er, daß der abnormale Kathodenfall des Glimmstromes kleiner wird, wenn man das Gas in dem Kathodendunkelraum mittels Kathoden- oder Kanalstrahlen von einer zweiten Kathode her ionisiert.

Nach dem Vorstehenden wird in einer elektrischen Strömung in Gasen, speziell auch im Glimmstrom an der Kathode durch die elektrische Konzentrationsänderung ein beträchtlicher Spannungsabfall bedingt. Damit allein ist aber die Grenze zwischen Kathodendunkelraum und negativer Glimmschicht nicht erklärt; die Feststellung, daß im Dunkelraum die spez. Ionenzahl geringer ist als in der Glimmschicht, erklärt für sich allein noch nicht die merkwürdige Intensitätsverteilung des Leuchtens an der Kathode des Glimmstromes.

§ 2. *Tatsachen und Erklärungshypothesen über die Leuchtintensität des Glimmlichtes.* — In optischer Hinsicht besteht das negative Glimmlicht aus drei Teilen, nicht nur was die Intensität, sondern auch die Farbe des ausgestrahlten Lichtes

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **12.** p. 622. 1903.

2) H. A. Wilson, Phil. Mag. **49.** p. 514. 1900; J. Stark, Ann. d. Phys. **3.** p. 492. 1900.

betrifft. Auf der Kathode sitzt die *erste Kathodenschicht*, ihre Lichtintensität nimmt von der Kathode weg ab; ihre Farbe ist in vielen Gasen gelblich. Auf sie folgt ein nur wenig leuchtender Raum, der sogenannte *dunkle Kathodenraum*; seine Farbe ist rein blau. Auf ihn folgt mit rasch ansteigender und nach der Anode zu langsam abklingender Lichtintensität die hell leuchtende *negative Glimmschicht;* ihre Farbe ist ein Gemisch von intensivem weißlichem oder rötlichem Blau und einem schwachen reinen Blau, demselben Blau, welches der Kathodendunkelraum zeigt. Im dunklen Kathodenraum besitzt also die Lichtintensität ein Minimum, daneben am Ende der ersten Kathodenschicht und an der Grenze von Dunkelraum und Glimmschicht je einen Wendepunkt. Dem Auge fällt besonders diese letztere scharfe Grenze auf. Als *Länge des Kathodendunkelraumes* wird in der Regel der Abstand der Grenze Glimmschicht-Dunkelraum von der Kathodenoberfläche bezeichnet.

Die elektrische Spannung fällt innerhalb der Länge des Dunkelraumes rasch ab, innerhalb der negativen Glimmschicht ist der Spannungsabfall von Null nur wenig verschieden. Die Spannungsdifferenz zwischen negativer Glimmschicht und Kathode, der Kathodenfall, kann unter einen bestimmten Minimalwert, den normalen Kathodenfall, nicht sinken, wenn der Glimmstrom nicht aufhören soll, selbständig zu existieren. Von der negativen Glimmschicht weg laufen nach der Kathode zu positive Ionen, erlangen beim Durchlaufen des Kathodenfalles eine große Spannungsdifferenz und besitzen darum an der Kathodenoberfläche strahlenartigen Charakter (positive Strahlen, Kanalstrahlen). Aus der ersten Kathodenschicht laufen von der Kathode weg nach der negativen Glimmschicht negative Ionen, erlangen beim Durchlaufen des Kathodenfalles ebenfalls eine große Geschwindigkeit und nehmen so strahlartigen Charakter an (negative Strahlen, Kathodenstrahlen).

Indem die *primären* von der Kathode kommenden negativen Strahlen auf Gasmoleküle treffen, werden sie einerseits diffus zerstreut, andererseits erregen sie im Gase neue, *sekundäre* Kathodenstrahlen. Die Geschwindigkeit der zerstreuten und sekundären Strahlen ist kleiner als diejenige der primären; dies ist aus der stärkeren magnetischen Ablenkbarkeit

zu schließen; gemessen in Volt (genauer in der Quadratwurzel aus Volt) ist die Geschwindigkeit der primären Strahlen immer größer als mehrere Hunderte Volt, nämlich gleich dem Kathodenfall; ob die Mehrzahl der sekundären Strahlen eine angenähert gleich große oder eine viel kleinere Geschwindigkeit besitzt, weiß man nicht. Von der Kathode weg nimmt die Zerstreuung der primären Strahlen zu und erreicht in der negativen Glimmschicht ein Maximum.

Zur Erklärung der räumlichen Variation der Intensität des negativen Glimmlichtes hat man von der elektrischen Strahlung in ihr auszugehen. Als Energiequelle des Leuchtens der ersten Kathodenschicht nimmt man heute ziemlich allgemein die kinetische Energie der positiven Strahlen (Kanalstrahlen) an. Das schwache rein blaue Licht des Kathodendunkelraumes wird erzeugt von einem kleinen Bruchteil primärer Strahlen, die bereits hier Gasmoleküle treffen; auch diese Annahme wird kaum Widerspruch finden. Das Leuchten der negativen Glimmschicht wird nach E. Goldstein,[1]) soweit es rein blau wie im Dunkelraum ist, von den primären, soweit es weißlich oder rötlich ist, von den sekundären Kathodenstrahlen erzeugt. Bezüglich der scharfen Grenze zwischen Glimmschicht und Dunkelraum hat sich der Verfasser in seinem Buche (Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902) der Ansicht Goldsteins angeschlossen. „In der negativen Glimmschicht entstehen — — sekundäre langsamere Strahlen, die gemäß ihrer größeren Absorbierbarkeit auch intensiveres Leuchten erregen; diese breiten sich nach allen Richtungen aus, auch rückwärts nach dem Kathodendunkelraum und würden in ihm Leuchten erregen, wenn sie in ihn tief eindringen könnten; dies ist ihnen aber nicht möglich, da sie als negative Teilchen aus dem Dunkelraum zurückgetrieben werden". (El. i. G. p. 454.) Diese Erklärungshypothese wird im nachstehenden experimentell begründet.

§ 3. *Methode zur Herstellung sekundären Glimmlichtes.* — Der Glimmstrom ist eine selbständige Strömung, er schafft sich an seiner Kathode die notwendigen positiven und negativen

1) E. Goldstein, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 2. p. 142. 1900.

Ionen selbst (El. i. G. p. 67, 118); sein negatives Glimmlicht soll aus diesem Grunde primär oder selbständig heißen. Sekundäres Glimmlicht kann man auf folgende Weise herstellen. Man bringt an zwei Stellen einer Niveaufläche eines primären Glimmstromes je eine Querelektrode an und legt an diese eine gut isolierte elektromotorische Kraft. Man erhält auf diese Weise zwischen den Querelektroden im Gas eine unselbständige oder sekundäre Strömung, welcher die notwendigen Ionen von dem primären Glimmstrom geliefert werden. Der unselbständige Querstrom erlischt, wenn der selbständige Glimmstrom unterbrochen wird.

Bringt man die Elektroden des Querstromes in die primäre negative Glimmschicht, so sind an seiner Kathode die Bedingungen für die Ausbildung eines Kathodendunkelraumes

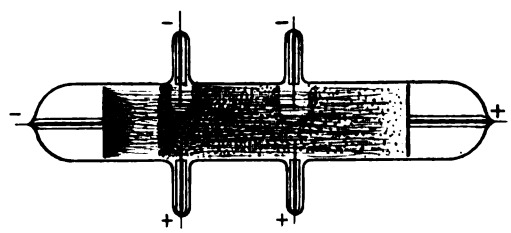


Fig. 1.

gegeben, nämlich erstens ein beträchtlicher Spannungsabfall an der sekundären Kathode infolge von elektrischer Konzentrationsänderung, zweitens sekundäre lichterregende Kathodenstrahlen der Glimmschicht des selbständigen Längsstromes. In der Tat beobachtet man in diesem Falle an der Querkathode sekundäres Glimmlicht. Solange an die Querelektroden keine elektromotorische Kraft gelegt ist, sind sie gleichmäßig in das bläuliche Licht der primären Glimmschicht gehüllt. Wird Spannung an sie gelegt, so entsteht um die Querkathode ein dunkler Raum, an dessen Grenze wird das bläuliche Leuchten verstärkt (sekundäre Glimmschicht), unter günstigen Bedingungen ist an der Oberfläche der Querkathode auch das gelbliche Leuchten einer sekundären ersten Kathodenschicht wahrzunehmen. An der Queranode wird die Verteilung der Leuchtintensität durch Anlegen einer Spannungsdifferenz nicht geändert. Fig. 1 gibt von dem Vorstehenden eine Anschauung.

Der primäre Glimmstrom muß stetig sein. Die Spannungsdifferenz der Querelektroden kann kleiner als der normale Kathodenfall des primären Glimmstromes sein; bei nachstehenden Versuchen lag sie zwischen 10 und 160 Volt; sie wurde kleinen wohlisolierten Akkumulatoren entnommen. Als Querelektroden verwendet man zweckmäßig 0,5—1,5 mm dicke Drähte, die vorne auf einer Länge von 7—10 mm breitgeklopft sind und in Glasröhrchen stecken (Fig. 2); sie werden mit ihrer Ebene senkrecht zu den Linien des primären Glimmstromes gestellt.

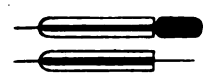


Fig. 2.

Über die Farbe des sekundären Glimmlichtes ist folgendes zu sagen. Wird der Raum um die Querkathode bei Abwesenheit der Querspannung von dem Lichtgemisch reinen und rötlichen Blaus erfüllt, das die primäre Glimmschicht zeigt, so bleibt bei Anlegen der Querspannung im entstehenden sekundären Dunkelraum das schwache rein blaue Leuchten zurück, wie es auch der primäre Dunkelraum zeigt; das rötliche Blau verschwindet aus dem sekundären Dunkelraum und konzentriert sich an seiner Grenze, die sekundäre negative Glimmschicht bildend. Ist an der Querkathode eine sekundäre erste Kathodenschicht wahrnehmbar, so zeigt sie dieselbe Farbe wie im primären Glimmlicht.

§ 4. *Sekundärer Kathodenfall.* — Reicht im primären Glimmstrom die negative Glimmschicht bis zur Anode, so ist der Kathodenfall, die Spannungsdifferenz zwischen Kathode und Anfang der negativen Glimmschicht, nahezu gleich der ganzen Elektrodenspannung. Da die Queranode auch von der stark ionisierten negativen Glimmschicht berührt wird, so ist für den *sekundären Kathodenfall*, der auf dem sekundären Dunkelraum liegenden Spannungsdifferenz, das gleiche zu erwarten.

Um dies zu prüfen, wurde einerseits die ganze Spannung zwischen den Querelektroden, andererseits der sekundäre Kathodenfall mit Hilfe einer Sonde bestimmt. Wie die nachstehende Tabelle zeigt, *ist an der Querkathode im sekundären Dunkelraum ein großer Spannungsabfall vorhanden*; *der sekundäre Kathodenfall ist nur wenig kleiner als die ganze Spannungsdifferenz zwischen den Querelektroden.*

Tabelle I.

Querstrom-stärke in Mikroamp.	Sekundäre Elektroden-spannung	Sekundärer Kathodenfall	Bemerkungen
140	87,5	84,5	Querstrom im Anfang der primären Glimmschicht
160	103,2	99,4	
175	118,5	115,5	
195	136,5	135	
50	90	87,5	Querstrom im Ende der primären Glimmschicht
55	106	103,2	
60	122	117,5	
65	139	134,0	

Wie beim primären Glimmstrom und den übrigen Strömen durch ein ionisiertes Gas ist bei gleicher Stromstärke der Kathodenfall um so größer oder bei gleichem Kathodenfall die Stromstärke um so kleiner, je kleiner die Kathodenoberfläche ist. Dies ist auch bei dem Querstrom der Fall. Bei 40 Volt Kathodenfall war für eine bis auf 3 mm nicht mit Glas bedeckte Kathode die Stromstärke $240 . 10^{-7}$ Amp., für eine nur bis auf 0,5 mm freie Kathode $18 . 10^{-7}$ Amp.

Der große Spannungsabfall im sekundären Dunkelraum wird durch zwei Ursachen bedingt. Erstens wird durch die elektrische Konzentrationsänderung die Zahl der positiven und negativen Ionen in ihm verkleinert. Zweitens wird durch den hierdurch bedingten Spannungsabfall ein Teil der sekundären stark ionisierenden Kathodenstrahlen am Eindringen in den sekundären Dunkelraum und damit an der Ionisierung hierin gehindert (§ 6); hierdurch wird der Spannungsabfall noch weiter gesteigert.

§ 5. *Länge des sekundären Dunkelraumes.* — Wie beim primären Kathodendunkelraum so sei auch als Länge des sekundären Dunkelraumes der Abstand des Anfanges der negativen Glimmschicht von der Kathode gerechnet. Die nachfolgenden Messungen des sekundären Kathodendunkelraumes wurden mit Hilfe eines Kathetometers an einer Querkathode, wie sie Fig. 2 zeigt, ausgeführt. Sie sind nur bis auf 10 Proz. genau; wegen der geringen Lichtintensität ist eine größere Genauigkeit nicht möglich. Wie aus Fig. 1 zu ersehen ist,

besitzt der sekundäre Dunkelraum auf der nach der primären Kathode sehenden Seite eine kleinere Länge (d_k) als auf der abgewandten Seite (d_a).

Wie die Tab. II und III ersehen lassen, *nimmt die Länge des sekundären Dunkelraumes ab mit zunehmender primärer Stromstärke; sie ist um so kleiner, je größer die Ionisation in der Nähe der Querkathode ist.*

Tabelle II.

p = 0,42 mm. Sekundärer Kathodenfall 156 Volt.

Primäre Stromstärke	Primärer Kathodenfall	Primärer Dunkelraum	Sekundäre Stromstärke	Sekundärer Dunkelraum	
				d_k	d_a
$2{,}7 \cdot 10^{-3}$	500	5,3 mm	$375 \cdot 10^{-6}$	2,2 mm	3,5 mm
3,6	540	5	475	1,9	2,8
5,1	610	4,5	685	1,8	2,1

Tabelle III.

p = 0,24 mm. Sekundärer Kathodenfall 156 Volt.

Primäre Stromstärke	Primärer Kathodenfall	Primärer Dunkelraum	Sekundäre Stromstärke	Sekundärer Dunkelraum	
				d_k	d_a
$0{,}9 \cdot 10^{-3}$	520	6,5 mm	$190 \cdot 10^{-6}$	1,6 mm	3,4 mm
2,3	630	6	505	1,3	3,1
3,1	680	5,8	635	1,2	2,7
4,3	770	5,7	915	1,1	2,4

Die Abhängigkeit der Länge des sekundären Dunkelraumes von der Ionisation bei gleichem Gasdruck und gleicher primärer Stromstärke zeigt sich auch in folgenden Erscheinungen. Auf der nach der primären Kathode schauenden Seite der Querkathode ist der sekundäre Dunkelraum länger als auf der entgegengesetzten Seite, weil hier die Ionisation kleiner ist als dort. Ferner ist auf beiden Seiten der Querkathode der sekundäre Dunkelraum um so länger, je weiter die Querelektroden von dem Anfang der negativen Glimmschicht entfernt sind. So war bei 156 Volt sekundärem Kathodenfall,

$4{,}3 \cdot 10^{-3}$ Amp. primärer Stromstärke bei 0,24 mm Druck im Anfang der primären Glimmschicht $i = 915 \cdot 10^{-6}$ Amp., $d_k + d_a = 3{,}5$ mm; im Ende der Glimmschicht $i = 265 \cdot 10^{-6}$ Amp., $d_k + d_a = 6{,}6$ mm.

Die Länge des sekundären Dunkelraumes ist weiter unter sonst gleichen Umständen um so größer, je größer der sekundäre Kathodenfall und damit auch die sekundäre Stromstärke ist. Dies zeigt die nachstehende Tabelle.

Tabelle IV.

p = 0,24 mm. Primäre Stromstärke $4{,}3 \cdot 10^{-3}$ Amp.

Sekundärer Kathodenfall	Sekundäre Stromstärke	Sekundärer Dunkelraum	
		d_k	d_a
20	$85 \cdot 10^{-6}$	0.5 mm	1,5 mm
40	117	0,9	2,3
80	175	1,6	2,8
120	225	2,7	3,3
157	265	3,2	3,4

§ 6. *Folgerungen, Erklärung der Dunkelraumgrenze.* — Aus der oben festgestellten Tatsache, daß die Spannungsdifferenz zwischen Querelektroden in einem Gas, das durch Kathodenstrahlen ionisiert wird, fast ausschließlich als Kathodenfall im sekundären Dunkelraum auftritt, lassen sich wichtige Folgerungen ziehen.

1. Läßt man Kathodenstrahlen zwischen zwei Querelektroden, die auf einer gewissen Spannungsdifferenz gehalten sind, verlaufen, so darf man nur dann eine Ablenkung erwarten, wenn der sekundäre Dunkelraum durch das Kathodenstrahlenbündel hindurch bis zur Queranode reicht. In der Tat erfuhren in den obigen Versuchen nur diejenigen primären Kathodenstrahlen eine Ablenkung, welche den sekundären Dunkelraum durchliefen.

2. Das Auftreten des sekundären Dunkelraumes bei schon kleinem Kathodenfall läßt sich ungezwungen erklären, wenn man annimmt, daß das weißlich blaue Leuchten der negativen Glimmschicht von langsamen sekundären Strahlen erzeugt wird. Diese werden durch den sekundären Kathodenfall aus der unmittelbaren Umgebung der Kathode weggelenkt und in der

sekundären Glimmschicht zusammengedrängt. Darum tritt hier eine Verstärkung, dort eine Verminderung der Leuchtintensität ein. Da nach Goldsteins Beobachtungen die sekundären Kathodenstrahlen in der Tat das weißlich blaue Leuchten verursachen, *so ist das Auftreten des sekundären Dunkelraumes umgekehrt ein Beweis dafür, daß von den sekundären Kathodenstrahlen der negativen Glimmschicht des Glimmstromes eine beträchtliche Anzahl eine kleine Geschwindigkeit von 10—100 Volt besitzt.*

3. Nachdem dies festgestellt ist, hat die Erklärung der primären Dunkelraumgrenze auch keine Schwierigkeit mehr. Das weißlich blaue Leuchten der primären negativen Glimmschicht wird erzeugt durch die langsamen sekundären Strahlen. Diese können in das die Kathode umgebende Gebiet nicht eindringen, da hier der Spannungsabfall groß ist, und zwar genügt wegen der Kleinheit der Geschwindigkeit schon ein kleiner

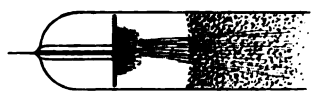


Fig. 3.

Fig. 4.

Teil des großen primären Kathodenfalles, um sie wegzulenken. *Da die sekundären Strahlen in das Gebiet großen Spannungsabfalles nicht eindringen können, so zeigt dieses nicht das von ihnen hervorgebrachte weißlich blaue Leuchten, sondern nur das sehr schwache rein blaue Leuchten, herrührend von den primären Strahlen.* Daß die Dunkelraumgrenze nicht direkt mit den primären Kathodenstrahlen zusammenhängt, lehrt auch folgende Beobachtung. Bei niedrigen Drucken geht an einer eng von der Glaswand umschlossenen Kathode nur von der Mitte der Kathode ein dünnes etwas divergentes primäres Kathodenstrahlbündel aus (Fig. 3). Gleichwohl erfüllt der Kathodendunkelraum und die negative Glimmschicht den ganzen Querschnitt der Röhre dank dem Kathodenfall und den diffusen sekundären Strahlen.

Liegt der sekundäre Dunkelraum gerade im Anfang der primären negativen Glimmschicht, so wird da, wo primärer und sekundärer Dunkelraum sich berühren, ein kleines Gebiet von geringem Spannungsabfall geschaffen; in dieses können darum die sekundären Strahlen der negativen Glimmschicht eindringen (Fig. 4).

II. Erste Kathodenschicht, Länge des primären Dunkelraumes.

§ 7. *Problemstellung, Erklärungshypothesen.* — Im vorstehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß großer Spannungsabfall und kleine Geschwindigkeit der sekundären Strahlen in ihrem Zusammenwirken überhaupt einen Dunkelraum um die Kathode bedingen. Es bleiben nun noch zwei Fragen bezüglich des negativen Glimmlichtes zu beantworten.

1. Wodurch wird die Länge des primären Dunkelraumes bestimmt? Diese Frage soll wenigstens für den einfachen Fall des normalen Kathodenfalles der Beantwortung näher gerückt werden.

2. Welche Rolle spielt im elektrischen Mechanismus des primären Glimmlichtes die erste Kathodenschicht? Die Beantwortung dieser Frage schließt die Antwort auf eine andere Frage in sich. Woher kommen die negativen Ionen an der Kathode des Glimmstromes, aus dem Gas oder aus der Kathode?

Wie schon bemerkt wurde, herrscht nahezu allgemeine Übereinstimmung darüber, daß die Energiequelle für das gelbliche Leuchten der ersten Kathodenschicht die kinetische Energie der auf die Kathode zulaufenden positiven Strahlen ist. Befindet sich in der Kathode ein Kanal, so setzt sich das gelbliche Leuchten durch diesen hindurch hinter die Kathode fort, und hier zeigen seine Erreger nach W. Wiens Versuchen das Verhalten von positiv geladenen Teilchen. Man weiß ferner, daß die positiven Strahlen das Gas hinter der Kathode durch ihren Stoß zu ionisieren vermögen. Da sie im Kanal und hinter der Kathode keinen Geschwindigkeitszuwachs mehr erfahren, so ist es als sichere Tatsache zu betrachten, daß *die positiven Strahlen auch unmittelbar an der Kathodenoberfläche die von ihnen getroffenen Gasteilchen zu ionisieren vermögen.*

Daß die Länge des primären Dunkelraumes nichts mit der freien Weglänge der neutralen Gasmoleküle zu tun hat, ist theoretisch zu erwarten und ist auch experimentell festgestellt worden. Man begegnet vielfach der Meinung, daß die Dunkelraumlänge die freie Weglänge der von der Kathode ausgehenden negativen Elektronionen darstelle. Auch diese Meinung ist irrig. Zwar ist die primäre Dunkelraumlänge eine

untere Grenze der mittleren freien Weglänge der primären Kathodenstrahlen; der größte Teil von diesen durchläuft den Dunkelraum frei. In Wirklichkeit ist aber die mittlere freie Weglänge der primären Kathodenstrahlen größer als die Länge des Dunkelraumes; bei niedrigen Drucken liegt nämlich das Maximum des rein blauen Leuchtens, das von den primären Strahlen erregt wird, nicht im Anfang der negativen Glimmschicht, sondern hat eine viel größere Entfernung von der Kathode. Von dem Verfasser ist an verschiedenen Stellen [1]) die Ansicht vertreten worden, daß die Länge des primären Dunkelraumes, wenigstens bei normalem Kathodenfall, die mittlere freie Weglänge der positiven Ionen darstelle, welche vom Anfang der negativen Glimmschicht bis zur Kathodenoberfläche den Kathodenfall frei durchlaufen haben. Diese Ansicht soll im Nachstehenden einer Prüfung unterzogen werden.

Bezüglich der Herkunft der negativen Ionen an der Kathode des Glimmstromes stehen sich zwei Meinungen gegenüber. Allgemein verbreitet ist die Meinung, daß die negativen Elektronionen, welche als Kathodenstrahlen von der Kathode weg in die negative Glimmschicht laufen, direkt aus der Kathode herauskommen. Die zweite Meinung, die vom Verfasser mehrfach ausgesprochen worden ist, gibt zunächst zu, daß positive Gasionen dicht an die Kathodenoberfläche herantreten, aus ihr negative Elektronen an sich nehmen und so neutral werden; diejenigen negativen Elektronionen dagegen, welche von der elektrischen Kraft getrieben von der Kathode wegströmen, läßt die zweite Meinung nicht direkt aus der Kathode selbst, sondern aus der unmittelbar an dieser liegenden Gasschicht kommen, hier läßt sie sie erst aus neutralen Molekülen durch den ionisierenden Stoß der positiven Ionen entstehen. Für beide Ansichten ist das Auftreten der negativen Elektronionen im Gas unmittelbar an der Kathodenoberfläche an die Bedingung einer Arbeitsleistung geknüpft. Im ersten Falle muß eine Elektrisierungsarbeit (El. i. G. p. 99, 375) entgegen der Kontaktkraft in der Grenzfläche Kathode-Gas ge-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. p. 432. 1902; 3. p. 403. 1902; El. i. G. p. 67.

leistet werden; nach Richardson[1]) ist diese Kontaktenergie für Kohle 6,1, für Platin 4,1 Volt. Im zweiten Falle muß eine Ionisierungsarbeit (El. i. G. p. 37) bei der Zerlegung eines neutralen Moleküls in ein Ionenpaar geleistet werden. Die Tatsache, daß der Kathodenfall des Glimmstromes nicht unter einen bestimmten Minimalwert sinken darf, wenn der Glimmstrom selbständig existieren soll, erklären beide Ansichten zunächst gleich gut. Beide können *jenen Minimalwert, den normalen Kathodenfall, als das Minimum von Spannungsdifferenz ansprechen, welches die positiven Ionen von der negativen Glimmschicht ab frei durchlaufen müssen, um im Gas unmittelbar an der Kathode das Auftreten negativer Elektronionen zu bewirken, im ersten Fall durch Elektrisierung, im zweiten durch Ionisierung.* Für die Elektrisierungshypothese ist die erste Kathodenschicht lediglich eine sekundäre Begleiterscheinung; für die Ionisierungshypothese ist dagegen die erste Kathodenschicht ein unentbehrliches Glied für den Mechanismus der elektrischen Strömung im primären Glimmlicht. Für die erste Hypothese kann die mittlere freie Weglänge der positiven Ionen größer sein als die Länge des primären Dunkelraumes; nach der zweiten Hypothese dagegen muß bei normalem Kathodenfall das Ende der mittleren freien Weglänge der von der Glimmschicht ausgehenden Ionen in der ersten Kathodenschicht im Gas unmittelbar an der Kathodenoberfläche liegen.

§ 8. *Die erste Kathodenschicht im sekundären Glimmlicht.* — Die erste gelblich leuchtende Kathodenschicht ist im sekundären Glimmlicht nur *bei höherem Druck* sichtbar; es ist dann schon bei etwa 100 Volt sekundärem Kathodenfall eine Andeutung von ihr wahrnehmbar; ihre Intensität wächst mit zunehmendem sekundärem Kathodenfall. Ist dieser gleich dem normalen Kathodenfall geworden, so kann der Querstrom zwischen nahen Querelektroden als selbständiger Glimmstrom weiter existieren, auch wenn der primäre Glimmstrom unterbrochen wird; das sekundäre Glimmlicht ist primär geworden; dies ist indessen solange nicht möglich, als der sekundäre Kathodenfall kleiner als der normale ist.

Läßt man nun den selbständigen Querglimmstrom für

1) O. W. Richardson, Phil. Trans. **201.** p. 497. 1903.

sich ohne Längsstrom existieren, läßt man ihn dann in der negativen Glimmschicht des Längsstromes sich ausbilden, so beobachtet man folgendes. *Die Länge des primär gewordenen Dunkelraumes des Querstromes ist innerhalb der negativen Glimmschicht des Längsstromes beträchtlich kürzer als bei Abwesenheit des Längsstromes; die Leuchtintensität der ersten Kathodenschicht ist im zweiten Falle größer als im ersten, trotzdem in diesem die Stromstärke größer ist.* Diese Erscheinung erklärt sich daraus, daß *eine Verkürzung des Dunkelraumes bei konstantem Kathodenfall und konstantem Gasdruck, also bei konstanter mittlerer freier Weglänge der positiven Ionen diese zum größten Teile die Kathodenoberfläche erreichen, ohne zuvor auf Gasmoleküle gestoßen zu sein.*

Unter diesem Gesichtspunkt ist weiter folgende Beobachtung zu verstehen. *Ist der Gasdruck so klein, daß der Dunkelraum an der Querkathode, wenn er sich bei Abwesenheit des Längsstromes ausbilden könnte, die Röhrenwände erreichen würde, so kann der Querstrom trotz Anwendung einer den normalen Kathodenfall übertreffenden Elektrodenspannung nicht mehr selbständig existieren; er stellt sich indessen als unselbständig in beträchtlicher Stärke bei Erregung der Glimmschicht des Längsstromes her und besitzt dann ein sekundäres Glimmlicht, aber nunmehr ohne erste Kathodenschicht.* Die mittlere freie Weglänge der positiven Ionen im sekundären Dunkelraum ist nunmehr so vielmal größer als dessen Länge, daß an der Oberfläche der Querkathode so gut wie keine Gasmoleküle mehr von den positiven Strahlen getroffen werden. Obwohl dann die Bedingung erfüllt ist, daß der Kathodenfall größer als normal sei, erlischt der Querstrom bei Unterbrechung des Längsstromes; es wird wohl die Kathodenoberfläche, aber es werden nicht mehr die Moleküle der anliegenden Gasschicht von den positiven Strahlen getroffen, es fehlt die erste Kathodenschicht.

Zum Belege der vorstehenden Beobachtungen diene die nachstehende Tabelle, die an Aluminiumelektroden in Stickstoff erhalten wurde. In ihr bezeichnet d_0 die Länge des Dunkelraumes an der Querkathode bei Abwesenheit des Längsstromes, d_k und d_a diejenige bei Anwesenheit auf der kathodischen bez. anodischen Seite. Die Spannungsdifferenz zwischen den Querelektroden betrug 320 Volt. Die Länge des Dunkel-

raumes des primären Längsstromes ist als Maß für den Gasdruck beigesetzt, dieser ist ihr nämlich angenähert umgekehrt proportional.

Tabelle V.

Sekundärer Kathodenfall 320 Volt.

Primärer Dunkelraum mm	Sekund. Stromstärke	Sekundärer Dunkelraum			Erste Kathodenschicht	Lage des Querstromes in der Glimmschicht
		d_o	d_k	d_a		
—	$12 . 10^{-4}$	2,5	—	—	Sichtbar	Anfang
2,5	16	—	2,3	2,3	„	„
—	0,5	8	—	—	Sichtbar	Anfang
5	25	—	2	3	Nicht sichtbar	„
5	12	—	3	6,5	Auf d_a sichtbar	Ende
7	26	—	2	4	Nicht sichtbar	Anfang
13	4	—	6	10	Auf d_a angedeutet	Mitte

§ 9. *Langsame Kanalstrahlen.* — Bis jetzt kannte man nur Kanalstrahlen, deren Geschwindigkeit größer als der normale Kathodenfall war; dies kam daher, daß man sie immer mit Hilfe des selbständigen Glimmstromes herstellte, dessen Kathodenfall nicht unter den Normalwert sinken kann. Nach dem vorstehenden Paragraphen sind bei höherem Gasdruck auch im sekundären Dunkelraum Kanalstrahlen vorhanden, wie das Auftreten der ersten Kathodenschicht beweist. Wenn sie bei niedrigem Druck an der Querkathode das gelbliche Leuchten des Gases nicht hervorrufen, so liegt dies bloß daran, daß sie infolge der Verkürzung des Dunkelraumes nicht im Gas, sondern an der Kathodenoberfläche zur Absorption kommen. Ist diese Überlegung richtig, so müssen sie ihre Existenz durch das gelbliche Leuchten des Gases verraten, sowie man sie durch Kanäle in der Querkathode hinter dieser im Gase verlaufen läßt.

Zur Prüfung dieser Folgerung wurden zwei Arten von durchlöcherten Querelektroden verwendet. Wie Fig. 5 zeigt, wurde ein dünnes Glasrohr vorne mit einer ein- oder mehrfach durchlöcherten Messingscheibe verschlossen, an die ein Zuleitungsdraht angelötet war. Das Glasröhrchen wurde in einer

seitlichen Ansatzröhre der zylindrischen Glimmstromröhre befestigt. Als zweite Elektrodenart wurden aus dünnem Aluminiumblech Röhren hergestellt, deren Seitenwände wie in Fig. 6 geschlitzt, deren Böden mit kleinen zahlreichen Löchern versehen waren; ihr Inneres war auf diese Weise vor elektrischen Kraftlinien geschützt; sie wurden in seitlichen Ansatzröhrchen eng anliegend befestigt. Mit beiden Elektrodenarten, besonders aber mit der zweiten lassen sich ohne Schwierigkeit folgende Resultate erhalten.

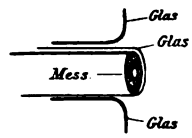


Fig. 5.

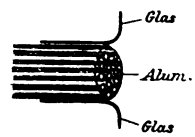


Fig. 6.

In dem Gasraum hinter durchlöcherten Querkathoden tritt das gelbliche Leuchten der Kanalstrahlen deutlich sichtbar bei Erzeugung des sekundären Dunkelraumes auf, und zwar auch wenn es an der Vorderseite der Querkathode nur schwach oder gar nicht wahrnehmbar ist. Diese so hinter die Oberfläche der Querkathode verlegte erste Kathodenschicht ist immer mehrfach länger als der sekundäre Dunkelraum, sie leuchtet um so intensiver, je größer der sekundäre Kathodenfall und die Querstromstärke ist.

Tabelle VI.

Sekundärer Kathodenfall 310 Volt.

Sekund. Stromstärke	Gasdruck mm	Prim. Dunkelraum mm	Sekund. Dunkelraum mm	Erste Kathodenschicht vor Kath.	Erste Kathodenschicht hinter Kath.	Bemerkungen
$55 . 10^{-6}$	0,55	—	6	1,5	5	Längsstrom unterbr.
360	0,55	2,5	3	0,8	20	„ geschl.
—	0,19	—	—	—	—	„ unterbr.
360	0,19	7,5	4	0,1	25	Längsstrom geschl., Glimmschichtanfang
100	0,19	7,5	5	2	23	Längsstrom geschl., Glimmschichtende
75	0,07	20	4	0,1	30	Längsstrom geschl.
—	0,07	—	—	—	—	„ unterbr.

Mittels der vorstehenden Methode lassen sich schon Kanalstrahlen von kleiner Geschwindigkeit (über 50 Volt) aus dem Kraftfeld der erzeugenden Strömung heraus in einen kräftefreien Gasraum leiten. Wie die nachstehende Tabelle zeigt, nimmt bei angenähert konstanter Stromstärke die Intensität des gelblichen Leuchtens rasch mit der Geschwindigkeit der erzeugenden Kanalstrahlen ab.

Tabelle VII.

p = 0,19 mm.

Sekundärer Kathodenfall	Sekundäre Stromstärke	Intensität des gelblichen Leuchtens hinter Querkathode
194 Volt	$250 \cdot 10^{-6}$	Intensives Leuchten
116	230	Noch ziemlich intensiv
80	200	Schwach

Daß übrigens Kanalstrahlen bereits bei einer Geschwindigkeit, welche kleiner ist als der normale Kathodenfall, das gelbliche Leuchten erregen können, ist daraus zu folgern, daß im selbständigen Glimmstrom bei niedrigem Druck und normalem Kathodenfall das gelbliche Licht der ersten Kathodenschicht bereits in einem Abstand von der Kathode auftritt, bis zu welchem (gerechnet von der negativen Glimmschicht) die positiven Ionen erst einen Teil des Kathodenfalles durchlaufen haben können.

§ 10. *Primärer Dunkelraum, Herkunft der negativen Ionen an der Glimmstromkathode.* — Die nachfolgenden Ausführungen über die Länge des primären Dunkelraumes beziehen sich lediglich auf den einfachen Fall des normalen Kathodenfalles.

Der einen Kanal der Glimmstromkathode passierende Teil der positiven Strahlen (Kanalstrahlen) würde bei Abwesenheit des Kanals die Oberfläche der Kathode treffen. Andererseits tritt schon in einigem Abstand von der Kathode im Gase gelbliches Leuchten auf, hat also Zusammenstoß positiver Strahlen mit neutralen Gasteilchen statt. Hieraus geht hervor, daß im primären negativen Glimmlicht die von der Glimmschicht ausgehenden Strahlen zum Teil an den Gasteilchen der ersten Kathodenschicht, zum Teil an der Kathodenoberfläche ein Ende ihrer freien Weglänge finden.

Nun wissen wir weiter, daß der Glimmstrom ohne die erste Kathodenschicht nicht existieren kann; nur der unselbständige Querstrom hat sie nicht notwendig. Wir müssen es daher für wahrscheinlich halten, daß *im Anfang der ersten Kathodenschicht des Glimmstromes Ionisierung des Gases durch die positiven Strahlen erfolgt und daß somit die Länge des primären Dunkelraumes die mittlere freie Weglänge der positiven Ionen unter den gegebenen Umständen (Spannungsabfall, Gasdichte, Stromdichte)* darstellt. Nach dieser Vorstellung wächst an der Kathode der Spannungsabfall solange, bis er gleich dem normalen Kathodenfall geworden ist; gleichzeitig wächst auch das Gebiet großen Spannungsabfalles, die Länge des Dunkelraumes solange, bis diese gleich der mittleren freien Weglänge der positiven Ionen geworden ist. Sowie diese Bedingungen erfüllt sind, erfolgt Ionisierung des Gases an der Kathodenoberfläche, der selbständige Glimmstrom ist entstanden.

Dieser Vorstellung scheint die Beobachtung Schwierigkeiten zu machen, daß das gelbliche Leuchten der ersten Kathodenschicht sich nicht auf eine sehr dünne Gasschicht an der Kathodenoberfläche beschränkt, sondern schon in einigem Abstand von der Kathode auftritt. Indes ist zu beachten, daß das gelbliche Leuchten nicht notwendig von Ionisierung begleitet zu sein braucht. Es ist wahrscheinlich, daß nicht in allen Teilen der ersten Kathodenschicht Ionisierung durch die positiven Strahlen statt hat, sondern nur in der unmittelbar an der Kathodenoberfläche liegenden Teilschicht.

§ 11. *Strömungen mit negativen Elektronionen aus der Kathode.* — Der selbständige Glimmstrom ist als solcher dadurch charakterisiert, daß sein negatives Glimmlicht aus den drei bekannten Schichten besteht und daß sein Kathodenfall nicht unter den Normalwert sinken kann; dieser ist von Gasdruck und Stromstärke und bis zur Hellrotglut auch von der Temperatur unabhängig. Nur für diesen selbständigen Glimmstrom gelten die vorstehenden Ausführungen über Dunkelraumlänge und Herkunft der negativen Elektronionen an der Kathode.

Es sei ausdrücklich betont, daß die Länge des sekundären Dunkelraumes nichts mit der freien Weglänge der positiven Ionen zu tun hat. Und um Mißverständnisse zu vermeiden, sei zum Schlusse auf Fälle hingewiesen, in denen die

Strömung in einem Gas an der Kathode ihre negativen Elektronionen in der Tat aus dieser und nicht aus dem Gas erhält.

Der Lichtbogen ist ebenfalls eine selbständige Strömung wie der Glimmstrom; bei ihm kommen indes die negativen Ionen an der Kathode ausschließlich aus dieser; seine Existenzbedingung ist, daß die Strombasis an der Kathode eine so hohe Temperatur unter dem Stoß auftreffender positiver Ionen annimmt, daß intensive Ausstrahlung negativer Elektronen erfolgt.[1])

Im lichtelektrischen Strom werden durch die sekundäre Elektrisierungsarbeit des auffallenden Lichtes die negativen Elektronionen aus der Kathode gewonnen; er ist unselbständig und würde bei größerer Stromdichte und genügend großem Kathodenfall, wenn das Leuchten des Gases wahrnehmbar würde, ein sekundäres Glimmlicht mit erster Kathodenschicht, Dunkelraum und Glimmschicht zeigen. Aber die Dunkelraumlänge würde in diesem Fall nichts mit den positiven Ionen zu tun haben.

Im Lichtbogen als selbständiger Strömung wird die hohe Temperatur der Kathode primär durch die Strömung selbst geschaffen. Man kann auch durch sekundäre Erwärmung einer Kathode sie zur Ausstrahlung negativer Elektronionen bringen und so eine unselbständige Strömung gewinnen. Bei genügend großem Kathodenfall werden die von der Kathode ausgehenden negativen Elektronionen das Gas ionisieren und zum Leuchten bringen[2]) und sekundäre Strahlen erzeugen. Es sind dann auch in diesem Falle die Bedingungen für die Bildung sekundären Glimmlichtes vorhanden. Aber nichtsdestoweniger wird diese Strömung nicht identisch sein mit dem oben charakterisierten selbständigen Glimmstrom, sie wird erlöschen, wenn die Kathode sekundär nicht mehr erwärmt wird; ihr Kathodenfall wird keinen Normalwert besitzen und außerdem von der Temperatur abhängen.

Göttingen, Oktober 1903.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 673. 1903.
2) A. Wehnelt, Ber. d. Deutschen Physik. Ges. 5. p. 255. 1903.

(Eingegangen 25. Oktober 1903.)

9. *Über den Einfluß von Kathodenstrahlen auf feste Isolatoren; von A. Becker.*

In einer früheren Arbeit[1]) ist nachgewiesen worden, daß feste Isolatoren unter der Einwirkung von Radiumstrahlen eine kleine Leitfähigkeit annehmen, und zwar bestand die Wahrscheinlichkeit, daß dieselbe den vorhandenen Kathodenstrahlen zuzuschreiben wäre. Es mußte deshalb von Interesse sein, eine ähnliche Wirkung direkt für die mit Hilfe einer Entladungsröhre erzeugten Kathodenstrahlen nachzuweisen. Zugleich sollte eine Grundlage gewonnen werden für eine vorteilhafte Methode der elektrometrischen Intensitätsmessung von Kathodenstrahlen in Gasen, die unabhängig wäre von der gleichzeitigen Leitfähigkeit derselben. Bisher waren einwandsfreie Intensitätsmessungen in Gasen von gewöhnlichem Druck nur durch Phosphoreszenzschirme möglich, während man sich für elektrometrische Messungen auf stark verdünnte Gase beschränken mußte und trotzdem noch mit Fehlerquellen zu rechnen hatte. Es wird sich zeigen, daß für schnelle Kathodenstrahlen kleine Kondensatorplatten von Vorteil sind, die mit einer äußerst dünnen Schicht eines festen Isolators bedeckt und durch eine darübergelegte geerdete Aluminiumfolie gegen elektrische Störungen geschützt sind.[2]) Fallen Kathodenstrahlen auf, so durchdringen sie die Aluminiumbelegung und werden vom Isolator teilweise absorbiert, teilweise durchgelassen. Der letztere Teil wird dann vollkommen, der erstere infolge seiner Influenzwirkung durch das mit der Kondensatorplatte verbundene Elektrometer gemessen, vorausgesetzt, daß der Isolator nicht in derselben Weise wie Gase einen Teil der sich ansammelnden Elektrizität durch Leitendwerden fortführt. Mit Rücksicht auf die im Vergleich mit den Radiumstrahlen bedeutend größere Intensität reiner Kathodenstrahlung schien letzteres nicht ausgeschlossen. Ich habe deshalb diesen Ein-

1) A. Becker, Ann. d. Phys. **12.** p. 124. 1903.
2) Vgl. P. Lenard, Wied. Ann. **64.** p. 288. 1898.

fluß der Kathodenstrahlen unter möglichst variablen Bedingungen untersucht und gefunden, daß der Isolator in der Tat ein Leitvermögen annimmt, daß dasselbe mit zunehmender Strahlintensität und abnehmender Dicke des Isolators wächst, daß es aber in den meisten Fällen so klein ist, daß dadurch die gemessenen Intensitäten nur um Stromstärken von etwa 10^{-18} Amp. unrichtig werden könnten. Als Isolator benutzte ich ausschließlich Paraffin, weil dessen Eigenschaften sowohl die Herstellung fehlerfreier Kondensatoren als auch die elektrischen Messungen erleichterten. Die Beobachtungen selbst waren mancherlei Schwierigkeiten ausgesetzt, hervorgerufen teils durch die manchmal ungenügende Konstanz der Strahlgeschwindigkeit, teils durch die große Absorption der Strahlung in festen Medien und durch den Umstand, daß die Strahlen beträchtliche Mengen negativer Elektrizität mit sich führen, wodurch die gesuchten Erscheinungen leicht modifiziert werden konnten.

I. Der Kondensator in Luft und Wasserstoff.

1. Das zu untersuchende Dielektrikum bildet die Zwischenschicht eines kleinen, geeigneten Kondensators, der in beistehender Fig. 1 dargestellt ist. Auf die eine Öffnung eines 7—10 cm langen Messingrohrstückes ist durch Siegellack isoliert eine 0,15 cm dicke, 2 cm breite runde Aluminiumscheibe gekittet, welche durch einen angelöteten Aluminiumdraht in der Achse des Rohres mit einem Quadrantelektrometer verbunden ist. Diese an der Oberfläche fein polierte Scheibe ist vollkommen mit einer dünnen Paraffinschicht bedeckt, auf welche dann ein dünnes lochfreies Aluminiumblättchen fest anliegend aufgedrückt wurde. Auf dieses wieder ist ein mit zentraler Öffnung von 0,5 cm Durchmesser versehenes Stanniolblatt metallisch berührend aufgeklebt; dasselbe ist abschließend rund um den Kopf des Instrumentes herumgelegt und mit Hilfe eines blanken, herumgewickelten Kupferdrahtes, von der Metallröhre isoliert, festgehalten. Ferner ist über das Ganze eine kleine Messingkapsel mit 0,3 cm weitem, durch ein feinmaschiges Drahtnetz

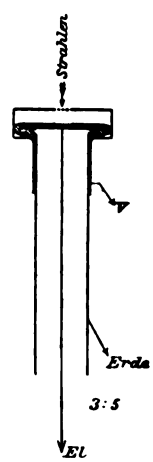


Fig. 1.

verschlossenem zentralen Loch gestülpt. Es kann dann Kapsel und Stanniol nebst der Aluminiumbelegung entweder mit Erde oder einer Stromquelle verbunden werden, während die Messingröhre dauernd abgeleitet bleibt.

2. Der Herstellung dieser Kondensatoren wurde die größte Sorgfalt gewidmet, weil selbst die kleinsten Fehler beträchtliche Störungen im Gefolge haben konnten. Zunächst mußte der Isolator gänzlich luftfrei sein und ohne Blase an den begrenzenden Metallbelegen haften. Es war dies mit Paraffin, das vorher einige Zeit auf dem Siedepunkt erhalten war, durch Aufgießen auf die warme Aluminiumscheibe erreichbar. Auch war es nach einiger Übung bald möglich, die Paraffinschicht in den gewünschten kleinen Dicken herzustellen, so daß ein Bruchteil der auffallenden Kathodenstrahlen noch in der Aluminiumscheibe elektrometrisch nachweisbar wurde, ohne daß die dielektrische Festigkeit kleiner gewesen wäre, als zur Anlegung einer Spannung bis etwa 130 Volt nötig war. Hierbei war Paraffin auch mit Rücksicht auf seine geringe natürliche Leitfähigkeit und seine geringere Rückstandsbildung vorzuziehen. Die zum Überdecken der Schicht benutzten Aluminiumblättchen waren im Dunkelzimmer vor einer hellen Auerlampe mit der Lupe auf Lochfreiheit untersucht und derart aufgeklebt, daß sie fest auf der Schicht hafteten, so daß alle Punkte der Paraffinoberfläche mit Metall in Berührung waren. Ein Auflegen der Blättchen auf die flüssige Paraffinschicht bewährte sich hierbei aber nicht, weil beim Erstarren notwendigerweise eine unregelmäßige Kontraktion auftrat, die nicht nur die Oberfläche uneben und sogar gefurcht erscheinen ließ, sondern auch das Auftreten kleiner Luftbläschen unter dem Aluminiumblättchen begünstigte. Ich verfuhr vielmehr in der Weise, daß ich das Blättchen auf ein ziemlich warmes seidenes Tuch legte und vorsichtig die glatte Oberfläche des Kondensators darauf drückte. Dadurch fand nur ein Weichwerden des Paraffins an der äußersten Oberfläche statt, so daß sich das Blättchen sehr genau jeder Stelle des Paraffins anschmiegen konnte. Es zeigte sich dies sowohl beim Abziehen des Aluminiums nach der Benutzung des Kondensators wie auch bei der elektrometrischen Prüfung, wie später noch ersichtlich sein wird.

3. Die Kathodenstrahlen wurden in einer Kathodenröhre bekannter Art erzeugt, bei der das Aluminiumfensterchen nicht aufgeklebt zu werden brauchte, sondern mit Hilfe einer am Ende eines in das Glas eingeschmolzenen Platinröhrchens befindlichen Messingverschraubung luftdicht auf eine 0,13 cm weite Öffnung aufgedrückt wurde. Es wurden sowohl mit einer 20plattigen Töplerschen Influenzmaschine als auch mit Hilfe eines großen Induktoriums Messungen ausgeführt. Die die Strahlen erzeugende Spannung wurde im ersten Fall mit einem angeschalteten Lord Kelvinschen elektrostatischen Voltmeter mit Vorschaltkondensator, im zweiten Fall durch eine parallel geschaltete Funkenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Durchmesser ermittelt. Dabei war die Verwendung möglichst hoher Spannungen notwendig, weil nur so merkliche Mengen von Kathodenstrahlen den Isolator noch durchdringen konnten, ohne vorher absorbiert zu werden. Der Benutzung höherer Potentiale als diejenigen, welche einer Schlagweite von 3,2 cm zwischen den Kugeln entsprechen, war durch die Rücksicht auf die Haltbarkeit der Röhre eine Grenze gesetzt. Es bewegten sich deshalb die Entladespannungen nur zwischen den Grenzen 20000 und ca. 40000 Volt.

4. Da es mir nicht möglich war, die strahlerzeugenden Apparate in metallische Schutzhüllen zu bringen, konnte die Beobachtung nicht in der Weise ausgeführt werden, daß ich den Kondensator unmittelbar vor das Fensterchen der Kathodenröhre brachte und bestrahlte, weil hierbei zahlreiche Fünkchen zwischen dem Messingkopf der Röhre und dem Kondensator übersprangen, die in einigen Fällen den Kondensator durchschlugen. Vielmehr war es notwendig, den Kondensator nebst allen Leitungen und dem vorderen Teil der Entladeröhre in gute metallische Kästchen einzuschließen, so daß die Versuchsanordnung schließlich die in Fig. 2 dargestellte wurde. K ist ein kleines Kästchen aus dickem Zinkblech, in dessen Innerem sich Aluminiumfensterchen und Kondensator auf etwa 1 cm Abstand gegenüberstehen; der Kondensator steckt außerdem in weiteren metallischen Hüllen, so daß äußere elektrische Kräfte vollständig abgeschirmt sind. Die Verwendung des Kästchens bietet den weiteren Vorteil, daß die Strahlen an Stelle von Luft auch andere Gase

durchlaufen können, wodurch die in den Kondensator eintretende Intensität geändert wird. Um dünne Metallblättchen oder einen abblendenden Schirm zwischen Fenster und Kondensator bringen zu können, ist das Kästchen durch einen in einer mit Flüssigkeit gefüllten Metallrinne stehenden Metalldeckel verschlossen.

5. Fallen Kathodenstrahlen vom Fenster auf das auf das Potential V geladene bedeckende Aluminiumblättchen des Kondensators, so wird in diesem eine beträchtliche Strömung auftreten, herrührend sowohl von den auftreffenden negativen Quanten als auch von der starken Leitfähigkeit des umgebenden Gases. Es war unter solchen Umständen denkbar, daß

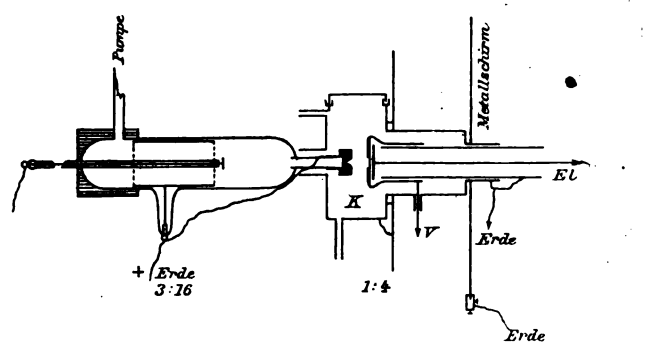


Fig. 2.

sich vielleicht kleine Flächenstückchen vornehmlich in der bestrahlten Mitte des Aluminiumblättchens von dem übrigen Metall loslösten und so Störungen hervorbringen könnten. Die Erfahrung hat indes längst gezeigt, daß die Strömung infolge auftreffender Quanten bei nicht zu lang dauernden Entladungen keine solche Störung verursacht — das Aluminiumfensterchen hält wochenlange Versuche gut aus —; ich habe deshalb nur den Einfluß einer starken Strömung im leitend gewordenen Gas auf das Aluminiumblättchen eliminiert, indem ich noch die bezeichnete Messingkapsel über den Kondensator stülpte, so daß nun kein elektrisches Feld mehr in der Umgebung des Aluminiums vorhanden war, weil die Kapsel dasselbe Potential besaß. Es war dadurch auch erreicht, daß jeweils die gleiche Menge negativer Elektrizität den Kondensator traf, ob

die Eintrittsöffnung frei oder abgeblendet war. Dadurch wurde also auch ein eventueller Einfluß der Entladungen auf die Konstanz des angelegten Potentials eliminiert. Daß ein solcher überhaupt nicht vorhanden war, folgt schon aus der Benutzung einer Akkumulatorenbatterie mit großer Kapazität und dicker Zuleitungsdrähte; auch zeigte ein gleichzeitig bei V angeschaltetes statisches Multicellularvoltmeter Lord Kelvins keinerlei Schwankungen.

— 6. Die Beobachtungen wurden zunächst in der Weise angestellt, daß ich die Influenzmaschine mit Hilfe eines kleinen Elektromotors in langsame Umdrehung versetzte und abwartete, bis die Entladungen in der Kathodenröhre ruhige geworden waren und das Voltmeter nur noch Schwankungen von etwa 500—1000 Volt anzeigte. Da ich nicht unter 20000 Volt Spannung verwandte, war die Erzielung jenes Zustandes mit den bei niedrigeren Spannungen sich geltend machenden Schwierigkeiten in noch weit höherem Maße verknüpft. Insbesondere traten häufig Lichtblitze an den Rohrwandungen auf, die das Vakuum auffallenderweise verbesserten. Da hierdurch leicht Störungen hervorgerufen werden konnten, mußte dies bei den eigentlichen Messungen vermieden werden. Dann wurde der Erdkontakt nach dem Elektrometer aufgehoben und noch eine volle Minute die Bestrahlung des Kondensators vorgenommen, während welcher alle 20 Sek. der Stand des Elektrometers an einer 1,50 m entfernten Skala mit Fernrohr und Spiegel abgelesen wurde. Danach unterbrach ich die Entladungen und beobachtete die Ausschläge noch weitere 100 Sek., um dann das Elektrometer wieder zur Erde zu leiten. Um mögliche Nachwirkungen zu finden, wurde der Erdkontakt nach einigen Minuten wieder aufgehoben und noch 100 Sek. die Ausschläge ohne Bestrahlung beobachtet. Es wurde dabei Wert darauf gelegt, daß immer nur Ausschläge von höchstens 2—3 cm oder 0,1 Volt zur Messung gelangten, um jede Störung durch Eindringen der Ladungen und Rückstandsbildungen in den für die Zuleitungen notwendigen Isolationen zu vermeiden. Mit solchen Vorsichtsmaßregeln war die Beobachtungsgenauigkeit so groß, daß die Fehler nicht 0,5 mm Ausschlag in 3 Min. oder $3 \cdot 10^{-15}$ Amp. überschritten. Einige Ablesungen, die ich z. B. mit einem *0,0686 cm dicken Paraffinkondensator* erhielt,

mögen zeigen, daß jede Störung durch direkte Wirkung umgebender elektrischer Kräfte abgeschirmt war.

Tabelle I.

Spannung am Kondensator 0 Volt.

Beobachtungszeit und Stand des Elektrometers						
mit Bestrahlung				Bestrahlung aufgehoben		
0 Sek.	20 Sek.	40 Sek.	60 Sek.	80 Sek.	120 Sek.	160 Sek.
Ohne Entladung. Kondensator mit 0,02 cm Aluminium bedeckt.						
cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
49,88	49,89	49,89	49,89	49,89	49,90	49,90
49,86	49,87	49,87	49,88	49,89	49,90	49,90
Ohne Entladung. Influenzmaschine läuft. Kondensator bedeckt.						
49,78	49,79	49,79	49,80	49,80	49,81	49,81
49,75	49,77	49,78	49,78	49,79	49,80	49,80
Entladung. Kondensator mit 0,02 cm Aluminium bedeckt.						
49,45	49,46	49,47	49,47	49,50	49,50	49,50
49,50	49,51	49,51	49,52	49,55	49,55	49,56
Entladung. Kondensator mit 0,00041 cm Aluminium bedeckt.						
49,30	49,30	49,30	49,31	49,31	49,32	49,34
49,32	49,33	49,33	49,33	49,36	49,37	49,38
Entladung. Kondensator mit 0,0075 cm Glimmer bedeckt.						
49,30	49,30	49,30	49,30	49,33	49,33	49,33
49,31	49,31	49,32	49,32	49,43	49,35	49,35
Entladung. Kondensator unbedeckt.						
49,06	49,04	49,03	49,02	49,02	49,01	49,00
49,00	48,97	48,95	48,95	48,96	48,98	48,92

Die Empfindlichkeit beträgt 0,08 Volt pro cm Ausschlag. Ähnliche kontrollierende Beobachtungen habe ich auch in allen anderen Fällen ausgeführt, wo der äußere Belag des Kondensators mit einer Stromquelle in Verbindung stand. Es wurden so die im Isolator eintretenden Veränderungen gemessen, indem von Zeit zu Zeit die innere Aluminiumscheibe mit dem Elektro-

meter in Verbindung kam. Die mit dem erwähnten Kondensator erhaltenen Resultate — Mittelwerte aus jeweils fünf Beobachtungen — sind hier angeführt.

Tabelle II.

Paraffindicke $d = 0{,}0686$ cm. $V = 25000$ Volt. Alum.-Belegung 0,000092 cm.

Spannung	Übergang pro Minute			Differenz pro Minute	
	ohne Bestrahlung	mit Bestrahlung			
		Kond. bedeckt	Kond. offen		
Volt	cm	cm	cm	cm	Volt
0	+0,011	+0,015	−0,026	−0,041	−0,0033
+ 10	+0,105	+0,090	+0,096	+0,006	+0,0005
+ 30	+0,410	+0,394	+0,435	+0,041	+0,0037
+100	+2,610	+2,680	+3,195	+0,515	+0,0497

Der Kondensator wurde auseinandergenommen und seine Dicke[1]) durch Abschaben um 0,0266 cm vermindert. Nach Belegen mit zwei dünnsten Aluminiumblättchen wurden weitere Messungen angestellt. Während bei 0 Volt Spannung −0,0099 Volt ins Elektrometer übergingen, betrug die obige Differenz für +100 Volt Spannung +0,172 Volt. Es findet hiernach in beiden Fällen durch Bestrahlung ein gesteigertes Anhäufen positiver Elektrizität an der Elektrometerplatte statt. Das hierbei verwandte, mit „homogen" bezeichnete Paraffin war sehr hart und blasenfrei (Schmelzpunkt etwa 58° C.), besaß aber auch noch in den benutzten relativ sehr dicken Schichten eine sehr große natürliche Leitfähigkeit, so daß es weiterhin nicht mehr benutzt wurde. An seiner Stelle untersuchte ich ausschließlich weicheres Paraffin vom Schmelzpunkt 51° C., das dem Durchgang der Elektrizität auch in sehr dünnen Schichten einen so großen Widerstand entgegensetzte, daß für die natürliche Leitfähigkeit bei 128 Volt noch sicher die kleinen Elektrometerausschläge beobachtet werden konnten.

1) Zur genauen Dickenbestimmung wurde in allen Fällen ein ca. 1 qcm großes mittleres Flächenstück der Kondensatoren durch Abschaben bloßgelegt und die so gewonnene Menge Paraffin abgewogen. (Spez. Gew. 0,9.)

Es sei noch erwähnt, daß die Messungen an verschiedenen Kondensatoren wohl miteinander verglichen werden können, obwohl jeder einzeln neu in den Apparat eingesetzt werden mußte. Denn die Einstellung war höchstens auf 1 mm Abstand ungenau, was nur einer Aluminiumdicke von etwa 0,00004 cm oder einer Paraffindicke von 0,00012 cm entspricht.[1]) Ich gebe noch zwei Resultate mit dünneren Kondensatoren an.

Tabelle III.

Paraffindicke $d = 0{,}0252$ cm. $V = 24\,000$ Volt. Alum.-Belegung 0,000 266 cm.

Spannung	Übergang pro Minute			Differenz pro Minute	
	ohne Bestrahlung	mit Bestrahlung			
		Kond. bedeckt	Kond. offen		
Volt	cm	cm	cm	cm	Volt
0	+0,005	+0,020	+0,035	+0,015	+0,0012
+ 10	—	+0,065	+0,095	+0,030	+0,0027
+ 50	—	+0,410	+0,560	+0,150	+0,0135
+1000	—	+1,205	+1,545	+0,340	+0,0319
Paraffindicke $d = 0{,}0066$ cm. Aluminiumbelegung 0,000 336 cm.					
0	0,000	−0,005	−0,020	−0,015	−0,0015
+ 10	+0,015	0,000	+0,195	+0,195	+0,0228
+ 50	+0,375	+0,330	+0,997	+0,667	+0,0814
+100	—	+1,320	+2,620	+1,300	+0,1638

Es bestätigt sich also die Erscheinung, *daß die von der äußeren mit dem positiven Pol der Batterie verbundenen Belegung des Kondensators durch das Paraffin zur Elektrometerplatte strömende positive Elektrizitätsmenge während des Bestrahlens mit Kathodenstrahlen einen Zuwachs erfährt*, der mit der Größe der angelegten Spannung zu und mit der Dicke des Kondensators abnimmt.

7. Um die Intensität der auffallenden Strahlen zu ändern, wurde des weiteren das Blechkästchen K mit Wasserstoff gefüllt und wieder den obigen analoge Beobachtungen ausgeführt. Dadurch war eine Intensitätsvergrößerung um das 13,5fache, oder eine scheinbare Verringerung der Paraffindicke um

1) Das Absorptionsvermögen des Paraffins zu 2350 angenommen.

0,0011 cm erreicht. Es fand sich für die obigen beiden Kondensatoren:

Tabelle IV.

Paraffindicke 0,0252 cm.				Paraffindicke 0,0066 cm.			
Spannung	Übergang bei Bestrahlung			Spannung	Übergang bei Bestrahlung		
	Luft	Wasserstoff	Differenz		Luft	Wasserstoff	Differenz
Volt	cm/Min.	cm/Min.	Volt/Min.	Volt	cm/Min.	cm/Min.	Volt/Min.
0	−0,075	−0,090	−0,0012	0	−0,020	−0,065	−0,0051
+ 10	+0,085	+0,100	+0,0012	+ 10	+0,195	+0,225	+0,0035
+ 50	+0,450	+0,550	+0,0090	+ 50	+0,997	+1,170	+0,0211
+100	+1,435	+1,580	+0,0131	+100	+2,620	+3,030	+0,0521

Man erkennt eine Zunahme der Ausschläge, die allerdings das erwartete Maß nicht erreicht. Es rührt dies daher, daß die beträchtliche Zahl negativer Quanten den Durchgang positiver Ladungen zu kompensieren sucht und daß dieser Einfluß um so größer ist, je größer die Intensität der auftreffenden Strahlen. Bringt man vor die Eintrittsöffnung der Strahlen ein Aluminiumblättchen von 0,00029 cm Dicke, so nähern sich die Ausschläge den bei Luftfüllung erhaltenen stark und erreichen etwa denselben Betrag bei einer Dicke von 0,00035 cm, um bei größeren Dicken rasch abzunehmen.

II. Der Kondensator im Vakuum.

Um variable Bedingungen zu haben, besonders auch um Gase von der Umgebung des Kondensators auszuschließen, wurde noch eine andere Versuchsanordnung getroffen.

8. Der Apparat ist in Fig. 3 dargestellt. An die Entladungsröhre E ist eine fast gleichweite Glasröhre G angekittet, die zunächst einen innen anliegenden Messingmantel M enthält, welcher vorn durch ein angelötetes Messingnetz N von 0,5 mm² Maschengröße und 0,15 mm Drahtdicke verschlossen ist. In etwa 5 mm Abstand hiervon steht ein weiterer Messingzylinder mit einem gleichen Drahtnetz einerseits und einer 5 mm weiten zentralen Öffnung andererseits. Diese kann mit einer Blechscheibe s, deren Stellung durch einen luftdicht nach außen führenden Draht veränderlich ist, verschlossen werden. Ihr

gegenüber ist der Kondensator in etwa 8 mm Abstand angebracht. Blende und Kondensator werden gleichzeitig durch die Drähte V mit dem einen Pol einer Akkumulatorenbatterie verbunden, während alle anderen Metallteile geerdet sind. Die Röhre wird mit der Luftpumpe verbunden und vollkommen evakuiert, bis zwischen den Enden zweier eingeführter Drähte a und b keine Entladungen eines großen Induktoriums mehr übergingen. Unter solchen Umständen können nur noch die aus dem Aluminiumfenster F austretenden Kathodenstrahlen den Kondensator beeinflussen. Es war hierbei auch unmittelbar zu ersehen, ob sich bei der Herstellung des Kondensators

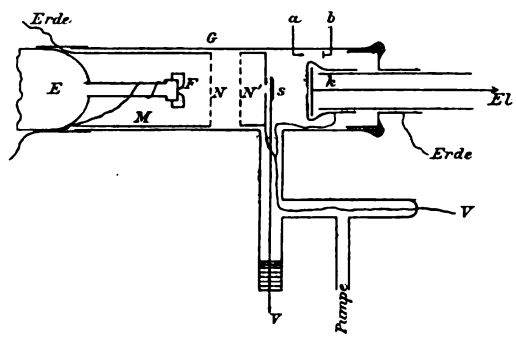


Fig. 3.

kleine Luftblasen zwischen dem bedeckenden Aluminiumblättchen und dem Paraffin gebildet hatten, weil diese beim Evakuieren der Röhre sich stark vergrößern und daher sofort sichtbar machen mußten. In der Tat trat dieser Fall einige Mal ein, wo aber auch die elektrometrische Prüfung des Kondensators (vgl. 15) diesen Fehler schon angezeigt hatte.

9. Zunächst wurde untersucht, ob die Kondensatoren sich im Vakuum irgendwie in ihrer Beschaffenheit verändern könnten. Zu diesem Zweck brachte ich den schon vorher unter Atmosphärendruck mehrfach verwandten 0,0066 cm dicken Kondensator einen Tag lang in die evakuierte Röhre und untersuchte ihn nach dem Herausnehmen in Luft in der alten Weise. Die neu erhaltenen Resultate stimmten dabei bis auf die kleinen unvermeidlichen Schwankungen mit den alten überein. Es konnten sonach die Beobachtungen mit der neuen Anordnung

ohne weiteres in derselben Weise ausgeführt werden wie früher. Die Intensität der den Kondensator treffenden Strahlen verhält sich dabei zu derjenigen bei den Beobachtungen in Luft wie 2,4 : 1. Die folgende Tabelle gibt die mit zwei neuen Kondensatoren erhaltenen Resultate an.

Tabelle V.

Paraffindicke $d = 0{,}0350$ cm. $V = 23000$ Volt. Alum.-Belegung 0,000336 cm.

Spannung	Übergang pro Minute			Differenz pro Minute	
	ohne Bestrahlung	mit Bestrahlung			
		Kond. bedeckt	Kond. offen		
Volt	cm	cm	cm	cm	Volt
0	—	−0,095	0,000	+0,095	+0,0085
+ 32	+0,922	+1,020	+1,095	+0,075	+0,0068
− 32	−2,743	−2,760	−2,790	−0,030	−0,0028
−128	−8,720	−8,677	−9,480	−0,803	−0,0771
Paraffindicke $d = 0{,}0268$ cm. $V = 20000$ Volt. Alum.-Belegung 0,000336 cm.					
− 24	−0,570	—	−0,615	−0,045	−0,0067
+ 24	+0,53	+0,561	+0,598	+0,037	+0,0055
− 32	−0,720	−0,742	−0,828	−0,086	−0,0129
+ 50	+1,927	+1,942	+2,055	+0,113	+0,0169
− 50	−1,795	—	−1,937	−0,142	−0,0213
+ 64	+1,865	+1,870	+2,275	+0,405	+0,0526
− 64	−3,300	−3,310	−3,680	−0,370	−0,0481

Die früher beobachtete Erscheinung bleibt sonach bestehen, und zwar mit annähernd derselben Größe bei positiver und negativer Spannung. Sie wird bei Paraffindicken über 0,03 cm für niedere Spannungen unmerklich und tritt aber bei Dicken unter 0,01 cm deutlich hervor. Die Abhängigkeit von der Spannung ist dieselbe wie bei Radiumstrahlen.

10. Für die letzteren hat sich früher gezeigt, daß die dort als Leitfähigwerden gedeutete Erscheinung erst nach Verlauf einer kleinen Bestrahlungsdauer ein Maximum erreichte und nach Entfernen des Präparates nur langsam zurückging. Den ersten Fall konnte ich für die jetzt benutzten Kathodenstrahlen nicht in reiner Form dartun, weil es unmöglich war, die Bestrahlung längere Zeit in unveränderter Weise fortzusetzen oder

in beliebig gewünschten Zeiten mit genau denselben Strahlgeschwindigkeiten vorzunehmen. Es hat sich aber gezeigt, daß die ins Elektrometer überführte Elektrizitätsmenge mit der Dauer der Bestrahlung abnahm, wenn positive Spannung angelegt war, und zunahm bei negativer Spannung. Es ist dies in der beistehenden Fig. 4 graphisch dargestellt für Kondensatoren mit 0,0252—0,0066 und 0,0082 cm Dicke, und zwar bei den Potentialen +50, +100 und −100 Volt. Diese Abhängigkeit von der Bestrahlungsdauer ist bei dickeren Schichten nicht merklich, während sie bei dünneren bedeutend wird. Die

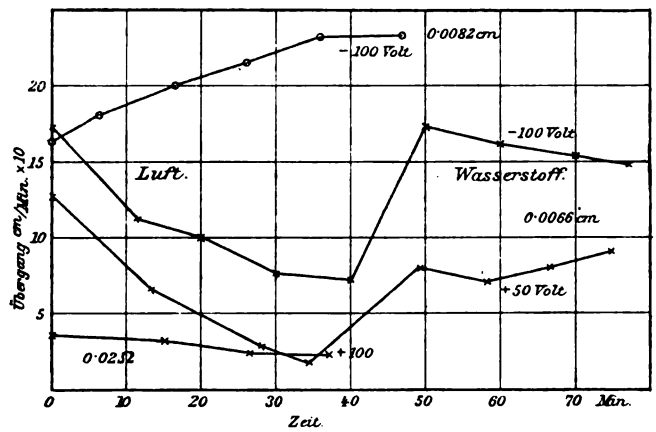


Fig. 4.

markierten Punkte bezeichnen die ins Elektrometer in 1 Min. übergegangene Elektrizitätsmenge in cm-Ausschlag, wenn der Kondensator in der als Abszisse aufgetragenen Zeit 1 Min. lang bestrahlt wurde. Um die Zusammengehörigkeit der einzelnen Punkte zu fixieren, sind dieselben durch gerade Linien miteinander verbunden. Es ist dadurch selbstverständlich nicht die Abhängigkeit der Ausschläge von der Bestrahlungsdauer festgestellt, weil ja die Abszissen der Punkte willkürlich sind. Man wird nicht zweifeln, daß der den mit Radiumstrahlen erhaltenen Resultaten widersprechende Verlauf dem Einfluß der beträchtlichen Mengen negativer Elektrizität auf den Isolator zugeschrieben werden muß.

Mit derselben Annahme erklärt sich auch die Tatsache, daß die Ausschläge nach Aufhören der Bestrahlung bei positiven

Potentialen rasch abnehmen, bei negativen etwas langsamer Die Tabelle gibt die Ausschläge für einige Zeitintervalle an.

Tabelle VI.

Kondensator	V	Übergangszeiten						
		mit Bestrahlung		ohne Bestrahlung				
		20—40	40—60	60—80	80—100	100—120	120—140	140—160
cm	Volt	Sek.	Sek.	Sek.	Sek.	Sek.	Sek.	Sek.
0,0252	+100	+0,26	0,28	0,27	0,26	0,24	0,24	0,22
0.0066	+ 50	+0,46	0,40	0,27	0,11	0,05	0,02	0,00
0,0066	+100	+0,58	0,58	0,42	0,15	0,07	0,04	0,00
0,0268	− 64	−0,15	−0,12	−0,13	−0,12	−0,12	−0,12	−0,10

11. *Induktorium.* — Ich habe auch mehrere Kondensatoren mit einem größeren Induktorium als Stromquelle untersucht. Der Kathodenröhre parallel geschaltet war hierbei eine Funkenstrecke von 3 cm zwischen Messingkugeln von je 1 cm Durchmesser, so daß das Entladungspotential etwa 35 000 Volt betrug. Der Benutzung der Influenzmaschine gegenüber war dadurch kein Vorteil erzielt, weil vorauszusehen war, daß die Messung durch den stoßweisen Charakter der Entladung modifiziert werden mußte. Zunächst war allerdings zu erreichen, daß bei den verwandten Kondensatoren schon gut meßbare Mengen negativer Elektrizität die hintere Aluminiumplatte trafen, so daß die Leitfähigkeit größer erwartet werden durfte. Es zeigte sich aber, daß ein neuer Umstand dabei eintrat, der für die Erklärung der Erscheinungen eine Grenze zwischen dicken und sehr dünnen Kondensatoren, ebenso zwischen langer und kurzer Bestrahlung zu machen gebot. Zunächst wurde die hintere Aluminiumplatte mit dem Elektrometer verbunden und nach Verlauf von 20 Sek. mit Hilfe eines Unterbrechers rasch hintereinander 15 Entladungen durch die Röhre geschickt und danach die Angaben des Elektrometers von 20 zu 20 Sek. beobachtet. Durch die Entladungen traten kleine negative Ausschläge auf, die eine Summe aus der von den durchgehenden Strahlen mitgeführten negativen Elektrizität und der durch eventuelles Leitendwerden des Isolators übergehenden Elektrizität darstellen mußten. Die anfängliche Vermutung,

daß die durch Leitendwerden überführte Elektrizitätsmenge diejenige der durch die Strahlen angehäuften übersteige, wie dies bei leitenden Gasen oder den Radiumstrahlen[1]) der Fall ist, schien sich nicht zu bestätigen, weil auch dann noch negative Elektrizität auftrat, wenn ich + 64 Volt an den Kondensator anlegte (vgl. hierzu 14). Es konnte deshalb aus den beobachteten Ausschlägen kein Schluß auf das Leitendwerden während der Bestrahlung gezogen werden. In der beistehenden Fig. 5 habe ich die sich für einen 0,0163 cm dicken Kondensator ergebenden Resultate verzeichnet. Die Abszissen bedeuten die Beobachtungszeiten vom Beginn der Isolierung des Elektrometers an, während die Ordinaten die Differenzen der mit und ohne Bestrahlung erhaltenen Ausschläge darstellen. Während die zur Zeit 30 auftretenden negativen Elektrizitätsmengen von der Spannung 0—16 nur wenig voneinander abweichen, zeigt sich, daß der Übergang bei — 64 Volt denjenigen bei + 64 bedeutend übersteigt, was sich im Sinne einer Leitung deuten läßt, wobei die durch Strahlung hervorgerufene Menge im einen Fall sich addiert, im anderen subtrahiert; denn es sei nochmal bemerkt, daß die primäre Leitung ohne die Bestrahlung

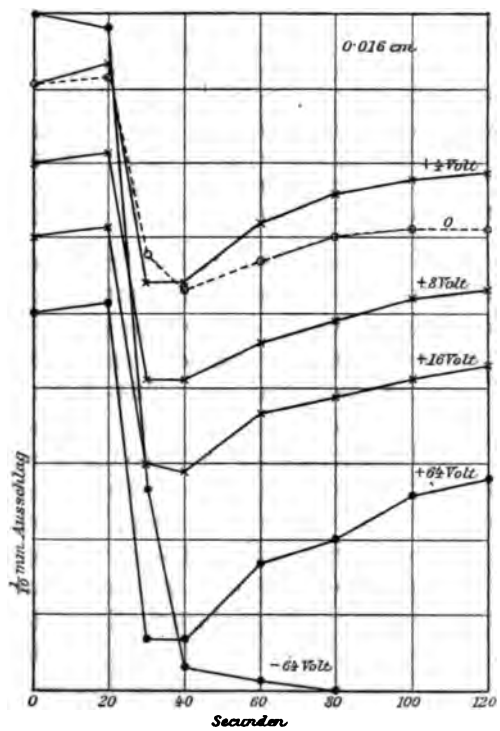


Fig. 5.

1) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 12. p. 142. 1903.

hier eliminiert ist. Der Verlauf der Kurven von 30—120 gibt die Erscheinung direkt nach der Bestrahlung an. Sie alle verlaufen gegen die Abszissenachse geneigt, was andeutet, daß der Übergang nach der Bestrahlung ein größerer ist als vorher. Da aber die Kurven 0—16 annähernd gleich geneigt sind, so würde die vermehrte Leitung von der Spannung unabhängig sein; es rührt dies indes von der Beeinflussung einer schon bei 0 Volt noch im Isolator von früher rückständigen positiven Ladung her. Bei 64 Volt findet ein stärkeres Ansteigen der Kurve statt, was auf rückständige Leitung zurückgeführt werden muß. Es zeigt sich auch hier der schon in Tab. VI erwähnte Fall, daß die Leitfähigkeit rasch abnimmt, indem die Kurven in der Nähe von 120 Sek. der Abszissenachse fast parallel laufen. Es ist also wohl eine Leitfähigkeit angedeutet; daß sie sehr gering sein mußte ließ schon die Tab. V vermuten.

12. Um deutlichere Resultate zu erzielen, wurden des weiteren dünnere Kondensatoren benutzt. Und um von den beträchtlichen negativen Ausschlägen frei zu sein, versuchte ich, wenigstens eine rückständige Leitfähigkeit nachzuweisen. Die Kondensatoren wurden durch 20 rasch aufeinanderfolgende Entladungen bestrahlt, während Elektrometer und Aluminiumscheibe zur Erde geleitet waren. Darauf wurden beide miteinander verbunden isoliert und wieder von 20 zu 20 Sek. die Ausschläge beobachtet. War eine Leitfähigkeit vorhanden, so mußten die so erhaltenen Werte gegen die ohne Bestrahlung beobachteten Ausschläge größer sein. Es seien die für den 0,0082 cm dicken Kondensator gefundenen Resultate mitgeteilt; im wesentlichen dieselben erhielt ich für eine Dicke von 0,0093 cm.

Die 0,000336 cm dicke Aluminiumbelegung war zunächst geerdet. Es gaben dann 15 Schläge des Induktoriums einen Ausschlag von mehreren Zentimetern, entsprechend 0,97 Volt. Wurde jetzt nach jeweils 20 Entladungen Isolation hergestellt, so ergab sich, daß zunächst ein namhafter Betrag negativer Elektrizität ins Elektrometer abfloß, dessen Größe mit der Zahl der Bestrahlungen abnahm und dann längere Zeit einen kleinen, konstanten Wert behielt, um schließlich zu kleinen positiven Werten überzugehen. Bei positiven Potentialen war eine mit der Größe derselben zunehmende Leitfähigkeit zu

konstatieren, die von der Dauer oder Zahl der Bestrahlung nicht abhing; dasselbe gilt für negative Spannungen, wenn der Kondensator nicht vorher schon längere Zeit bestrahlt war. Im letzteren Fall zeigte sich nur für die ersten Bestrahlungen ein zunehmender negativer Ausschlag, der zuletzt kleiner wurde und sogar etwas unter den ohne Bestrahlung beobachteten herabsank. Daß dabei das Eindringen starker negativer Ladungen eine Rolle spielt, unterliegt wohl keinem Zweifel. Um deshalb möglichst einwandsfreie Resultate zu erhalten, wurden jeweils zunächst mehrere Beobachtungen bei der Spannung 0 gemacht, dann etwa 4 Stunden lang eine höhere Spannung angelegt und danach mehrere entsprechende Beobachtungen gemacht, dann wieder das Potential 0 hergestellt und nach Verlauf von weiteren 4—5 Stunden dabei beobachtet etc. Ich gebe in der folgenden Tabelle die Differenzen aus Mittelwerten von jeweils 4—6 solcher zusammengehöriger Beobachtungen bei Spannung und bei Erdpotential an.

Tabelle VII.

0,0082 cm ca. 35000 Volt.

Spannung	Übergang pro Minute	
Volt	cm	Volt
− 4	−0,06	−0,0075
+ 4	+0,02	−0,0025
− 8	−0,20	−0,0250
+ 8	+0,32	+0,0400
−16	−0,34	−0,0425
+16	+0,36	+0,0450
−24	−0,48	−0,0600
+32	+1.24	+0,1550
−40	−1,06	−0,1325

Es wird also von etwa 8 Volt an eine zunehmende Leitfähigkeit bemerkbar, und zwar ist der den Isolator durchfließende Strom, von den Unsicherheiten abgesehen, der Spannung proportional.

13. Um die Erscheinung der Leitung noch deutlicher bemerkbar zu machen, wurde die Herstellung noch dünnerer Kondensatoren versucht. Es gelang, zwei solcher zu erhalten,

deren Paraffindicke 0,0031 und 0,0038 cm betrug. Dabei war es indes unmöglich, höhere Spannungen als 4 Volt anzulegen, wenn die primäre Leitung nicht zu groß werden sollte. Da hierbei außerdem der große Transport negativer Elektrizität störte, wurde in folgender Weise verfahren: Ich lud die hintere Aluminiumplatte und das Elektrometer mit Hilfe eines Daniellelementes auf 1,1 Volt oder im Mittel etwa 15 cm Skalenausschlag, bestrahlte darauf den mit einem 0,2 mm dicken Aluminiumblatt bedeckten Kondensator durch drei Entladungen und beobachtete dann die Abnahme der Ladung von 20 zu 20 Sek. während 5 Min. Hiernach leitete ich Kodensator und Elektrometer ab, isolierte sie nach etwa 10 Min. wieder und ließ jetzt drei Entladungen auf den unbedeckten Kondensator übergehen. Dieselben luden das Elektrometer auf etwa dieselbe Spannung wie vorher das Daniellelement. Wurde jetzt wieder die Abnahme der Spannung in derselben Weise beobachtet wie vorher, so mußte die Differenz der beiden auf Leitung zurückgeführt werden. Es ergab sich, daß der Abfall nach der Bestrahlung erst etwa 10 Sek. lang unmerklich war — weil wohl noch negative Elektrizität aus dem Paraffin auf die Aluminiumplatte überging — dann ziemlich beträchtlich anstieg, so daß das Elektrometer in 3 Min. etwa nur noch $^1/_{10}$ der ursprünglichen Ladung aufwies.

14. *Theoretisches.* — Es scheint ohne weiteres keine Berechtigung zu bestehen, die mitgeteilten Beobachtungen als durch Bestrahlung vermehrte Leitfähigkeit des Paraffins zu deuten, weil dabei die beträchtlichen negativen Ladungen, welche die Kathodenstrahlen mit sich führen, zweifellos eine Rolle spielen.

a) Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall eines Kondensators, der aus einer d cm dicken Paraffinschicht besteht, die beiderseits mit zwei ohne Luftschicht fest angeschmolzenen geerdeten Aluminiumplatten begrenzt ist. War dieser Kondensator sich lange genug selbst überlassen, so muß weder im Innern noch an den Grenzflächen die geringste Spur einer Ladung bestehen. Tritt nun Bestrahlung[1]) auf der einen Seite ein, so wird negative Elektrizität, soweit sie von dem

1) Es sei zunächst die Trägerbildung unberücksichtigt.

dünnen Aluminiumblättchen durchgelassen wird, vom Isolator in der Weise absorbiert, daß die zuerst getroffenen Schichten sich stark negativ laden und jede folgende Schicht denselben Bruchteil der vorhergehenden aufnimmt.

Bezeichnet man den Absorptionskoeffizienten des Paraffins mit α, die von der Aluminiumbelegung noch durchgelassene Strahlintensität pro Sekunde mit i_0, so ist die Intensität J in jedem beliebigen Punkte x im Inneren des Paraffins durch

$$J = i_0 e^{-\alpha x} \tag{1}$$

gegeben.

Auf der hinteren Aluminiumplatte wird sonach nur der Betrag

$$J_d = i_0 e^{-\alpha d}$$

erscheinen und gemessen werden können. Diese so berechnete Menge negativer Elektrizität wäre die einzige auch beobachtbare Quantität, die am Elektrometer auftritt, wenn nicht ein weiterer Betrag dazu käme, herrührend von einer inneren Ladung des Paraffins selbst. Denkt man sich dünne Schichten parallel zu den Kondensatorplatten im Isolator, so wird die der bestrahlten Belegung unmittelbar anliegende Schicht starke negative Ladung annehmen, die nächsten Schichten in derselben Weise weniger wie $e^{-\alpha x}$ im Paraffin abnimmt mit wachsendem x. Diese Ladungen werden nun sowohl durch Influenzwirkung, als auch durch langsame Leitung im Isolator weitere Elektrizitätsmengen den Belegungen zuführen. Betrachten wir nur die Erscheinungen, die an der mit dem Elektrometer verbundenen Platte auftreten, so ist vorauszusehen, daß dieselben relativ zu der Rückwirkung der inneren Ladungen auf die bestrahlte Metallbelegung sehr klein sein müssen. Zunächst berechnet sich die durch Influenz zu dem obigen J_d hinzukommende Quantität auf der Platte A zu

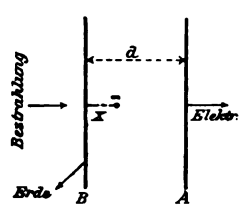


Fig. 6.

$$Q = \frac{i_0}{d} \int_{x=0}^{x=d} x e^{-\alpha x} dx = \frac{i_0}{d\alpha^2} \left(1 - \frac{1 + \alpha d}{e^{\alpha d}} \right). \tag{2}$$

Man ersieht, daß dieser Betrag für die der Beobachtung unterworfenen Kondensatordicken in allen Fällen die vom direkten Durchgang der Quanten herrührende negative Ladung übertrifft. Es wird mit solchen Kondensatoren deshalb nicht die Menge der sie durchdringenden Quanten unmittelbar gemessen, wohl aber Ladungen, die der auffallenden Intensität proportional sind.

Beim Bestrahlen eines geeignet dicken Kondensators wird zunächst ein gewisser negativer Ausschlag des Elektrometers beobachtbar sein; nach Ableiten aller Metallteile und folgender Isolierung wird eine weitere kleinere negative Ladung auftreten können, da der die Influenz bewirkende Polarisationszustand nur allmählich einem Gleichgewicht zustrebt[1]) und da ein geringes Eindringen der Ladung durch Leitung stattfinden wird. Diese letztere Erscheinung wird nun derart vor sich gehen, daß die Strömung im Sinne des größten Spannungsabfalls erfolgen wird. Das tritt aber direkt hinter der bestrahlten Platte nach zwei Richtungen hin ein, indem die zuerst getroffenen Paraffinschichten sich sehr stark laden und einerseits an die geerdete, sehr benachbarte Aluminiumbelegung, anderseits an viel schwächer geladene Schichten angrenzen. Der Ausgleich wird nach beiden Seiten erfolgen. Bei wiederholter Bestrahlung rückt immer mehr negative Elektrizität nach *A* hin, während ein Abströmen nach *B* ein starkes Anhäufen in den benachbarten Schichten verhindert. Dabei ist zu beachten, daß jede kleine Ladung im Augenblick ihres Auftretens zunächst in dem entfernteren Teil der Platte *A* oder dem Elektrometer eine gewisse Menge negativer Elektrizität durch Influenz hervorruft, daß diese Menge zunimmt, wenn die Ladung sich der Platte nähert, dagegen infolge Freiwerdens einer kleinen Menge vorher gebundener positiver Elektrizität abnimmt, wenn die Ladung sich von der Platte entfernt, z. B. nach *B* hin abströmt. War *A* beim Erscheinen dieser Ladung geerdet, so ist demnach das Auftreten einer kleinen Menge freier positiver Elektrizität in ihr nach der Isolierung unter gewissen Umständen denkbar.

Um einen Anhalt für die Größe der oben besprochenen

1) Vgl. A. Wüllner, Wied. Ann. **32.** p. 48. 1887.

Wirkungen zu haben, müssen die Resultate der Beobachtung unter den entwickelten Gesichtspunkten betrachtet werden.

Die von der benutzten Töplerschen Influenzmaschine bei gleichmäßiger Rotation gelieferte Intensität war mir durch Versuche von Hrn. Professor Lenard[1]) bekannt. Unter Berücksichtigung von Fensterdicke[2]) und Durchmesser der Öffnung für meine Kathodenröhre ergab sich daraus, daß die auf eine Fläche von 0,19 cm² im Abstand 3 cm vom Fenster im Vakuum auffallende Strahlintensität $7{,}16 \cdot 10^{-10}$ Coul. pro Sekunde beträgt. Betrachtet man nun den in Luft untersuchten Kondensator von 0,0066 cm Dicke (Tab. III), so gelangt auf dessen Aluminiumbelegung der Bruchteil $^1/_{2{,}4}$ oder $2{,}98 \cdot 10^{-10}$ Coul. pro Sekunde, wovon nur der weitere Bruchteil $^1/_{11}$ oder $0{,}27 \cdot 10^{-10}$ Coul. pro Sekunde durch das Blättchen hindurch zum Paraffin gelangt. Würde sich hier unmittelbar die ableitende Elektrometerplatte befinden, so kämen in der Sekunde 0,27 Volt im Elektrometer zur Messung. Infolge der Absorption im Paraffin strömen indes nur $0{,}5 \cdot 10^{-17}$ Coul. pro Sekunde oder $3 \cdot 10^{-16}$ Coul. pro Minute in das Elektrometer und würden hier in dieser Zeit $3 \cdot 10^{-6}$ Volt anzeigen, was der Beobachtung entgeht. Die zu addierende Elektrizitätsmenge Q beträgt indessen $4{,}8 \cdot 10^{-14}$ Coul. pro Minute oder 0,00048 Volt. Beobachtet wurden im Mittel 0,0015 Volt. Wäre die Differenz beider Resultate eine sicher bestimmte Zahl, so würde deren Größe einen Schluß auf die Leitung der Elektrizität im Isolator zulassen. Man würde für jeden Punkt im Innern des Paraffins die dort in einer gewissen Zeit angehäufte Elektrizitätsmenge kennen und deren Einfluß auf die hintere Kondensatorplatte berechnen können. Und zwar ist dieser Einfluß einmal eine direkte Influenzwirkung, deren Größe die aufgestellte Gleichung (2) angibt, das andere Mal ein Abgeben negativer Elektrizität infolge zunehmender dielektrischer Polarisation des Paraffins und außerdem ein Abgeben weiterer negativer oder auch positiver Elektrizität durch langsame Leitung im einen oder anderen Sinn, der gegeben ist durch die Lage des Ladungsmaximums, was

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 472. 1903.

2) Die Fensterdicke betrug 0,00029 cm, der Durchmesser 0,13 cm.

selbst abhängt von der Zahl der Bestrahlungen und der Größe des Leitvermögens in den einzelnen Paraffinschichten. In diesen Berechnungen wäre alles bekannt, bis auf den gesuchten Leitfähigkeitskoeffizienten, der sich wohl als eine Funktion der bestrahlten Paraffindicken darstellen würde. Vielleicht wäre hierdurch auch die mögliche Existenz sekundärer Strahlung nachweisbar. Dies ist indes bis jetzt unmöglich, weil die beobachteten Werte immer mit einiger Unsicherheit behaftet sind, und weil auch besonders die Annahmen, welche der zahlenmäßigen Durchrechnung der aufgestellten Formeln zugrunde gelegt werden müssen, leider keine genügende Stütze durch das Experiment haben. Es ist dies die Größe des Absorptionskoeffizienten der durchstrahlten Körper, besonders Aluminium und Paraffin, für die von mir verwandten Strahlgeschwindigkeiten und die auf $^1/_{1000}$ mm nötige Genauigkeit der Dickenmessung. Für den obigen Fall von 25000 Volt Geschwindigkeit dürften die den Beobachtungen Lenards[1]) entnommenen Werte α annähernd zutreffen. Daß sie aber bei den später benutzten ca. 35000 Volt wesentlich verschieden sein können, zeigt das Verhalten von Gasen gegenüber Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit[2]) deutlich.

Berechnet man infolgedessen z. B. die für den mit Induktorium benutzten 0,0163 und 0,0082 cm dicken Kondensator sich ergebenden Elektrizitätsmengen, die auf A angesammelt wurden, so findet sich eine sehr schlechte Übereinstimmung mit den Resultaten der Beobachtung, und zwar in der Weise, daß die beobachteten Werte bedeutend größer sind als die berechneten. Es kommt hier zu dem Einfluß, den zu groß angenommene Absorptionskoeffizienten haben, noch der Umstand hinzu, daß die Dicke der Kondensatoren in der bestrahlten Mitte in Wirklichkeit etwas kleiner war, als sich durch Auswägen einer etwas größeren Fläche ergab. Die Strahldichte, die durch die Entladungen des Induktoriums sich ergab, wurde in derselben Weise bestimmt, wie es von Lenard[3]) für die Influenzmaschine geschehen ist. Es fand

1) P. Lenard, Wied. Ann. **56.** p. 274. 1895; für Aluminium $\alpha = 7150$, für Paraffin $\alpha = 2350$.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12.** p. 732. 1903.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12.** p. 472. 1903.

sich, daß durch einen Schlag des Induktoriums dieselbe Elektrizitätsmenge entladen wurde, wie durch die Influenzmaschine in 0,8 Sekunden.

In qualitativer Hinsicht herrscht vollkommene Übereinstimmung der Resultate der Beobachtung mit den obigen Ausführungen (vgl. 7, 11, 12).

b) Wird die Kondensatorplatte B mit dem positiven Pol einer Batterie verbunden, so fließt eine bestimmte Menge gleichnamiger Elektrizität infolge Influenz durch das Elektrometer ab. Die Influenz wird erst rasch, dann immer langsamer abnehmen, bis schließlich nach Verlauf einer bestimmten Zeit ein Grenzwert erreicht wird, bei dem nur noch eine minimale Menge positiver Elektrizität durch Leitung an der Elektrometerplatte frei wird. Während beim Vorgang der Polarisation keine freien Ladungen im Innern des Isolators auftreten, ist aber für die Leitung eine Ladung der Moleküle zwischen den beiden Platten A und B anzunehmen, die mit dem Abstand x von B abfällt. Tritt Bestrahlung des Kondensators ein, so laden sich die Moleküle negativ derart, daß in der Nähe der bestrahlten Platte B eine teilweise Kompensation der positiven Elektrizitäten der Moleküle stattfinden wird, die durch Nachströmen aus der Belegung B wieder aufgehoben wird. Nach den obigen Berechnungen sowohl wie nach den Beobachtungen für 0 Volt haben aber diese Vorgänge keinen Einfluß auf A. Kommt demnach hier durch die Bestrahlung eine größere positive Elektrizitätsmenge an, so kann dies nur als Folge vermehrter Leitfähigkeit im Paraffin gedeutet werden. Und zwar wird der Vorgang der sein, daß die Leitfähigkeit in den obersten Schichten eine ziemlich beträchtliche ist, nach tieferen Schichten dagegen rasch abnimmt, so daß die beobachtete Wirkung nicht notwendig herrühren muß von vollkommen den Isolator durchströmenden positiven Ladungen, sondern es kann eine Influenzwirkung positiver Elektrizitätsmengen sein, die infolge vermehrter Leitfähigkeit der stark bestrahlten Schichten eine Strecke weit in den Isolator eindringen. Da dieses Strömen nur langsam erfolgt, werden sich bei häufiger Bestrahlung die Moleküle teilweise negativ laden, ohne daß ihre Ladung sofort kompensiert würde, und infolgedessen muß die Leitfähigkeitserscheinung mit der Zeit abnehmen (vgl. 10).

c) Wird die Kondensatorplatte *B* mit dem negativen Pol einer Batterie verbunden, so wird sich nach einiger Zeit wieder ein Gleichgewichtszustand einstellen, so daß nur geringe Mengen negativer Elektrizität mit dem Elektrometer nachweisbar werden. Tritt Bestrahlung des Kondensators ein, so kommt zu der negativen Ladung der Moleküle eine weitere hinzu und in der Aluminiumplatte *A* werden weitere negative Elektrizitäten frei, falls die Influenzwirkung nicht zu klein ist. Dies ist aber für die mit der Influenzmaschine untersuchten Kondensatoren der Fall; das vermehrte Auftreten negativer Elektrizität muß demnach wieder auf erhöhte Leitfähigkeit zurückgeführt werden. Da mit der Dauer der Bestrahlung immer weitere Mengen negativer Quanten in das Paraffin eindringen, muß die an *A* frei gewordene Quantität zunehmen (vgl. 10). Ist die Bestrahlung eine sehr reichliche, so daß sich bedeutende Elektrizitätsmengen im Isolator aufsammeln, so werden zunächst starke Ladungen in das Innere eindringen und durch Influenz positive Mengen an der zugewandten Seite der Aluminiumplatte *A* binden. Hört die Bestrahlung auf, so findet die Strömung einen größeren Widerstand und sucht sich in der Richtung der größeren Leitfähigkeit und des größeren Spannungsabfalles auszugleichen. Es ist ersichtlich, daß dies in manchen Fällen durch Zurückströmen der Ladung gegen *B* hin stattfinden kann, wodurch sich dann eine Verkleinerung der Ausschläge nach Aufhören der Bestrahlung erklärt.

15. *Fehlerquellen.* Die Beobachtungen zeigen, daß die einer vermehrten Leitfähigkeit zugeschriebenen Erscheinungen von außerordentlicher Kleinheit sind, indem schwache Strahlintensitäten keine merkliche Vergrößerung der Leitung hervorrufen und auch nur das Anlegen größerer Spannungen eine solche nachweisbar macht. Demgegenüber liegt es nahe, die Erscheinungen lediglich eventuellen Fehlerquellen zuzuschreiben, sei es, daß letztere die gesuchte Wirkung zu klein erscheinen lassen, sei es, daß sie die beobachtete kleine Wirkung hervorrufen. Sehr auffallend war, daß der Einfluß der Kathodenstrahlung mit Rücksicht auf deren große Intensität kaum beträchtlicher sein sollte, als er früher für Radiumsstrahlen beobachtet war. Die jetzt für 64 Volt gemessene größte Strom-

stärke, welche durch Leitfähigkeit hervorgerufen ist, beträgt etwa $2 . 10^{-13}$ Amp., während sie früher $1{,}3 . 10^{-14}$ Amp. war. Vergleicht man indes die für beide Fälle sich ergebenden Strahlintensitäten an der hinteren Aluminiumplatte, so ergibt sich, daß von den auftreffenden Kathodenstrahlen nur $0{,}5 . 10^{-17}$ Coul. pro Sekunde das Paraffin durchdringen, während für die Radiumstrahlen $0{,}9 . 10^{-15}$ Coul. pro Sekunde nachweisbar waren. Eine unmittelbare Vergleichung beider Resultate, die die Abhängigkeit des Leitvermögens von der Strahlgeschwindigkeit geben könnte, scheint ausgeschlossen, weil das Leitvermögen für langsamere Kathodenstrahlen infolge der großen Absorption keine Konstante ist für die benutzten Kondensatoren, sondern von großen Werten rasch zu sehr kleinen übergehen wird bei wachsender Dicke.

a) Bei den vorliegenden Beobachtungen muß eine störende Wirkung elektrischer Kräfte auf die Leitungen und Meßinstrumente, ebenso eine Störung durch Leitendwerden bestrahlter Gase als vollständig elliminiert gelten; es würde dies auch ohne weiteres bei den Schlußfolgerungen nicht in Betracht kommen, weil immer Differenzen von Ausschlägen verzeichnet sind, die bei bestrahltem bedeckten und bei bestrahltem offenen Kondensator erhalten wurden (vgl. auch Tab. I).

b) Sehr wesentlich war es besonders, vollkommen fehlerfreie Kondensatoren zu haben. Es wurden deshalb, um über die möglichen Störungen Klarheit zu bekommen, eine große Zahl (etwa 30) Kondensatoren verschiedener Dicke, mit verschiedenartig aufgebrachter Belegung, verschiedenen Blättchendicken untersucht; teils wurden die Kondensatoren absichtlich mit Fehlern versehen. Zunächst ist vollständige Freiheit des Paraffins von Blasen oder kleinen Sprüngen erforderlich. Sind solche vorhanden, so wird zunächst der für 0 Volt zu erwartende Ausschlag bei der Bestrahlung bedeutend zu groß und treten weiterhin nach Aufhören der Bestrahlung unregelmäßige Ausschläge auf. Da nur ausgekochtes Paraffin benutzt wurde, das sehr langsam auf der von jeder Verunreinigung befreiten Aluminiumplatte erstarrte, traten solche Störungen äußerst selten auf. Da die Oberfläche des Paraffins völlig glatt und durchsichtig gemacht werden konnte, mußten dieselben auch ohne weiteres mit der Lupe beobachtet werden. Besitzt die

Aluminiumbelegung Löcher oder ist sie nicht gut ohne zwischenbefindliche Luftschicht aufgepreßt, so treten noch stärkere Störungen auf, die sich besonders auf die Ausbildung der Influenzwirkung von Einfluß zeigen. An allen bestrahlten Stellen nämlich, die nicht direkt mit Aluminium bedeckt sind, häuft sich eine starke negative Ladung an, die nur ins Innere des Paraffins abströmen kann; sie wird aus diesem Grunde und wegen des größeren Abstands des Aluminiumblättchens von ihr eine starke gleichnamige Elektrizitätsmenge durch Influenz ins Elektrometer abführen. Wird ein solcher Kondensator bei Erdung der bestrahlten Aluminiumbelegung bestrahlt, so resultiert ein großer negativer Ausschlag, der aber nach Aufhören der Bestrahlung weiter anwächst, weil noch beträchtliche Ladungen nach der Elektrometerplatte abströmen können. Wird letztere geerdet und wieder isoliert, so weist sie zu wiederholten malen beträchtliche negative Ladungen auf. Diese Erscheinung ist ein empfindliches Anzeichen für in dieser Richtung fehlerhafte Kondensatoren. Man ersieht, daß die Störungen sich häufen, wenn das Blättchen z. B. noch Löcher enthält, weil dann beim Beginn der Bestrahlung oder kleinen Schwankungen des Entladestroms kleine Resonanzfünkchen zwischen dem Blättchen und dem Paraffin übergehen können und jede Messung unmöglich machen. Es folgt weiter, daß in solchen Fällen nach Anlegen einer positiven Spannung bei der Bestrahlung große negative Ausschläge auftreten können, herrührend von stark bestrahlten und von der Belegung isolierten Oberflächenstückchen.

Es sind dementsprechend nur solche Kondensatoren weitgehend untersucht worden, die die oben genannten Störungen nicht zeigten.

c) Alle für positive Spannungen erhaltenen Leitfähigkeiten werden zu klein erscheinen infolge einer teilweise kompensierenden Wirkung durch negative Quanten; von größerem Einfluß ist dies allerdings erst bei längerer Bestrahlung, wie auch die Beobachtungen ergaben; bei negativen Spannungen wird die Leitung anfänglich aus denselben Gründen zu groß erscheinen.

d) Man könnte geneigt sein, die vielfach im Isolator durch die Bestrahlung hervorgerufenen Ladeschwankungen als Ur-

sache der zunehmenden Leitfähigkeit anzusehen. Dem widerspricht aber die Erfahrung[1]), daß Isolatoren unter dem Einfluß von solchen Schwankungen einen größeren Widerstand erhalten, so daß dies sogar die beobachteten Werte zu klein erscheinen läßt.

e) Die vermehrte Leitfähigkeit durch Bestrahlung wäre auch dem Einfluß einer Temperaturerhöhung im Paraffin zuzuschreiben, da in der Tat feste Isolatoren[2]) mit wachsender Temperatur in beträchtlichem Maße ihren Widerstand verkleinern. Dem gegenüber muß indes betont werden, daß eine Temperaturerhöhung bei der Bestrahlung nur sehr schwach sein könnte und außerdem die vermehrte Leitfähigkeit z. B. bei positiven Spannungen zuerst groß ist, während sie mit weiterer Bestrahlung, also vermehrter Temperatur, abnimmt.

f) Es wurde bei allen benutzten Kondensatoren darauf geachtet, daß die beiden durch die Paraffinschicht getrennten Metalle aus derselben Substanz, und zwar aus Aluminium bestanden, um sicher zu sein, daß Kontaktwirkungen, wie sie für verschiedene Metalle in bestrahlten Gasen auftreten[3]), elliminiert oder wenigstens auf ihr Mindestmaß beschränkt waren. Es lag nämlich die Vermutung nahe, daß eine solche Wirkung dann auftreten kann, wenn der Isolator leitend geworden ist; daß sie vorher vollkommen fehlt, ist bekannt. Ich habe, um dies zu untersuchen, deshalb drei Kondensatoren benutzt, deren untere Platte aus Messing bestand, während die Folienbelegung Aluminium war. Die Dicken der Paraffinschicht und der Belegung waren: 0,035 cm und 0,0006 cm — 0,024 cm und 0,000336 cm — 0,018 cm und 0,00028 cm. Es zeigte sich in jedem dieser Fälle nie eine Spur einer Spannungsdifferenz bei der Bestrahlung. Dasselbe negative Resultat ergab ein Kondensator von 0,0146 cm Dicke, dessen untere Metallplatte aus Aluminium und dessen Belegung aus 0,00029 cm dicker

1) H. Hertz, Wied. Ann. **2.** p. 279. 1883; A. Kleiner, Sess. soc. helv. Schaffhausen 1894; W. Leick, Wied. Ann. **66.** p. 1115. 1898.

2) W. v. Bezold, Pogg. Ann. **125.** p. 135. 1865.

3) S. Arrhenius, Wied. Ann. **33.** p. 638. 1888; **42.** p. 51. 1891; A. Winkelmann, Wied. Ann. **66.** p. 1. 1898; W. Hillers, Wied. Ann. **68.** p. 196. 1899; E. Rutherford, Phil. Mag. (5) **47.** p. 155. 1899; P. Curie u. G. Sagnac, Compt. rend. **130.** p. 1014. 1900.

Kupferfolie bestand. Um allerdings diese Frage endgültig zu entscheiden, müßten wohl noch dünnere Paraffinschichten benutzt werden. Es zeigen aber diese Versuche, daß Störungen dieser Art in allen früheren Untersuchungen ausgeschlossen waren, auch wenn die Beschaffenheit der beiden Aluminiumbelegungen nicht genau dieselbe gewesen wäre.

16. Die mitgeteilten Versuche zeigen sonach, daß Paraffin durch Bestrahlung mit Kathodenstrahlen von 20000—40000 Volt Geschwindigkeit eine kleine Leitfähigkeit annimmt, die mit abnehmender Schichtdicke wächst, weil hierdurch die Intensität der den Isolator noch durchdringenden Strahlen rasch zunimmt. Bei Intensitätsmessungen mit Hilfe der benutzten Kondensatoren wird diese Leitfähigkeit nur dann stören, wenn die isolierende Schicht für Paraffin z. B. geringer ist als 0,003 cm; es wird aber auch in solchen Fällen der Verlust an negativer Elektrizität immer noch ein sehr kleiner sein, der in den meisten Fällen unberücksichtigt bleiben kann. Man hat hier den Vorteil, in allen Gasen elektrometrische Intensitätsmessungen ausführen zu können, und zwar ist es nicht notwendig, daß die Dicke der isolierenden Schichten viel geringer wird als etwa 0,002 cm, weil elektrometrisch dabei nicht nur die direkt hindurchgehenden Quanten, sondern auch noch ein Bruchteil der absorbierten Mengen als Influenzelektrizität gemessen werden.

Zum Schlusse erlaube ich mir, auch an dieser Stelle Hrn. Professor Lenard für die liebenswürdige Überlassung aller zu dieser Arbeit notwendigen Mittel meinen Dank zu sagen.

Kiel, 12. November 1903.

(Eingegangen 15. November 1903.)

10. *Zur Demonstration elektrischer Drahtwellen; von K. Schaum und F. A. Schulze.*[1])

Zur Demonstration elektrischer Drahtwellen hat L. Arons[2]) die Lecherschen Drähte in eine Vakuumröhre gebracht. An den Stellen der Bäuche der elektrischen Kraft findet dann ein Aufleuchten statt. W. Coolidge[3]) hat später gezeigt, daß dieses Aufleuchten auch in freier Luft stattfindet, wenn man sehr dünne Drähte, von etwa 0,1 mm Durchmesser, nimmt. Die Erscheinung ist in beiden Fällen sehr deutlich, erfordert aber, falls sich das Auge nicht ganz in der Nähe der Drähte befindet, längere Dunkeladaptation. Man kann jedoch bei Beibehaltung der Coolidgeschen Anordnung das Leuchten sehr verstärken, so daß sofort beim Einsetzen der Wellen die Erscheinung für ein großes Auditorium ohne Dunkeladaptation sichtbar ist, indem man fluoreszierende Substanzen zur Verstärkung benutzt; als solche empfehlen sich Chininsulfat, Baryumplatincyanür, Uranglas.

Man kann dazu entweder die durch ein Kapillarrohr geschützten Drähte in eine mit Chininsulfat gefüllte Glasröhre bringen, oder aber Pappstreifen, die mit Chininsulfat-Gelatine (unter Zusatz von etwas Zitronensäure hergestellt), bez. Baryumplatincyanür bestrichen sind, an die Drähte anlegen. Namentlich Streifen mit Baryumplatincyanür geben ein intensives Leuchten an den Bäuchen der elektrischen Kraft. Streifen von Uranglas geben ein fast ebenso starkes Leuchten, doch dürfte ein Streifen mit Baryumplatincyanür der geringeren Kosten

1) Zum Teil beschrieben in den Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg Nr. 8. p. 121—127. Dezember 1902.

2) L. Arons, Wied. Ann. **45**. p. 553. 1892.

3) W. Coolidge, Wied. Ann. **67**. p. 578. 1899.

wegen vorzuziehen sein. In der ursprünglichen Anordnung von Coolidge liegen die Drähte in einer Horizontalebene. Zur Demonstration in einem größeren Auditorium ist es zweckmäßiger, sie senkrecht übereinander zu legen. Da der Blondlot-erreger jedoch hierfür nicht direkt eingerichtet ist, so bringt man zunächst in jede der beiden Klemmschrauben des Apparates einen rechtwinklig gebogenen ca. 6 cm langen dicken Kupferdraht derart, daß ihre Enden senkrecht übereinander liegen, und läßt die dünnen Lecherschen Drähte nun erst von diesen ausgehen. Ferner empfiehlt es sich, alles Nebenlicht abzublenden, namentlich die Funken des Induktoriums und des Teslatransformators. Je längere Wellen man verwendet, desto intensiver kann man sie nehmen, da bei sehr intensiven kurzen Wellen die dunklen Zwischenstellen zu kurz werden, um deutlich erkannt zu werden. Bei Wellen von ca. 80 cm Länge ist die Erscheinung sehr deutlich.[1])

Bringt man ein geladenes *Elektroskop* in die Nähe eines Bauches der elektrischen Kraft, so wird es schnell *entladen*, sowohl bei positiver wie bei negativer Ladung, bei ersterer jedoch bedeutend schneller. In der Nähe eines Knotens der elektrischen Kraft hingegen behält es seine Ladung unverändert bei.

Ferner tritt an den Bäuchen der elektrischen Kraft das *Dampfstrahlphänomen*, erhöhte Kondensation des Dampfstrahles, auf, während es an den Knoten ausbleibt.

Auch *Ozonbildung* ist an den Stellen der Bäuche der elektrischen Kraft durch Anlegen von Jodkaliumstärkepapier nachweisbar.

Alle diese Erscheinungen sind jedenfalls durch Ionisation der Luft durch Spitzenentladung zu erklären.[2]) Sie bleiben aus, wenn man die dünnen Drähte durch dickere ersetzt.

Man könnte auch an die von R. v. Helmholtz und F. Richarz[3]) nachgewiesene Ionenbildung durch schnelle elek-

---

1) Berührt man die Rückseite des Schirmes mit der Hand, so wird an der berührten Stelle das Leuchten besonders intensiv.

2) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32. p. 1. 1887.

3) R. v. Helmholtz u. F. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 161. 1890.

trische Wechselfelder denken; doch scheint die Ionenbildung durch Spitzenausstrahlung hier jedenfalls bei weitem intensiver oder allein maßgebend zu sein, da die Entladung des Elektroskopes nicht stattfindet, wenn man den Knopf des Elektroskopes mit einem Zylinder aus Ebonit, Papier oder dergleichen umgibt.

Ein Versuch, ob eine Selenzelle eine Widerstandsänderung an den Bäuchen der elektrischen Kraft erfährt, gab ein durchaus negatives Resultat.

Marburg, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 11. November 1903.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Dr. Steeg & Reuter,

Optisches Institut,

Homburg v. d. Höhe.

Specialität:

Apparate und Präparate
zur Polarisation, Interferenz, Beugung, Fluorescenz, Phosphorescenz des Lichts.

Orientirte Schliffe
von Mineralien und künstl. Krystallen.

Präparate
aus Kalkspath, Quarz, Steinsalz, Gyps und Glimmer.

Spectral-Apparate, Glasprismen und Linsen aller Art. — Röntgenschirme.

Diapositivplatte

mit Entwicklung

für Projektions-, Stereoskop- und Fensterbilder.

Otto Perutz, Trockenplattenfabr., München.

Illustrierter Katalog für Platten und Apparate gratis.

Vakuum-Pumpen

(sogenannte Ölpumpen)

liefern je nach Grösse $^3/_{10}$, $^1/_{100}$ bis $^1/_{1000}$ mm Vakuum;

bei Transmissionsantrieb ist eine weitere Erhöhung des Vakuums möglich!

Vakuummeter

nach **Mac Leod-Kahlbaum,**
bis 0,000001 mm Vakuum,

sowie

alle anderen physikalischen und chemischen Apparate und Einrichtungen kompletter Laboratorien

liefert als Specialität

MAX KOHL,

Chemnitz i. S.

Preislisten kostenlos!

Man verlange gratis und franko das soeben erschienene

Spezialpreisverzeichnis

über

Selen-Zellen und Apparate,

System **Ruhmer,**

von

☛ RUHMERS' ☚

Physikalischem Laboratorium.

Berlin S.W. 48.

Neu: **Selen-Zellen flacher Form** in rundem Hartgummigehäuse, für wissenschaftliche und Gebrauchszwecke.
D.R.P. 146262. D.R.P. ang. D.R.G.M. 201140.

Selen-Zellen zylindrischer Form in evakuierter Glasbirne mit Gewindefassung.
D.R.P. 147119. D.R.P. ang. D.R.G.M. 169259.

Komplette Instrumentarien zum Nachweis der Lichtempfindlichkeit des Selens.

Selen-Zündapparate. D.R.P. 136094.

Apparate für intermittierende Beleuchtung des Selens.

Apparate für Lichttelephonie mittels Acetylen- oder Bogenlichts.

Photographophone neuester Konstruktion.

☛ *Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist wohl die Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hilfe derselben gelang, eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von 15 km herbeizuführen, ein bisher von keiner anderen Seite auch nur annähernd erreichtes Resultat.*

LEPPIN & MASCHE, Berlin S.O.,

Engelufer 17.

Elektrische Centrifugalmaschine.

D.R.G.M.

Für Anschluß an Starkstromleitungen.
Gleichzeitig Antriebsmotor.
Tourenzahl regulierbar und meßbar.
Vorhandene Nebenapparate verwendbar.

Näheres „Berichte".

Preis Mk. 180.—.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektraskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

NEW WAVE-LENGTH SPECTROSCOPE

(CONSTANT DEVIATION).

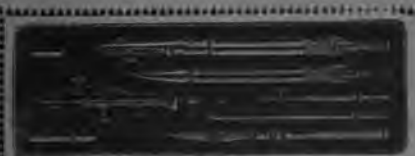
ADVANTAGES:—

Collimator & telescope are fixed at right angles; thus the spectroscope will stand in a corner, and is always ready for use & in adjustment. The prism is of special form and automatically sets itself at minimum deviation.

Can be supplied reading in wavelengths direct. Great accuracy readily obtainable in wavelength measurements.

Descriptive Pamphlet of this Spectroscope price free on application to

ADAM HILGER, 75A. Camden Road, LONDON N.W.



PARIS 1900
GRAND PRIX

Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren,
Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. München.
Gegründet 1841.

Dr. H. Geissler Nachf. Franz Müller,
Bonn a. Rhein.
Wissenschaftliche Glasapparate und Präcisionsinstrumente.
Specialität:
Elektrische Röhren nach *Geissler, Crookes, Puluj, Hittorff, Arons, Lecher etc.* — **Spectralröhren** (Argon- u. Helium-Röhren).
Röntgen-Röhren. — Braun'sche Kathodenstrahlröhren.
Tesla-Röhren. — **Luftpumpen** nach *Geissler* und *Töpler-Hagen.*
Rowland's Diffractionsgitter und Photogramme.
Feine Thermometer.
Kataloge auf Verlangen.

MAX WOLZ in Bonn a. Rh.
Werkstätte für wissenschaftliche Präcisions-Instrumente.

Physikalische Instrumente:

Spektrometer nach Rapa (Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 1887. H. 8 und Handb. d. Spektrosk. von H. Kayser, pag. 405) bis zu den Einfachsten. **Refractometer** nach Pulfrich. **Kathetometer. Ablesefernrohre** von den Einfachsten bis zu den Vollkommensten. **Apparat zum Ausmessen von Spektrophotogrammen** nach Kayser (Handb. des Spektrosk. von H. Kayser, pag. 644). **Längen- und Kreistheilmaschinen** f. d. verschied. Zwecke. **Lithographie von Sternkarten:** Bonner Sternkarten. II. Serie, Schönfeld. **Atlas stellarum variab.** J. S. Hagen, S.J.

UNGER & HOFFMANN
Gegründet 1878 DRESDEN-A. 16 Gegründet 1878
Projektionsapparate
für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, Familien-Vorträge.
Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.
Alle Lichtquellen. Laterndiapositive in reichster Auswahl.
Preislisten und technische Auskunft gratis und franco in Dresden.

Carl Zeiss, Optische Werkstaette, Jena.

Berlin NW., Dorotheenstrafse 29. II.
London W., 29 Margaret Street, Regent Street.
Wien IX/3., Ferstelgasse 1, Ecke Maximilianplatz.
Frankfurt a. M., Kaiserstrafse 16.
Hamburg, Rathausmarkt 8. St. Petersburg.

Spektrometer und Refraktometer (14 verschiedene Modelle);
Prismen jeder Art und optisch-physikalische Präparate, Spektroskope;
Dickenmesser, Komparatoren, Sphärometer und Fokometer;

Pulfrich's Stereo-Komparator, grofses Modell, für Platten 24 × 30 cm.

Dilatometer, Interferenzmefsapparate, Interferenztischchen etc.,
Interferenzrefraktometer und Schlierenapparate;
Stereo-Telemeter und Stereo-Komparatoren;
Neues Stereoskop, Stereo-Mikrometer und Stereo-Diapositivbilder;
Abbe'sches Diffraktionsmikroskop (Neukonstruktion).

Beschreibungen und Preislisten gratis und franko.
Bei Bestellungen Bezugnahme auf diese Annonce erbeten.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämmtlichen beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.

Mechanisches Institut,

gegründet 1856.

Specialität:

Physikalische und analytische Waagen

in garantirt vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Schnellschwingende

Waagen für Chemiker.

Preislisten kostenfrei.

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20.

Ampèremeter und Voltmeter

nach Deprez-d'Arsonval, D. R.-P.

Funkeninduktoren, Condensatoren, Spiegelgalvanometer.

Thermosäule

nach Angabe des Herrn Prof. Dr. Rubens.

Pyrometer

zum Messen von Temperaturen bis 1600° Celsius.

Galvanometer

zu Linde'schen Kältemessungen.

= Preisverzeichnisse kostenfrei. =

E. LEITZ,

Optische Werkstätte,

Wetzlar.

Zweiggeschäfte: **Berlin NW.**, Luisenstr. 45.

New York 411 W., 59th Str. **Chicago 32—38, Clark Str.**

Vertreter für **München:**

Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Neuestes Modell 1902.

Mikroskope,

Mikrotome, Mikrophotogr. und Projektions-Apparate.

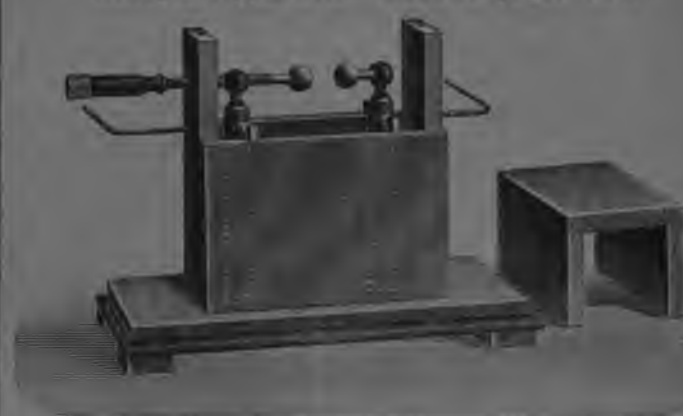
Preislisten kostenfrei.

J. Robert Voss,
Mechaniker,
Berlin N.O. 18, Pallisadenstr. 20.

Specialität:
Influenz-Elektrisir-Maschinen
aller Systeme
(auch die dazu gehörigen Nebenapparate)
und
Metall-Spiral-Hygrometer
in allen Ausführungen.

Physikalische Apparate.

Original-Konstruktionen.
Röntgen-Apparate. Modelle jeder Art.



Neue Preisliste, über
4000 Nummern und 1600 Abbildungen enthaltend,
erschienen.

Ferdinand Ernecke,

Hoflieferant Seiner Majestät des Kaisers.
Königgrätzerstr. 112, **Berlin S.W.**, Königgrätzerstr. 112.
Begründet 1866.

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Specialitäten: Momentplatten für Astronomische und Röntgenaufnahmen, für Aufnahmen fliegender Geschosse, Microphotographie und Spectralphotographie. — Orthochromatische Platten, Abziehplatten für Lichtdruck, Celluloïdfolien. — Rollfilms für Tageslichtcameras.

Trockenplattenfabrik a. Actien
vormals **Dr. C. Schleussner** in **Frankfurt a. M.**

Doppelwandige Glasgefäße
Pentanthermometer bis — 200° C. } zur flüssigen Luft,
einfache und automatische **Quecksilberluftpumpen, Röntgenröhren** mit und ohne **Vakuumregulierung, ff. Glasschliffe** und **-Hähne, Markoniröhren** etc. empfiehlt

R. BURGER, Berlin N. 4, Chausseestr. 2E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke.

sowie **Räder, Triebe, Zeigerwellen, schräge Triebe** und **Zahnstangen**

fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

A. Eberhard vorm. R. Nippe,

Berlin NW.,
Platz vor dem neuen Thor 1a.

Chemische und physikalische Apparate und Gebrauchsgegenstände.

Glas-Präcisions-Instrumente und volumetrische Messapparate.
Feinste Thermometer von —200 bis +550 Grad.
Quecksilber-Luftpumpen neuester Construction.
Vacuum-Röhren
nach *Braun, Crookes, Geissler, Hittorff, Puluj, Röntgen* etc.
Spectral-Röhren.
Mikroskope, Photometer,
Projectionsapparate, Spectralapparate aller Werkstätten
zu Originalpreisen.
Physikalisch-analytische Waagen und Gewichte aller Systeme.
Complete Einrichtung von Laboratorien u. Vorlesungsräumen.
Sachgemässe Kostenanschläge. Aeusserst billige Preise.
Grosse illustrirte Preislisten kostenlos.

Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! Neu!

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler,
verbessert nach Dr. Krecker
(gesetzlich geschützt).

Reiniger, Gebbert & Schall

Elektrotechnische Fabrik

Erlangen.

Filialen: **Berlin N,** Friedrichstr. 131c. **München,** Sonnenstr. 13. **Wien IX/3,** Universitätsstr. 12.

Hamburg, Bäckerbreite 12. **Budapest,** Alkotás 52.

Specialitäten:

Röntgen-Apparate neuester Konstruktionen,
Finsen- und Funkenlichttheil-Apparate,
Influenzmaschinen (D. R. P.), verbessertes System,
Töpler-Holtz,
von **hervorragender Leistungsfähigkeit,**
Volt- und Amperemeter, Kleinmotore,
Schalttableaux für Schulen, Ventilatoren etc.
Prospecte etc. gratis.

Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vortheilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.

Keine Dämpfe kein Geruch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

Alleinige Fabrikant: **Julius Pintsch, Berlin O.,** Andreasstr. 72/73.
Niederlage auch bei **E. Leybold's Nachf., Cöln a. Rhein.**

Hartmann & Braun, A.-G., Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Messinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Preussische Goldene Staatsmedaille.

1:5

154

Halbring-Elektromagnet nach H. du Bois, mit Waltenhofen'schem Pendel.

Kataloge auf Verlangen zur Verfügung.

W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. DR. M. APEL.

Geschäftsgründung 1808. **Göttingen.** Geschäftsgründung 1808.

Chemische und physikalische Apparate.

Specialität:

Rauchgasapparate, Calorimeter zur Bestimmung des Brennwertes der verschiedenen Brennstoffe und von Gasen, nach Ferd. Fischer.

Thermometer nach Ferd. Fischer. (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach Nernst. (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.)

Totalreflectometer nach Kohlrausch.

Demonstrationsapparate n. Behrendsen und Grimsehl.

Krystallmodelle aus Holz und Glastafeln nach Klein, Naumann und Rose.

Milchprüfungsbestecke nach Tollens.

MEISER & MERTIG,

Dresden-N. 6.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate jeder Art

in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

Funkeninduktoren.

Hochspannungsapparate.

Apparate für drahtlose Telegraphie.

Röntgenapparate.

Chemische Geräte.

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

Neue Preisliste kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Auszeichnungen: *Staatsmedaillen.*

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.

Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 Gold. Med.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

Ausführung von Uhrwerken und Apparaten für wissenschaftliche und technische Zwecke. Millimeterraster $^1/_{100}$—$^5/_{100}$mm direkt Ablesb.

Max Stuhl, Berlin.

Glastechnische Werkstätte

jetzt

130 Friedrichstrasse 130

(früher Philippstr. 22).

Elektrische und mechanische

Apparate nach Angabe.

Werkstatt für Feinmechanik, elektrotechnisches Laboratorium

H. BICHTELER, Glashütte i. S.

ARTHUR PFEIFFER,

Wetzlar O.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik.

Gegründet 1890.

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der

Patent-Geryk-Öl-Luftpumpen,

in Deutschland.

Komplette Pumpeinrichtung für Hand- und Motorbetrieb (1/4 P.S.).

Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Sämtliche Apparate zu Untersuchungen im hohen Vakuum, darunter Originalkonstruktionen:

Rezipient mit Flüssigkeitsdichtung D.R.G.M.
Umschalt- und Vielwegehähne D.R.P. a. und D.R.G.M.
Durchgangshähne D.R.G.M.
Trockenröhre mit auswechselbarem Einsatz für P_2O_5. D.R.G.M.

Reserviert

für die Firma:

Siegel & Bützinger Nachf.

in Dresden-A.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Luftelektrizität und Sonnenstrahlung.

Von **H. Rudolph.**

8°. 24 Seiten. Mit Figuren und Kurven im Texte. ℳ 1.—.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890:

Präcisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. (Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1891, Nov.-Dezember 1895.)

Normal-Widerstände von 0,001—10000 Ohm. — **Abzweig-Widerstände** von 1—0,0001 Ohm mit Petroleum- oder Luftkühlung, für Stromstärken bis 5000 Amp. — **Edelmann, Wheatstone'sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken** für alle Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — **Kompensations-Apparate** für genaue Spannungsmessung in 8 Modellen. — **Normal-Elemente,** beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präcisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenberg.

— *Illustrierte Preisliste.* —

Günther & Tegetmeyer.

Werkstatt für Präcisions-Mechanik

Braunschweig.

Wasserstrahl-Duplicatoren, Actinometer, Quadrantenelectrometer, Electroscope mit Natriumtrocknung (D.R.G.M.), Apparate zur Messung der Electricitätszerstreuung in der Luft, etc. nach **Elster** und **Geitel.**

Registrir-Electroscope nach **Birkeland** (konstruirt für den Gebrauch bei der norwegischen Nordlicht-Expedition 1899).

Photitheodolite für meteorologische Zwecke nach **Koppe.**

Ablesefernrohre.

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Berliner Werk

Berlin SW., Markgrafenstrasse 94.

Kompensationsapparat für genaue Strom- und Spannungsmessungen.

Normalwiderstände für Strommessungen.

Messbrücken für **Thomson**'sche und **Wheatstone**'sche Schaltung.

Widerstände aus **Manganindraht** von 1 und 10 Megohm in je 10 Stufen.

Spiegelgalvanometer nach **Deprez-d'Arsonval.**

Spiegel-Elektrodynamometer.

Panzergalvanometer.

Apparate für Eisenuntersuchungen.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplôme d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

Vertreter in allen Ländern.

Fabrik-Marke.

Emil Gundelach, Gehlberg i. Thüringen.

Glashütte mit Regenerativ-Gasofen. ❀ Glasbläserei mit eigener Gasanstalt.

Schleiferei. Tischlerei. Dampfbetrieb.

Röhren, Kolben, Bechergläser, Kochflaschen etc. aus Glas von hohem Widerstand gegen chemische Agentien und gegen Temperaturwechsel.

Sämmtliche Glasapparate und Instrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Doppelwandige Flaschen nach **Dewar** für flüssige Luft, versilbert und unversilbert.

Elektrische Vacuumröhren nach *Geissler, Crookes, Hittorf, Tesla, Moore* etc.,

speciell:

Röntgenröhren von hervorragender Qualität.

(**Röntgenröhren** für Wehnelt-Unterbrecher, D.R.P. No. 139 440, **Röntgenröhren** mit Regenerirvorrichtung, D.R.P. No. 101 080.)

Bis jetzt wurden über 37 000 Stück Röntgenröhren geliefert.

Die Firma besteht seit 1552.

Neuer Widerstand aller Drähte mit 20% u. 100% Belastg.
D. R.-Patent a.

Elektrizitätsgesellschaft

Gebr. Ruhstrat,

Göttingen.

Schlitten-, Schiefer- und Porzellanwiderstände von 15 cM an.

Schalttafeln

auf Schiefer oder Marmor

für physikalische, medicinische und technische Zwecke.

Dynamo-Maschinen, Elektromotoren,

sowie

Messinstrumente jeder Art.

Anfertigung elektrischer Apparate nach Zeichnung oder näherer Angabe.

Hauptkatalog gratis.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.

Thermometer

für

Wissenschaft und Technik,

von —200 bis +575°.

Barometer

mit constantem Nullpunkt,

eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren

nach

Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen, Pulnj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

Induktorien

mit Präcisions-Spiralstaffelwicklung Pat. Klingelfuss
von bisher unerreichter Leistungsfähigkeit und Haltbarkeit.
Auf wissenschaftlicher Basis construirt.
Für physikalische Arbeiten, Röntgenapparate, Herz'sche Schwingungen, drahtlose Telegraphie, Teslaströme und zum Laden von Condensatoren
auch bei Dauerbetrieb
gleich hervorragend. Reich illustrirte Preisliste zu Diensten.
Fabrikanten: Fr. Klingelfuss & Co. Basel (Schweiz).

Verlag von GUSTAV FISCHER in Jena.

Soeben erschien:

Gesammelte Abhandlungen

von

Ernst Abbe.

Erster Band.

Abhandlungen über die Theorie des Mikroskops.

Mit 2 Tafeln, 29 Textfiguren
und einem Porträt des Verfassers.

Preis: 9 ℳ, geb. 10 ℳ.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Kristallisieren und Schmelzen.

von **Dr. Gustav Tammann,**
Professor an der Universität Göttingen.

8°. X, 348 S. und 88 Abbildg. 1903. broch. ℳ 8,—, geb. ℳ 9,—.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS

Grands-Prix Expositions Universelles | Paris 1889 — Anvers 1894 | Bruxelles 1897 — Paris 1900

Cabinets de physique complets.

Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet adoptée pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1902, H. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence. **Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.**

Fils primaire du Dr. A. Vincent.

Paul Kröplin,
Bützow i. M.,
mech. Werkstätte für Lehrmittel,
Motorbetrieb,
liefert als Specialität
Apparate
nach Hertz, Marconi, Tesla, Röntgen, Lodge und Lecher.
Funkeninductoren und polarisirte Relais.
Alleinvertrieb für Oesterreich-Ungarn:
A. Pichlers Wittwe u. Sohn, Wien.

Rich. Magen,
Optiker und Mechaniker,
Berlin NW. 40, Scharnhorststr. 34a.
Für Spiegelgalvanometer:
Planparallel-Spiegel v. 3 bis 30 mm Durchm. Glas dünn u. leicht, sowie Hohlspiegel von 14 mm Durchm. 1—1_{00} etc. bis 3 Mtr. Focus. Glasscalen von $^1/_2$ bis 1_{00} Mtr. lang. Maassstäbe in Glas u. Metall (in beliebigen Intervallen) bis $^1/_{100}$ mm genau. Interferenzgitter für Schulen von 15—400 Striche per mm. Planparallelglas jeder Stärke, Glasprismen, Metallspiegel in Spiegelmetall.
Preisverzeichniss gratis.

C. A. Steinheil Soehne,
optisch-astronomische Werkstätte,
Gegründet 1855. **MÜNCHEN.** Gegründet 1855.

Astronomische Fernrohr-Objektive, zwei- und dreitheilig in allen Dimensionen bis 1 Meter Durchmesser, normaler Konstruktion und ohne sekundäres Spektrum.
Okulare, Prismen, Lupen, Plan- und Planparallelgläser.
Komplette astronomische Fernrohre mit und ohne Stativ.
Ablesefernrohre, terrestrische Hand- und Stativfernrohre, Prismenfernrohre.
Spektralapparate verschiedenster Konstruktion, mit und ohne photograph. Einrichtung.
Spektroskope, Spektrographen und Goniometer.
Preislisten frei auf Verlangen, auch über photographische Objektive und Zubehör.

RICH. SEIFERT & CO., Hamburg 13.
Elektrotechnische Werkstatt.
Komplette Röntgeneinrichtungen nach Dr. Albers-Schönberg und Dr. Walter.
Schutzvorrichtungen — gegen Röntgenstrahlen. —
Starkstrom-Dekadenwiderstände,
sind genau nach Zehnern, Einern und Zehntel Ohm abgeglüht, ermöglichen eine sehr feine Regulirung, sowie eine genaue Vorausberechnung der Stromstärke und sind besonders für Versuchszwecke zu empfehlen.
Die feineren Regulirtische werden auf Wunsch ebenfalls mit Ohm-Dekaden versehen und können außer zu Röntgenzwecken auch zu allen sonstigen Starkstromversuchen benutzt werden.
Kostenanschläge und Preislisten gratis.

Alt, Eberhardt & Jäger,

Ilmenau (Thüringen).

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläserei, Glasschleiferei, Holzwaarenfabrik, Mechanische Werkstatt, Schriftmalerei und Emailliranstalt.

Glas-Apparate, -Instrumente und -Utensilien

für chemischen, physikalischen und wissenschaftlichen Gebrauch.

Apparate für Vorlesungen, botanische Studien u. s. w.

Chemische Glasgeräthschaften für Laboratorien von Schulen, höheren Lehranstalten, Fabrikslaboratorien des chemischen Grossbetriebes.

Standgefässe für Museen.

Elektrische Röhren, Röntgen-Röhren.

Normal-Thermometer, Chem. Thermometer — 300 + 550°.

Normal-Aräometer in feinster Herstellung.

Glasröhren und -Stäbe.

Gesichte chemische Messgeräthe.

Anfertigung neuer Apparate nach Skizzen und Angaben.

= Eigenes chemisches Laboratorium. =

Exakte Ausführung.

Verlag von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.

Die Akkumulatoren.

Eine gemeinfassliche Darlegung ihrer Wirkungsweise, Leitung und Behandlung.

Von Prof. Dr. K. Elbs.

Dritte Auflage. Preis 1 Mark.

Ein treffliches Buch für die

Anleitung zum Glasblasen

von Prof. Dr. H. Ebert.

2. Auflage. M. 2.—

Technische Waagen verschiedener Construction

Präcisions-Waagen mit Spitzen. Mikrowaagen. Preisliste gratis und franco.

Kommerzielle Analysen-Probir-Waagen eigener patentirter Construction.

C. M. J. Bodien, Hamburg IV. 200.

Specialität elektrischer Glühlichtlampen

nach Muster und Zeichnung

Geissler-Röhren, Crookes-Apparate &

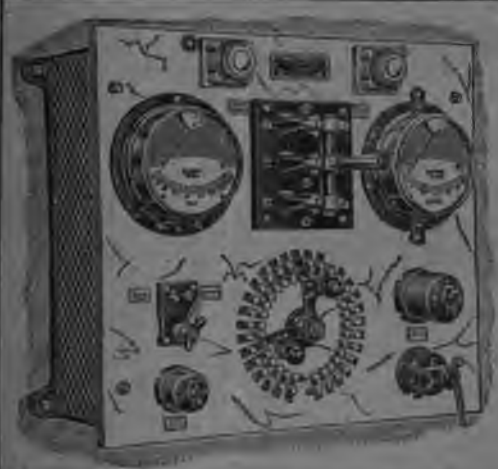
Glas-Instrumente für wissenschaftlichen Gebrauch

Max Kohl, Chemnitz i. S.

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

fertigt als Spezialität:

Funkeninduktoren für Gleichstrom mit veränderlicher Selbstinduktion für jede Spannung bis 250 Volt durch Induktionskommutator nach Kohl; für **Wehnelt-Unterbrecher** mit einem oder **mehreren Kontaktstiften; gleichgut** geeignet für **Anwendung weicher, mittelweicher** oder **harter** Röntgenröhren; für **ganz langsame** und **allerschnellste** Unterbrechungen verwendbar; die Einrichtung ermöglicht größte **Schonung** der Röntgenröhren bei sehr geringem Stromverbrauch und liefert **großartige Durchleuchtungen.** Bei Anwendung der **Schaltung** für **mittelweiche Röhren** kann **jeder rotierende Unterbrecher** in **voller Leistung** betrieben werden.



Experimentier-Schalttafeln!

A) zum Anschluß an 110—160 Volt für Stromstärken bis 12 bezw. 24 Ampere.

B) zum Anschluß an 220 Volt für Stromstärken bis 10 bezw. 20 Ampere.

☛ *Man verlange ausführlichen Spezial-Prospekt!*

Neu! **Wechselstrom-Gleichrichter** *Neu!*

zum **direkten Laden von Akkumulatoren** an einer **Wechselstrom-Anlage** und zum **Betrieb von Funkeninduktoren** durch **Wechselstrom, ohne daß ein weiterer Unterbrecher nötig ist.**

Projektionsapparate für Bogenlicht, Gleich- oder Wechselstrom, Kalklicht, Acetylen- oder Zirkonbeleuchtung, mit angesetzter optischer Bank.

Durch Aufsetzen einzelner Ansätze ist es möglich, die Projektions-Apparate für alle Polarisations-, Doppelbrechungs-, Interferenz- und Lichtbrechungsversuche zu verwenden!

Fabrikation physikalischer Instrumente, Apparate nach Tesla, Hertz, Marconi.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen u. chem. Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Neu! Spintharisкope, Neu!

mit Fluorescenzschirm und einer kleinen Menge Radium auf beweglichem Zeiger, um die außerordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen. **Preis Mk. 24.—.**

Spezial-Listen auf Wunsch.

E. Leybold's Nachfolger,

Köln a. Rh.

Mechanische und optische Werkstätten.

Neue Schwungmaschine mit Elektromotor zum Anschluss an eine Starkstromleitung.

Mit dem Apparat lassen sich sämtliche Versuche bequem anstellen. Die Abbildung zeigt die Centrifugalmaschine in Verbindung mit dem Apparat nach Slotte zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes.

Preisliste über Neue Apparate und Versuche auf Verlangen.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Bismarckstr. 9.

Mit zwei Beilagen von: Buchhandlung & Theil, Leipzig und

1904. № 3.

Stanford University JUN 14 1904

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. und E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 318. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT VIER TAFELN.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für de
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.
(Ausgegeben am 16. Februar 1904.)

Inhalt.

Seite

1. Albert Dahms. Beiträge zur Kenntnis von den Erscheinungen der Phosphoreszenz. (Hierzu Taf. X—XIII.) 425
2. E. Warburg. Über die Ozonisierung des Sauerstoffs durch stille elektrische Entladungen 464
3. Arthur W. Gray. Über die Ozonisierung des Sauerstoffs bei der stillen elektrischen Entladung 477
4. P. Eversheim. Verhalten von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten einiger Substanzen vor und in dem kritischen Zustand 492
5. P. Drude. Über induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie 512
6. G. Bakker. Die Faraday-Maxwellschen Spannungen . . 562
7. F. Himstedt. Über die radioaktive Emanation der Wasser- und Ölquellen 573
8. F. A. Schulze. Über drehende Schwingungen von dünnen Stäben mit rechteckigem Querschnitt und ihre Verwendung zur Messung der Elastizitätskonstanten 583
9. Gustav Teichner. Untersuchungen über kritische Dichte . 595
10. Gustav Teichner. Untersuchungen über kritische Verdampfungswärme 611
11. J. Traube und G. Teichner. Bemerkung über die kritische Temperatur des Wassers und des Quecksilbers 620
12. G. C. Schmidt. Über die Wirkung von Kanalstrahlen auf Aluminiumoxyd und Zinkoxyd (Antwort an Hrn. J. Tafel) . . 622
13. R. Gans. Magnetostriktion ferromagnetischer Körper (Bemerkung zu einer Arbeit des Hrn. A. Heydweiller) . . . 634
14. J. M. Eder und E. Valenta. Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels (Bemerkung zu der Abhandlung: G. Berndt, Das ultraviolette Funkenspektrum des Selen) . . 640

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen,** Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1904. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *Beiträge zur Kenntnis von den Erscheinungen der Phosphoreszenz; von Albert Dahms.*

(Hierzu Taf. X—XIII.)

[Gekürzte Leipziger Habilitationsschrift.[1])]

I. Historische Einleitung.

Der deutsche Physiker Seebeck[2]) war der erste, welcher fand, daß die Wirkung des Lichtes auf phosphoreszierende Substanzen je nach der Farbe eine vollständig verschiedene und sogar entgegengesetzte sein kann, derart, daß gewisse Lichtstrahlen eine Phosphoreszenz, welche durch andersfarbige Strahlen erregt war, ihrerseits auszulöschen vermögen. Die interessante Beobachtung Seebecks, daß im Gegensatz zu den brechbarsten Strahlen des Spektrums, den blauen und violetten, welche die Phosphoreszenz zu erregen geeignet sind, den weniger brechbaren Strahlen, den gelben und roten, gerade umgekehrt die Fähigkeit zukommt, auf eine schon bestehende Phosphoreszenz auslöschend zu wirken, blieb lange Zeit hindurch unbeachtet, so völlig unbeachtet, daß im Jahre 1842 Edmond Becquerel[3]) die Erscheinung von neuem entdecken konnte, ohne von der Beobachtung Seebecks irgend welche Kenntnis zu haben. Becquerel untersuchte die Erscheinung näher und zeigte weiter, daß die weniger brechbaren Strahlen die Phosphoreszenz nicht in so einfacher Weise zerstören, wie zuerst angenommen worden war. Er äußert sich später über diesen Punkt folgendermaßen[4]):

„In den ersten Augenblicken der Wirkung der roten, orangefarbigen und gelben Strahlen glänzen die phosphoreszierenden Sulfide zunächst auf; dann hört das Leuchten ganz

1) Leipzig 1903, bei Oskar Leiner.

2) J. W. Goethe, Zur Farbenlehre, III. Abteilung, p. 55, §§ 678, 679.

3) E. Becquerel, Compt. rend. 14. p. 903. 1842.

4) E. Becquerel, La lumière 1. p. 32. (Anmerkung) 1867.

auf. Es ist wahrscheinlich, daß dieser Teil der Strahlung, welcher die Phosphoreszenz zerstört, sie zerstört nach Art der Wärme. Da die phosphoreszierenden Körper, nachdem sie der Strahlung ausgesetzt worden, nur eine bestimmte Summe von Licht wiederzugeben fähig sind, so würden die weniger brechbaren Strahlen hiernach zu einer schnelleren Lichtverausgabung Veranlassung geben, und wenn die Substanzen alles Licht ausgesandt haben, welches sie hervorbringen können, müßten sie aufhören zu leuchten."

Wir verdanken E. Becquerel die eingehendsten und sorgfältigsten Untersuchungen über die Phosphoreszenzerscheinungen. Zu beklagen bleibt nur, daß er seine Resultate nur durch unmittelbare okulare Beobachtungen zu gewinnen in der Lage war, da zur Zeit seiner Arbeiten die hochempfindliche Bromsilbergelatinetrockenplatte noch nicht erfunden war. Bei der häufig recht geringen und meist schnell abnehmenden Stärke des Phosphoreszenzlichtes ist das menschliche Auge, namentlich längere Zeit nach Erregung der Phosphoreszenz, nicht mehr imstande, feinere Beurteilungen von Helligkeitsunterschieden mit Sicherheit vorzunehmen; in dieser Beziehung ist ihm, wenigstens wenn das Phosphoreszenzlicht dem stärker brechbaren Spektralgebiete angehört, die photographische Platte an Empfindlichkeit und objektiver Wiedergabe der Erscheinungen bei weitem überlegen. Es ist daher sehr begreiflich, daß man später die photographische Platte heranzog, um von den Einwirkungen, welche phosphoreszierende Substanzen durch die verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums erfahren, ein objektives, bleibendes Bild zu erhalten, welches, nachdem es in üblicher Weise entwickelt und fixiert worden war, in aller Muße am Tageslicht betrachtet und nach Bedarf ausgemessen werden konnte.

Was nun die mit bloßem Auge vorgenommenen Untersuchungen E. Becquerels betrifft, so hatten schon diese zu dem Ergebnis geführt, daß die Phosphoreszenz auslöschende Wirkung nicht nur auf die gelben, orangefarbigen und roten Strahlen des Spektrums sich beschränkt, sondern — wenigstens bei den besonders lange nachleuchtenden und deshalb zu solchen Untersuchungen besonders geeigneten Erdalkalisulfiden und dem Zinksulfid — ein gutes Stück ins Ultrarot

hinübergreift. Durch die Verwendung solcher phosphoreszierenden Substanzen ist also die Möglichkeit gegeben, spektrale Untersuchungen im ultraroten Strahlungsgebiete auszuführen, für welches photographische Bromsilbergelatineplatten bekanntlich sich nur schwierig und unzulänglich sensibilisieren lassen, und für dessen Studium man sonst auf die viel umständlicheren, wenn auch viel universelleren Methoden mit dem Thermoelement oder dem Bolometer angewiesen ist.

Solche Untersuchungen sind verschiedentlich angestellt worden, schon von E. Becquerel,[1]) dann in sehr ausführlicher Weise von dessen Sohne H. Becquerel,[2]) welcher auf diese Weise das Sonnenspektrum etwa bis zur Wellenlänge 1,5 μ studiert hat. Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, daß die nach seinen diesbezüglichen Untersuchungen von H. Becquerel entworfene Zeichnung des ultraroten Sonnenspektrums fast gar nicht in Übereinstimmung gebracht werden kann mit den Resultaten, welche andere Forscher auf thermoskopischem, photographischem und phosphoro-photographischem Wege erhalten haben. Es dürfte dies in erster Linie auf die oben erwähnte Mißlichkeit okularer Beobachtungen an phosphoreszierenden Substanzen zurückzuführen sein. Auch Absorptionsspektra fester und flüssiger Körper im Ultrarot hat H. Becquerel nach dieser Methode untersucht; doch dürfte auch diesen Untersuchungen aus dem gleichen Grunde kein besonders hoher Grad von Verläßlichkeit zuzuschreiben sein.

Es war Draper[3]), welcher als der erste eine Kombination phosphorographischer und photographischer Methoden versuchte, um sich von den Mängeln der einfachen phosphorographischen Methode zu befreien, und welcher an die Stelle des vergänglichen und schwierig zu untersuchenden Phosphorogramms ein von diesem gewonnenes, bleibendes und der Untersuchung jederzeit leicht zugängliches Photogramm gesetzt hat. Als Übelstand seiner „phosphoro-photographischen" Methode erwähnt er, daß eine von einem Phosphorogramm genommene photographische Kontaktkopie niemals scharf ist. Er erklärt

1) E. Becqerel, Compt. rend. **77.** p. 30. 1870; **83.** p. 249. 1876; Ann. de chim. et phys. (5) **10.** p. 5. 1877.

2) H. Becquerel, Ann. de chim. et phys. (5) **30.** p. 1. 1883.

3) J. W. Draper, Phil. Mag. (5) **11.** p. 160. 1881.

diese Erscheinung dadurch, daß die einzelnen leuchtenden Partikel der Phosphoreszenzplatte ihr Licht nach allen Richtungen ausstrahlen, wodurch ein Übergreifen der Lichtwirkung von leuchtenden Stellen auf nicht leuchtende Stellen stattfindet, so daß keine scharfen, klaren Linien entstehen können.

Trotzdem unternahm es Fomm[1]) auf Anregung von Lommel, das phosphorographische Bild des ultraroten Sonnenspektrums zu photographieren. Als phosphoreszierenden Körper verwendete er die im Handel erhältliche Balmainsche Leuchtfarbe. Die Untersuchung zeigte, daß die „phosphoreszierende Platte in mancher Hinsicht zur Darstellung des Spektrums sich besser eignet als die photographische Platte, wenn sie auch an Schärfe mit letzterer nicht konkurrieren kann". Es erwies sich, daß die Phosphoreszenzplatte nicht nur zur Bestimmung von Fraunhoferschen Linien im auslöschenden Teile des Sonnenspektrums, sondern sogar, im Gegensatz zu der oben erwähnten Draperschen Bemerkung, auch zur Photographie von Fraunhoferschen Linien im erregenden Spektralgebiet verwendbar ist, wenn man auch natürlich im Gebiete photographisch gut wirksamer Strahlen für Meßzwecke der unmittelbaren Photographie wegen des feineren Plattenkornes unbedingt den Vorzug geben wird. Das von Fomm auf diesem Wege gewonnene Sonnenspektrum reicht ins Ultrarot etwa bis zur Wellenlänge 0,95 μ.

Einer sehr interessanten Beobachtung Fomms muß hier Erwähnung geschehen, weil sie mit den in der Folge mitzuteilenden Untersuchungen im engsten Zusammenhange steht.

Fomm hat nämlich durch seine Phosphorophotographie des Sonnenspektrums mittels Balmainscher Leuchtfarbe in dem Spektralgebiet von 0,384—0,396 μ, also an der Grenze von Violett und Ultraviolett, ein Band gefunden, welches nicht zu stärkerer Phosphoreszenz angeregt, sondern ausgelöscht erscheint. Da er weitere Bemerkungen dazu nicht macht, so scheint er diese Erscheinung als eine besondere Eigenschaft des von ihm verwendeten phosphoreszierenden Körpers, der Balmainschen Leuchtfarbe (Calciumsulfid mit Wismutzusatz) anzusehen.

---

1) L. Fomm, Inaug.-Diss. München 1890; E. Lommel, Wied. Ann. 40. p. 681—690. 1890.

Diese Fommsche Beobachtung ist nun im höchsten Grade geeignet das Interesse auf sich zu lenken; zeigt sie doch, daß durch kurzwellige Strahlen, welche die Phosphoreszenz lebhaft zu erregen imstande sind, unter Umständen eine schon bestehende Phosphoreszenz geschwächt werden kann.

Es war auf p. 425 erwähnt, daß E. Becquerel die Phosphoreszenz auslöschende Eigenschaft gewisser Strahlen auf deren Wärmewirkungen zurückgeführt hat. Diese Erklärung Becquerels auf die von Fomm beobachtete Auslöschung im Ultraviolett anzuwenden scheint aus dem Grunde unzulässig, weil der gesamte Energieinhalt des auf jenes Gebiet entfallenden Teiles des Sonnenspektrums vergleichsweise nur ein sehr geringer ist, so daß selbst bei Annahme einer vollständigen Umwandlung in Wärme nur äußerst schwache thermische Wirkungen zu erwarten sein sollten. Es scheint also, als ob die Becquerelsche Erklärung nicht geeignet ist, jedem Falle von Phosphoreszenzauslöschung durch strahlende Energie gerecht zu werden; ist sie aber nicht allgemein gültig, so ist der Zweifel an ihrer Richtigkeit auch für das langwellige Spektralgebiet nicht ohne weiteres abzuweisen. Fomm selbst hat sich über die physikalische Bedeutung des von ihm gefundenen ausgelöschten Bandes im Ultraviolett nicht weiter ausgesprochen.

Die Fommsche Beobachtung erscheint um so merkwürdiger, als E. Becquerel in seinen höchst sorgfältigen und umfassenden Arbeiten über keinen ähnlichen Fall berichtet. Das von ihm in seinem Buche „La Lumière“ im ersten Bande reproduzierte Phosphorogramm der Spektrumswirkung auf blauviolett phosphoreszierendes Calciumsulfid zeigt zwar in der Nähe der von Fomm angegebenen Stelle eine Lücke in der Phosphoreszenzerregung, doch fehlt jeder Hinweis darauf, daß an dieser Stelle unter Umständen auch eine Phosphoreszenz auslöschende Wirkung vorhanden sein kann. Es ist dies kaum anders zu erklären, als daß Becquerel eine solche Wirkung in der Tat nicht beobachtet hat.

Es ist bisher immer von Phosphoreszenz erregenden und Phosphoreszenz auslöschenden Strahlen die Rede gewesen, dem üblichen Sprachgebrauche gemäß. Doch schon E. Becquerel erkannte, allerdings *nur für ein ganz eng begrenztes Spektral-*

gebiet, die Unzulässigkeit einer strengen Unterscheidung dieser Art.[1]) Er ist vielmehr durch seine sorgfältigen Untersuchungen der Phosphoreszenzerscheinungen zu der Erkenntnis geführt worden, daß Strahlen einer bestimmten Wellenlänge, welche einen *nicht* leuchtenden Körper in Phosphoreszenzleuchten zu versetzen fähig sind, umgekehrt, auf denselben Körper wirkend, nachdem dieser durch eine andere Strahlungsquelle zu *kräftiger* Phosphoreszenz erregt ist, eine Phosphoreszenz vermindernde Wirkung betätigen können, so daß die von ihnen getroffenen Stellen der Phosphoreszenzplatte gegen die nicht von ihnen bestrahlte Umgebung abdunkeln. Allerdings beschränkt Becquerel diese merkwürdige Eigenschaft ausdrücklich auf die zwischen den Fraunhoferschen Linien *F* und *G* gelegenen Strahlen, welche nach ihm die Rolle eines „moderateur" übernehmen und einen Übergang von den stets Phosphoreszenz erregenden zu den stets Phosphoreszenz auslöschenden Strahlen darstellen sollen.

Von *diesem* Standpunkte aus war ein Zusammenhang dieser zuerst von Becquerel beobachteten Umkehr der Wirkungsweise der Strahlen zwischen *F* und *G* mit dem von Fomm bei Balmainscher Leuchtfarbe im Ultraviolett aufgefundenen Auslöschungsgebiete nicht wohl denkbar. Immerhin erschien es nicht unlohnend, diese absonderlichen Verhältnisse einer neuen experimentellen Untersuchung zu unterziehen, weil es nicht für ausgeschlossen gehalten wurde, diese scheinbar ganz unzusammenhängenden Erscheinungen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt und damit einem theoretischen Verständnis vielleicht ein wenig näher bringen zu können.

II. Apparat. Untersuchungsmethode.

Im Interesse möglichster Vollständigkeit der Untersuchung wäre es natürlich wünschenswert gewesen, tunlichst das ganze bekannte Strahlungsgebiet vom Ultrarot bis Ultraviolett in die Untersuchung einzubeziehen. Um von dem ultravioletten Teile des Spektrums möglichst wenig durch absorbierende Mittel zu verlieren, wäre es am vorteilhaftesten gewesen, einen Quarz- oder noch besser einen Flußspatspektrographen zu benutzen, nach V. Schumann möglichst einen solchen mit Einrichtung

1) E. Becquerel, La lumière 1. p. 303, 304. 1867.

zum Evakuieren oder für Wasserstoffüllung. Ein solcher stand mir jedoch nicht zur Verfügung, so daß die Untersuchung im Ultraviolett auf solche Strahlen beschränkt bleiben mußte, welche durch dickere Glasschichten noch hindurchzudringen vermögen. Was das ultrarote Strahlungsgebiet anlangt, so wird dasselbe von etwa 3 μ an vom Glase in zunehmender Stärke absorbiert, so daß auch über etwa vorhandene Wirkungen der jenseits dieser Grenze gelegenen ultraroten Strahlen auf die untersuchten phosphoreszierenden Körper aus der vorliegenden Untersuchung keine sicheren Schlüsse gezogen werden können.

Das bei der Untersuchung benutzte *Instrument* war ein älteres Spektrometer, welches, ursprünglich nur zu okularen Messungen bestimmt, erst mit einer Einrichtnng zum Photographieren des Spektrums versehen werden mußte. Die Linsen am Kollimator und Beobachtungsrohr waren von einer für photographische Zwecke ungenügenden Achromasierung und wurden durch vierfache, verkittete Protarlinsen von C. Zeiss ersetzt (Serie VII, Nr. 4, Linsendurchmesser 31 mm, Äquivalentbrennweite etwa 350 mm, Öffnungsverhältnis 1 : 12.5). Diese gaben über das Spektralgebiet von der Fraunhoferschen Linie *C* im Rot bis an die Grenze des mittels des Apparates photographierbaren Ultraviolett (etwa Linie *O*) mit voller Öffnung bei senkrecht zur Achse aufgestellter Platte ein Bild von vorzüglicher Schärfe; jenseits *C* ließ dagegen die Schärfe merklich nach, um im Ultrarot ganz ungenügend zu werden. Doch wurde an diesem Übelstand weiter kein Anstoß genommen, da es sich zunächst bei der ganzen Untersuchung nur darum handeln sollte, einen Überblick über die obwaltenden Verhältnisse zu gewinnen, nicht aber, Präzisionsmessungen auszuführen.

Um nicht unnötig viel ultraviolettes Licht zu verlieren, wurde zur Erzeugung des Spektrums ein Prisma aus Crownglas benutzt (brechender Winkel 60°), da bekanntlich Flintglas für ultraviolette Strahlen viel weniger durchlässig ist. Die geringere Dispersion des Crownglases kam für die Zwecke dieser Arbeit nicht störend in Betracht.

Ein sehr schönes Rowlandsches Plangitter, dessen Verwendung wegen der leichteren Orientierungsmöglichkeit im

Gitterspektrum den Vorzug vor dem Prisma verdient hätte, konnte wegen der zu geringen Lichtstärke der von ihm entworfenen Spektra der vergleichenden Untersuchung einer Anzahl phosphoreszierender Substanzen nicht zugrunde gelegt werden. Es besteht die Absicht, mit einem gegenwärtig im Bau begriffenen, etwa zehnmal lichtstärkeren Spektographen die Versuche später wieder aufzunehmen und in mehrfacher Hinsicht zu vervollständigen und zu erweitern.

Die bei der Untersuchung benutzte *Lichtquelle zur Erzeugung des Spektrums* war eine Projektionslampe von Schuckert & Co., Nürnberg, für 25 Ampere. Die Kohlen wurden in schräger Lage verwandt, die positive oben. Ein Teil des vom Krater der positiven Kohle ausgesandten Lichtes wurde durch ein Porträtobjektiv Petzvalscher Konstruktion von etwa 27 cm Äquivalentbrennweite gesammelt, welches auf den Spalt des Spektrographen ein etwas vergrößertes Bild des Kraters entwarf. Die bedeutende Lichtstärke des Petzvalschen Objektives (Öffnungsverhältnis etwa $f/_{3.5}$) konnte wegen des geringen Öffnungsverhältnisses der Spektrometerlinsen ($f/_{12.5}$) nur zum Teil ausgenutzt werden. Das vom Spektrometerspalt ausgehende Lichtbündel fiel auf die im Abstande ihrer Brennweite befindliche Kollimatorlinse, durchsetzte dann das oben erwähnte Crownglasprisma, welches in der Minimumstellung für die Na-Linie aufgestellt war, und wurde nach erfolgter Dispersion durch die am Beobachtungsrohr befindliche Linse aufgefangen, welche so auf der senkrecht zur Achse im Abstande der Brennweite befindlichen Phosphoreszenzplatte ein reelles Bild des Spektrums entwarf. Dieses Spektrum war das kontinuierliche des weißglühenden Kraters mit dem darüber gelagerten Banden- und Linienspektrum des Flammenbogens, von welch letzterem jedoch nur der durch intensive Banden und Linien ausgezeichnete Teil im äußersten Violett und Ultraviolett merklich in die Erscheinung trat. Als Marken in diesem brechbarsten Teile des Spektrums können mit Vorteil eben jene Banden benutzt werden; um auch im sichtbaren Teile des Spektrums eine Marke zu haben, wurde in die Kassette, in welche die Phosphoreszenzplatte eingelegt wurde, unmittelbar vor der Platte ein Metallrahmen mit einem Fadenkreuz aus dünnem Draht eingefügt und dieses Fadenkreuz auf die

Na-Linie eingestellt, für welche Linie, wie bereits bemerkt, das Prisma sich in der Stellung minimaler Ablenkung befand. Für eine möglichst feste, unverrückbare Lage des Prismas und des Fadenkreuzes wurde Sorge getragen, selbige auch des öfteren kontrolliert. Der Schnittpunkt des Fadenkreuzes fiel in die gerade Linie, in welcher ein unmittelbar vor dem Spalte senkrecht zu diesem und in der Mitte desselben ausgespannter feiner Metalldraht sich projizierte.

Für die Herstellung der *Phosphoreszenzplatte* habe ich nach sehr vielen Versuchen schließlich den Weg eingeschlagen, welchen vor mir Fomm als den geeignetsten befunden hatte. Eine eben geschliffene Glasplatte in einer dem Formate der Kassette entsprechenden Größe (6×9 cm^2) wurde mit einem Rahmen verklebt oder verkittet, welcher einen Streifen von 1,5 cm Breite und etwa 8—8,5 cm Länge frei ließ. Dieser Rahmen wurde aus 0,5 bis 1 mm dicken Spiegelglasstreifchen zusammengefügt oder einfacher aus einem entsprechend dicken Karton herausgeschnitten oder aus einer Metallplatte herausgesägt. In die so entstehende Vertiefung wurde die phosphoreszierende Substanz in Gestalt eines feinkörnigen Pulvers eingefüllt und mit einer darüber gelegten Spiegelglasplatte, welche darauf vorsichtig abgehoben wurde, festgedrückt. Man erhält so eine zumeist sehr ebene, gleichmäßig dicke Schicht, welche, je nach der Natur des Pulvers, mehr oder weniger fest zusammenhängt und bei genügender Vorsicht in die senkrechte Lage gebracht werden kann, um sie dem Spektrum auszusetzen, ohne daß Teile abbröckeln. Um den Zusammenhalt des Pulvers zu steigern, empfiehlt es sich, die Platte nach dem Andrücken des Deckglases mit der Richtung des Streifens in die senkrechte Lage zu bringen und auf den Tisch zu klopfen, wodurch das Pulver nach unten gedrängt wird und fester zusammensickert. In die oben entstehende Lücke wird nach Wagerechtlegen der Platte neues Pulver aufgefüllt und dann das Verfahren fortgesetzt, bis der ganze Hohlraum möglichst mit einem Maximum der Pulvermenge erfüllt ist, welche sich dann in einem Zustande ziemlich festen Zusammenhanges befindet. Übrigens verhalten sich verschiedene Pulver in dieser Beziehung sehr verschieden; während bei manchen, z. B. pulverisiertem Flußspat, die Körnchen sehr fest an-

einander haften, geben andere nur einen recht losen Zusammenhalt.

Da bei dieser Herstellung der Phosphoreszenzplatte alle Kleb- und Bindemittel vermieden sind, so erhält man Resultate, welche von jeder Beeinflussung des Phosphoreszenzkörpers durch fremde Körper frei sind. Dies ist der Hauptvorzug einer so hergestellten Platte für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung, da andernfalls wieder besondere Versuche nötig geworden wären zur Entscheidung der Frage, inwieweit eine solche Beeinflussung vorhanden oder nicht vorhanden ist. Ein weiterer Vorteil einer solchen Platte ist die Möglichkeit, sie schnell und mit einer großen Ebenheit der Schicht herstellen zu können, ihr Hauptnachteil ihre leichte Zerstörbarkeit, welcher aber für diese Untersuchung durch die leichte Wiederherstellungsmöglichkeit ziemlich aufgehoben erscheint.

Das Licht, mit welchem die allgemeine Phosphoreszenz der Platte hervorgerufen wurde, bevor man das Spektrum auf ihr entwarf, war je nach dem Versuch verschiedenen Ursprungs; es ergaben sich hierbei sehr interessante Unterschiede in den beobachteten Erscheinungen, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Um auch die reine Phosphoreszenz erregende Wirkung der verschiedenen Strahlen feststellen zu können, ohne Rücksicht auf etwa vorhandene auslöschende Wirkungen, wurde bei jeder Substanz die Wirkung des Spektrums auch auf die vorher nach Möglichkeit jedes Phosphoreszenzlichtes beraubte Substanz untersucht. Die betreffende Platte wurde zu diesem Zwecke im Dunkeln längere Zeit ziemlich stark erwärmt (auf 200—300° C.), und bis zum Versuche, welcher erst nach mehreren Tagen oder Wochen erfolgte, in einem Blechkasten vor Licht geschützt aufbewahrt, wie auch das Einlegen in die Kassette im Dunkeln vorgenommen wurde.

War die Aufnahme des Spektrums auf der Phosphoreszenzplatte erfolgt, wobei die Vorbelichtung der Platte und die Dauer der Einwirkung des Spektrums von verschiedenen Gesichtspunkten aus mehrfach variiert wurde, so handelte es sich nun darum, von dem Resultat der Einwirkung ein bleibendes, objektives Bild herzustellen, da, wie schon eingangs erwähnt, die okulare Untersuchung der Phosphoreszenzplatte selbst unter

allen Umständen abzuweisen ist. Der Natur der Sache nach konnte dieses Bild nur ein photographisches sein. Hierbei bin ich in der Mehrzahl der Fälle bei dem einfachsten, wenn auch hinsichtlich der Schärfe des Bildes unvollkommensten Verfahren stehen geblieben, welches zuerst Draper und nach ihm Fomm angewandt haben, nämlich bei der Übertragung des phosphorographischen Bildes auf die photographische Platte durch einfachen Kontakt. Die Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt in dem vorliegenden Falle darin, die photographische Platte unter möglichstem Ausschluß fremden Lichtes, welches zumeist den Leuchtzustand der Phosphoreszenzplatte beeinflußt, so auf die Phosphoreszenzplatte zu legen, daß sich dabei das feine Pulver, aus welchem die Phosphoreszenzschicht besteht, nicht verschiebt. Da ferner jedes leuchtende Teilchen der Phosphoreszenzschicht nicht nur auf die gerade zunächst gegenüberliegenden Teilchen der photographischen Platte, sondern, wenn auch mit schnell abnehmender Intensität, auch auf die benachbarten Teilchen strahlt, so ist klar, daß die in dieser Weise erhaltenen photographischen Abdrücke an Schärfe hinter dem phosphorographischen Original zurückstehen müssen.

In der Tat erhält man außerordentlich viel vollkommenere Bilder, wenn man das photographische Abbild nicht durch Kontakt, sondern mit Hilfe der Kamera herstellt. Leider eignen sich aber hierzu wegen des bei dieser Methode unvermeidlichen, beträchtlichen Lichtverlustes nur solche Substanzen, welche photographisch sehr stark wirksames Phosphoreszenzlicht ausstrahlen, wie dies z. B. bei der Balmainschen Leuchtfarbe der Fall ist. Bei der Verwendung dieses Körpers habe ich vermittelst eines photographischen Vergrößerungsapparates (Doppelkamera) und eines lichtstarken Voigtländerschen Porträtobjektives, indem ich nach Abschluß des Tageslichtes das Phosphorogramm in den Rahmen für das zu reproduzierende Bild einsetzte und die Verausgabung des Phosphoreszenzlichtes durch Erwärmung mittels einer heißen Metallplatte beschleunigte, in kurzer Zeit ein noch dazu linear doppelt vergrößertes photographisches Abbild erhalten, welches alle Einzelheiten der Original-Phosphoreszenzplatte in schärfster Weise zur Darstellung brachte. Da es aber bei vielen anderen

phosphoreszierenden Körpern schon Schwierigkeiten hat, von ihnen, besonders nachdem längere Zeit seit der Phosphoreszenzerregung verstrichen ist, durch Kontakt ein genügend kräftig entwickelbares Negativ zu gewinnen, so wurde im Interesse eines einheitlichen Charakters der Untersuchung in der Folge die Reproduktion statt mit der Kamera durch bloßen Kontakt vollzogen, was um so zulässiger schien, da es ja bei dieser in der Hauptsache nur qualitativen Untersuchung auf die Wiedergabe der feinsten Details nicht ankommen konnte.

Zur Orientierung in den der Arbeit in Originalgröße beigefügten Spektro-Phosphorophotographien habe ich mittels desselben Spektographen eine direkte photographische Aufnahme des Sonnenspektrums auf einer rotempfindlichen Trockenplatte von Lumière-Lyon (Serie B) vorgenommen. Das Spektrum erstreckt sich auf dieser Aufnahme von der Fraunhoferschen Linie *A* bis ins Ultraviolett; es haben in ihm die am meisten hervortretenden Fraunhoferschen Linien von der *D*-Linie folgende Abstände *d* (nach der Seite der roten Strahlen zu negativ, nach der anderen positiv gezählt):

Linie	*A*	*a*	*B*	*C*	*D*	*E*	*b*	
λ ($\mu\mu$)	762	718,5	687	656	589	527	518	517
d (mm)	— 5,9	— 4,8	— 3,9	— 2,9	0	+ 3,8	4,4	4,5

Linie	*F*	*e*	*f*	*G'*	*G*	*g*	*h*
λ ($\mu\mu$)	486	438,4	434,0	432,6	430,8	422,7	410,2
d (mm)	7,3	13,05	13,7	13.95	14,2	15,5	17,8

Linie	*H*	*K*	*L*	*M*		*N*	*O*
λ ($\mu\mu$)	396,8	393,4	382	373,5	372,5	358,1	344,1
d (mm)	20,6	21,35	23,75	26,15	26,3	29,9	33,8

Was das zur Untersuchung gelangte *Material an phosphoreszierenden Substanzen* anlangt, so beschränkt es sich aus praktischen Gründen, zu welchen in erster Linie die geringe Lichtstärke des Spektographen zu rechnen ist, auf vier

Körper: 1. Balmainsche Leuchtfarbe (Calciumsulfid mit Wismutzusatz); 2. Strontiumsulfid mit Kupferzusatz; 3. Zinksulfid nach Henry; 4. Flußspat.

III. Versuchsresultate, Folgerungen.

1. Balmainsche Leuchtfarbe (Calciumsulfid mit Wismutzusatz).

Die Balmainsche Leuchtfarbe war käuflich bezogen und wurde in Form von Ölfarbe geliefert. Um sie von den Beimengungen möglichst zu befreien, wurde das Öl abgegossen, der Rückstand zu wiederholten Malen mit bestem Terpentinöl, absolutem Alkohol und Benzol ausgewaschen und das so erhaltene sehr feine gelblichweiße Pulver getrocknet. In luftdicht verschlossenem Gefäß hält es sich unverändert; in feuchter, säurehaltiger Luft findet allmähliche Zersetzung statt, und die Intensität des Phosphoreszenzlichtes nimmt ab; doch hatte sich Pulver, welches monatelang im Laboratorium der Luft ausgesetzt war, noch einen beträchtlichen Teil der Leuchtfähigkeit bewahrt. In Form eines Ölanstriches ist die Leuchtfarbe unter gewöhnlichen Verhältnissen anscheinend sehr beständig.

Taf. X enthält die positiven Kopien der mittels Balmainscher Leuchtfarbe gewonnenen Spektrophosphorophotographien.

Bei Nr. 1 war die Phosphoreszenzplatte im weißem Lichte des Kraters der Bogenlampe erregt, worauf sie in die Kassette gebracht und möglichst bald (etwa 15—20 Sek. nach Aufhören der Erregung) bei etwa $^1/_5$ mm breitem Spalt dem Spektrum auf die Dauer von 1 Min. exponiert wurde. Nach der Exposition wurde, um Fehler zu vermeiden, welche durch „Anfachung" der Phosphoreszenz im weniger brechbaren Teil des Spektrums entstehen können, und weil solche anfachenden Wirkungen bei der Balmainschen Leuchtfarbe besonders stark beobachtet wurden, das Phosphorogramm nicht sofort, sondern erst nach Verlauf einer weiteren Minute mit der photographischen Platte in Berührung gebracht. Die Dauer des Kontaktes wurde auf 1 Min. bemessen, darauf die Platte (Momentplatte von Schleussner) sofort entwickelt.

Hierbei muß bemerkt werden, daß die Dauer des Kontaktes und der Entwickelung sich immer nach dem Charakter des Spektrophosphorogramms richtet, auf dessen gute photographische Fixierung es ja ankommt. Eine Folge hiervon ist,

daß die Photographien keinen Schluß auf die Helligkeitsverhältnisse der Platte bei den verschiedenen Aufnahmen zulassen, sondern es kann sehr wohl vorkommen, daß der hellere Grund des einen Abdruckes einem weniger hellen Phosphoreszenzlicht entspricht als der dunklere Grund eines anderen Abdruckes. Bei der Diskussion der verschiedenen Aufnahmen kann es sich immer nur um das Verhalten des vom Spektrum bestrahlten Stückes relativ zum unbestrahlten Grunde handeln, niemals um Helligkeitsvergleiche für den Übergang von einem Phosphorophotogramm zum anderen.

Wir erkennen an dem Spektrum in Nr. 1 ausgelöschte und erregte Teile. Die auslöschende Wirkung des Spektrums beginnt im Ultrarot bei $-9{,}4$ mm Abstand von der *D*-Linie und tritt hier gleich sehr stark in die Erscheinung bis zu $-7{,}5$; dann kommt ein Band stark verminderter Auslöschung von $-7{,}5$ bis $-6{,}8$, worauf die auslöschende Wirkung wieder stark zunimmt. Sie erstreckt sich dann, ohne Diskontinuitäten aufzuweisen, durch das ganze sichtbare Rot, Orange, Gelb und Grün, im Grün schon merklich an Intensität abnehmend. In der Gegend von $+11{,}6$ mm ($\lambda = 450$) erfolgt ein allmählicher Übergang in Phosphoreszenz steigernde Wirkung. Diese erreicht ein Maximum in der Gegend von 14 bis 17, und geht dann in der Nähe von 21 ($\lambda = 394$) wieder in Phosphoreszenz verringernde Wirkung über, welche in der Nähe von 22 bis 24 ($\lambda = 390$ bis $\lambda = 380$) ein Maximum erreicht und in der Gegend von 26,5 ($\lambda = 370$) in dem gleichmäßig phosphoreszierenden Grunde sich verliert. Auf dem Originalnegativ hebt sich von diesem Grunde noch schwach die Kohlenbande $\lambda = 357$ bei 31,25 dunkel ab, also wieder einer Phosphoreszenz steigernden Wirkung dieser Bande entsprechend.

Bei der Aufnahme Nr. 2 wurde die Phosphoreszenzplatte gleichfalls möglichst bald nach möglichst starker Erregung am Kraterlicht dem Spektrum ausgesetzt und die Einwirkung desselben bei etwa $^1/_{20}$ mm breitem Spalt auf 15 Min. bemessen, so daß die Platte einem etwa 4 mal lichtschwächeren Spektrum ungefähr die 15fache Zeit exponiert wurde. Der rund 4fach gesteigerten Lichtmenge entsprechend ist die Einwirkung des Spektrums auf die Platte ausgeprägter; die Wirkung der Phosphoreszenz auslöschenden Strahlen ist eine sehr vollständige

geworden, so daß an diesen Stellen das Negativ ebenso klar geblieben ist wie an den Teilen, welche gar nicht mit der phosphoreszierenden Schicht in Berührung gewesen sind. Der Kontakt der Phosphoreszenzplatte mit der photographischen Platte erfolgte 10 Min. nach der spektralen Belichtung; Dauer des Kontaktes 1 Min. Das Gebiet verringerter Auslöschung im Ultrarot ist auf einen schmalen Streifen bei $-7{,}2$ zusammengeschrumpft; der Übergang des ausgelöschten Teiles in erregten Teil an der Grenze von Grünblau ist ein ziemlich jäher und erscheint bei 11,4 ($\lambda = 451$) gelegen, gegen Nr. 1 ein klein wenig nach Rot verschoben. Der zweite neutrale Punkt liegt unverändert bei 21 ($\lambda = 394$), und die hier wieder einsetzende Phosphoreszenz verringernde Wirkung reicht bis in die Gegend von 25 ($\lambda = 376$), worauf wieder ein Erregungsgebiet kommt, welches sich bis gegen 37 verfolgen läßt, und in welchem die Kohlenbande 357 $\mu\mu$ besonders deutlich hervortritt.

Ein Vergleich der Spektralbilder Nr. 1 und 2 zeigt also im allgemeinen keine prinzipiellen Unterschiede, sondern die Differenzen sind mehr quantitativer Natur und derart, wie sie aus der größeren Einwirkungsdauer des Spektrums bei Nr. 2 gegenüber Nr. 1 ohne weiteres verständlich sind. Die Spektren Nr. 1 und 2 erweisen sich durchaus in Übereinstimmung mit den von Fomm bei der Phosphorophotographie des Sonnenspektrums mittels Balmainscher Leuchtfarbe erhaltenen Resultaten; sie zeigen insbesondere auf das deutlichste das ausgelöschte Gebiet im Ultraviolett, welches von einem so überaus sorgfältigen Beobachter wie Becquerel durchaus nicht bemerkt worden ist.

Diese Verschiedenheit der Resultate kann einmal in der verschiedenen Beschaffenheit des Leuchtmateriales gesucht werden, da Becquerel sein blau phosphoreszierendes Calciumsulfid selbst hergestellt hat, Fomm und ich dagegen mit dem als Balmainsche Leuchtfarbe im Handel erhältlichen ebenfalls blau phosphoreszierenden Calciumsulfid gearbeitet haben. Die Erklärung des Unterschiedes der Resultate kann aber auch, bei Annahme qualitativ gleichartigen Ausgangsmateriales, noch an anderer Stelle gesucht werden. Die Balmainsche Leuchtfarbe zeichnet sich durch eine besonders intensive Phosphoreszenz aus, welche noch nach tagelang währender Aufbewahrung in

vollständig dunklem Raume dem an die Dunkelheit gewöhnten Auge deutlich sichtbar ist, und es hat die Vermutung viel Wahrscheinlichkeit für sich, daß das Becquerel zur Verfügung stehende Calciumsulfid ceteris paribus bei weitem keine so hohe Intensität des Phosphoreszenzlichtes gezeigt haben wird. Also bei den Versuchen Fomms und den meinigen war eine kräftig leuchtende Phosphoreszenzplatte vorhanden, auf welche ein verhältnismäßig lichtarmes Spektrum fiel; Becquerel dagegen benutzte ein, wie er selbst angibt, möglichst intensives Spektrum und vermutlich eine nur schwach leuchtende Phosphoreszenzplatte. Sollte es möglich sein, die Unterschiede der Resultate auf diese Unterschiede der Lichtverhältnisse zurückzuführen?

Ein einfacher Versuch kann darüber Auskunft geben; man braucht dazu nichts weiter zu tun, als die Phosphoreszenzplatte, nachdem sie in derselben Weise wie bei Nr. 1 und 2 erregt worden war, einige Zeit im Dunkeln aufzubewahren, ehe man sie dem Spektrum aussetzt. Hat die Platte genügende Zeit im Dunkeln gelegen, so leuchtet sie vergleichsweise nur noch schwach, aber bei der kurzwelligen Beschaffenheit des Phosphoreszenzlichtes vollständig genügend, um in kurzer Zeit noch kräftige photographische Wirkungen auszuüben. Auf diese in ihrer Phosphoreszenz schon stark abgeklungene Platte wird das Spektrum entworfen, und nach gehöriger Einwirkung wie sonst die Phosphoreszenzplatte mit der photographischen Platte in Berührung gebracht.

Das Spektralbild Nr. 3 stellt das auf diese Weise gewonnene Resultat dar, welches nun in der Tat einen ganz anderen Charakter besitzt als die beiden vorigen, trotzdem es mit derselben Balmainschen Leuchtfarbe, derselben die Phosphoreszenz erregenden Bogenlampe, derselben Beschaffenheit des bestrahlenden Spektrums und derselben photographischen Plattensorte erhalten ist. Nachdem die Phosphoreszenzplatte im Kraterlicht ebenso wie bei Nr. 1 und 2 stark erregt worden war, wurde sie 1,5 Stunden im Dunkeln aufbewahrt, dann 1 Min. im Spektrum belichtet bei etwa 0,05 mm breitem Spalt; die Dauer des Kontaktes von phosphoreszierender und photographischer Platte betrug 1,5 Min., worauf die Entwickelung des Bildes folgte. Nr. 3 ist das danach gefertigte Positiv, welches also

wieder, wie die übrigen Spektrogramme, die Lichtverhältnisse der Phosphoreszenzplatte nach der Bestrahlung im Spektrum wiedergibt. Im Ultrarot und dem weniger brechbaren Teil des Spektrums hat sich wenig geändert; vollständig anders aber sind die Verhältnisse im stärker brechbaren Teil geworden, so daß man glauben könnte, es mit einer ganz anderen Substanz zu tun zu haben. Von Auslöschung oder Verminderung der Phosphoreszenz zeigt sich hier keine Spur; im Gegenteil erscheint das ganze brechbare Spektrum von der neutrale Stelle im Blau, welche hier bei 10,0 ($\lambda = 462$), also gegen Nr. 1 und 2 stark nach Rot verschoben, gelegen ist, bis an die Grenze des Wirkungsbereiches des Apparates 38 (etwa $\lambda = 335$) mehr oder weniger stark in der Phosphoreszenz erregt.

Bei Nr. 4 sind die Belichtungsverhältnisse gegen Nr. 3 nur insofern variiert, als bei gleicher Spaltweite die Dauer der Exposition 5 Min. betrug; Dauer des Kontaktes zwischen Phosphoreszenzplatte und photographischer Platte 3 Min. Die Wirkung im ausgelöschten Teile des Spektrums ist entsprechend der fünfmal längeren Belichtungsdauer mehr ausgeprägt; sonstige Unterschiede treten nicht hervor.

Bei Nr. 5 sind die Unterschiede gegenüber Nr. 1 und 2 dadurch noch verschärft, daß die in bisheriger Weise zur Phosphoreszenz erregte Platte erst nach vierstündiger Aufbewahrung im Dunkeln dem Spektrum exponiert wurde; Dauer der Belichtung bei etwa 0,05 mm breitem Spalt 15 Min. Die Phosphoreszenzplatte wurde darauf nicht sofort mit der photographischen Platte in Berührung gebracht, weil das zu stärkerer Phosphoreszenz erregte Gebiet durch die Intensität seines Leuchtens während der Zeit, welche zur Ausbelichtung des übrigen Gebietes erforderlich war, alles andere überstrahlt hätte, sondern erst nach Verlauf von weiteren 5 Min , während welcher Zeit die Phosphoreszenzhelligkeit dieser Stellen sich merklich abschwächte; Dauer der Berührung mit der photographischen Platte 5 Min. Die auslöschende Wirkung ist hier sehr stark ausgeprägt, noch mehr wie bei Nr. 2, die neutrale Stelle gegenüber Nr. 3 und 4 noch ein wenig mehr nach Rot gerückt, auf 9,5 ($\lambda = 466$); die hier einsetzende erregende Wirkung steigt außerordentlich jäh an und setzt sich durch das ganze brechbarere Spektralgebiet hindurch lückenlos und in bedeutender

Stärke fort, bis sich die Absorption durch die Glasteile des Spektrographen bemerklich macht.

Nr. 6 sollte, unter Verzichtleistung auf die Erkennung ausgelöschter Teile im Spektrum, den Wirkungsbereich erregender Strahlen auf eine vor der Bestrahlung gar nicht phosphoreszierende Platte dartun. Die Platte wurde, um sie jedes Phosphoreszenzlichtes durch vorangegangene Bestrahlungen zu berauben, im Dunkeln längere Zeit ziemlich stark erwärmt (etwa auf 250°), dann noch vier Wochen vor jedem Licht geschützt in einem Blechkasten aufbewahrt, und hierauf im Dunkeln in die Kassette eingelegt. Das Spektrum wirkte bei etwa 0,05 mm breitem Spalt 10 Min. ein; der Kontakt wurde aus denselben Gründen wie bei Nr. 5 erst nach drei weiteren Minuten bewerkstelligt; Dauer der Berührung 5 Min.; dann die photographische Platte sogleich entwickelt. Trotz vollständiger Dunkelheit der Phosphoreszenzplatte vor der Bestrahlung zeigt sich (auf dem Negativ viel deutlicher als auf dem Positiv) außer dem erregten Gebiete auch ein ausgelöschtes Gebiet, welches auf die erregende Wirkung des diffusen, im Apparate zerstreuten Lichtes in Verbindung mit der auslöschenden Wirkung der betreffenden langwelligen Strahlen zurückzuführen ist. Der neutrale Punkt liegt hier bei 8,5 mm (ungefähr $\lambda = 475$), wiederum noch weiter gegen Rot verschoben als bei Nr. 5, der noch schwächeren allgemeinen Phosphoreszenz entsprechend.

2. Strontiumsulfid mit Kupferzusatz.

Das Strontiumsulfid wurde nach den Angaben von Lenard und Klatt[1]) aus Strontiumkarbonat, Schwefel und einem geringfügigen Zusatz von Kupfersulfat durch Glühen im Platintiegel hergestellt. Frisch bereitet, zeigt es eine schöne gelbgrüne Phosphoreszenz; bei längerem Liegen an der Luft erlitt die Phosphoreszenzfähigkeit starke Einbuße, konnte aber durch erneutes Glühen der Masse nahezu vollständig wiederhergestellt werden.

Wie bei der gelbgrünen Farbe des Phosphoreszenzlichtes zu vermuten war, erwies sich die gewöhnliche Bromsilbergelatineplatte, welche ihr Empfindlichkeitsmaximum im prismatischen

1) P. Lenard u. V. Klatt, Wied. Ann. **38.** p. 90. 1889.

Spektrum zwischen den Fraunhoferschen Linien *F* und *G* besitzt, als ungeeignet zur photographischen Fixierung eines Spektrogramms auf diesem phosphoreszierenden Körper. Auch käufliche, für Gelbgrün sensibilisierte Plattensorten (z. B. Eosinsilberplatten von Perutz) waren für den vorliegenden Zweck nicht empfindlich genug; dagegen wurde eine genügende Empfindlichkeit erzielt durch Baden gewöhnlicher Schleussnertrockenplatten (Moment) in folgender Lösung (nach E. Vogel):

25	cm³	Erythrosinlösung 1 : 500
125	„	destilliertes Wasser
50	„	Silbernitratlösung 1 : 1000
1	„	Ammoniak (25 Proz.).

In dieser Weise hergestellte Trockenplatten besitzen eine sehr hohe Gesamtempfindlichkeit sowohl als auch namentlich eine besonders hohe Empfindlichkeit für gelbgrüne Strahlen; sie haben nur den einen Nachteil, daß ihre Haltbarkeit, besonders im Sommer, eine ziemlich beschränkte ist.

Taf. XI gibt die unter Benutzung solcher Erythrosinsilberbadeplatten bei dem erwähnten gelbgrün phosphoreszierenden Strontiumsulfid erhaltenen Resultate. Hierzu folgende Daten:

Nr. 1. Phosphoreszenzplatte im Kraterlicht erregt, 1 Min. dem Kraterspektrum ausgesetzt bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, 30 Min. in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Die Auslöschung reicht ungefähr von -12, stärker hervortretend aber erst von $-10{,}5$ mm im Ultrarot vollständig lückenlos bis etwa $+25$ mm im Ultraviolett; das Maximum der Auslöschung liegt in der Gegend von -5, also im äußersten sichtbaren Rot; ein zweites, deutlich hervortretendes Maximum der Auslöschung bei $+22{,}5$ im Ultraviolett entspricht der Kohlenbande $\lambda = 385\ \mu\mu$, welche die Phosphoreszenz der Platte nicht vermehrt, sondern verringert hat. Bald hinter dieser Bande beginnt das Gebiet verstärkter Lumineszenz, welches bis etwa 35 sich verfolgen und die Kohlenbande $\lambda = 357$ bei 31,25 besonders deutlich hervortreten läßt.

Nr. 2. Im Kraterlicht erregt, 3 Min. dem Kraterspektrum exponiert bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, 3 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Das Auslöschungsgebiet läßt sich von -11 bis in die Gegend von $+24$ verfolgen, zeigt also in seiner Ausdehnung keinen wesentlichen Unterschied

gegenüber Nr. 1, wohl aber einen merklichen in der Intensitätsverteilung. Die Auslöschung am weniger brechbaren Teil des Spektrums hat stark zugenommen, am stärker brechbaren Ende dagegen starke Einbuße erlitten; insbesondere zwischen 12 und 15 hat sich die Auslöschung stark vermindert. Die Kohlenbande 385 $\mu\mu$ erscheint nicht mehr so stark ausgelöscht wie in Nr. 1; das Erregungsgebiet am ultravioletten Ende ist stärker ausgeprägt.

Nr. 3. Im Kraterlicht erregt, 10 Min. dem Kraterspektrum ausgesetzt bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, 15 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Die Auslöschung, welche sehr intensiv ist, reicht von -12 bis ungefähr $+11{,}5$; dann folgt da, wo in Nr. 2 noch ein Gebiet zwar gegenüber Nr. 1 schon stark verringerter Auslöschung vorhanden war, ein Bereich kräftiger Phosphoreszenzsteigerung, von ungefähr 11,5 ($\lambda = 450$) bis 18 ($\lambda = 410$), mit einem Maximum zwischen 14 und 15 ($\lambda = 432$ und 427); hieran schließt sich eine fast neutrale Gegend, 18 bis 22 (410 bis 390), noch ganz wenig ausgelöscht; und schließlich beginnt mit der Kohlenbande $\lambda = 385$ $\mu\mu$ bei 22,5 ganz unvermittelt wieder ein Gebiet kräftiger Phosphoreszenzsteigerung, welches auf dem Spektrogramm sich bis über 37 (etwa $\lambda = 335$) erstreckt.

Nr. 4. Im Kraterlicht erregt, 30 Min. dem Kraterspektrum ausgesetzt bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, 16 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Im wesentlichen wie Nr. 3; die Partie 18,5 bis 22, welche die beiden Haupterregungsgebiete trennt, erscheint jetzt ganz wenig erhellt.

Nr. 5. Im Dunkeln erwärmt und abgekühlt, 30 Min. dem Kraterspektrum ausgesetzt bei gleicher Spaltweite wie vorher, 1,5 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Die Aufnahme läßt nur die beiden Erregungsgebiete im Blauviolett und Ultraviolett erkennen. Diese sind nicht so kräftig wie bei Nr. 4, was wohl auf die wesentlich geringere Kontaktdauer (1,5 Stunden gegen 16 Stunden) zurückzuführen sein dürfte.

Alles in allem lehren die Ergebnisse mit SrS nichts wesentlich Neues gegenüber denen mit CaS. Ein Gebiet verringerter Phosphoreszenz im Ultraviolett, wie es Fomm für Balmainsche Leuchtfarbe gefunden hat, existiert nach meinen Versuchen auch für SrS, und wie bei jenem Stoff, so ist es auch bei diesem

gelungen zu zeigen, daß eine Umkehr Phosphoreszenz verringernder Wirkung in Phosphoreszenz steigernde Wirkung in diesem Gebiete erfolgt, sobald die allgemeine Phosphoreszenz der Platte genügend abgeklungen ist. Auch hier ist für die Wirkungsweise bestimmter Strahlen auf den phosphoreszierenden Körper nicht sowohl deren Wellenlänge oder Farbe als vielmehr auch das Intensitätsverhältnis maßgebend, in welchem die auffallende Strahlung zur jeweils vorhandenen Phosphoreszenzstrahlung steht.

3. Zinksulfid nach Henry.

Das phosphoreszierende Zinksulfid wurde von mir nach dem von Henry[1]) angegebenen Verfahren dargestellt. Chemisch reines Zinkchlorid von C. A. F. Kahlbaum, Berlin, wurde in destilliertem Wasser gelöst, dann Ammoniak hinzugesetzt bis zur Auflösung des zuerst gebildeten weißen Niederschlages. In diese Lösung wurde Schwefelwasserstoff geleitet, welcher weißes Zinksulfid in sehr feiner Verteilung ausfällt. Nachdem der Niederschlag sich abgesetzt hatte, wurde die darüber stehende klare Lösung abgegossen, der Rückstand zuerst eingedampft, dann getrocknet, und schließlich in kleineren Mengen in einem Platintiegel bis zur Weißglut erhitzt.

Die so erhaltenen phosphoreszierenden Präparate verhielten sich hinsichtlich der Helligkeit und auch der Farbe des Phosphoreszenzlichtes bei verschiedenen Herstellungen verschieden; diese war bei manchen Präparaten mehr gelbgrün, bei anderen dagegen goldgelb. Die am kräftigsten phosphoreszierenden wurden ausgewählt, um auf ihr Verhalten im Spektrum untersucht zu werden.

Der Güte von Hrn. Prof. Dr. F. Giesel in Braunschweig verdanke ich ein von ihm ebenfalls nach dem Henryschen Verfahren hergestelltes, aber sehr viel heller phosphoreszierendes Zinksulfid, welches ich bei der äußerst großen Empfindlichkeit dieser Substanz gegenüber ultraroter Strahlung benutzen wollte, um den Wirkungsbereich dieses Phosphors im Ultrarot mit dem Gitterspektrographen genauer zu studieren. Leider hat der mir zur Verfügung stehende Spektrograph sich dafür als zu licht-

1) Ch. Henry, Comp. rend. **115**. p. 505—507. 1892.

schwach erwiesen; doch besteht begründete Hoffnung, mit einem lichtstarken Gitterspektrographen zum Ziele zu gelangen, und unter Verwendung des vorzüglichen Gieselschen Zinksulfids die Phosphorophotographie des Sonnenspektrums etwa bis zur Wellenlänge 1,5 μ ins Ultrarot auszudehnen, also in ein Gebiet, in welchem direkte photographische Aufnahmen zurzeit ausgeschlossen sind. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Giesel für das überaus freundliche Entgegenkommen, mit welchem er mir seine Präparate zur Verfügung gestellt hat, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Für die in der Tafel XII wiedergegebenen Aufnahmen habe ich noch das von mir selbst dargestellte Zinksulfid benutzt. Ein von E. Ducretet, Paris, bezogenes Henrysches Zinksulfid war von so geringer und noch dazu ganz ungleichmäßiger Phosphoreszenz, daß seine Verwendung unmöglich war.

Was das phosphoreszierende Zinksulfid auch zu Demonstrationsversuchen äußerst wertvoll macht, ist seine außerordentliche Empfindlichkeit gegenüber langwelliger Strahlung (etwa bis zur Wellenlänge 1,5 μ). Der durch eine dünne (0,5 mm) Hartgummiplatte hindurchgehende Teil der ultraroten Strahlung einer Argandlampe oder einer elektrischen Glühlampe wirkt bereits in kürzester Zeit auslöschend auf einen mit phosphoreszierendem Zinksulfid überzogenen Schirm, so daß Gegenstände, welche sich vor der Hartgummiplatte befinden und ultrarote Strahlen nicht hindurchlassen, auf dem hinter der Hartgummiplatte befindlichen Phosphoreszenzschirm sich hell auf dunklem Grunde abbilden. Derart kann man mittels ultraroter Strahlung sozusagen ein leuchtendes Schattenbild eines vor der Hartgummiplatte angebrachten Geldstückes oder der vor die Hartgummiplatte gehaltenen Hand entwerfen. Balmainsche Leuchtfarbe erweist sich für diese Demonstration als nicht geeignet, weil deren Auslöschungsgebiet bei weitem nicht so weit ins Ultrarot hineinreicht, als daß die durch Hartgummi hindurchgehenden Strahlen auf sie noch eine beträchtliche Wirkung ausüben könnten. Auch stört das bei der Balmainschen Leuchtfarbe sehr stark hervortretende „Anfachungs"-Phänomen.

Es ist hier der Ort, eines auffälligen Unterschiedes Erwähnung zu tun, durch welchen das phosphoreszierende Zinksulfid im Vergleich zu den phosphoreszierenden Erdalkalisulfiden

sich auszeichnet, und welcher das Verhalten gegenüber solchen Strahlen betrifft, welche eine auslöschende Wirkung auf die betreffenden Phosphore betätigen. Während sonst beim Auftreffen solcher Strahlen der Auslöschung erst eine Anfachung des Leuchtens vorhergeht (vgl. p. 425, 426), ist beim Zinksulfid von diesem Phänomen der Anfachung durchaus nichts zu bemerken; gleichzeitig vollzieht sich die Auslöschung in einem kleinen Bruchteil der Zeit, welche bei den Erdalkalisulfiden nötig ist, um merkliche Wirkungen hervorzubringen.

Aus der Tatsache, daß beim Zinksulfid eine Auslöschung — und noch dazu eine höchst intensive — *ohne vorhergehende Anfachung* vorhanden ist, folgt, daß die auf p. 426 zitierte Ansicht von E. Becquerel, nach welcher ein bestimmter Phosphor nach gleicher Phosphoreszenzerregung immer eine gleiche Summe von Licht verausgabt, wenn auch je nach den Umständen schwächeres Licht in längerer Zeit oder stärkeres Licht in kürzerer Zeit, nicht aufrecht gehalten werden kann. Beim Zinksulfid ist es zweifellos, daß es, zur Phosphoreszenz angeregt, beim Auftreffen langwelliger Strahlen in dem Zeitraume bis zur völligen Auslöschung nur einen verschwindend geringen Bruchteil derjenigen Lichtmenge verausgabt, welche dasselbe und in derselben Weise erregte Zinksulfid emittiert, wenn die Phosphoreszenz in gewöhnlicher Art abklingt, ohne Hinzutritt strahlender Energie von außen.

Was dagegen den Einfluß einer *Erwärmung* anlangt, so ist ein qualitativer Unterschied in dem Verhalten des Zinksulfids gegenüber demjenigen anderer phosphoreszierender Substanzen nicht zu beobachten. Wie bei diesen bewirkt auch beim Zinksulfid eine Temperaturerhöhung stets eine Verstärkung der Leuchtintensität unter gleichzeitiger Abkürzung der Phosphoreszenzdauer. Wärmezufuhr hat also auch beim Zinksulfid eine „anfachende" Wirkung, während den weniger brechbaren Strahlen des Spektrums, soweit sie überhaupt die Substanz beeinflussen, eine anders geartete, rein „auslöschende" Wirkung zukommt. Die Becquerelsche Deduktion der Auslöschung oder Verringerung der Phosphoreszenz aus der Wärmewirkung der betreffenden Strahlen, eine Erklärung, welche schon beim Calciumsulfid infolge der Fommschen Beobachtung Zweifel an ihrer Richtigkeit erregte (vgl. p. 429), muß nach den Ergeb-

nissen beim Zinksulfid wenigstens für diesen phosphoreszierenden Körper als widerlegt bezeichnet werden, und man wird bei einer Theorie dieser Erscheinungen nicht umhin können, die thermischen Wirkungen, welche anscheinend immer anfachender Natur sind, völlig zu trennen von den spezifischen Wirkungen der betreffenden Strahlungsarten, welche je nach den Umständen, indem sie auf eine schnelle Herstellung eines bestimmten Strahlungsgleichgewichtes hinzielen, die vorhandene Phosphoreszenz verstärken oder abschwächen können.

Nun noch eine Bemerkung, welche schon früher hätte gemacht werden können, aber auch hier nicht am unrichtigen Platze ist. Will man einen Phosphor zu möglichst hellem Leuchten anregen, so muß man dafür sorgen, daß möglichst nur solche Strahlen auf ihn treffen, welche bei ihm die Phosphoreszenz vorzugsweise zu steigern imstande sind, und muß solche Strahlen von ihm fernhalten, welche bei ihm eine auslöschende Wirkung betätigen. Bei Verwendung des Lichtes weißglühender Körper wird man also gut tun, in den Strahlengang Lichtfilter einzuschalten, welche den weniger brechbaren Teil des Spektrums absorbieren. Verwendet man hierzu mit blauen Flüssigkeiten gefüllte Glasküvetten, so konstatiert man häufig nur geringe Wirkungen, entweder weil die Flüssigkeiten zu viel ultrarotes Licht durchlassen, oder weil durch das Glas gleichzeitig erregendes ultraviolettes Licht zurückgehalten wird. Blaues Kobaltglas ist im allgemeinen schädlich, weil es die Ultraviolettabsorption des Glases besitzt, dagegen wesentliche Teile des äußersten Rot und Ultrarot hindurchläßt. Gut verwendbar ist dagegen das Blauviolettglas von Schott u. Gen., Jena, wegen seiner ausgezeichneten Absorption des weniger brechbaren Spektralgebietes. Schon bei der Erregung der Balmainschen Leuchtfarbe durch elektrisches Licht oder direktes Sonnenlicht ist das Vorsetzen eines Lichtfilters aus diesem Glase von Vorteil; ganz überraschend aber ist die günstige Wirkung des Farbglases beim Zinksulfid, was eben darauf zurückzuführen ist, daß diese Substanz erstens viel empfindlicher ist für die der Phosphoreszenz ungünstige Wirkung ultraroter Strahlen, und zweitens in der Hauptsache von solchen Strahlen zu kräftiger Phosphoreszenz erregt wird, welche noch gut durch das Blauviolettglas hindurchgehen, dessen Absorp-

tion am ultravioletten Ende des Spektrums hier nicht sehr stört. (Noch bessere Wirkungen wären natürlich von geschmolzenem Quarz zu erwarten, welcher in gleicher Weise wie das Blauviolettglas gefärbt wäre.) Für die Phosphoreszenzerregung des obigen Strontiumsulfides ist dagegen das Farbglas von keiner günstigen Wirkung, da das Haupterregungsgebiet dieses Stoffs zu weit im Ultraviolett gelegen und das Auslöschungsgebiet im Ultrarot nicht ausgedehnt genug ist.

Es sei noch bemerkt, daß die günstige Wirkung des Blauviolettglases für die Phosphoreszenzerregung des ZnS von mir erst gefunden wurde, als die spektrale Untersuchung dieses Stoffs von mir schon ausgeführt war, so daß ich bei der Gewinnung der Spektrogramme nur eine vergleichsweise schwach phosphoreszierende Platte zur Verfügung hatte.

Tafel XII gibt die Übersicht der mittels solcher Phosphoreszenzplatte aus Zinksulfid erhaltenen Phosphorophotographien. Als lichtempfindliche Platte zum Fixieren des Spektrumbildes diente wieder mit Vorteil die beim Strontiumsulfid erwähnte Erythrosinsilberbadeplatte (vgl. p. 443).

Nr. 1. Im Bogenlicht zur Phosphoreszenz erregt, 5 Sek. dem Spektrum exponiert bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, 60 Min. in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Merkliche Auslöschung im Ultrarot von etwa $-13{,}5$ bis -11 mm, dann ein Band stark verminderter Auslöschung bis ungefähr $-9{,}5$. worauf die Auslöschung wieder stärker wird, zwischen -7 und -3 ein Maximum erreicht, um dann wieder schwächer zu werden und in der Gegend von $+9$ ($\lambda = 470$) allmählich in den zu stärkerer Phosphoreszenz erregten Teil überzugehen.

Nr. 2. Im Kraterlicht erregt, 20 Sek. dem Spektrum ausgesetzt bei gleicher Spaltweite wie vorher, 2 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Ausgelöschter wie erregter Teil sind infolge der längeren Einwirkung des Spektrums deutlicher ausgeprägt, Übergang von Phosphoreszenzverminderung und Phosphoreszenzvermehrung bei ungefähr $+7{,}5$ ($\lambda = 484$, in der Nähe von F nach Blau hin); sonstige quantitative Unterschiede gegenüber Nr. 1 sind nicht vorhanden.

Nr. 3. Im Bogenlicht erregt, 40 Sek. dem Spektrum bei unveränderter Spaltweite ausgesetzt, 40 Min. in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Die Auslöschung ist sehr intensiv und

jetzt auch in dem weniger ausgelöschten Gebiet zwischen −11 und −9,5 recht beträchtlich, neutrale Stelle bei + 7 ($\lambda = 488$. in der Nähe von *F* nach Grün hin).

Nr. 4. Im Kraterlicht erregt, 1 Min. dem Spektrum ausgesetzt bei derselben Spaltweite, 14 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Das Band verminderter Auslöschung ist fast ganz von den anstoßenden stärker ausgelöschten Teilen absorbiert, neutrale Stelle bei + 6,5 ($\lambda = 494$).

Nr. 5. Im Bogenlicht erregt, 3 Min. dem Spektrum ausgesetzt, wieder bei 0,05 mm breitem Spalt, 15 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Auslöschung von −14 + 6,5; die Stelle geringerer Auslöschung bei − 10,5 nur noch ganz schwach angedeutet; die erregende Wirkung, welche bei + 7 im Blaugrün schon in starkem Maße vorhanden ist, läßt sich verfolgen bis etwa + 37, d. h. bis an die Wirkungsgrenze des Apparates, nimmt aber schon an der Grenze von Violett und Ultraviolett merklich an Intensität ab (bis auf die stärker ausgeprägten Kohlenbanden), woraus sich ergibt, daß es in diesem Bereich hauptsächlich die stärker brechbaren *sichtbaren* Teile des Spektrums sind, ungefähr von der Wellenlänge 490 $\mu\mu$ an, welche das phosphoreszierende Zinksulfid zu kräftigerem Leuchten bringen. Damit im Einklang steht die gerade bei diesem Phosphor zu beobachtende günstige Wirkung des Blauviolettglases. Die auslöschende Wirkung reicht beim Zinksulfid weiter ins Ultrarot hinein als bei irgend einem anderen untersuchten phosphoreszierenden Körper, nach einer ungefähren Schätzung bis etwa 1,5 μ. Genauere Bestimmungen sollen später mit einem lichtstarken Gitterspektrographen unter Verwendung des ausgezeichnet phosphoreszierenden Gieselschen Zinksulfidpräparates erfolgen.

Nr. 6. Im Dunkeln erwärmt und dann 6 Wochen vor Licht geschützt in einem Blechkasten aufbewahrt; 15 Min. dem Spektrum ausgesetzt bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, dann 4 Stunden in Berührung mit Erythrosinsilberplatte. Die Phosphoreszenz ist erregt von etwa + 5,5 ($\lambda = 505$) bis an die Grenze des von den Glasteilen des Apparates noch hindurchgelassenen Ultraviolett (+ 37,5 mm, etwa $\lambda = 335$).

Bei einem Vergleich der Resultate für ZnS mit denjenigen von CaS und SrS fällt auf, daß die Auslöschung im Ultra-

violett, wie sie bei CaS zuerst von Fomm, bei SrS zuerst von mir festgestellt ist, bei ZnS nicht beobachtet wurde. Dies dürfte aber lediglich darauf zurückzuführen sein, daß die allgemeine Lumineszenzerregung meiner ZnS-Platte stets nur eine verhältnismäßig schwache gewesen ist infolge mangelhaften Materiales und Unkenntnis der günstigen Wirkung des Blauviolettglases. Es ist zu erwarten, daß bei genügender Anfangsintensität der Phosphoreszenz auch im brechbareren Strahlungsgebiete Auslöschungsphänome sich würden feststellen lassen.

Auf sonstige Unterschiede in dem Verhalten des ZnS ist schon aufmerksam gemacht worden.

4. Flußspat.

Der zu den Versuchen benutzte Flußspat war der Sammlung des physikalischen Institutes entnommen. Am Tageslicht zeigte er eine blaßviolette, an Amethyst erinnernde Färbung; in dieser Farbe fluoreszierte er besonders schön, wenn das an ultravioletten Strahlen reiche Licht des Kohlenbogens oder der Magnesiumflamme auf ihn einwirkte. Der Flußspat wurde in einer Achatschale mit Achatpistill zu einem möglichst feinen, nunmehr fast rein weiß gefärbten Pulver zerrieben und in dieser Form in derselben Weise wie die anderen Substanzen der Untersuchung unterzogen.

Schon bei der okularen Betrachtung der unzerkleinerten Kristalle hatte es sich gezeigt, daß die nach Aufhören der Bestrahlung zurückbleibende sichtbare Phosphoreszenz sehr viel merklicher war, wenn bei der Bestrahlung mit dem Lichte der Schuckertschen Bogenlampe das Licht der beiden glühenden Kohlenenden abgeschirmt wurde (so daß nur das Licht des Flammenbogens den Flußspat treffen konnte), als wenn dies nicht geschah, und gleichzeitig mit dem Lichte des Bogens auch dasjenige der Kohlen auf den Kristall einwirkte. Es wurde daraus geschlossen, daß es in der Hauptsache sehr kurzwellige ultraviolette Strahlen sind, welche den Flußspat zu kräftiger Phosphoreszenz erregen, und daß die Mehrzahl der im weißen Kohlenlichte enthaltenen Strahlen die Phosphoreszenz des Flußspates schon in hohem Grade beeinträchtigen. Diese hinsichtlich der Phosphoreszenzerregung sehr unterschiedliche Wirkung des Flammenbogenlichtes, des Kraterlichtes, wie auch des

Sonnenlichtes und des zerstreuten Tageslichtes kommt auch auf den mit dem pulverisierten Flußspat aufgenommenen Phosphorophotographien in sehr augenfälliger Weise zum Ausdruck, wovon die Reproduktionen der Tafel XIII Zeugnis ablegen.

Bei Nr. 1 war die Phosphoreszenzplatte im Lichte des elektrischen Bogens erregt, sogleich 5 Min. lang im Spektrum des Kraters belichtet bei etwa 0,05 mm breitem Spalt, dann auf die Dauer von 4 Stunden in Berührung mit gewöhnlicher photographischer Platte (Schleussner, Moment). Soweit sich eine Wirkung des Spektrums auf den phosphoreszierenden Flußspat erkennen läßt, ist diese hier lediglich auslöschender Natur, und zwar läßt sich die auslöschende Wirkung auf dieser Platte von etwa -5 ($\lambda = 725$) im noch sichtbaren Rot bis in die Gegend von $+25$ ($\lambda = 376$) im Ultraviolett verfolgen, mit einem Maximum der Auslöschung in der Nähe der *D*-Linie und einem zweiten an der Stelle 22,5, dieses durch die Kohlenbande 385 $\mu\mu$ verursacht. Wegen der verhältnismäßig schwachen Wirkung wurde die Expositionsdauer verlängert. und

Nr. 2 gibt dementsprechend die Wirkungen wieder, welche bei 15 Min. dauernder Bestrahlung mit dem Kraterspektrum unter sonst gleichartigen Versuchsbedingungen erhalten wurden. Hier ist die auslöschende Wirkung eine bei weitem intensivere; sie reicht nachweisbar von $-8{,}5$ im Ultrarot bis $+28$ im Ultraviolett, ohne jede Lücke, wieder mit einem Maximum unweit der *D*-Linie und den die Lage charakteristischer Kohlenbanden angebenden Maximis. Von einer Phosphoreszenz erregenden Wirkung des Kraterspektrums zeigt sich auch auf dieser Platte nicht die mindeste Spur.

Bei Nr. 3 wurde nach Erregung der Phosphoreszenz mittels Bogenlichtes die Dauer der Einwirkung des Spektrums auf 30 Min., bei Nr. 4 auf 60 Min. bemessen, im ersten Falle bei etwa 0,05, im letzten bei etwa 0,2 mm breitem Spalt; Dauer des Kontaktes mit der photographischen Platte 1 7 bez. 20 Stunden. Die Platten lassen erkennen, daß mit zunehmender Dauer und Lichtstärke des bestrahlenden Spektrums die auslöschende Wirkung nach dem ultraroten Ende hin sich mehr und mehr ausdehnt; so läßt sie sich z. B. bei Nr. 4 schon deutlich bis -10 verfolgen; andererseits läßt die auslöschende Wirkung am anderen Ende des Spektrums sich bis etwa $+30$ nachweisen.

Von irgend welcher Phosphoreszenzsteigerung jenseits dieser Grenze ist auch bei diesen Phosphorophotographien nicht die leiseste Andeutung vorhanden.

Nr. 5 gibt das Resultat einer 2.5stündigen Einwirkung eines lichtstarken Spektrums auf die in gleicher Weise wie bei Nr. 1 bis 4 (durch den Flammenbogen) erregte Phosphoreszenzplatte. Auch hier nicht die Spur eines Gebietes verstärkter Phosphoreszenz, dagegen kräftigste Auslöschung im ganzen sichtbaren Spektrum, bis -11 weit ins Ultrarot und bis $+32$ weit ins Ultraviolett hinübergreifend.

Diese Ergebnisse waren sehr überraschend. Auch bei stundenlanger Exposition im Spektrum zeigt sich hiernach ebenso wie bei einer nur wenige Minuten währenden stets nur ein Auslöschungs-, nie ein Erregungsphänomen, trotzdem doch dieselbe Lichtquelle, deren Spektrum auf die Platte einwirkt, in seinem auf den Flammenbogen entfallenden Teile den Flußspat vorher zu einer kräftigen, photographisch höchst wirksamen Phosphoreszenz *erregt* hatte.

Die nächstliegende Erklärung dieses scheinbaren Widerspruches ist offenbar die, das Ausbleiben erregender Wirkungen im Spektrum auf die Absorption ultravioletten Lichtes durch die Glasteile des Apparates zurückzuführen und anzunehmen, daß die Phosphoreszenzerregung des untersuchten Flußspats in der Hauptsache nur durch sehr kurzwellige ultraviolette Strahlen zustande kommt, welche wohl noch durch Luft, aber nicht mehr durch die Glaslinsen und das Glasprisma des Spektrographen hindurchzudringen vermögen (λ zwischen 185 und 335 $\mu\mu$).

Diese Erklärung, welche den bisher beschriebenen Erscheinungen völlig gerecht werden würde, erhält noch eine gewisse Stütze durch die Natur des vom Flußspat emittierten Phosphoreszenzlichtes. Es war oben erwähnt, daß der Flußspat sichtbar und zwar mit blaßvioletter Farbe phosphoreszierte. Immerhin war dieses sichtbare Phosphoreszenzlicht nur schwach, während derselbe Flußspat sich noch von kräftigster photographischer Wirkung zeigte, wenn seine Phosphoreszenz mit dem Auge schon lange nicht mehr wahrgenommen werden konnte. Daraus ist zu schließen, daß die Phosphoreszenz des Flußspats selbst nicht sowohl in violetten,

als vielmehr hauptsächlich in ultravioletten Strahlen erfolgt, woraus dann wieder nach dem Stokesschen Gesetz zu mutmaßen wäre, daß diejenigen Strahlen, welche den ultraviolett phosphoreszierenden Flußspat zu dieser Phosphoreszenz zu erregen imstande sind, einem noch entlegeneren Ultraviolett von noch kürzerer Wellenlänge angehören müßten.

Das Spektrum der durch Röntgenstrahlen erregten Flußspatstrahlen ist von Winkelmann und Straubel[1]) untersucht worden vermittelst Quarzlinsen und Quarzprisma, und diese Forscher haben gefunden, daß die photographische Wirkung der Flußspatstrahlen auf den von ihnen benutzten Platten bei $\lambda = 396\ \mu\mu$ beginnt, bei ungefähr $274\ \mu\mu$ ein Maximum erreicht und bei $233\ \mu\mu$ aufhört. Nimmt man die Gleichartigkeit des durch die Röntgenstrahlen erregten, von Winkelmann und Straubel untersuchten Fluoreszenzlichtes und des bei meinen Versuchen durch ultraviolette Bestrahlung hervorgerufenen Phosphoreszenzlichtes an, so würde das Stokessche Gesetz verlangen, daß die den Flußspat zur Phosphoreszenz erregenden ultravioletten Strahlen in der Hauptsache von einer Wellenlänge kleiner als $274\ \mu\mu$ sind, also von einer genügend kleinen Wellenlänge, um in der Tat von den Glasteilen des Apparates völlig absorbiert zu werden.

Trotzdem läßt sich zeigen, daß diese Erklärung, so plausibel sie auf den ersten Blick auch scheinen mag, den Kern der Sache doch nicht trifft. Man erinnere sich der Fommschen Beobachtung einer bei der Balmainschen Leuchtfarbe gleichfalls im Ultraviolett vorhandenen Auslöschung, gleichzeitig aber auch der Tatsache, daß dieses Auslöschungsphänomen als kein besonderes Charakteristikum des genannten Phosphors sich erwies, sondern durch Änderung des Intensitätsverhältnisses von Phosphoreszenz und spektraler Bestrahlung in ein Gebiet höchst kräftiger Phosphoreszenzsteigerung übergeführt werden konnte. Zu dieser Umkehr der von Fomm beobachteten Auslöschung in Erregung bedurfte es bei der Balmainschen Leuchtfarbe nur einer verhältnismäßig kurzen Aufbewahrung der zu starker Phosphoreszenz erregten Platte in

1) A. Winkelmann u. R. Straubel, Wied. Ann. 59. p. 336 bis 339. 1896.

einem dunklen Raum bis zum Zeitpunkt der spektralen Bestrahlung; auf der genügend abgeklungenen Phosphoreszenzplatte konnten dann auslöschende Wirkungen im Ultraviolett nicht mehr erzielt werden, sondern die vorher dort ausgelöschten Stellen zeigten sich jetzt in kräftig erregte verwandelt.

Sollte eine ähnliche Erscheinung nicht auch beim Flußspat in Frage kommen, und wenn in der Tat die beim Flußspat im Ultraviolett beobachtete Phosphoreszenzvernichtung in ihrem Wesen mit der von Fomm beim Calciumsulfid beobachteten Auslöschung übereinstimmt, wie kommt es, daß dieselbe sich nicht umkehrt, trotzdem doch in dem letzten der bisher diskutierten Fälle (Nr. 5) die Bestrahlung mit intensivem Spektrum stundenlang währte?

Nun, die Antwort darauf ist leicht gegeben. Auch bei der Balmainschen Leuchtfarbe würden wir die Umkehr der Auslöschung im Ultraviolett in Erregung nicht beobachten, auch nicht bei stundenlanger Bestrahlung, wenn die Balmainsche Leuchtfarbe sozusagen eine Leuchtfarbe par excellence wäre, d. h. wenn die allgemeine Phosphoreszenzhelligkeit der durch die anfängliche Belichtung erregten Platte nur sehr langsam abnähme und längere Zeit hindurch auf der ursprünglichen Höhe nahezu erhalten bliebe. Um die Umkehr beobachten zu können, mußte die Intensität des Phosphoreszenzlichtes schon eine verhältnismäßig geringe geworden sein. Wie nun, wenn beim Flußspat die Phosphoreszenz nur sehr langsam abklingt? Es ist leicht einzusehen, wie dann für den Fall, daß die Phosphoreszenzerregung eine sehr starke war im Vergleich zu der Intensität des auffallenden Spektrums, an den für das Auftreten der Phosphoreszenzverminderung im Ultraviolett maßgebenden Intensitätsverhältnissen auch bei einer zeitlich ziemlich ausgedehnten Exposition nichts geändert wird, und eine Umkehr der Phosphoreszenzverminderung in Phosphoreszenzsteigerung nicht zur Beobachtung gelangen kann — gerade so wie umgekehrt bei verhältnismäßig schnell abklingenden Phosphoren die Bedingungen für das Auftreten auslöschender Wirkungen im Gebiete erregender Strahlen sehr ungünstige sind und solche auslöschenden Wirkungen schwer werden realisiert werden können. Also wäre alles noch in Ordnung, und ein

prinzipieller Unterschied in dem Verhalten der Balmainschen Leuchtfarbe und demjenigen des Flußspats nicht vorhanden, wenn wir annehmen, 1. daß der Flußspat zu relativ starker ultravioletter Phosphoreszenz erregt war, und 2. daß seine Phosphoreszenz nur sehr langsam abklingt, wenigstens von einer gewissen, noch relativ beträchtlichen Intensität des Phosphoreszenzlichtes an. Daß das letztere in der Tat der Fall ist, kann man dadurch nachweisen, daß ein kräftig erregter Flußspat nach mehrtägiger Aufbewahrung im Dunkeln noch auf die photographische Platte wirkt.

Nach alledem müßten wir auch beim Flußspat im Ultraviolett zu einer Umkehr der Phosphoreszenzverminderung in Phosphoreszenzvermehrung gelangen, wenn wir bei ungeänderter Intensität des bestrahlenden Spektrums für eine nach Bedarf herabgesetzte allgemeine Phosphoreszenzhelligkeit der Platte sorgen, und diese erreichen wir am bequemsten, wenn wir die Erregung statt mit dem stark wirksamen Licht des Kohlebogens mit anderen weniger kräftig wirkenden Lichtquellen vornehmen. Da schon die Vorversuche gezeigt hatten, daß das gewöhnliche elektrische Licht (Licht der glühenden Kohlenenden plus dem des Bogens) nicht so wirksam ist wie das des Bogens allein, so wurde zunächst das erstere in Betracht gezogen.

Nr. 6 gibt das damit gewonnene Spektrogramm. Im Kraterlicht erregt, sogleich 30 Min. dem Spektrum ausgesetzt bei etwa 0,2 mm breitem Spalt, dann 16 Stunden in Berührung mit photographischer Platte. Hier zeigt sich in der Tat am ultravioletten Ende des Spektrums ein Erregungsgebiet, ungefähr bei $+16{,}5$ ($\lambda = 418$) einsetzend. Besonders stark erregt zeigt sich der Flußspat bei der Kohlenbande 357 $\mu\mu$. Die Phosphoreszenzerhöhung läßt sich etwa bis $+36$ verfolgen ($\lambda = 340$), wenn auch in ähnlicher Weise diskontinuierlich wie bei den Übergangsstadien der Spektra auf Balmainscher Leuchtfarbe. Die auslöschende Wirkung reicht weit ins Ultrarot; bis etwa -11 ist sie deutlich zu verfolgen; dann wird sie fast unmerklich, bis sich in der Gegend von $-20{,}5$ (!) wieder eine deutliche Phosphoreszenzverminderung zeigt.

Nr. 7. Erwärmt; nach der Abkühlung in direktem Sonnenlicht erregt, 30 Min. dem Spektrum des Kraters exponiert

bei etwa 0,2 mm breitem Spalt, 22 Stunden in Berührung mit photographischer Platte. Auslöschung von -11 im Ultrarot bis $+10$ ($\lambda = 462$), von da Erregung bis $+35$.

Nr. 8. Erwärmt; abgekühlt dem diffusen Tageslicht ausgesetzt, 1 Stunde dem Spektrum exponiert bei gleicher Spaltweite wie vorher, 21 Stunden in Berührung mit photographischer Platte. Auslöschungs- und Erregungsgebiet nicht wesentlich verschieden von Nr. 7; die Auslöschung erscheint etwas stärker. Auf dem Originalnegativ zeigt sich wieder das Auslöschungsgebiet bei etwa -20 angedeutet wie bei Nr. 6.

Nr. 9. Längere Zeit erwärmt; nach der Abkühlung, ohne daß vorher Licht die Platte getroffen hätte, dem Kraterspektrum 1 Stunde exponiert bei etwa 0,05 mm breitem Spalt; dann 5 Stunden in Berührung mit photographischer Platte. Gegen weißes Papier gehalten, zeigt das Originalnegativ ein Erregungsgebiet, welches von $-6{,}5$ an der Grenze des Ultrarot bis in die Gegend von $+37$ ($\lambda = 335$) im Ultraviolett reicht. Zuerst ist die Phosphoreszenzerregung im Ultrarot sehr schwach, zeigt dann in der Gegend der Natriumlinie, zwischen $-0{,}5$ und $+1{,}0$ ($\gamma = 600$ und 570) ein Band stärkerer Erregung, nimmt wieder ab und zeigt ein stärkeres Anwachsen erst wieder bei $+7{,}0$ ($\lambda = 487$). Die positive Reproduktion läßt diese Verhältnisse nicht so deutlich hervortreten, obgleich absichtlich schwächer kopiert.

Was das auf den Platten Nr. 6 und Nr. 8 angedeutete Auslöschungsgebiet in der Gegend von -20 tief im Ultrarot anbetrifft, so ist ein abschließendes Urteil darüber noch nicht möglich. Es liegt nahe, an das ultrarote Strahlungsgebiet zu denken, für welches der Flußspat metallisch absorbiert und reflektiert. Dazu wäre aber erforderlich, daß von den vielen Glasteilen des Apparates noch ultrarote Strahlen von so großer Wellenlänge in merklichem Betrage hindurchgelassen worden wären, während doch die Absorption des Glases für größere Wellen als 3 μ sehr stark anwächst. An die Wirkung falscher Reflexionen im Prisma etc. zu denken, scheint aber noch weniger zulässig, da solche sich dann sicher auch bei den anderen phosphoreszierenden Substanzen, insonderheit bei dem auf die Auslöschungswirkung so überaus empfindlich reagierenden Zinksulfid bemerkbar gemacht hätten, was aber

durchaus nicht der Fall ist. Ich halte deshalb einstweilen die erste Erklärung für die wahrscheinlichere, und nehme an, daß von denjenigen langwelligen ultraroten Strahlen, für welche der Flußspat ein metallisches Absorptionsvermögen besitzt, noch ein, wenn auch sehr geringer, doch merklicher Bruchteil durch die Glasteile hindurch auf die Flußspatplatte gelangt ist und hier die beobachtete phosphorographische Wirkung ausgeübt hat. Die Richtigkeit dieser Annahme habe ich vor, mit einem Steinsalzspektrographen zu prüfen, da ja Steinsalz noch für viel längere Wellen nahezu völlig diatherman ist.

Sehen wir von diesem noch unsicheren Ergebnis ab, so lehren die Ergebnisse beim Flußspat jedenfalls, daß diese Substanz wegen ihrer langandauernden Phosphoreszenz verbunden mit einer kräftigen photographischen Wirksamkeit ihrer Strahlung sich ganz hervorragend zum näheren Studium der Phosphoreszenzerscheinungen eignet. Keiner der untersuchten Körper zeigt die Umkehr der Erregungs- und Auslöschungsphänomene der Phosphoreszenz schöner und auffälliger als gerade der Flußspat, bei welchem es ein leichtes ist, je nach Wahl der erregenden Lichtart, ein Gebiet kräftiger Phosphoreszenzverminderung in ein solches kräftiger Phosphoreszenzerhöhung umzuwandeln und umgekehrt. Ein und derselbe Flußspat, welcher, mit dem an ultravioletten Strahlen reichen Flammenbogen kräftig erregt, Auslöschung im ganzen Spektrum bis an die Grenze des im Apparate zu beobachtenden Ultraviolett zeigt, wird umgekehrt, wenn seine Phosphoreszenzhelligkeit vorher auf Null herabgesetzt worden war, vom ganzen Spektrum bis ins Ultrarot hinein zu einem photographisch erkennbaren Phosphoreszenzleuchten erregt; bei mittlerer Allgemeinphosphoreszenz zeigen sich sowohl Auslöschungs- als auch Erregungsgebiete, und die neutrale Grenze zwischen beiden wandert mit zunehmender Phosphoreszenzhelligkeit der Platte stets von Stellen größerer Wellenlänge zu solchen kleinerer Wellenlänge, wie dies die verschiedenen Aufnahmen der Taf. XIII deutlich zum Ausdruck bringen.

Nun noch eine Bemerkung. In der Tatsache, daß auf einer Flußspatplatte ohne Anfangsphosphoreszenz an den Stellen, wo gelbe, rote und sogar ultrarote Strahlen des prismatischen Spektrums auftreffen, eine unsichtbare, aber photographisch

gut wirksame, somit wahrscheinlich ziemlich kurzwellige Phosphoreszenzstrahlung entsteht, liegt anscheinend ein auffälliger Widerspruch mit dem Stokesschen Gesetz vor. Es ist jedoch noch eine andere Auffassung möglich, auf welche Hr. Prof. Wiener die Freundlichkeit hatte mich hinzuweisen, und durch welche der Widerspruch mit dem Stokesschen Gesetz vermieden würde. Nach Hrn. Prof. Wiener ist es sehr wohl möglich, daß jene Erregung der Phosphoreszenz am roten Ende des prismatischen Spektrums gar nicht auf ultrarote, rote und gelbe Strahlen zurückzuführen ist, sondern auf ultraviolette Strahlen sehr kleiner Wellenlänge, für welche Luft wie Glas wieder besser durchlässig sein sollen, und welche durch anomale Dispersion an jene Stellen des prismatischen Spektrums gelangen. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Auffassung würde durch eine Wiederholung der Aufnahme mit einem Gitterspektrographen zu erbringen sein, wobei das fragliche Erregungsgebiet am roten Ende verschwinden und sich am äußersten ultravioletten Ende wiederfinden müßte; gleichzeitig würde auf diese Weise eine genaue Wellenlängenbestimmung erzielt werden. Will man auf diese verzichten, so könnte man auch so verfahren, daß man bei ungeändertem Spektrographen eine andere Strahlungsquelle zur Erzeugung des Spektrums benutzt. Verwendet man als solche z. B. einen Argandbrenner, dessen Licht relativ sehr reich an roten und ultraroten Strahlen ist, aber vermutlich frei von jenen hypothetischen kürzesten ultravioletten Strahlen sein wird, so wäre nach der Wienerschen Auffassung zu erwarten, daß eine erregende Wirkung am roten Ende des prismatischen Spektrums ausbliebe; andernfalls wäre der Widerspruch mit dem Stokesschen Gesetz zweifellos.

IV. Theoretisches.

Es soll an dieser Stelle nicht der Versuch gemacht werden, eine exakt durchgeführte Theorie der Phosphoreszenzerscheinungen zu geben, welche sowohl den früheren als auch den im Laufe dieser Untersuchung gewonnenen experimentellen Ergebnissen gerecht wird. Dazu scheint mir noch nicht genügendes quantitatives Material vorzuliegen, welches eine exakte Prüfung einer mathematisch durchgeführten Theorie zuließe.

Es sei hier nur das eine bemerkt, daß die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sich durchaus mit der bisher üblichen Grundvorstellung vereinen lassen, welche man sich von dem Wesen der Fluoreszenz und Phosphoreszenz seit E. Becquerel gebildet hat.

Was diese Grundvorstellung selbst betrifft, so ist sie etwa die folgende. Man nimmt an, daß der phosphoreszierende Körper im allgemeinen aus zwei ineinander überführbaren Bestandteilen *A* und *B* zusammengesetzt ist, wobei es zunächst dahingestellt bleiben mag, ob der Prozeß der Überführung von *A* in *B* und von *B* in *A* von mehr physikalischer oder mehr chemischer Natur zu denken ist, und ob die Bestandteile *A* und *B* selbst einheitlich oder zusammengesetzt sind. Durch kurzwellige Bestrahlung soll eine Überführung einer gewissen Menge *A* in eine entsprechende Menge *B* bewirkt werden; die Rückbildung von *B* in *A* soll dann von Phosphoreszenzleuchten begleitet sein. Diese Rückbildung von *B* in *A* vollzieht sich auch schon während der Bestrahlung mit kurzwelligem Lichte, weswegen der Körper bereits während dieser Bestrahlung das die Zustandsänderung *B* nach *A* begleitende Leuchten zeigt (Fluoreszenz); nur müssen natürlich, wenn der stationäre Zustand erreicht ist, in gleichen Zeiten immer gleiche Mengen von *A* nach *B* und von *B* nach *A* übergehen (dynamisches Gleichgewicht). Hört nun die Bestrahlung mit dem die Umwandlung von *A* nach *B* verursachenden Lichte plötzlich auf, so strebt der Körper wieder dem ursprünglichen Anfangszustand zu, wobei der Überschuß von *B* in *A* zurückverwandelt wird; geschieht dies in unmeßbar kurzer Zeit, so daß das Eigenlicht des Körpers gleichzeitig mit der Bestrahlung erlischt, so haben wir es mit Fluoreszenz, im anderen Falle, daß noch nach merklichen Zeiten Rückbildungen von *B* nach *A* erfolgen, mit Phosphoreszenz zu tun.

Daß bei phosphoreszierenden Körpern die Rückbildung nicht momentan vor sich geht, kann man auf innere Widerstände irgend welcher Art zurückführen, welche den Prozeß der Rückbildung von *B* nach *A* verlangsamen. Es ist nach Analogie gewisser chemischer Reaktionen auch denkbar, daß der Prozeß schließlich praktisch zum Stillstand gelangt, ehe noch der Anfangszustand völlig wiederhergestellt ist, so daß der Körper

dann trotz seines Nichtleuchtens einen Überschuß von *B*, einen Mindergehalt von *A* besitzt gegenüber dem wirklichen, absolut stabilen Gleichgewichtszustande, wie er durch das Maximum der Entropie des Systems vorgeschrieben ist. Ein solcher zu einem vorzeitigen Stillstand gelangter Rückbildungsprozeß könnte durch Zufuhr von äußerer Wärme wieder eingeleitet oder angefacht werden — durch Verminderung der dem Prozeß entgegenstehenden Widerstände oder durch Erhöhung der nahezu auf Null herabgesunkenen Reaktionsgeschwindigkeit —, worin eine Erklärung für die anfachende Wirkung der Wärme und nicht minder für die Erscheinung der Thermolumineszenz gesucht werden könnte, wie sie gerade der sehr lange nachleuchtende Flußspat in hervorragendem Maße zeigt.

Die Tatsache, daß bei Zufuhr äußerer Energien (Wärme, Strahlung) der jeweilige Gleichgewichtszustand sich *schneller* einstellt, oder daß die Reaktionsgeschwindigkeit hierbei gegenüber derjenigen bei spontaner Rückbildung stark anwächst, könnte darauf zurückgeführt werden, daß die den Prozeß verlangsamenden Widerstände, welche man sich als eine Art intramolekularer Reibung oder ähnlich vorstellen mag, durch jene Ursachen vermindert werden. Die gefundene Erscheinung der Auslöschung ohne vorhergehende Anfachung müßte in diesem Bilde zu der Konsequenz führen, daß die Zustandsänderung von *B* nach *A* sich dann auf anderen Wegen vollziehen kann als sonst, wobei, wie in dem beobachteten Falle des Zinksulfids, die gesamte Lichtemission stark herabgesetzt werden kann.

Wenn die auslöschende Wirkung langwelliger Strahlung in der Tat eine solche ist, daß sie in der Verringerung von Reibungs- oder ähnlichen Widerständen besteht, welche sich der spontanen Rückbildung von *B* nach *A* entgegenstellen, so ist zu erwarten, daß diese besonderen Wirkungen der ultraroten und ähnlichen Strahlen ausbleiben, wenn solche Widerstände überhaupt nicht in nennenswertem Grade existieren. Dies soll nun nach obigem bei *fluoreszierenden* Körpern der Fall sein, wo die Umsetzung von *B* in *A* nach Aufhören der Bestrahlung sofort erfolgen sollte, von irgend welchen erheblichen Widerständen also nicht die Rede sein kann. In Übereinstimmung damit steht, daß es mir nicht gelungen ist, auf

einen fluoreszierenden Körper durch ultrarote Strahlen irgend welche die Lumineszenz beeinflussenden Wirkungen zu erzielen.

V. Schluß.

Um die hauptsächlichsten experimentellen Ergebnisse der Arbeit noch einmal kurz zusammenzufassen, so hat die Untersuchung folgendes ergeben:

1. Ein prinzipieller Unterschied zwischen Phosphoreszenz erregenden und Phosphoreszenz auslöschenden Strahlen besteht insofern nicht, als auch die erregenden Strahlen bei geeigneten Versuchsbedingungen und bei demselben Material eine Phosphoreszenz vermindernde Wirkung ausüben können. Es ist vielmehr zu sagen: Treffen Strahlen bestimmter Wellenlänge und bestimmter Intensität auf einen phosphoreszenzfähigen Körper, so stellt sich ein bestimmtes *Strahlungsgleichgewicht* her zwischen der auffallenden Strahlung einerseits und der Phosphoreszenzstrahlung andererseits, welches ceteris paribus (bei ungeänderter Wellenlänge, Temperatur etc.) nur abhängt von der Intensität der Strahlung, welche außerdem bestimmend ist für die *Geschwindigkeit*, mit der dieser stationäre Endzustand sich herstellt. Ist diese Geschwindigkeit groß und die Geschwindigkeit des spontanen Abklingens der Phosphoreszenz klein, so beobachten wir das Phänomen, daß Strahlen, welche an sich die Phosphoreszenz zu erregen imstande sind, auf den zu genügend kräftiger Phosphoreszenz erregten Körper eine Phosphoreszenz vermindernde Wirkung ausüben.

2. Ein phosphoreszierender Körper kann bis zu seinem völligen Erlöschen ganz verschiedene Lichtmengen emittieren, je nachdem das Abklingen freiwillig oder unter Hinzutritt fremder Energien erfolgt. Da der nicht leuchtende Endzustand in allen Fällen anscheinend derselbe ist, ebenso der leuchtende Anfangszustand, so ist es nichts weiter als ein Ausdruck der Tatsachen, wenn wir sagen, daß der Übergang aus dem leuchtenden Anfangszustand in den nicht leuchtenden Endzustand auf verschiedenen Wegen erfolgen kann (nicht nur mit verschiedenen *Geschwindigkeiten*), je nachdem er spontan oder unter Mitwirkung äußerer Energien sich vollzieht. Über die Gesamtmenge der auf einem dieser Übergänge emittierten Lichtenergie läßt sich a priori nichts Bestimmtes aussagen. Beim Zinksulfid

steht die Lichtemission des zu kräftiger Phosphoreszenz erregten, dann ultrarot bestrahlten Körpers jedenfalls weit zurück hinter der Lichtemission, welche der sich selbst überlassene, in gleicher Weise erregte Körper verausgabt.

3. Außer den bekannten Wirkungen des Lichtes auf phosphoreszierende Körper, bestehend in Phosphoreszenzerregung und thermischer Wirkung, ist beim Zinksulfid das Vorhandensein einer von diesen Wirkungen verschiedenen, spezifisch auslöschenden Wirkung festgestellt worden, welche nicht auf Wärmewirkung zurückgeführt werden kann.

Leipzig, Physik. Inst. d. Univ., im Februar 1903.

(Eingegangen 16. Oktober 1903.)

2. *Über die Ozonisierung des Sauerstoffs durch stille elektrische Entladungen;* *von E. Warburg.*

(Der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin am 11. Nov. 1903 im Auszuge mitgeteilt.)

§ 1. Zur Darstellung des Ozons aus Sauerstoff oder Luft schickt man durch das Gas sogenannte stille Entladungen hindurch, das sind elektrische Entladungen von schwacher Stromstärke bei hoher Potentialdifferenz der Elektroden. Und zwar benutzt man teils die Entladung aus scharfkantigen Metallelektroden (Spitzenentladung), teils, nach W. Siemens[1]), die Entladung aus glatten dielektrischen Oberflächen, zwischen denen man hohe Potentialdifferenzen von wechselnder Richtung hervorbringt. Die letztgenannte Methode wird im Laboratorium, beide Methoden werden in technischen Betrieben gebraucht.

Während nun bei der Elektrolyse die Quantität der zu gewinnenden Zersetzungsprodukte nach den Faradayschen Gesetzen in einfacher Weise aus elektrischen Daten zu berechnen ist, kann man zur Zeit die physikalischen Bedingungen, von welchen die Menge des zu gewinnenden Ozons abhängt, nicht angeben. Ich habe mir die Aufgabe gestellt, diese Bedingungen zu finden.

§ 2. Die ozonisierende Wirkung eines elektrischen Kraftfeldes ohne Leitungsstrom ist, wenn vorhanden[2]), jedenfalls von zu vernachlässigendem Betrage. Die Frage würde also sein, wieviel Ozon unter verschiedenen Bedingungen sich bildet, wenn ein Coulomb als Leitungsstrom durch das Gas geschickt wird. Doch ist die so gestellte Frage noch nicht hinreichend präzisiert. Die elektrische Entladung wirkt auf den Sauerstoff ozonisierend, auf das Ozon desozonisierend. Ein bestimmtes Ergebnis kann daher nur erhalten werden, wenn die letztere Wirkung zu vernachlässigen ist. Dazu reicht es hin, daß der

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **102**. p. 66. 1857; Ges.-Abh. p. 196.

2) Vgl. die einander entgegenstehenden Befunde von M. Berthelot, Ann. de chim. et phys. (5) **12**. p. 458. 1877; J. J. Thomson u. R. Threlfall, Proc. Roy. Soc. **40**. p. 340—43. 1886.

hervorgebrachte Ozongehalt sehr klein sei gegen den maximalen, durch den angewandten Apparat zu erzielenden.[1])

Demnach ist es die Aufgabe zu bestimmen, wie viel Ozon pro Coulomb Leitungsstrom in hinreichend schwach ozonisiertem Gase gebildet wird.

Diese Aufgabe ist von mir selbst für die Entladung aus metallischen Spitzen, gleichzeitig von Hrn. Gray für die Entladung zwischen glatten dielektrischen Oberflächen nach Siemens in Angriff genommen worden, und zwar für ein Gas, das ungefähr 93 Volumprozente Sauerstoff enthielt.

Der vorliegende Aufsatz enthält meine eigenen, der folgende Hrn. Grays Ergebnisse.

Ozonisierung durch Spitzenentladung.

§ 3. Ein Strom des zu ozonisierenden, trockenen Gases wurde während einer gemessenen Zeit an der ozonisierenden Spitze vorbei durch einen mit Natriumarsenitlösung gefüllten Absorptionsapparat geleitet, und die gebildete Ozonmenge durch den Titerverlust jener Lösung gegen eine auf sie abgestimmte Jodlösung ermittelt; der ozonisierende Spitzenstrom wurde galvanometrisch bestimmt.

Das benutzte Gas kam aus einer Elkanschen Bombe und enthielt 93 Volumprozente Sauerstoff; es wurde durch eine Baumwollenvorlage von Staub befreit. Von dem Leitungsrohr zweigte ein 60 cm langes vertikales, unten offenes Rohr ab, welches in einen 60 cm hohen, mit Wasser gefüllten Zylinder tauchte; durch Heben und Senken dieses Rohres konnte man den Gasdruck am Eingang der Leitung und dadurch die Ge-

---

1) In den Bezeichnungen einer früheren Arbeit (Ann. d. Phys. 9. p. 788. 1902) ist

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\theta}(s_\infty - s).$$

Ist s unendlich klein gegen s_∞, so wird

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_\infty}{\theta} = \beta,$$

unabhängig von der die desozonisierende Wirkung bestimmenden Konstanten

$$\alpha = \frac{1 - \frac{1}{2}s_\infty}{\theta}.$$

schwindigkeit des Gasstromes regulieren. Durch eine Schwefelsäurevorlage und zwei 60 cm lange, 2 cm weite Babosche, mit Schwefelsäure beschickte Perlenröhren hindurch gelangte das Gas in den Ozonisierungsapparat. Ich benutzte, um die Versuchsbedingungen zu variieren, drei verschieden gestaltete Apparate I, II, III.

Die Spitzen waren stets an einem 0,25 mm dicken Platindraht durch Abreißen in der Gebläselampe gebildet, der Draht in Glas eingeschmolzen.

In Apparat I (Fig. 1) sitzt der Platindraht p mit der Spitze s in dem Schliffstück Q; er ist etwas geknickt, damit

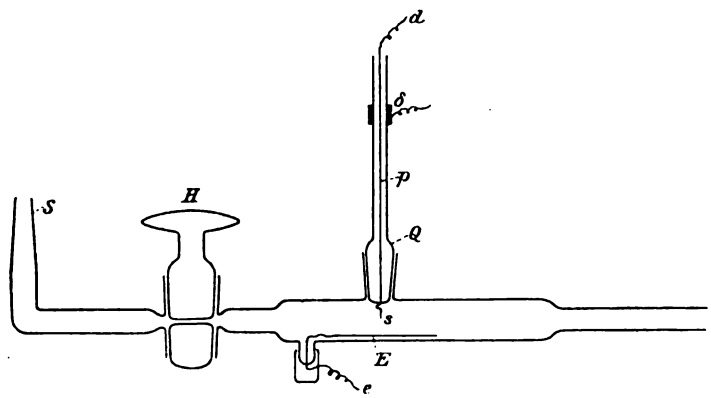


Fig. 1. $^1/_3$ nat. Größe.

die Entfernung zwischen der Spitze und der gegenüberstehenden Erdelektrode, dem Platinblech E reguliert werden kann. E wird durch den Draht e über ein Drehspulengalvanometer zur Erde abgeleitet. Die Spitze wird durch den Draht d geladen, hier durch einen Hochspannungsakkumulator von 2280 Elementen. Ein um das Glas gelegter, direkt zur Erde abgeleiteter Schutzring δ aus Stanniollagen, durch Kupferdrahtschnürung angepreßt, verhindert die Elektrizität, durch Oberflächenleitung des Glases zur Erdelektrode zu gelangen. Das Absorptionsgefäß (Fig. 2) nach Konstruktion des Hrn. Gray wird bei S auf den Schliff S (Fig. 1) aufgesetzt; es enthält die vier mit $^1/_{50}$ normaler Natriumarsenitlösung gefüllten Röhren $R_1 - R_4$, darüber das Gefäß R_5, in welchem sich auch etwas Flüssigkeit befindet. Die Röhren r reichen fast bis zum Boden

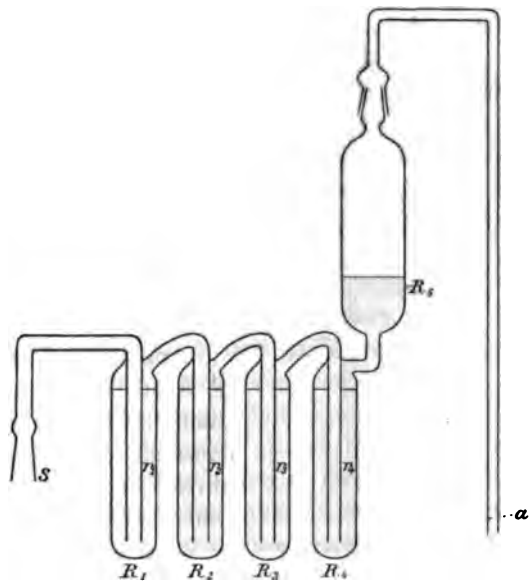


Fig. 2. $^1/_3$ nat. Größe.

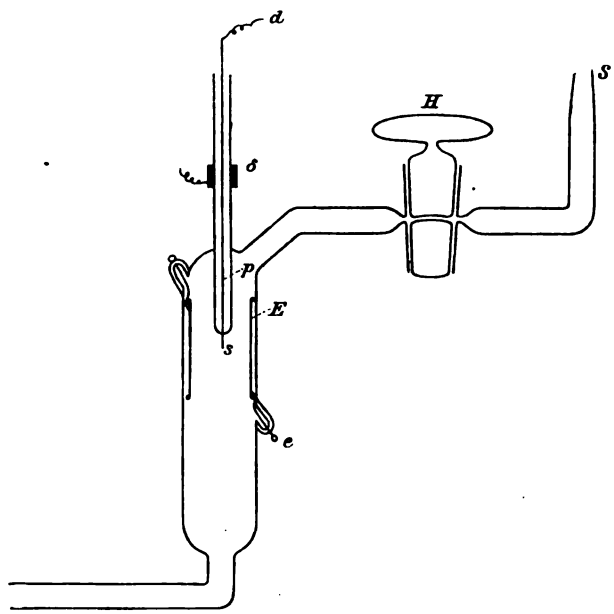


Fig. 3. $^1/_3$ nat. Größe.

der Gefäße *R*. *H* ist ein Dreiwegehahn. In der Stellung 2 der Figur läßt er das Gas zum Absorptionsgefäß hindurch. Wird er durch passendes Umlegen in die Stellung 1 gebracht, so schließt er das Absorptionsgefäß ab und läßt das Gas durch ein nicht gezeichnetes, senkrecht zur Ebene der Figur gestelltes Rohr über eine zweite Natriumarsenitvorlage ins Zimmer entweichen. Hähne und Schliffe gewährten, ohne jedes Schmiermittel benutzt, völlig hinreichenden Abschluß.

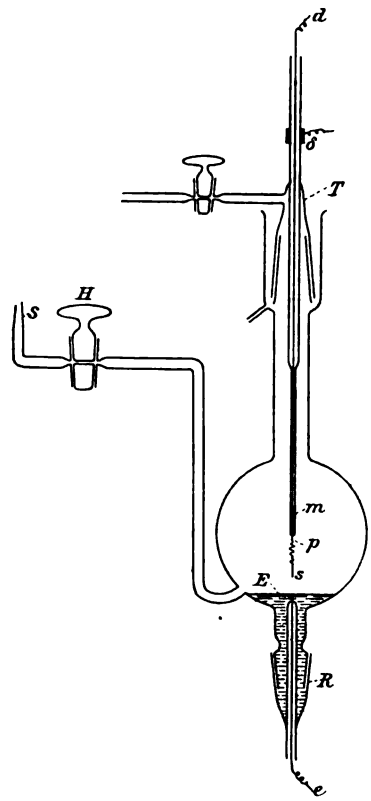


Fig. 4.

Apparat II (Fig. 3) enthält als Erdelektrode einen vertikalen Platinzylinder, in dessen Achse die vertikal abwärts gekehrte Spitze. An die Zylinderränder sind oben und unten zur Vermeidung scharfer Kanten Ringe aus dickem Platindraht angeschweißt.

Beim Apparat III (Fig. 4) ist das die Elektroden enthaltende Gefäß ein Literkolben; die Erdelektrode *E* wird durch Schwefelsäure gebildet, deren Ableitung zum Galvanometer der in dem Schliffstück *R* enthaltene Platindraht *e* besorgt. Der die Spitze *s* tragende Platindraht *p* ist hier ziemlich lang und mehrfach geknickt, so daß die Entfernung zwischen Spitze und Erdelektrode reguliert werden kann; er sitzt in dem Schliffstück *T*. Die Elektrizität wird durch den langen Kupferdraht *d* zugeleitet, welcher in Quecksilber *m* taucht. Alles übrige ist in den Apparaten II und III wie in I eingerichtet, die entsprechenden Teile sind mit den gleichen Buchstaben bezeichnet. Die Apparate II und III dienen zur Herstellung höherer Spitzenpotentiale, daher der Schutzring hier besonders wichtig ist. Der Strom

wird durch eine 20plattige Töplersche mittels eines Elektromotors betriebene Influenzmaschine geliefert.

§ 4. Der Gang eines Versuches ist folgender: Nachdem das Absorptionsgefäß mit einer gewogenen Menge — A_0 g — der Natriumarsenitlösung gefüllt ist, wird, während der Hahn H die Stellung 1 hat, der Gasstrom eingeleitet und seine Geschwindigkeit, wie § 3 beschrieben, reguliert; alsdann die Spitze elektrisiert und der elektrische Strom auf die gewünschte Stärke gebracht. Dies geschieht bei Apparat I, unter Anwendung des Hochspannungsakkumulators, durch Regulierung der Entfernung zwischen Spitze und Erdelektrode, bei Apparat II und III, unter Anwendung der Maschine, durch einen mikrometrisch verschiebbaren Spitzennebenschluß mit negativer Spitze und gegenüberstehender Kugel (bei positiver Spitze erhält man leicht Funkenentladung). Demnächst wird der Hahn H zu einem gemessenen Zeitpunkt in die Stellung 2 umgelegt, und die Geschwindigkeit des Gasstromes gemessen, indem man das bei a Fig. 2 entweichende Gas $^1/_2{}'$ lang in einem Meßzylinder auffängt. Alsdann läßt man, wenn nötig, das Gas in eine Vorlage mit Jodkaliumlösung und Stärke entweichen, um zu prüfen, ob die Absorption des Gases im Absorptionsgefäß eine vollständige war.

Während der Versuchsdauer wird bei Apparat I, unter Anwendung des Hochspannungsakkumulators, die Stromstärke alle 5′ lang abgelesen, so daß die mittlere Stromstärke berechnet werden kann; im allgemeinen nahm der Strom während des Versuchs um einige Prozente ab. Bei Anwendung der Maschine mußte ein Beobachter, durch ein Fernrohr den Galvanometerstand betrachtend, durch Regulierung des Spitzennebenschlusses die Stromstärke konstant halten, was mit hinreichender Annäherung möglich war. Man beendigt den Versuch, indem man zu gemessenem Zeitpunkt den Hahn H in die Stellung 1 zurückführt.

§ 5. Zur Bestimmung des Ozons wird das Absorptionsgefäß nach dem Versuch gewogen; es ist stets eine kleine Gewichtsabnahme (von A_0 g auf $A_0{}'$ g) eingetreten, herrührend von der Verdampfung des Wassers in den trockenen Gasstrom hinein; diese Gewichtsabnahme ergibt sich nämlich stets sehr nahe in Übereinstimmung mit der aus dem durchgelassenen

Gasvolumen und dem Sättigungsdruck des Wassers berechneten. Von dem Inhalt des Absorptionsgefäßes wird mittels geeichter Meßbürette eine gewisse Portion (A ccm) in ein Becherglas abgelassen und der Titerverlust bestimmt. Der Gehalt der Jodlösung nimmt mit der Zeit ein wenig ab, daher wurde nach jedem Versuch die angewandte Jodlösung mit der Natriumarsenitlösung verglichen.

Das spezifische Gewicht der Natriumarsenitlösung kann gleich 1 gesetzt werden. Sind J ccm Jodlösung zur Einstellung der Arsenitlösung erforderlich, entsprechen α ccm Natriumarsenitlösung $\alpha - \vartheta$ ccm Jodlösung, so ist die Ozonmenge m, indem die Arsenitlösung $^1/_{50}$ normal,

$$m = \left\{ A_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right) - J \cdot \frac{A_0'}{A} \right\} 0{,}48 \text{ mg}.$$

Die gemessenen Ozonmengen beliefen sich auf 4—12 mg entsprechend Titerverlusten von 8—25 ccm.

§ 6. Da das benutzte Gas etwa 7 Volumprozente Stickstoff enthielt, so war die Bildung von Oxydationsprodukten dieses Gases von vornherein nicht ausgeschlossen. Wurde indessen das Absorptionsgefäß mit Natronlauge gefüllt, und das Gas vor dem Durchgang durch den Absorptionsapparat 40′ lang einem Spitzenstrom von $96 . 10^{-6}$ Amp. ausgesetzt, so konnte weder Salpetersäure noch Stickoxyd in der Flüssigkeit nachgewiesen werden. Diese Bestimmung hat Hr. Dr. Kreusler freundlichst für mich ausgeführt.

§ 7. Die folgende Tab. I enthält die Versuchsergebnisse für negatives Spitzenpotential. Es bedeutet b reduzierten Barometerstand in mm Quecksilber, θ Temperatur, v Zahl der ccm Gas, die in der Sekunde den Apparat passieren, V Spitzenpotential in Volt, i Stromstärke in Ampere, t Dauer des Versuches, m Ozonmenge in Milligramm. m/it ist also die Ozonmenge pro Amperminute in Milligrammen. Die letzten Kolumnen geben nacheinander die Ozonmenge in Grammen pro Coulomb, die Elektrizitätsmenge in Coulomb pro Gramm Ozon und die Arbeit in Joule pro Gramm Ozon, letztere erhalten durch Multiplikation der in der vorhergehenden Kolumne gegebenen Werte mit der entsprechenden Voltzahl V.

Tabelle I.

Negatives Spitzenpotential.

Apparat I, Hochspannungsakkumulator.

Nr.	b	θ	v	V	$i.10^6$	t	m	$\frac{m}{il}$	$\frac{g}{Cb.}$	$\frac{Cb.}{g}$	$\frac{Joule}{g}$
1	752	20°	2,9	4300	17,4	120′	6,06	2900	0,0484	20,7	88900
2	759	20	3,3	3990	25,2	101	6,70	2630	0,0439	22,8	90950
3	761	17	4,4	4250	25,4	82	6,00	2880	0,0480	20,8	88500
4	762	17	3,8	4420	24,8	90	6,12	2740	0,0457	21,9	96700
5	761	20	5,3	3760	54,1	50	6,26	2310	0,0386	25,9	97500
6	761	20	8,3	4460	57,7	50	6,37	2210	0,0368	27,2	121200
7	754	20	3,5	4380	59,2	50	6,61	2330	0,0372	26,9	118000
						Apparat II, Maschine.					
8	758	2	3,9	7470	29,0	120	9,04	2600	0,0483	23,1	173000
9	758	19	3,4	7470	29,1	120	8,99	2570	0,0429	23,3	174000
10	761	19	3,9	9880	57,2	80	10,63	2320	0,0387	25,8	255000
11	752	20	3,9	9880	57,7	80	10,63	2300	0,0384	26,1	257000
12	749	22	5,0	11660	94,1	50	10,45	2220	0,0370	27,0	315000
13	761	2	5,6	11660	94,2	50	10,42	2210	0,0369	27,1	316000
						Apparat III, Maschine.					
14	751	19	5,6	11700	57,2	58	7,69	2320	0,0387	25,9	303000

§ 8. Bei der Diskussion dieser Ergebnisse möge zuerst untersucht werden, ob der erzielte Ozongehalt mit Rücksicht auf § 2 klein genug war. Seien c mg Ozon im ccm, dann ist die § 2 mit ε bezeichnete Größe

$$\varepsilon = \frac{c}{2 + \frac{1}{2}c},$$

wobei die Dichte des Ozons gleich 0,002 gesetzt wurde. Gehen v ccm Gas in der Sekunde durch den Apparat, und werden μ mg Ozon in der Sekunde erzeugt, so ist $c = \mu/v$. Im Versuch Nr. 12 ist

$$\mu = \frac{10{,}45}{3000}, \quad v = 5, \quad c = 0{,}70 \,.\, 10^{-3}, \quad \varepsilon = 0{,}35 \,.\, 10^{-3}.$$

ε_∞ kann hier gleich 0,035 gesetzt werden.[1]) Der erzielte Ozongehalt ist in diesem Fall also 1 Proz. des maximalen. Höhere Ozongehalte kamen bei der negativen Spitzenentladung nicht vor.

§ 9. Aus der Tab. I lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. **9**. p. 788. 1902.

1. Die Ozonmenge pro Coulomb, welche mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werde, ist bei gleicher Stromstärke unabhängig vom Potential der Spitze. Es ergibt sich nämlich:

Nr.	$i \cdot 10^6$	V	$\mathfrak{A}$
5, 6, 7	57	4200	0,0375
10, 11	57,5	9880	0,0386
14	57,2	11700	0,0387

Die Unterschiede in den Werten von $\mathfrak{A}$ sind kleiner als bei Versuchen von angebbar gleichen Bedingungen.

2. Die Ozonmenge pro Coulomb hängt nicht von der Beschaffenheit der Anode ab, (ob Platte gegenüber der Spitze (Apparat I) oder Zylinder, in dessen Achse die Spitze (Apparat II)), sondern nur von der Stromstärke und sinkt langsam mit wachsender Stromstärke. Dies geht aus folgender Zusammenstellung hervor:

Apparat I			Apparat II		
Nr.	$i \cdot 10^6$	$\mathfrak{A}$	Nr.	$i \cdot 10^6$	$\mathfrak{A}$
1	17,4	0,0484			
2, 3, 4	25,1	0,0459	8, 9	29,1	0,0431
5, 6, 7	57,2	0,0375	10, 11	57,5	0,0386
			12, 13	94,2	0,0370

Alle Ergebnisse beziehen sich auf den Fall, daß negatives Licht nur an der Spitze erscheint. Tritt es auch an anderen Stellen auf, wie z. B. bei dem geknickten Draht in Apparat III bei sehr hohen Potentialen (12500 Volt), so kann $\mathfrak{A}$ mit wachsender Stromstärke in die Höhe gehen.

Tabelle II.

§ 10. Positives Spitzenpotential.

Apparat II, Maschine.

Nr.	b	θ	v	V	$i \cdot 10^6$	t	m	$\frac{m}{it}$	$\frac{g}{Cb.}$	$\frac{Cb.}{g}$	$\frac{Joule}{g}$
15	759	21°	3,6	8420	28,8	121′	3,59	1030	0,0172	58,2	491 000
16	754	20	3,3	8420	28,8	120	5,47	1580	0,0263	37,9	319 000
17	751	20	4,0	10400	57,2	60	10,3	3000	0,0500	20,0	208 000
18	756	20	4,2	12400	57,2	60	10,2	2970	0,0495	20,2	210 000
19	748	20	4,4	12000	94,0	33	11,5	3710	0,0618	16,2	194 000
20	758	18	4,8	12000	94,2	35	12,5	3780	0,0630	15,9	190 000
Apparat III, Maschine.											
21	760	19	6,3	12200	57,2	53	8,31	2740	0,0457	21,9	267 000
22	753	19	5,4	11900	57,1	59	9,71	2880	0,0480	20,8	248 000

Nach den bisher vorliegenden Angaben[1]) ist die Ozonisierung unter sonst gleichen Umständen bei negativem Spitzenpotential größer als bei positivem. Dies ist nach der vorstehenden Tabelle nur für kleine Stromstärken der Fall; die Ozonmenge $\mathfrak{A}$ pro Coulomb wächst schnell mit der Stromstärke und ist bei der gleichen hohen Stromstärke für positives Spitzenpotential erheblich größer als für negatives. Diese Erscheinung hängt mit dem Auftreten eines positiven Büschels zusammen; mit dessen Entwickelung geht anscheinend die Ozonmenge pro Coulomb rasch in die Höhe.

Bei den Versuchen mit Apparat II lag der Verdacht nahe, daß bei hohen positiven Spitzenpotentialen an irgend einer Stelle der Erdelektrode negatives Licht aufgetreten sei, und daß dieses zusammen mit dem positiven Licht ozonisierend gewirkt habe. Um dies zu verhüten, waren die scharfen Kanten an den Zylinderrändern der Erdelektrode durch Drahtverstärkung fortgeschafft worden (§ 3); auch wurde negatives Licht nicht bemerkt. Doch war die Frage nach dem Auftreten negativen Lichtes am Apparate II, besonders wegen der Reflexion im Innern des Platinzylinders nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Deshalb wurden die Versuche auch mit dem ganz durchsichtigen Apparat III gemacht. Es konnte auch hier im Dunkeln keine Spur negativen Lichtes gesehen werden und doch wurden bei Auftreten des positiven Büschels fast ebenso große Ozonmengen $\mathfrak{A}$ pro Coulomb wie mit Apparat II erhalten (Nr. 21—22.) Daß bei positiver Spitze die Ozonisierung unter angebbar gleichen Bedingungen erheblich verschieden gefunden wird, erklärt sich daraus, daß das Auftreten und die Entwickelung des positiven Büschels sehr von unkontrollierbaren Nebenumständen abhängt.

§ 11. Nach den letzten Kolumnen der Tab. I und II ist in bezug auf die bei der Ozonbildung zu leistende Arbeit die Entladung aus negativer Spitze bei möglichst kleinem Spitzenpotential und möglichst kleiner Stromstärke am vorteilhaftesten. Das sind die Verhältnisse beim Versuch Nr. 1, in welchem 88900 Joule bei der Erzeugung von 1 g Ozon ver-

1) A. Houzeau, Ann. de chim. et phys. (4) **22.** p. 154. 1871; E. Bichat u. A. Guntz, Ann. de chim. et phys. (6) **19.** p. 135. 1890; E. Warburg, Ann. d. Phys. **9.** p. 790. 1902.

braucht wurden; immer noch 34 mal soviel als das Arbeitsäquivalent der bei der Bildung von 1 g Ozon absorbierten Wärmemenge, welches 2585 Joule beträgt.

§ 12. In der folgenden Tabelle III ist mit denjenigen meiner Versuche, welche die größte Ozonmenge pro Coulomb geliefert haben, das Ergebnis zusammengestellt, welches Hr. Gray mit einem Siemensschen Ozongenerator unter Anwendung desselben 93 Proz. Sauerstoffs für sehr schwache Ozonisierung gefunden hat.

Tabelle III.

V		g-Ozon / Cb.	Joule / g Ozon	Cb. / g-Äquiv. Ozon
4800	Spitze −	0,0484	88 900	500
12000	Spitze +	0,063	190 000	381
9200	Siemens Generator (Gray)	0,26	13 500[1])	92,3

Wie man sieht, liefert der Siemenssche Generator 4 bis $5^1/_2$ mal soviel Ozon pro Coulomb Leitungsstrom als die Spitzenentladung. Auch in bezug auf die Arbeitsleistung erweist sich der Siemenssche Generator der Spitzenentladung aus Metallelektroden überlegen.[2])

§ 13. Die Ursache der Ozonbildung bei der stillen Entladung könnte man in einem der Elektrolyse ähnlichen Vorgang suchen. Ein Grammatom Wasserstoff reduziert ein halbes Grammmolekül Ozon. Setzt man danach das Äquivalentgewicht des Ozons gleich 24, so ergeben sich die Werte der letzten Kolumne von Tab. III. Zur Erzeugung von 1 g-Äquivalent Ozon wurden also bei der stillen Entladung in den obigen Versuchen 92—500 Coulomb gebraucht, während zur elektrolytischen Abscheidung von 1 g-Äquivalent 96540 Coulomb erforderlich sind, d. h. 1000—193 mal soviel. Daher ist nicht

1) Dieser Wert ist unter der anfechtbaren Voraussetzung berechnet, daß in dem Siemensschen Apparat die Verschiebungsströme von den Leitungsströmen zeitlich getrennt sind. Vgl. E. Warburg, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 5. p. 386. 1903.

2) Daß unter anderen Versuchsbedingungen die stille Entladung aus metallischen Elektroden günstigere Ergebnisse liefern könne, ist natürlich nicht ausgeschlossen.

anzunehmen, daß die Ozonbildung bei der stillen Entladung auf einem der Elektrolyse ähnlichen Vorgang beruhe.

Nun hat Lenard[1]) gezeigt, daß sowohl Kathodenstrahlen wie auch kurzwellige ultraviolette Strahlen[2]) ozonisierend wirken.

Bei der stillen Entladung treten beide Strahlengattungen auf, und es liegt nahe, ihnen allein die ozonisierende Wirkung der Entladung zuzuschreiben.

Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt zuerst die Ozonbildung bei negativer Spitze, so ist der Herd der Ozonbildung ausschließlich der leuchtende Stern an der Spitze, das ist nichts anderes, als das auf einen sehr kleinen Raum zusammengeschrumpfte negative Glimmlicht der Glimmentladung. Nun ändert sich bekanntlich die Beschaffenheit dieses Lichtes nicht, wenn man, die Stromstärke konstant haltend, die Potentialdifferenz der Elektroden durch Steigerung des Elektrodenabstandes erhöht; entsprechend ist bei konstanter Stromstärke die Ozonbildung von der Potentialdifferenz der Elektroden unabhängig (§ 9, 1). Ferner hängt die Beschaffenheit des negativen Glimmlichtes nur von der Stromstärke ab, ebenso die Ozonbildung (§ 9, 2); bei Steigerung der Stromstärke dehnt sich jenes Licht, solange die Kathode noch nicht ganz mit mit ihm bedeckt ist, auf einen der Stromstärke nahezu proportionalen Raum aus, ohne seine Beschaffenheit zu ändern. Also ist die Gesamtmenge der von der Einheit der Stromstärke entwickelten Strahlenmenge von der Stromstärke nahezu unabhängig, und ebenso ändert sich die Ozonmenge pro Coulomb nur langsam mit der Stromstärke (§ 9, 2).

Alle Arbeit, welche außerhalb des negativen Glimmlichtes geleistet wird, geht nach der gemachten Annahme für die Ozonbildung verloren, nur die im negativen Glimmlicht geleistete wird nutzbar, und auch diese nur zum Teil. Nach Tab. III müssen nämlich zur Erzeugung von 1 g Ozon $\frac{1}{0{,}048} = 20{,}8$ Cou-

1) Ph. Lenard, Wied. Ann. **51**. p. 232. 1894 (ob die Kathodenstrahlen unmittelbar oder mittelbar durch von ihnen erzeugte kurzwellige Strahlung wirken, kann hier dahingestellt bleiben); Ann. d. Phys. **1**. p. 503. 1900.

2) Diese Wirkung zeigt sich auch sehr deutlich bei den Versuchen von E. Goldstein (Ber. d. Deutsch. chem. Ges. **36**. p. 3042. 1903) und H. Heraeus (Deutsche Mechaniker-Zeitung **10**. p. 175. 1903).

lomb aus der negativen Spitze austreten, wobei in dem negativen Glimmlicht, da das Kathodengefälle an Platin in Sauerstoff 370 Volt[1]) ist, eine Arbeit gleich $20{,}8 \cdot 370 = 7696$ Joule verrichtet wird, dreimal so viel, als das Arbeitsäquivalent der Wärme, welche ein Gramm Ozon bei seiner Bildung absorbiert.

Bei positiver Spitze ist, solange das Licht sich auf den Stern an der Spitze beschränkt, die Ozonbildung bei derselben Stromstärke geringer, als bei negativer (§ 10). Man muß daraus unter der gemachten Annahme schließen, daß das positive Licht hier weniger ozonisierende Strahlen als das negative entwickelt.[2]) Wenn aber der positive Büschel hinzutritt, so wächst die erzeugte Strahlenmenge in bedeutendem Maße an, ebenso die Ozonisierung (§ 10).

Aus dem Gesagten scheint mir mit Wahrscheinlichkeit hervorzugehen, daß die Ozonbildung den photo- und kathodochemischen Wirkungen zuzurechnen ist.

Berlin, Physikal. Institut, Oktober 1903.

---

1) J. W. Capstick, Proc. Roy. Soc. **63**. p. 356. 1898.

2) Es ist hierbei anzumerken, daß der Stern an einer negativen Spitze bei gleicher Stromstärke heller als an einer positiven ist.

(Eingegangen 15. November 1903.)

3. *Über die Ozonisierung des Sauerstoffs bei der stillen elektrischen Entladung;* *von Arthur W. Gray.*

(Der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin am 11. Nov. 1908 im Auszuge mitgeteilt.)

§ 1. Diejenigen, die bisher versucht haben, die Gesetze der chemischen Vorgänge zu finden, welche auftreten, wenn man Gase in einem Apparat von der von W. Siemens[1]) beschriebenen Form der Wirkung der stillen elektrischen Entladung unterwirft, scheinen ihre Aufmerksamkeit auf die Menge der ganzen gebrauchten Elektrizität gerichtet zu haben, während doch die als Leitungsstrom durch das Gas hindurchgehende, von welcher allein die Ozonisierung abhängt, kleiner als jene ist. Hr. Prof. Warburg schlug mir deshalb vor, die Elektrizitätsmenge, die als Leitungsstrom durch das Gas hindurchgeschickt wird, mit der Masse des erzeugten Ozons zu vergleichen.

Elektrische Theorie des Generators.

§ 2. Bei der gewöhnlichen Konstruktion besteht der Siemenssche Generator aus zwei conachsialen zylindrischen Glasröhen, durch deren ringförmigen Zwischenraum das zu ozonisierende Gas durchgeleitet wird, so daß das Ganze einen zusammengesetzten Kondensator von drei Schichten bildet. Solange die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden nicht groß genug ist, um einen Leitungsstrom durch das Gas zu verursachen, bleibt die elektrostatische Kapazität konstant; aber bei hinreichender Potentialdifferenz hört die Isolationsfähigkeit des Gases auf und infolge der hinübergeführten Elektrizitätsmenge steigt die Kapazität. Mit Hilfe der Dimensionen eines solchen Kondensators und der Ladung, welche zugeführt werden muß, um die Potentialdifferenz von Null bis auf einen gegebenen Wert zu bringen, kann man leicht die Kapazität und die durch das Gas fließende Elektrizitätsmenge bestimmen. Für den Fall eines zusammengesetzten Konden-

1) W. Siemens, Pogg. Ann. 192. p. 120. 1857.

sators mit unendlich großen planparallelen Platten hat mir Hr. Prof. Warburg die Formel dafür angegeben. Der hier betrachtete Fall ist der allgemeinere, in welchem die Potentialdifferenz zwischen den äußeren Flächen eines Kondensators, der aus drei unendlich langen conachsialen zylindrischen Schichten besteht, von einem beliebigen Wert V bis zu irgend einem anderen $V + \Delta V$ gebracht wird; indem man annimmt, daß die erste und die dritte Schicht für alle Werte von V vollkommen isolieren, während die zweite für niedrige Werte isoliert, aber teilweise oder ganz leitet, wenn V eine gewisse Grenze übersteigt.

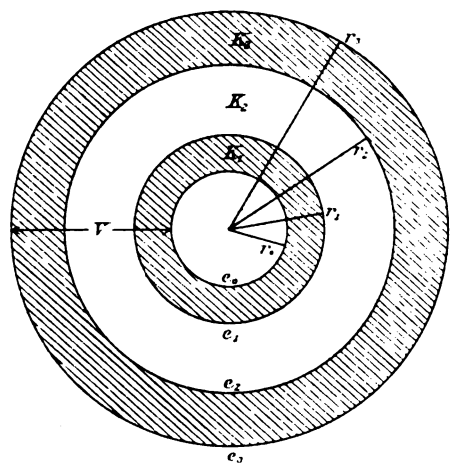


Fig. 1.

§ 3. Einen Durchschnitt eines solchen Kondensators zeigt Fig. 1. Seien r_0, r_1, r_2, r_3 die Radien der Begrenzungsflächen; e_0, e_1, e_2, e_3 die Ladungen pro Längeneinheit auf diesen Flächen; K_1, K_2, K_3 die Dielektrizitätskonstanten der betreffenden Schichten; F die elektrische Feldstärke in einem Punkt, dessen Entfernung von der geometrischen Achse r ist; und V die Potentialdifferenz zwischen der inneren und der äußeren Oberfläche — alles in C.G.S. elektrostatischen Einheiten gemessen.

Da unter gewöhnlichen Umständen die Ladung auf der äußeren Oberfläche gleich und entgegengesetzt derjenigen auf der inneren ist, so ist $e_0 + e_3 = 0$; und da auch irgend welche

Ladungen, die sich auf den Oberflächen des mittleren Mediums befinden, durch Leitung durch dieses Medium verursacht worden sind, so ist $e_1 + e_2 = 0$. Ferner ist

$$V = \int_{r_0}^{r_2} F\,dr = \frac{2e_0}{K_1}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r} + \frac{2(e_0+e_1)}{K_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} + \frac{2(e_0+e_1+e_2)}{K_3}\int_{r_2}^{r_3}\frac{dr}{r}$$

$$= 2e_0\left(\frac{1}{K_1}\ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{K_2}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{K_3}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{2e_2}{K_2}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

daher:

$$(1)\qquad e_2 = -\frac{K_2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[2e_0\left(\frac{1}{K_1}\ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{K_2}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{K_3}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) - V\right].$$

Wenn keine Leitung durch die zweite Schicht stattgefunden hat, so ist $e_2 = 0$ und also

$$(2)\qquad 2\left(\frac{1}{K_1}\ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{K_2}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{K_3}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{V}{e_0} = \frac{1}{c_0},$$

wo c_0 die Kapazität des zusammengesetzten Kondensators pro Längeneinheit, wenn die zweite Schicht isoliert, bedeutet. Wenn vollkommene Leitung durch diese Schicht stattfindet, so ist $e_2 = e_0$, und Gleichung (1) wird

$$(3)\qquad 2\left(\frac{1}{K_1}\ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{K_3}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{V}{e_0} = \frac{1}{c_\infty},$$

wo c_∞ die Kapazität pro Längeneinheit bedeutet.

Wenn man die Ladung pro Längeneinheit auf der Oberfläche vom Radius r_0 bis $e_0 + \Delta e_0$ ändert, so wird dabei

$$e_2 = \frac{K_2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{e_0}{c_0} - V\right)$$

bis

$$e_2 + \Delta e_2 = \frac{K_2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[\frac{e_0+\Delta e_0}{c_0} - (V+\Delta V)\right]$$

geändert. Folglich ist

$$(4)\qquad \Delta e_2 = \frac{K_2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{\Delta e_0}{c_0} - \Delta V\right).$$

Man mißt Δe_0 mittels eines ballistischen Galvanometers, durch welches die Ladung geleitet wird, die irgend einer vorher auf der Oberfläche vom Radius r_0 befindlichen Ladung hinzugefügt wird; ΔV mißt man mit einem Elektrometer, und die anderen zur Berechnung von Δe_2 notwendigen Größen findet man aus den Dimensionen des Kondensators — indem man die Annahme macht, daß die Änderung von V keinen Einfluß auf K_2 hat.

Bedeutet l die Länge des Kondensators, $C_0 = l c_0$ dessen Kapazität, wenn die zweite Schicht vollkommen isoliert, und Q_2 die Elektrizitätsmenge, welche diese Schicht durchfließt, während die Potentialdifferenz zwischen der inneren und der äußeren Oberfläche um ΔV wächst infolge der Hinzufügung der Ladung Q zu irgend einer vorher auf der inneren Oberfläche befindlichen, dann ist

$$(5) \quad Q_2 = \frac{K_2 l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{Q}{C_0} - \Delta V \right) \text{ in C.G.S. elektrostat. Einheiten.}$$

Mißt man Q in Coulomb und V in Volt, so ist

$$(6) \quad Q_2 = \frac{10^{-11} K_2 l}{18 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{Q}{C_0} - \Delta V \right) \text{ Coulomb.}$$

$$(7) \quad = \frac{10^{-11} K_2 A_1}{36 \pi a_2 \left(1 - \frac{a_2}{r_1} + \frac{a_2^2}{r_1^2} - \ldots \right)} \left(\frac{Q}{C_0} - \Delta V \right) \text{ Coulomb,}$$

wo $a_2 = r_2 - r_1$ und A_1 die Oberfläche des Zylinders vom Radius r_1 bedeutet.

$$(8) \quad \operatorname*{Lim}_{r_1 = \infty} [Q_2] = \frac{10^{-11} K_2 A}{36 \pi a_2} \left(\frac{Q}{C_0} - \Delta V \right) \text{ Coulomb,}$$

entspricht dem Fall, in welchem die Schichten von parallelen Ebenen, statt von conachsialen Zylindern begrenzt sind.

§ 4. Wenn ein Kondensator durch ein Galvanometer geladen oder entladen wird, mißt letzteres die *Änderung* der Ladungen, welche sich vorher auf den äußeren Oberflächen desselben befanden. Da aber, wie im eben betrachteten Falle, die Änderung der Ladung nicht notwendig der ganzen Ladung gleich ist, bedeutet das Wort „Kapazität“ in dieser Abhandlung den *Zuwachs* der Ladung auf einer der äußeren Ober-

flächen für die Einheit des Zuwachses der Potentialdifferenz zwischen beiden.

Wenn, wie es in den unten zu beschreibenden Experimenten immer der Fall war, beide Elektroden des benutzten Ozongenerators vor dem Laden zur Potentialdifferenz V und nach dem Laden gleiche Potentiale besaßen, so war $\Delta V = \pm V$. Ferner war $Q/V \equiv C_2$ die elektrostatische Kapazität des Kondensators für diese Potentialdifferenz. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (6) und (8) ein, so wird für den Fall eines unendlich langen Zylinders

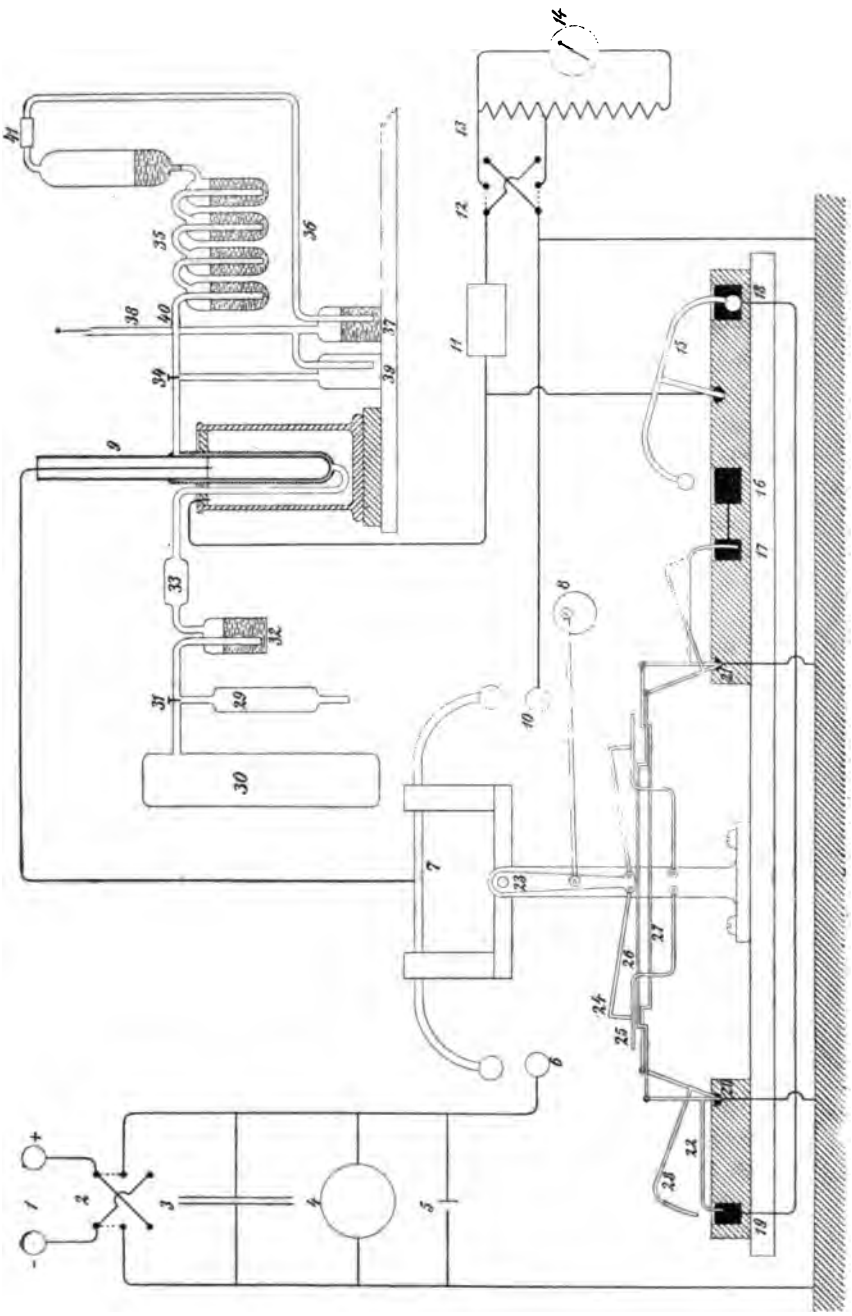
$$(9) \qquad Q_2 = \frac{10^{-11} K_2 l}{18 \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{O_v - O_0}{O_0} \cdot V \text{ Coulomb},$$

und für den Fall einer unbegrenzten Ebene

$$(10) \qquad Q_2 = \frac{10^{-11} K_2 A}{36 \pi a_2} \cdot \frac{O_v - O_0}{O_0} \cdot V \text{ Coulomb}.$$

Beschreibung des Apparates.

§ 5. Der benutzte Apparat ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. 1 zeigt die Pole einer von einem Elektromotor ziemlich regelmäßig betriebenen großen Vossschen Maschine; 2 einen Polwechsler; 3 eine große Leidener Batterie; 4 ein Braunsches Elektrometer; 5 einen Spitzennebenschluß zum Regulieren des Potentiales. Vermittelst einer durch einen Elektromotor 8 betriebenen Wippe 7 wurde die innere Belegung des Ozongenerators 9 abwechselnd durch 6 mit der Leidener Batterie und durch 10 mit der Erde verbunden. Die äußere Belegung des Generators wurde durch einen großen Widerstand 11, einen Polwechsler 12, einen Ayrtonschen Nebenschluß 13, und ein von Siemens & Halske konstruiertes Drehspulgalvanometer 14 mit der Erde verbunden. Ein Draht führte von der äußeren Belegung des Generators zum Umschalter 15, durch welchen jene entweder mit den Quecksilbernäpfchen 16 und 17, oder mit den ähnlichen 18 und 19 verbunden werden konnte. Die Näpfchen 20 und 21 waren mit der Erde verbunden. Solange der Schlüssel 22 in der gezeichneten Stellung blieb, war die äußere Belegung des Generators direkt mit der Erde verbunden, so daß das Galvano-


+
-
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

meter beim Laden oder beim Entladen keinen Ausschlag geben konnte; wurde aber 22 gerade vor einer Ladung aus 19 herausgehoben und die Verbindung zwischen 19 und 20 vor der nächsten Entladung hergestellt, so wurde ein einziger Ladungsstrom (Q in Gleichung (5)) gezwungen, durch das Galvanometer zu fließen. Dies konnte man beliebig dadurch herstellen, daß man eine an 7 angebrachte automatische Vorrichtung, deren Wirkung aus der Zeichnung ersichtlich ist, in Gang setzte. Das untere Ende des Armes 23, durch welchen die Wippe 7 betrieben wird, trägt einen Haken 24, welcher sich längs des oberen Teiles des Hebels 25 hin und her bewegt, solange letzterer in der gezeichneten Stellung stehen bleibt. Beim Niederdrücken von 25 aber fällt der Haken auf die gebogene Stange 26 und gleitet längs dieser, bis 7 die Verbindung mit 10 herstellt; dann geht er an der Stufe in 26 vorbei und fällt noch weiter herunter, so daß, wenn er nach rechts zurückkehrt, er 26 mitnimmt und 22 aus dem Quecksilber heraushebt, ehe 7 die Verbindung mit 6 herstellt. Wenn dies geschieht, hat 24 das rechte Ende seiner Bewegung erreicht, ist an der Stufe in der Stange 27 vorbeigegangen und ist noch weiter heruntergefallen; wenn er also nach links zurückkehrt, nimmt er 27 mit und taucht den angebrachten Schlüssel 28 in 19, bevor 7 die Verbindung mit 10 herstellt. Danach gleitet das Ende von 24 nur längs der unteren Stufe von 27, ohne die Stellung von 22 oder 28 zu beeinflussen, so daß, obgleich die Wippe in ununterbrochenem Tempo weiterläuft, das Galvanometer nur von einer *einzigen* Ladung durchflossen wird. Um den Apparat wieder für die Gewinnung eines neuen Ausschlages einzustellen, hebt man 25, schiebt 26 mit der Hand nach links und 27 nach rechts. Eine ähnliche Vorrichtung auf der rechten Seite der Wippe gestattet, die Elektrizitätsmenge zu messen, welche durch den Kreis fließt, wenn der Generator entladen wird. Um dies zu bewerkstelligen, hat man 15 mit 16, statt mit 18 zu verbinden.

§ 6. Entweder durch Natronkalk in 29 getrocknete Zimmerluft, oder käuflicher in 30 komprimierter Sauerstoff konnte durch den Dreiwegehahn 31, durch die in 32 enthaltene konzentrierte Schwefelsäure, und die Baumwolle 33 in den Gasraum zwischen den Wänden des Generators hindurchgeleitet

werden. Das durch den Generator durchgeleitete Gas gelangt dann durch den Dreiwegehahn 34, den Absorptionsapparat 35, die Röhre 36, die Waschflasche 37, die ableitende Röhre 38 und eine Wasserstrahlluftpumpe ins Freie. Durch Drehung des Dreiwegehahns 34 konnte man den Gasstrom statt durch den Absorptionsapparat, durch die Flasche 39 zu der Röhre 38 leiten. Die teilweise mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Waschflasche 37 verhinderte, daß das Ozon durch 36 in den Absorptionsapparat eintrat, wenn 34 den Generator mit 39 verband. 39 verhinderte Überspritzen von Wasser aus 37 in 9, falls man die Wasserstrahlluftpumpe zu plötzlich abstellte. Der Hahn 34 und der Schliff 40 wurden mit konzentrierter Schwefelsäure gedichtet. Der Gummischlauch 41 erleichterte das Abnehmen des Absorptionsapparates, welcher aus fünf hintereinander geschalteten Gefäßen, die im ganzen ungefähr 40 ccm $^1/_{50}$-normaler Natriumarsenitlösung enthielten, bestand.

Die Zahl der benutzten Stromstöße — indem Ladung oder Entladung als je ein Stromstoß gerechnet wird — wurde durch ein besonderes Zählwerk gemessen.

Methode der Ausführung der Messungen.

§ 7. Um eine Bestimmung zu machen, setzt man die Elektrisiermaschine und Wippe in Gang, gibt dem Dreiwegehahn die Stellung, durch die der Generator mit 39 verbunden wird, und leitet den Gasstrom ein. Man bringt das Potential der Leidener Batterie durch den Spitzennebenschluß auf den gewünschten Wert, füllt das Absorptionsgefäß mit einer gewogenen Menge des Absorptionsmittels und stellt das Zählwerk auf Null. Nachdem man sich durch einige Galvanometerausschläge überzeugt hat, daß der elektrische Apparat regelmäßig funktioniert, verbindet man den Generator mit dem Absorptionsapparat und rückt das Zählwerk ein. Von Zeit zu Zeit nimmt man Kapazitätsmessungen nach § 5 vor. Nach 12000 bis 25000 Stromstößen, je nach dem benutzten Potentiale, verbindet man wieder den Generator mit 39 und rückt das Zählwerk aus. Die erhaltene Ozonmenge bestimmt man in bekannter Weise durch Titrieren mit ungefähr $^1/_{50}$-normaler Jodlösung, welche man jedesmal vorher auf die $^1/_{50}$-normale

Natriumarsenitlösung einstellt. Durch einen Versuch stellt man fest, daß die zu benutzende Elektrizitätsmenge nicht mehr Ozon liefert, als vollständig von der Lösung absorbirt wird.

Vorsichtsmaßregeln.

§ 8. Um zuverlässige Resultate zu erhalten, muß man vor allem für eine sehr gute elektrische Isolierung sorgen, besonders von 6 an. 6 war auf Paraffin montiert. Zwei Siegellackstangen isolierten 7. Derjenige Teil des Generators, welcher sich über dem Gasraum befand, wurde mit geschmolzenem Schellack überzogen; reines und getrocknetes Quecksilber bildete die Belegungen; der Generator selbst wurde von einer dicken Schicht von Paraffin gehalten, welche über das die äußere Belegung bildende Quecksilber gegossen wurde; das ganze Gefäß war auf einen dicken Paraffinklotz gestellt. Der Gasraum wurde mit starken Säuren, destilliertem Wasser, Alkohol und Äther gereinigt. Der zum Galvanometer leitende Kupferdraht war unbesponnen und an seidenen Fäden aufgehängt. 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 und 19 standen auch auf Paraffin. Staub, Feuchtigkeit oder kleine Quecksilberkügelchen in der nächsten Nähe des Kreises machten große Schwierigkeiten. Wegen des hohen Widerstandes und Selbstinduktion des Galvanometers war es besonders notwendig, daß, wenn man einen Ausschlag erhalten wollte, die nach der Erde leitenden Schlüssel 22 und 28 um eine genügende Strecke aus dem Quecksilber herausgehoben wurden. Der Widerstand 11 war nach Longden[1]) aus Ruß hergestellt; er sollte verhindern, daß Funken zwischen den Windungen der Galvanometerspule überspringen. Er war so reguliert, daß durch seine Einschaltung der Ausschlag von über 400 mm, hervorgebracht durch die Entladung eines mit ungefähr 2 Volt geladenen Halbmikrofaradkondensators, nicht mehr als um ein halbes Millimeter verringert wurde. Das Regulieren des Potentiales bot einige Schwierigkeiten, aber man konnte ziemliche Regelmäßigkeit erhalten, wenn die die Elektrisiermaschine und die Wippe treibenden Elektromotoren gleichförmig liefen.

---

1) A. C. Longden, Phys. Rev. 91. p. 355. 1902.

Ergebnisse.

§ 9. Der erste zu untersuchende Punkt war die Angabe von Shenstone und Priest[1]), nach welcher das im Generator befindliche Gas nur bei der Entladung leuchtend wird. Dieses wurde mit einem aus zwei durch Luft getrennten Glasplatten bestehenden Kondensator, sowie mit den Generator selbst untersucht, indem man durchsichtige Elektroden aus konzentrierter Schwefelsäure anwandte. Bei langsamer Ladung und plötzlicher Entladung bemerkte man, in Übereinstimmung mit Shenstone und Priest, in der Dunkelheit das Leuchten nur beim Entladen; wenn man aber eine plötzliche Ladung dadurch erzeugte, daß man die Belegung des Kondensators mit einer vorher bis zu einem genügend hohen Potential geladenen großen Leidener Flasche verband, so trat das Leuchten auch beim Laden ein; dies ist von Wichtigkeit, da nach J. J. Thomson und R. Threlfall[2]) nur durch leuchtende Entladung Ozon gebildet wird.

§ 10. Wenn die angelegte Potentialdifferenz zwischen den Elektroden des Generators in die Nähe eines gewissen Wertes kam, wurden die Ergebnisse unregelmäßig, indem man manchmal Leuchten beobachtete, manchmal nicht. Mit niedrigen Potentialen wurde das Gas niemals, mit höheren immer leuchtend; aber jedesmal, wenn man Leuchten beobachtete, zeigte das Galvanometer den Durchgang einer viel größeren Elektrizitätsmenge, als ohne Leuchten.

§ 11. Wie zu erwarten war, ging dieselbe Elektrizitätsmenge sowohl beim Entladen als beim Laden durch. Scheinbare Ausnahmen davon wurden immer auf fehlerhafte Isolation zurückgeführt.

§ 12. Solange die angelegte Potentialdifferenz unter einem gewissen Werte war, blieb die Kapazität konstant, woraus zu schließen war, daß keine Leitung durch das Gas eingetreten war. Alsdann wuchs die Kapazität langsam mit zunehmendem

---

1) W. A. Shenstone u. M. Priest, Journ. Chem. Soc. Trans. **63.** p. 960. 1893.

2) J. J. Thomson u. R. Threlfall, Proc. Roy. Soc. **40.** p. 340. 1886.

Potential, ohne daß sichtbares Leuchten eintrat, worüber in § 14 Näheres gesagt ist, mit Eintreten des sichtbaren Leuchtens erfuhr sie eine sprungweise Vergrößerung auf das zwei- bis dreifache des Anfangswertes. Nachher wuchs sie mit zu-

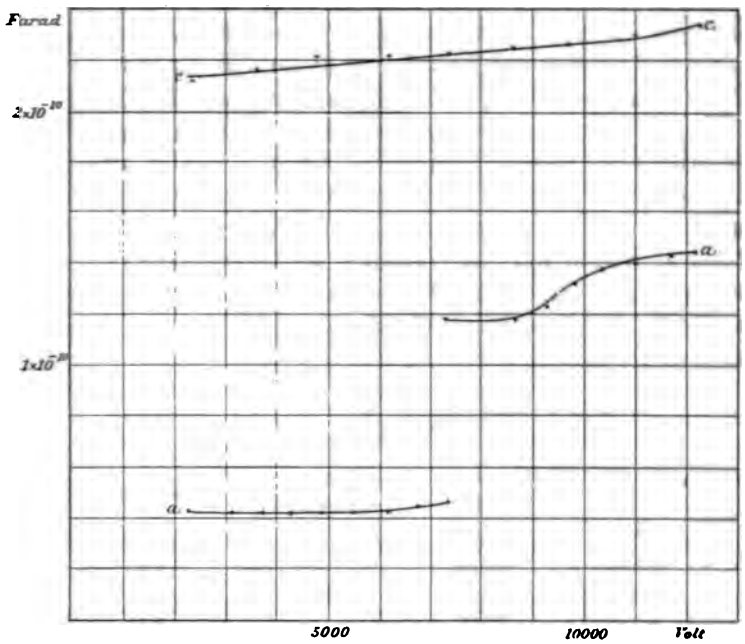


Fig. 3.

nehmendem Potential, erst schnell, dann langsam, was in Fig. 3, Kurve *a*, graphisch dargestellt ist. Aus der Gleichung (5) ergibt sich

$$C_v = C_0\left(1 + \frac{2\ln\frac{r_2}{r_1}}{K_2 l}\cdot\frac{Q_2}{V}\right). \tag{10}$$

Wäre also der Leitungsstrom Q_2 dem Potential V proportional, so würde C_v unabhängig von V sein und C_0 um einen konstanten Wert übertreffen. Aus den erhaltenen Resultaten geht hervor, daß Q_2/V mit wachsendem V wächst, oder daß der Leitungsstrom schneller wächst als das Potential. Doch scheint C_v einem konstantem Werte zuzustreben. Leider war es wegen Isolationsschwierigkeiten unmöglich, über ungefähr 12000 Volt hinauszugehen.

§ 13. Ob der Generator von trockenem Sauerstoff oder von trockener Luft durchflossen wurde, schien keinen Unterschied in der Kapazität auszumachen, nicht nur, wie zu erwarten war, wenn kein Leitungsstrom vorhanden war, sondern, was nicht von vornherein evident war, auch wenn Leitung stattfand. Dieses sieht man sofort aus der Vergleichung der Kolumnen *a* und *b* der Tab. I. In dieser Tabelle gibt die erste Kolumne die zwischen den Elektroden angelegte Potentialdifferenz in Volt; die anderen Kolumnen geben die zugehörigen Werte der Kapazität $C \equiv Q/V$, in 10^{-10} Farad. Bei *a* wurde der Generator von ziemlich trockener Luft, bei *b* von trockenem Sauerstoff durchströmt (Mittelwerte der Tab. II). Bei *c* (Kurve *c*, Fig. 3) war der Gasraum mit Quecksilber gefüllt und der hierbei erhaltene Wert der Kapazität ist viel größer als der Maximalwert, welchem die Kapazität bei der Leitung durch das Gas zuzustreben scheint.

Tabelle I.[1])

Potential	Trockene Luft	Trockener Sauerstoff	Quecksilber
V	*a*	*b*	*c*
2390	0,418	—	2,13
3070	0,415	—	—
3660	0,415	—	2,16
4250	0,417	—	—
4850	0,418	0,418	2,21
5500	0,416	—	—
6160	0,417	—	2,21
6710	0,431	—	—
7380	0,449 1,19	—	2,22
7960	1,20	—	—
8590	1,19	1,20	2,24
9220	1,22	1,23	—
9800	1,32	1,31	2,26
10400	1,38	1,33	—
11000	1,40	1,40	2,30
11700	1,42	1,41	—
12200	1,43	1,44	2,33

[1]) Wo keine Ziffern sich befinden, wurden keine Messungen gemacht.

Tabelle II.[1])

Volt	Farad . 10^{10}		Coulomb pro Stromstoß . 10^7		Gramm-Ozon pro Stromstoß	Coulomb
V	C_0	$C_v - C_0$	Q	Q_2	$M \cdot 10^7$	M/Q_2
4850	0,418	0	2,08	0	—	—
8600	1,20	0,78	10,3	8,45	—	—
8600	1,19	0,77	10,2	8,35	—	—
9200	1,25	0,83	11,5	9,6	—	—
9200	1,23	0,81	11,3	9,4	2,42	0,258
9200	1,25	0,83	11,5	9,6	2,63	0,274
9200	1,25	0,83	11,5	9,6	2,60	0,271
9200	1,24	0,82	11,4	9,5	2,41	0,254
9200	1,24	0,82	11,4	9,5	2,46	0,259
9800	1,32	0,90	12,9	11,1	—	—
9800	1,30	0,88	12,7	10,9	2,82	0,259
10400	1,33	0,91	13,9	11,9	3,09	0,260
11000	1,40	0,98	15,4	13,6	—	—
11000	1,39	0,97	15,3	13,4	3,60	0,269
11700	1,41	0,99	16,5	14,6	3,92	0,268
12200	1,43	1,01	17,5	15,5	—	—
12200	1,43	1,01	17,5	15,5	—	—
12200	1,44	1,02	17,6	15,7	4,37	0,278
12000	1,44	1,02	17,6	15,7	4,27	0,272
12200	1,44	1,02	17,6	15,7	4,14	0,264
12200	1,46	1,04	17,9	16,0	4,30	0,269
12200	1,45	1,03	17,8	15,8	4,44	0,281
12200	1,44	1,02	17,6	15,7	4,38	0,279
12200	1,45	1,03	17,8	15,8	4,47	0,282
12200	1,45	1,03	17,8	15,8	4,37	0,276

§ 14. Zu den definitiven Messungen wurde käuflicher Bombensauerstoff benutzt, welcher ungefähr 93 Volumenprozente

1) Für den in allen hier beschriebenen Versuchen benutzten Generator war

$l = 8{,}3$ cm, $r_0 = 0{,}76$ cm, $r_1 = 0{,}84$ cm, $r_2 = 0{,}92$ cm, $r_3 = 1{,}00$ cm.

K_2, die Dielektrizitätskonstante des durchfließenden Gases, wurde gleich Eins angenommen. Also war

$$Q_2 = \frac{10^{-11} K_2 l}{18 \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{C_v - C_0}{C_0} V = 1{,}26 (C_v - C_0) V \text{ Coulomb}.$$

Alle Bestimmungen wurden bei Zimmertemperatur ausgeführt.

Sauerstoff enthielt. Indem man das aus dem Generator austretende Gas durch eine Jodkaliumstärkelösung durchleitete, bemerkte man Ozonbildung, sobald die Kapazität anfing zu steigen und damit das Eintreten des Leitungsstromes anzeigte. Obgleich ein Leuchten des Gases dabei zuerst noch nicht bemerkt werden konnte, ist es doch nach den Ergebnissen von Thomson und Threlfall wahrscheinlich, daß es zwar vorhanden, aber zu schwach war, um bemerkt zu werden.

§ 15. Die definitiven Bestimmungen des gebildeten Ozons und der dazu verwandten Leitungsstrommenge sind in Tab. II enthalten. Aus der letzten Kolumne ergibt sich die wichtige Tatsache, daß die Masse des Ozons, welche man pro Coulomb Leitungsstrom in dem Siemensschen Apparat erhält, eine nahezu, wenn auch nicht genau, *konstante Größe zu sein scheint, deren Betrag bei dem benutzten Generator ungefähr gleich 0,27 g gefunden ist, unabhängig von der Änderung der Potentialdifferenz zwischen den Elektroden des Generators und auch wahrscheinlich der gebrauchten Elektrizitätsmenge.* Es ist zwar zu bemerken, daß die Zahlen die Tendenz zeigen, ein klein wenig mit dem Potentiale zu wachsen. Der Zuwachs ist jedoch kleiner als der mögliche Versuchsfehler, und rührt vielleicht von unvollkommener Isolation des Galvanometerkreises her, wodurch Q und C_v zu klein, die Ozonmenge pro Coulomb mithin zu groß erscheinen würde; der hieraus entspringende Fehler muß mit wachsendem Potentiale wachsen. Oberflächenleitung im Generator würde einen Fehler in der entgegengesetzten Richtung hervorbringen. Da beide Fehlerquellen vorhanden waren, sind weitere Versuche notwendig, um diesen Punkt zu entscheiden.

§ 16. Warburg[1]) hat nachgewiesen, daß die desozonisierende Wirkung der stillen elektrischen Entladung eine wichtige Rolle spielt, wenn der erzielte Ozongehalt nicht klein ist gegen den maximalen, welchen der benutzte Apparat liefern kann. Bei den hier beschriebenen Experimenten floß das Gas mit der Geschwindigkeit von ungefähr 7 cm pro Sekunde durch; es fanden 7—11 Stromstöße pro Sekunde statt, während die größte mittlere Ozonmenge, die bei irgend einer

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 712—721. 1900; Ann. d. Phys. 9. p. 788. 1902.

Bestimmung erzielt wurde, weniger als $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ g pro Stromstoß betrug. Hätte man $50 \cdot 10^{-7}$ g pro Sekunde erreicht, so würde man weniger als $50 \cdot 10^{-7}/7 \cdot 0{,}0021$, das heißt weniger als 0,04 Volumenprozente Ozon erhalten haben. Bei allen von Shenstone und Priest (l. c.) mit dem Siemensschen Apparat gemachten Experimenten betrug der maximale Ozongehalt mehr als 10 Proz. des ursprünglichen Volumens; folglich war die in den hier beschriebenen Experimenten erreichte Konzentration immer kleiner als 0,004 der maximalen erreichten. Infolgedessen ist der Einfluß der desozonisierenden Wirkung zu vernachlässigen.

§ 17. Da die Masse des Ozons pro Coulomb Leitungsstrom nahezu, wenn nicht ganz, von der benutzten Potentialdifferenz unabhängig ist, so folgt, daß man für einen gegebenen Energieverbrauch das meiste Ozon erhält, wenn die angelegte Potentialdifferenz nicht größer gemacht wird als unbedingt nötig, um das Leuchten hervorzubringen; dies entspricht den bei technischen Betrieben gemachten Erfahrungen.

Berlin, Physik. Institut, Oktober 1903.

(Eingegangen 15. November 1903.)

4. *Verhalten von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten einiger Substanzen vor und in dem kritischen Zustand;* von *P. Eversheim.*

Die im nachfolgenden mitgeteilten Untersuchungen sind im wesentlichen eine Fortsetzung und Erweiterung von früher von mir angestellten Arbeiten[1]), vor allem einer Untersuchung, welche ich bereits in Form einer vorläufigen Mitteilung[2]) veröffentlicht habe, mit dem Vorbehalt, an dieser Stelle ausführliche Mitteilung und weitere Versuchsergebnisse zu bringen.

Die Arbeiten, um die es sich hier handelt, wurden von verschiedenen Gesichtspunkten aus unternommen. Zunächst sollte untersucht werden, wie sich der Temperaturkoeffizient für die Leitfähigkeit für Flüssigkeiten überhaupt gestalte; es sollte geprüft werden, ob beim Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand die Leitfähigkeit sich kontinuierlich ändere, ob die Änderung etwa sprungweise erfolge oder ob vielleicht der Widerstand ins Unendliche wachse. Es sind nun in bezug auf diesen Punkt in letzter Zeit eine Reihe von Arbeiten erschienen, die jedoch im Resultat nicht alle übereinstimmend lauten. So finden wir in einer Arbeit von Walden und Centnerszwer[3]) den Satz ausgesprochen: „Die elektrolytische Dissoziation in Lösungen ist an den flüssigen Aggregatzustand geknüpft", während A. Hagenbach[4]) durch Versuche feststellte, daß auch bei der kritischen Temperatur eine elektrolytische Dissoziation in Lösungen existiere. Auch Franklin und Kraus[5]) haben auf Grund ihrer Versuche mit flüssigem Ammoniak den Schluß gezogen, daß Lösungen auch oberhalb

1) P. Eversheim, Ann. d. Phys. 8. p. 539. 1902.

2) P. Eversheim, Phys. Zeitschr. 18. p. 503. 1903.

3) P. Walden u. M. Centnerszwer, Zeitschr. f. phys. Chem. 39. p. 513. 1902.

4) A. Hagenbach, Ann. d. Phys. 5. p. 276. 1901.

5) E. Franklin u. Ch. A. Kraus, Amer. chem. Journ. 24. p. 83. 1900.

der kritischen Temperatur die Eigenschaft der Stromleitung besitzen. Die letzteren Aufstellungen finden in meinen Versuchen ihre Bestätigung.

Eine weitere Aufgabe für meine Untersuchungen fand ich in der Prüfung der Dielektrizitätskonstante (D.-C.) unter ähnlichen Bedingungen. Mit dieser Frage beschäftigt sich auch eine jüngst erschienene Arbeit von Tangl[1]), die, soweit der beschränktere Temperaturbereich Vergleiche gestattet, ähnliche Resultate enthält, wie die hier mitzuteilenden.

Man hat vielfach einen bestimmten Zusammenhang zwischen D.-C. und Leitfähigkeit von Flüssigkeiten festzustellen gesucht. Namentlich hat Nernst hervorgehoben, daß ein gewisser Parallelismus zwischen Dissoziation und D.-C. bestehe: für eine weitere Prüfung dieser Frage schienen mir meine Untersuchungen von Nutzen. Der eigentümliche Verlauf der Kurven für Leitfähigkeit und D.-C. scheinen allerdings unverkennbar auf einen innigen Zusammenhang zwischen beiden Größen hinzuweisen, zumal, wenn man die charakteristischen Änderungen bei der kritischen Temperatur ins Auge faßt.

Als einen nicht unwesentlichen Teil meiner Arbeit betrachte ich ferner das Verhalten der Substanz um den kritischen Punkt. Sind doch in letzter Zeit eine Reihe von Arbeiten[2]) unternommen worden, die dem alten Satz von der Gleichheit der Dichte im kritischen Punkt widersprechen. Wie man erkennen wird, bietet die hier gewählte Untersuchungsmethode zur Prüfung des kritischen Zustandes ihre besonderen Vorzüge. Es wird sich jedoch empfehlen, erst eine genaue Beschreibung der Versuchsanordnung und der Versuche zu bringen, ehe ich auf die erwähnten Punkte näher eingehe.

Versuchsanordnung.

Die zu untersuchende Substanz wurde in ein kleines Glasgefäß von nachstehender Form eingefüllt (Fig. 1). Dasselbe

1) K. Tangl, Ann. d. Phys. **10**. p. 748. 1903.

2) Neuere Untersuchungen von J. Traube, Ann. d. Phys. **8**. p. 267. 1902; Phys. Zeitschr. **21**. p. 569. 1903; vgl. auch die Versuche von P. de Heen, Zeitschr. f. comp. und fl. Gase p. 7—9. 1898; F. O. Dwelshauwers-Dery, Bull. Acad. Roy. Belg. **30**. p. 570. 1895; B. Galitzine, Wied. Ann. **50**. p. 521. 1893.

hatte eine Länge von etwa 40 und einen inneren Durchmesser von 7—8 mm. Da nun der Raum für die Elektroden (aus Platinblech) außerordentlich beschränkt war und es sich andererseits zur Prüfung der D.-C. als notwendig erwies, einen möglichst großen Kondensator einzubauen, so wurden die Elektroden aus drei Zylindern hergestellt und derartig angeordnet, daß sich zwischen die beiden oberen, leitend verbundenen, der dritte hineinschob. So konnte dieser bei einer Oberfläche von ca. 180 qmm auf beiden Seiten möglichst ausgenutzt werden. Damit die Elektroden ihre relative Lage unverändert beibehielten, wurden die Zuleitungsdrähte auf ihre ganze Länge mit Schmelzglas umgeben. Für die Prüfung der Leitfähigkeit waren die Elektroden entsprechend kleiner.

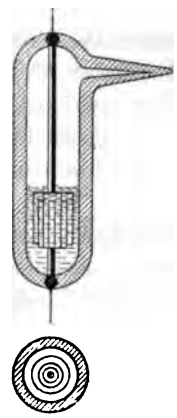


Fig. 1.

Beim Einfüllen der Substanz mußten Luft und Wasser möglichst vollkommen ausgeschlossen werden. Letzteres geschah mit Hilfe der üblichen Trocknungsmethoden, je nach der Substanz, mit Schwefelsäure, Chlorcalcium etc. soweit sich dies tun ließ. Um die Luft auszuschließen, wurde das Einfüllen folgendermaßen vorgenommen. Der Ansatz des Glasgefäßes war an einer Stelle dünn ausgezogen und über das freie verdickte Ende ein kleiner Gummischlauch gesteckt. Dann wurde das Gefäß mittels eingesteckter Kapillare mit der Substanz nahezu gefüllt (die Verdichtung geschah mit fester Kohlensäure und Äther) und danach so viel verdampft, bis die Flüssigkeit noch etwas oberhalb der Elektroden stand. Der Gummischlauch war mittels federnden Quetschhahnes verschlossen, so daß wohl die Substanz aus-, aber keine Luft eintreten konnte. Nach dem Abschmelzen konnte man sich durch Umkippen des Gefäßes von der Luftfreiheit überzeugen: die im Ansatzrohr befindliche Gasblase kondensierte sich in allen Fällen vollkommen. Ob absolute Luftfreiheit vorhanden, kann ich natürlich daraus nur vermuten, ich will dies nicht als vollgültigen Beweis hinstellen.

Zur Prüfung der Widerstände und Kapazitäten wurde die Wheatstonesche Brückenkombination angewandt und zwar

in der von Nernst[1]) angegebenen Form, die ich hier nur kurz beschreiben will. Es ist bekannt, daß, wenn man sich vier Leiter etwa wie ein Viereck angeordnet denkt, wobei je zwei gegenüberliegende Ecken bez. mit den sekundären Enden eines Induktoriums und einem Telephon verbunden sind, dieses beim Anlassen des Induktoriums schweigt, wenn zwei benachbarte Seiten des Vierecks — als Widerstände betrachtet — im gleichen Verhältnis stehen wie die entsprechenden zwei gegenüberliegenden. Das gleiche gilt von der Kapazität. Macht man daher die beiden oberen Brückenzweige, was Widerstand und Kapazität anlangt, einander gleich, so gibt bei Tonminimum einer der unteren, dessen Widerstand und die diesem parallel liegende Kapazität man geeicht hat, direkt den Betrag des benachbarten Zweiges für die entsprechenden Größen: in diesen Zweig schaltet man das zu untersuchende Gefäß. Wie dies praktisch durchgeführt wurde, soll nach Fig. 2 erklärt werden. Die oberen Zweige der Brücke sind w_1 und w_2, beide einander gleich; die gegenüberliegenden Zweige sind dargestellt durch die Widerstände W' bis W'''' einerseits und den unbekannten Widerstand w_x andererseits. Beiden parallel liegen je eine Hälfte des Meßkondensators M. Um w_1 und w_2 jederzeit auf ihre Gleichheit prüfen zu können, ist der Kommutator C zwischengeschaltet, bei dessen Umlegen die genannten Widerstände ihre Plätze miteinander vertauschen: sind sie einander gleich, so darf dann keine Änderung im Tonminimum eintreten.

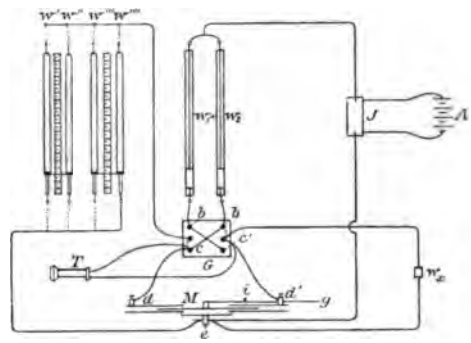


Fig. 2.

Die Widerstände bestanden je aus einer dünnen und weiteren Glasröhre von etwa 45 cm Länge. Die letztere, die durch ihre ganze Länge einen Silberdraht führte, ließ sich

1) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chemie **14**. p. 622. 1894.

über die dünne mit Flüssigkeit gefüllte Röhre schieben, und zwar so, daß der Draht je nach der Stellung der äußeren Röhre mehr oder weniger tief in die Flüssigkeit eintauchte. Verband man die im unteren Teil der dünnen Glasröhre eingeschmolzene Elektrode und den Draht der verschiebbaren Röhre mit dem Apparat (bei *e* und *c*), so hatte man einen Widerstand, dessen Größe innerhalb der gegebenen Grenzen beliebig verändert werden konnte. Im vorliegenden Falle waren vier derartige Röhren angebracht, die, nacheinander eingeschaltet, einen Widerstand von ca. 500 bis etwa 10.10^6 Ohm zu kompensieren gestattete. Als Füllung diente eine Borsäure-Mannitlösung entsprechender Konzentration und Aq. dest. Da keine absoluten Bestimmungen gemacht wurden, so genügte diese Anordnung vollkommen.

Der Meßkondensator aus Messingblech bestand aus zwei Hälften von je 2 cm Breite und 14 cm Länge, welche den Widerständen W' bis W'''' und w_x parallel lagen, und zwar so, daß die beiden oberen Platten bei *d* und *d'* bez. und die gemeinsame untere Platte bei *e* mit W' und w_x verbunden waren. Die Veränderung der Kapazität wurde mit einer zwischenliegenden Ebonitplatte von etwa 1 mm Dicke durch Verschiebung mittels der Stange *g* vorgenommen; die Größe der Verschiebung — jedesmal ein Maß für die Kapazität — ließ sich am Index *i* ablesen.

Eine derartige Versuchsanordnung eignet sich im allgemein sehr gut zu Messungen für Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante. Für meinen Zweck bedurfte es aber noch einer wesentlichen Zutat. Es sollten Stoffe untersucht werden, die schon bei gewöhnlicher Temperatur einen beträchtlichen Druck gegen die einschließenden Glaswände ausübten, ein Druck, der beim Erhitzen zunimmt und im kritischen Zustand bei den meisten Substanzen eine Stärke erlangt, der kein Gefäß mehr unter gewöhnlichen Umständen stand zu halten vermag. Die Glasgefäße mußten also geschützt werden, mußten von außen einen Gegendruck erhalten, der dem inneren wenigstens gleich kam. Gelang es, etwa nach dem Prinzip des Piezometers, eine Flüssigkeit beständig gegen das Gefäß zu pressen, dasselbe von außen während der Messung unter einen beliebigen Druck zu setzen, so erschien es wahrschein-

lich, die Messung noch weit über die kritische Temperatur auszudehnen. Allein, wenn auch der Gedanke an sich gut war, so war damit die Möglichkeit einer praktischen Durchführung noch keineswegs gesichert. Und in der Tat, es stellten sich eine Reihe von Hindernissen entgegen, die scheinbar unüberwindbar waren. Sollte doch das Prüfgefäß in eine geschlossene Bombe eingebracht werden, deren Dichtungen einem Druck bis zu 300 Atm. bei einer Temperatur von etwa 250° stand zu halten vermochten. In diese Bombe mußten die Zuleitungen nicht allein gut isoliert, sondern auch gut abgedichtet eingeführt werden. Ebenso mußten die Drähte des Thermoelementes zur Temperaturbestimmung bis an das Prüf-

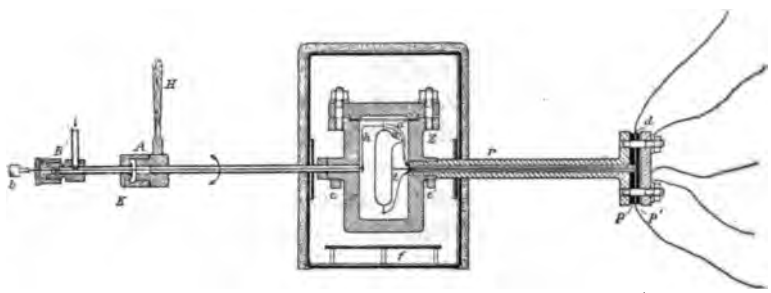


Fig. 8.

gefäß geleitet werden; die Einrichtung sollte ferner gestatten, jederzeit ein Umschütteln der Versuchsflüssigkeit vornehmen zu können und endlich erwies es sich zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante als notwendig, das Prüfgefäß im Inneren der Bombe so zu verschieben, daß dieses der rechten bez. linken Kondensatorhälfte zugeschaltet werden konnte.

Angesichts dieser Schwierigkeiten war es vorauszusehen, daß monatelange Erfahrung, viel Geduld und mancherlei Versuche dazu gehörten, den Apparat so zu konstruieren, daß er alle die erwähnten Eigenschaften besaß. Der Hauptteil desselben ist in Fig. 3 im Querschnitt, zum Teil schematisch dargestellt. *Z* ist ein starker Messingzylinder von etwa 12 mm Wandstärke. Die innere Weite beträgt 3, die Höhe etwa 8 cm. Der Deckel wird mit 10 Stahlschrauben an das Gehäuse befestigt, als Dichtung dient ein Ring aus Karton. Das Prüfgefäß wird im Zylinder in eine federnde Gabel geschoben und

so festgehalten. Die untere Elektrode ist durch einen Draht mit der Grundplatte des Meßkondensators verbunden; zwei andere Drähte, in leitender Verbindung mit je einer der oberen Kondensatorplatten, enden bei *a* und *a'* und sind derartig angeordnet, daß durch eine kleine Drehung des außerhalb befindlichen Knopfes *b* der Hebel *h* und damit die obere Elektrode einmal mit *a*, das andere Mal mit *a'* in Kontakt kommt. Dicht am Prüfgefäß bei *t* erblickt man noch die Lötstelle des Thermoelementes.

Die vom Knopf *b* in das Innere führende Stange, die durch das Druckrohr hindurchgeht, ist durch eine Stopfbüchse *B* abgedichtet. Lange wollte es nicht gelingen, die fünf Leitungsdrähte, zwei für das Thermoelement und drei für die Zuleitungen, gut isoliert und abgedichtet einzuführen. Stopfbüchsen erwiesen sich nicht allein als undicht, sondern konnten überhaupt in so großer Zahl nicht angebracht werden. Da eine gute Dichtung bei hohen Temperaturen *am* Zylinder überhaupt nicht zu erreichen war, wurde die Dichtungsstelle etwa 25 cm vom Zylinder entfernt angebracht. Dies ist in der Figur bei *d* dargestellt. Die Dichtung und Isolation aller fünf Drähte geschah mit einem Schlage dadurch, daß sie zwischen zwei Ebonitplatten *p* und *p'* geklemmt wurden, die, etwas erwärmt, eine feste Masse bildeten und die Zuleitungen in sich einschlossen. Da die Erwärmung sich nicht wesentlich bis nach *d* erstreckte, so blieb die Dichtung während aller Versuche vollkommen. Eine Berührung der Drähte im Innern der Röhre *r* wurde verhindert durch Einstecken in dünne Glasröhrchen.

Trotz aller Leitungen konnte das Gefäß jederzeit umgekippt werden. Die Zuleitungen, rechts für die Leitungsdrähte, links für die Preßflüssigkeit (Paraffinöl) bildeten bei *e* und *e'* zugleich die Drehpunkte für den Druckzylinder. Da natürlich der übrige Teil des Apparates mit der Druckpumpe etc. an der Drehung nicht Teil nehmen konnte, befand sich im Gehäuse *A* ein Konus *K*, um dessen Sitzfläche sich ein entsprechender Schliff, mit *Z* verbunden, drehen konnte; die Drehung geschah mit dem Hebel *H*. Endlich ersieht man noch aus der Zeichnung, daß der Zylinder noch mit einem Eisenmantel umgeben ist, der mit Asbestpappe geschützt wird. Die

Erhitzung geschieht mit einem Bunsenbrenner; das Bänkchen *f* sorgt dafür, daß die Erhitzung nicht nur von unten, sondern auch seitlich erfolgen kann. Wie im übrigen die Anordnung getroffen ist, zeigt Fig. 4. Rechts befindet sich die Druckpumpe und die nötigen Zubehörteile. Ein Manometer läßt erkennen, ob der nötige Gegendruck erreicht ist. Der Druckzylinder mit abgehobenem Deckel, die Zuleitungen zur Ölpumpe und Meßbrücke sind ebenfalls zu erkennen. Links

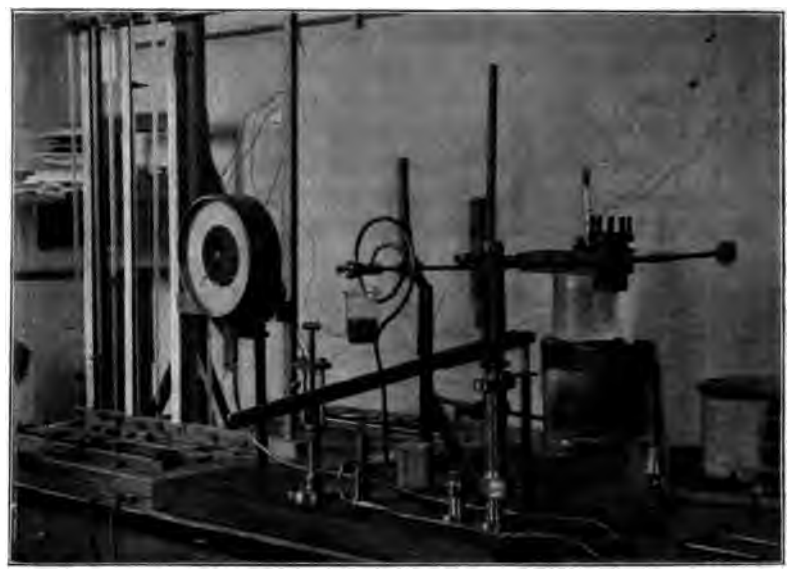


Fig. 4.

erblickt man die vier Widerstandssäulen mit dem unten auf dem Fußbrett befindlichen Meßkondensator.

Welche Fehlerquellen der Meßvorrichtung anhaften, soll im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

Fehlerquellen.

Was die Fehler anbetrifft, die der Brückenmethode überhaupt anhaften, so hat Nernst[1]) in der erwähnten Arbeit bereits eingehend darüber berichtet, es sei mir daher gestattet,

1) W. Nernst, l. c. p. 645.

hier nur auf die speziell für den vorliegenden Fall in Betracht kommenden Punkte hinzuweisen.

Bei der Leitfähigkeitsbestimmung können Unsicherheiten in der Messung dadurch eintreten, daß die Zuleitungen bis zum Prüfgefäß, namentlicü bei den hohen Temperaturen, nicht gut isolieren. Bei der Schwierigkeit der Anordnung war die Isolation auch anfangs eine mangelhafte und es bedurfte noch erheblicher Verbesserungen, ehe diese bedenklichen Fehler vollständig beseitigt waren. Dabei erwies es sich als wünschenswert, von Zeit zu Zeit eine Kontrolle vorzunehmen in der Art, daß man eine Versuchsreihe bis zu den höchsten Temperaturen ausführt und zwar mit *leerem* Gefäß. Es bot dies zugleich den Vorteil, eine etwa durch Leitung des Glases am Prüfgefäß entstehende Fehlerquelle zu ermitteln. Die Kontrollversuche zeigten, daß Störungen dieser Art nicht eintraten. Daß die Löslichkeit des Glases eine Widerstandsverminderung herbeiführen könnte, erscheint mir für die hier in Betracht kommenden Temperaturen ausgeschlossen. Die Kurven (siehe später) zeigen keine Eigentümlichkeiten, die etwa zu dem Schlusse berechtigen könnten, daß dieselben bei starkem Erhitzen der Substanzen durch fremde Leitfähigkeit beeinträchtigt seien, während die nichtleitenden Substanzen, wo also nur die Dielektrizitätskonstante gemessen werden konnte, selbst für die höchsten Temperaturen noch vollkommen isolierten.

Was die Ermittelung der D.-C. anbelangt, so war hier die Möglichkeit von Störungen noch außerordentlich viel größer. Die Messung der Kapazität für den betreffenden Körper geschah so, daß man einmal das Prüfgefäß zur rechten, dann zur linken Kondensatorhälfte schaltete und in beiden Fällen die Verschiebung der Ebonitplatte feststellte. Nimmt man die Schaltung am Meßkondensator selbst vor, also bei den Klemmen d, d' (Fig. 2), so erkennt man, daß die Kapazität der Zuleitungen die Einstellung der Ebonitplatte beeinträchtigen muß. Es wurde versucht, durch Gegenschalten eines entsprechenden Drahtes diesen Fehler zu kompensieren, allein es erwiesen sich trotzdem noch so viele Korrektionen nötig, daß eine exakte Messung nicht erfolgen konnte. Selbst die einzelnen Fehler, unter anderen der Betrag, der bei der Verschiebung am Meßkondensator auf Kosten der Leitungen zu setzen war,

blieben nicht konstant, sie änderten sich von Tag zu Tag, von Messung zu Messung und erwiesen sich als solch tückische Feinde, daß deren gänzliche Beseitigung zur Notwendigkeit wurde. Von außen her die Störungen zu vermeiden, war unmöglich: zu ungünstig wirkte die Umgebung des Prüfkondensators auf den letzteren; die starken Metallmassen des Druckzylinders, die große Zahl stark isolierter Leitungen, die wie Leydener Flaschen wirkten, die Veränderungen, denen das ganze System beim Erhitzen unterworfen war, alles das führte zu einer Anordnung, welche die Messung von all diesen Beeinflussungen völlig unabhängig machte. Wie dies erreicht wurde, habe ich bereits erwähnt: das Prüfgefäß wurde an Ort und Stelle, d. h. im Preßzylinder selbst der rechten oder linken Hälfte des Meßkondensators zugeschaltet, dessen Ausschlag nunmehr allein bedingt wurde durch den Betrag der Kapazität der zu untersuchenden Substanz.

Versuchsresultate.

Die Versuche konnten erfolgen 1. wenn das Gefäß jedesmal geschüttelt wurde, 2. wenn bei ruhendem Gefäß die Elektroden unten, 3. wenn sie bei ruhendem Gefäß oben waren.[1])

Dementsprechend ergeben sich drei Versuchsreihen, ein speziell zur Untersuchung des kritischen Zustandes sehr wichtiges Verfahren.

A. Versuche mit Ammoniak.[2])

Dargestellt aus Ammoniakwasser, in Ätzkalk getrocknet.

Tabelle I.

NH_3.[3])

a) Das Gefäß wird geschüttelt, die Elektroden sind unten.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
2 610	18,7	36 065	127,0	3 447 500	147,5
2 830	38,6	56 545	131,0	4 377 450	154,0
3 500	55,0	82 750	132,4	5 191 200	169,0
4 640	73,6	146 500	134,2	5 423 700	178,0
7 000	89,6	1 800 000	137,3	5 656 200	193,0
11 805	107,0	2 750 000	140,0		
19 175	118,0	3 331 000	142,5		

1) Vgl. Kurven *a*, *b*, *c* der Kurvenfiguren.

2) Vgl. dazu die Arbeit von Franklin und Kraus, l. c.

3) Vgl. die Kurven in Fig. 5.

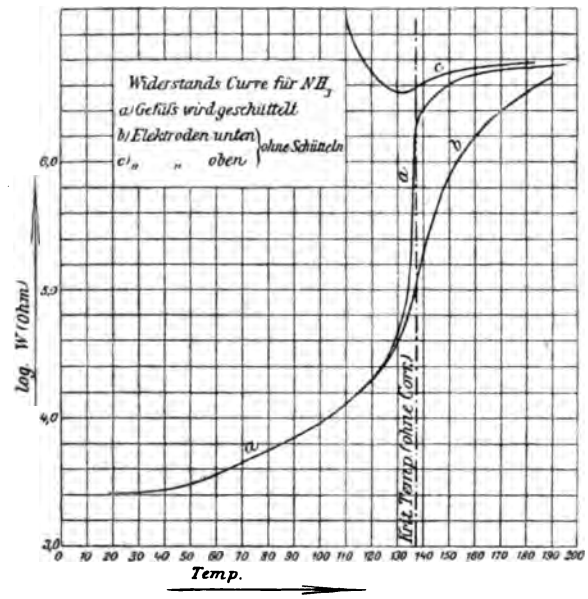

Widerstands Curve für NH_3
a) Gefäss wird geschüttelt
b) Elektroden unten } ohne Schütteln
c) „ „ oben }
Log. W (Ohm.)
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200
Temp.
Krit. Temp. (ohne Corr.)
a
b
c

Fig. 5.

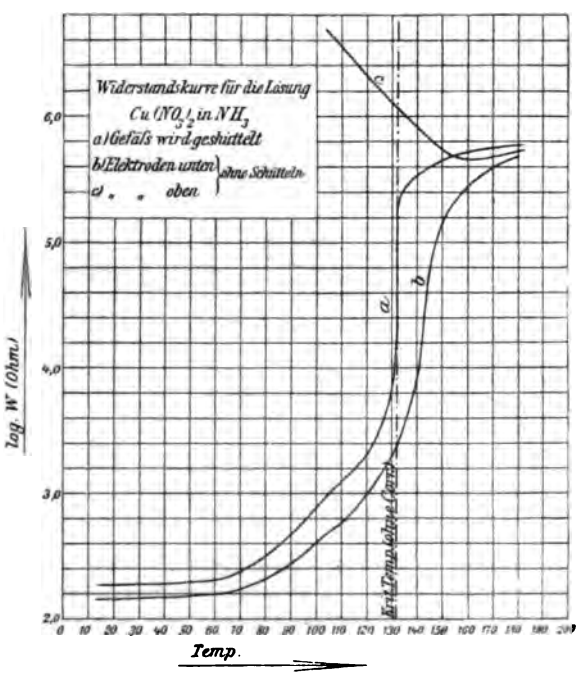

Widerstandskurve für die Lösung
$Cu(NO_3)_2$ in NH_3
a) Gefäss wird geschüttelt
b) Elektroden unten } ohne Schütteln
c) „ „ oben }
Log. W (Ohm.)
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
Temp.
Krit. Temp. (ohne Corr.)
a
b
c

Fig. 6.

b) Dasselbe Gefäß, Elektroden unten, es wird nicht geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
6 000	85,0	165 400	138,4	1 150 000	155,5
7 724	92,0	203 400	139,5	1 305 000	157,5
10 220	102,3	252 500	141,0	1 866 500	163,0
16 365	115,5	346 500	142,5	2 285 000	166,5
38 067	129,0	446 500	144,5	2 750 000	172,0
50 735	132,0	546 500	145,8	3 447 500	177,0
68 065	133,5	685 400	148,0	3 700 000	190,0
79 400	134,5	809 000	149,0		
118 000	136,8	902 000	151,5		

c) Dasselbe Gefäß, Elektroden oben, es wird nicht geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.
Ist zunächst unmeßbar groß.	
5 075 000	118,5
4 031 750	125,0
3 566 750	132,0
4 261 250	138,8
4 610 000	144,6
5 307 000	162,5
5 659 250	172,0
5 775 450	182,0

Die Widerstandskapazität des für die drei Versuchsreihen benutzten Gefäßes ist $WC = 0{,}254$

Tabelle II.[1])

Versuch mit einer Lösung von $Cu(NO_3)_2$ in NH_3, 1,18 Proz. nach Gewicht.

a) Das Gefäß wird geschüttelt, die Elektroden sind unten.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
185	14,0	2 000	120,5	319 500	137,0
191	30,0	3 235	126,5	329 500	139,0
207	54,8	5 140	128,0	399 500	147,5
223	65,5	7 215	130,0	464 400	153,2
240	75,0	10 285	131,0	514 400	160,5
368	85,4	18 710	132,0	560 800	166,5
655	96,0	229 400	132,8	603 700	175,0
977	104,5	259 400	133,5	625 100	180,7
1 450	114,5	289 500	135,5		

1) Vgl. hierzu die Kurven in Fig. 6.

b) Dasselbe Gefäß, Elektroden unten, es wird nicht geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
145	12,5	2 065	131,0	167 970	151,7
165	66,5	2 360	132,5	203 680	154,0
195	78,5	3 170	135,0	245 100	156,8
263	89,5	4 110	136,5	272 200	159,5
400	99,0	5 450	138,5	320 800	163,5
536	107,5	8 620	140,5	339 400	165,5
730	115,0	18 705	142,8	369 400	170,0
1 155	123	52 060	145,7	403 700	173,0
1 390	125,8	89 000	147,8	432 200	177,0
1 630	128,0	129 400	149,5	465 100	180,0

c) Elektroden oben, dasselbe Gefäß, es wird nicht geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
5 772 500	100,5	462 200	157,0
2 866 250	112,0	446 500	160,0
1 820 000	130,5	467 900	165,0
1 401 500	136,5	467 900	168,8
1 138 000	142,0	489 400	175,0
700 900	145,5	503 700	178,0
545 900	148,5	546 500	182,7
493 200	153,0	646 500	186,5

Die Widerstandskapazität des Gefäßes war $WC = 0{,}254$.

B. Versuche mit schwefliger Säure (SO_2).

Dargestellt aus Quecksilber und Schwefelsäure, getrocknet in Phosphorpentoxyd.

Versuche mit SO_2 bis zum kritischen Punkt sind bereits von Hagenbach[1]), Walden und Centnerszwer[2]) sowie von mir[3]) früher angestellt, allein weiter oberhalb der absoluten Siedetemperatur fehlen bis jetzt jegliche Daten, so daß ich der Vollständigkeit halber die Versuche wiederholte und weiter ausführte; die Resultate sind in folgenden Tabellen enthalten.

1) A. Hagenbach, l. c.
2) P. Walden u. M. Centnerszwer, l. c.
3) P. Eversheim, l. c.

Tabelle III.[1])

a) Elektroden unten, das Gefäß wird geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
95 115	18,5	325 140	150,5
99 400	49,0	450 830	156,0
108 067	66,0	1 801 400	161,5
113 780	81,0	4 726 250	168,0
114 400	92,0	6 702 500	173,0
143 700	105,0	7 865 000	181,0
155 115	120,0	10 655 000	193,0
176 540	139,5	11 450 000	205,5
209 400	140,0	12 150 000	219,0
269 400	148,0		

b) Dasselbe Gefäß, Elektroden unten, es wird nicht geschüttelt.

W (Ohm)	Temp.	W (Ohm)	Temp.
81 399	27,0	375 110	141,5
81 399	49,5	507 970	149,5
90 000	65,5	660 830	155,5
102 255	76,5	860 835	160,5
119 000	90,0	1 657 250	164,5
155 110	104,2	2 610 500	170,5
202 400	118,0	4 377 500	175,0
252 400	127,0	7 865 000	184,0
283 700	132,5	11 352 500	195,0

Die Widerstandskapazität des Gefäßes betrug $WC = 0{,}165$.

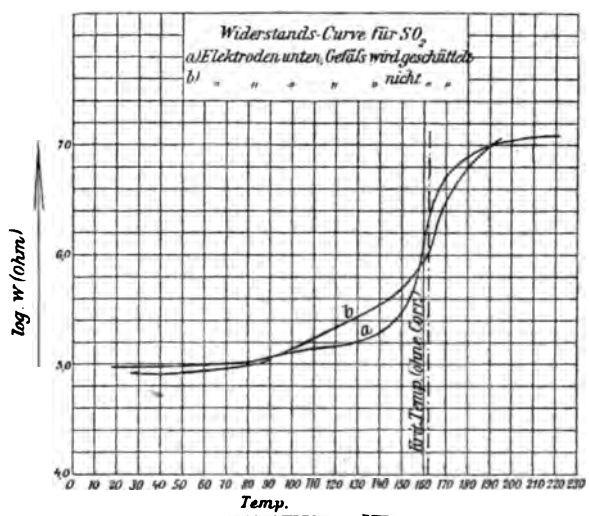


Fig. 7.

1) Vgl. hierzu die Kurven in Fig. 7.

C. Versuche mit Äthyläther $(C_2H_5)_2O$.

Sorgfältig gereinigter Äther, dessen Widerstand sich als unmeßbar groß erwies, wurde auf sein dielektrisches Verhalten hin untersucht, in folgenden Tabellen bedeuten DC die Dielektrizitätskonstante, T die zugehörige Temperatur.

Tabelle IV.[1])

a) Elektroden unten, das Gefäß wird geschüttelt.				b) Dasselbe Gefäß, Elektroden unten, es wird nicht geschüttelt.			
DC	T	DC	T	DC	T	DC	T
4,26	17,0	1,58	201,0	4,04	36,5	1,80	195,5
3,83	47,5	1,52	208,5	3,69	58,0	1,60	202,5
3,43	70,0	1,53	215,7	3,49	75,5	1,54	210,0
3,34	94,0	1,56	224,0	3,16	95,5	1,59	219,5
3,02	115,3	1,51	230,5	3,03	110,5	1,55	226,5
2,71	149,5	1,59	238,7	2,82	125,5	1,58	235,0
2,48	161,4	1,58	245,0	2,65	144,0	1,57	240,5
2,31	176,5	1,54	253,0	2,25	158,0	1,54	242,0
1,95	190,0			2,11	172,5	1,57	248,5
				2,02	185,0		

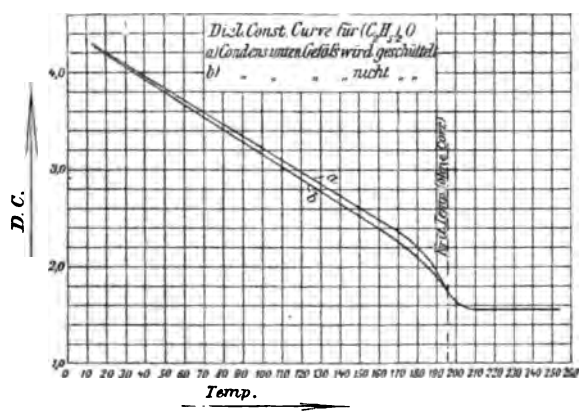


Fig. 8.

D. Versuche mit Schwefelwasserstoff.

Dargestellt aus Schwefeleisen und verdünnter Salzsäure; gewaschen in HCl und H_2O, getrocknet in $CaCl_2$.

1) Vgl. hierzu die Kurven in Fig. 8.

Tabelle V.[1])

a) Elektroden unten, das Gefäß wird geschüttelt.

D C	*T*	*D C*	*T*
5,83	11,0	3,52	95,5
5,73	19,0	3,24	99,5
5,52	28,5	2,91	102,5
5,23	32,5	2,64	112,5
5,18	43,0	2,70	119,0
4,92	49,0	2,64	123,0
4,76	57,0	2,69	128,0
4,59	62,0	2,79	135,0
4,35	68,5	2,66	144,5
4,13	76,5	2,64	151,0
4,01	84,5	2,64	164,5

b) Elektroden unten, das Gefäß wird nicht geschüttelt.

D C	*T*	*D C*	*T*
5,51	14,5	3,95	90,5
5,38	20,5	3,66	95,5
5,18	28,0	3,30	100,0
5,07	36,5	2,98	108,0
4,76	44,0	2,64	118,5
4,80	50,5	2,72	130,0
4,83	58,5	2,64	150,0
4,50	67,5	2,68	160,0
4,23	76,5	2,64	170,5
3,89	85,5		

c) Elektroden oben, das Gefäß wird nicht geschüttelt.
(Es ist zu bemerken, daß die Anfangswerte unsicher sind, da zwischen den Elektroden immer etwas Flüssigkeit hängen bleibt, die erst allmählich verdampft.)

D C	*T*	*D C*	*T*	*D C*	*T*
1,91	13,5	1,95	69,0	2,65	116,0
2,01	17,5	1,85	76,0	2,65	127,5
2,01	25,0	1,85	82,5	2,56	144,0
2,21	35,0	1,81	88,0	2,60	152,0
2,16	42,5	2,09	92,5	2,60	166,0
2,01	52,5	2,23	98,5		
1,71	61,0	2,56	107,0		

E. Versuche mit Chlor.

Dargestellt aus Braunstein und Salzsäure; gewaschen in H_2O, getrocknet in $CaCl_2$.

Tabelle VI.[1])

Elektroden unten, das Gefäß wird geschüttelt.

D C	*T*	*D C*	*T*	*D C*	*T*
1,93	14,3	1,80	89,5	1,43	152,5
1,95	26,0	1,56	101,0	1,24	163,5
1,87	32,5	1,54	113,0	1,37	173,0
1,97	44,0	1,43	123,5	1,37	189,0
1,85	55,5	1,54	132,5	1,43	216
1,73	77,0	1,54	142,0		

1) Vgl. hierzu die Kurven in Fig. 9.

Es wurde dasselbe Gefäß benutzt wie vorher beim Schwefelwasserstoff. Trotz eines Gegendruckes von etwa 250 Atmosphären erfolgte bei einer Messung gegen 220° eine so heftige Explosion, daß die Dichtungen zwischen Deckel und Zylinder herausgeschleudert wurden, und das nachschießende Öl den Heizmantel mit fort riß. Glücklicherweise war das Prüfgefäß vorher geeicht, so daß die Zahlen zur Berechnung benutzt werden konnten.

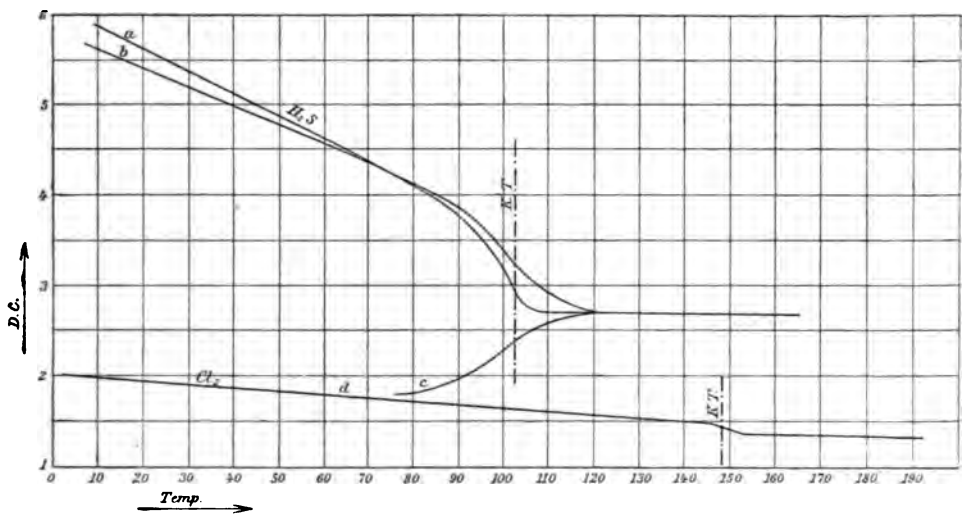


Fig. 9.

Dielektrizitätskonstante, Kurve für H_2S und Cl_2.

a) Kondensator unten, Gefäß wird geschüttelt.
b) „ „ „ „ nicht geschüttelt.
c) „ oben, „ „ „ „
d) „ unten, „ „ geschüttelt.

Was die Berechnung des Zahlenmaterials anbelangt, so erstreckt sich dieselbe eigentlich nur auf die Ermittelung der Dielektrizitätskonstanten. Da nämlich die beiden oberen Zweige der Wheatstoneschen Brücke stets an Größe einander gleich gehalten wurden, so konnte man den unbekannten Widerstand direkt an den Meßwiderständen ablesen, sofern diese kalibriert waren. Das letztere geschah in der Weise, daß man sie mit einem Widerstandskasten verglich und für die entsprechenden

Skalenteile die Widerstände in Ohm notierte. Reichte der Widerstandskasten nicht mehr aus, so nahm man statt dessen eine vorher geeichte Widerstandsröhre.

Zur Berechnung der Kapazität mußte der Kondensator mit einer Eichflüssigkeit beschickt und die Verschiebung auf dem Meßkondensator bestimmt werden. Desgleichen wurde die Verschiebung für Luft festgestellt. Bezeichnet dann D die D.-C. der Substanz, D_0 diejenige der Eichflüssigkeit, und sind V und v_0 bez. ihre Verschiebungen auf dem Meßkondensator, und endlich v die Verschiebung für Luft, so verhält sich, die D.-C. für letztere gleich 1 gesetzt:

$$\frac{D-1}{D_0-1} = \frac{V-v}{v_0-v},$$

also:

$$D = (D_0 - 1)\frac{V-v}{v_0-v} + 1.$$

Für dieselbe Versuchsreihe ist nur V eine variable Größe, der Faktor $D_0 - 1/v_0 - v$ also konstant, daher für diesen Fall:

$$D = C(V - v) + 1.$$

Man erkennt, daß der charakteristische Verlauf der Kurven für die D.-C. um so deutlicher sichtbar wird, je größer die D.-C. ist. Es werden daher Versuche mit Substanzen höherer D.-C. im allgemeinen lohnender sein.

Besprechung der Resultate.

Betrachtet man die graphischen Aufzeichnungen der Figuren 5—9, so erkennt man zunächst, daß für alle Stoffe eine eigentümliche Gleichförmigkeit im Verlauf der Kurven zum Ausdruck kommt. Die starke Änderung des molekularen Widerstandes um den kritischen Punkt kehrt in allen Fällen wieder, so daß die Vermutung nahe gelegt wird, daß dieselbe allgemeiner Natur sei. Diese eigentümlichen Erscheinungen finden sich auch bei der D.-C., so daß man von diesem Gesichtspunkte aus wohl zu der Ansicht neigen darf, daß ein Parallelismus zwischen beiden Größen bestehe. Weiter erkennt man, daß eine Leitfähigkeit nicht etwa an den flüssigen Aggregatzustand geknüpft ist, sondern auch für den gasförmigen Zustand besteht, derartig, daß ein kontinuierlicher Übergang erfolgt, der

allerdings innerhalb weniger Grade eine gewaltige Änderung erfährt.

Betrachtet man ferner die einzelnen Kurven genauer, so ersieht man, daß die mit *b* bezeichnete Kurve in allen Fällen eine flachere Form zeigt. Gegenüber der Kurve *a*, die durch jedesmaliges Schütteln des Gefäßes erhalten wurde, waren die Versuche für *b* bei ruhendem Gefäß ausgeführt. Man könnte zunächst wohl auf den Gedanken kommen, daß die Erwärmung im zweiten Falle eine ungleichmäßige sei. Allein, wenn man bedenkt, daß die Lötstelle des Thermoelementes nur wenige Millimeter von den Elektroden entfernt ist, wenn man ferner in Erwägung zieht, daß es sich um Temperaturunterschiede handeln müßte, die bis zu 30° ansteigen, so erkennt man, daß ein solcher Einwand nicht begründet ist. Ein sorgfältiges, langsames Erhitzen sorgte überdies dafür, daß solche Fehler möglichst gering ausfielen.

Man wird also wohl zu der Annahme sich neigen müssen, daß bei ruhendem Gefäß, gleichmäßige Temperatur vorausgesetzt, der Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand nicht bei der sogenannten kritischen Temperatur sofort eintrete, sondern je nach den Umständen allmählich erfolge. Es dürfte demnach die Andrewssche Theorie[1]) von der Gleichheit der Dichte von Gas und Flüssigkeit bei der kritischen Temperatur nicht ohne weiteres bestehen, wie dies übrigens auch andere Versuche in Abrede stellen. Nach dem Vorstehenden sind vielmehr alle Anzeichen vorhanden, die dafür sprechen, daß vom kritischen Punkte an erst die *Möglichkeit* für gleiche Dichte gegeben ist. Eine weitere Prüfung dieser bedeutsamen Fragen gestaltet sich übrigens mit Hilfe der mitgeteilten Untersuchungsmethode zu einer ebenso interessanten wie auch unschwer auszuführenden Arbeit.

Die von verschiedenen Seiten angestellten theoretischen Untersuchungen haben bis jetzt noch nicht zu allgemein anerkannten Gesetzen geführt, so daß sie mit den Versuchsergebnissen in vollem Einklang ständen. Wie dem auch sei, es läßt sich aus physikalisch-chemischen Betrachtungen ableiten, daß der Gleichgewichtszustand der beiden Phasen, der

1) Andrews, Phil. Trans. 159. II. p. 583. 1869.

flüssigen und gasförmigen, einer einheitlichen Substanz und der hier verwandten Lösungen ebenso wie bei jeder anderen Temperatur, so auch bei der kritischen eindeutig sei, d. h. daß von den aufgezeichneten Kurven nur eine dem Gleichgewichtszustand richtig entsprechen kann. Da bei Erzielung der Kurve *a* alle die Faktoren beobachtet wurden, die einen Dichte- und Temperaturausgleich der beiden Phasen begünstigen, so kann kein Zweifel sein, daß Kurve *a* den wahren Gleichgewichtszustand repräsentiert. *Der kritische Punkt für einen Stoff ist daher nur bestimmbar, wenn man die Bedingungen für den Dichteausgleich herbeiführt, wie dies im vorliegenden Falle durch Schütteln des Gefäßes geschah.*

Bonn, Physik. Institut der Universität, November 1903.

(Eingegangen 22. November 1903.)

5. *Über induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie;* von *P. Drude.*

Inhalt: Einleitung. I. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen p. 513. II. Die magnetische Koppelung ist sehr klein p. 521. III. Messung der Periode und der Dämpfung p. 525. 1. Die Maximalamplitude p. 528. 2. Der Integraleffekt p. 530. IV. Die magnetische Koppelung ist nicht sehr klein p. 534. V. Die Wirksamkeit der Teslatransformatoren p. 540. VI. Abhängigkeit der Teslawirkung von Dämpfung nnd Koppelung p. 544. VII. Anwendung auf die drahtlose Telegraphie p. 550. a) Einfacher oder lose gekoppelter Empfänger p. 551 b) Eng gekoppelter Empfänger p. 554. Hauptresultate p. 560.

J. v. Geitler[1]), B. Galitzin[2]), A. Oberbeck[3]) und Domalip und Koláček[4]) haben nachgewiesen, daß, wenn zwei elektrische Schwingungskreise genügend intensiv aufeinander einwirken, jede derselben nicht mehr eine, sondern zwei Eigenperioden hat, auch wenn die beiden Systeme aufeinander abgestimmt sind, d. h. wenn sie ohne gegenseitige oder bei sehr schwacher gegenseitiger Einwirkung eine gleiche Eigenperiode besitzen. Das Problem ist später in allgemeinerer und vollständigerer Weise von M. Wien[5]) behandelt worden. Wien[6]) wendet seine Resultate auch auf die drahtlose Telegraphie nach dem Braunschen System. V. Bjerknes[7]) hat den Fall sehr schwacher Koppelung ausführlich behandelt in Rücksicht auf Perioden und Dämpfungsmessung durch Diskussion der sogenannten Resonanzkurve.

1) J. v. Geitler, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Februar u. Oktober 1895.
2) Fürst B. Galitzin, Petersb. Ber., Mai u. Juni 1895.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 55. p. 623. 1895.
4) R. Domalip u. F. Koláček, Wied. Ann. 57. p. 731. 1896.
5) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.
6) M. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 686. 1902.
7) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1895.

Die hier folgende Behandlung des Problems unterscheidet sich von den genannten Bearbeitungen in folgenden Punkten:

1. Die Lösung der Differentialgleichungen, speziell die Berechnung der Amplituden aus den Anfangsbedingungen, wird in einer mathematisch übersichtlichen, Rechenfehler leicht ausschließenden Form gegeben, die auch für kompliziertere Verhältnisse, z. B. eng gekoppelte Sender und Empfänger bei drahtloser Telegraphie, anwendbar bleibt.[1])

2. Der induzierte Kreis wird nicht, wie bei den genannten Autoren, lediglich als ein längs des Leiters konstanter Strom behandelt, an dessen Enden eine bestimmte Kapazität liegt, sondern den wirklichen Verhältnissen entsprechend.[2])

3. Gegen die Wiensche Bearbeitung tritt ein Unterschied auf für das Resultat hinsichtlich der Dämpfung beider Eigenschwingungen in eng gekoppelten Systemen.

4. Bjerknes diskutiert nur die Resonanzkurve des Integraleffektes ausführlich. Hier wird auch die der Maximalamplitude mit hinzugezogen und dadurch eine experimentell einfache Methode zur Bestimmung der einzelnen Dämpfungen beider Schwingungskreise gewonnen.

5. Die Frage nach der besten Konstruktion eines Teslatransformators wird weiter geführt. Ihre Lösung hängt noch von einer auszuführenden Experimentaluntersuchung ab.

I. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Sekundärspule (z. B. Teslaspule) zentriert und symmetrisch zum Primärkreis liege. Die allgemeinen Resultate gelten aber auch für beliebige Lagen der Sekundärspule. Der Primärstromkreis enthalte die (elektromagnetisch gemessene) Kapazität C_1. Die Potentialdifferenz zwischen beiden Metallflächen der Kapazität C_1 zu einer beliebigen Zeit t sei V_1, die Stromstärke, die wir im ganzen

1) Nachträglich sehe ich, daß schon Domalip und Koláček diese Behandlung sehr ähnlich gewählt haben. Ich glaube nur, daß meine Formeln etwas übersichtlicher geblieben sind durch Einführung einer anderen Integralform bei starker Koppelung beider Schwingungskreise.

2) Daraus ergibt sich für die in den Differentialgleichungen auftretenden Konstanten der auf p. 518 gezogene Schluß $L_{12} < L_{21}$, während sonst $L_{12} = L_{21}$ angenommen wurde.

Primärkreis konstant annehmen können (da C_1 sehr groß gewählt wird), sei i_1. Die Anzahl magnetischer Kraftlinien, welche zu irgend einer Zeit den Primärkreis umschlingen, sei N_1. Dann gilt:

$$i_1 = - C_1 \frac{d V_1}{d t}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 N_1}{d t^2} + w_1 \frac{d i_1}{d t} + \frac{i_1}{C_1} = 0. \tag{2}$$

w_1 ist ein Koeffizient, von dem die Dämpfung der Primärschwingung abhängt (Widerstand von Leitung und Funken, sowie der [geringe] Strahlungsverlust des Kondensators, eventuell auch elektrische Absorption in seinem Dielektrikum). w_1 wird als von der Zeit unabhängig angenommen. Sollte diese Annahme nicht zutreffen, so ist unter w_1 ein während der Schwingungen stattfinder Mittelwert zu verstehen. N_1 hängt von i_1 und der Stromstärke i_2 in der Sekundärspule ab. i_2 ist längs der Spule nicht konstant.

Wenn wir die Achse der (als Zylinder gewickelten) Spule zur z-Richtung wählen, $z = 0$ in die Mitte der Spule legen, während $z = \pm h/2$ die beiden Spulenenden bedeutet, d. h. h die Spulenhöhe, so können wir als Anfangsglied einer Fourierschen Reihe (Grundschwingung) setzen:

$$i_2 = i_2^0 \cos \frac{\pi z}{h}. \tag{3}$$

i_2^0 ist die Stromstärke in der Mittelwindung. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Spule frei, d. h. ohne angelegte Kapazität, endigt, so daß $i_2 = 0$ sein muß für $z = \pm h/2$.

Die Kraftlinien N_1 zerfallen nun in zwei Teile:

$$N_1 = N_{11} + N_{12}, \tag{4}$$

von denen der erste Teil die Kraftlinien bezeichnen soll, welche nur den Primärkreis umschlingen, während N_{12} die Zahl der Kraftlinien sein soll, welche sowohl den Primärkreis umschlingen, als auch Windungen der Spule. (Vgl. Fig. 1.)

Für sämtliche Kraftlinien N_{11} ist die magnetomotorische Kraft die gleiche, nämlich $4\pi i_1$, wenn nämlich der Stromkreis 1 als ein linearer angesehen werden kann, was wir voraussetzen wollen, und in praxi auch hinreichend erfüllt ist. Ist also

W_{11} der magnetische Widerstand der (parallel geschalteten) Kraftröhren N_{11}, so ist:[1])

$$N_{11} = \frac{4\pi i_1}{W_{11}}. \tag{5}$$

Für die Kraftlinien N_{12} ist aber die magnetomotorische Kraft nicht für alle die gleiche, da die Spule nicht als linea-

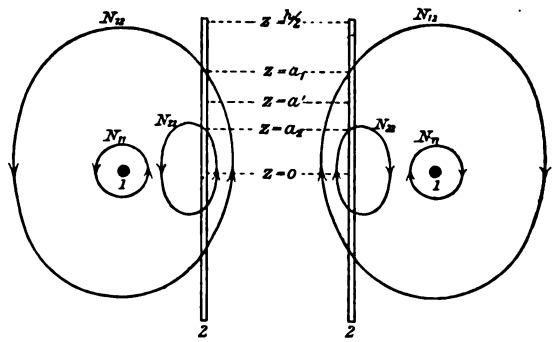


Fig. 1.

rer Strom angesehen werden kann. Wenn eine dieser Kraftlinien den Spulenmantel an den Stellen $z = \pm a$ schneidet, so ist für diese die magnetomotorische Kraft:

$$4\pi i_1 + 4\pi \frac{n}{h} \int_{-a}^{+a} i_2 \, dz = 4\pi i_1 + 8 n i_2^0 \sin \pi \frac{a}{h}\,^2),$$

falls n die Gesamtzahl der Spulenwindungen bedeutet, so daß auf der Strecke dz die Anzahl $(n/h)\,dz$ Windungen liegt. Wir können aber für die verschiedenen Kraftlinien N_{12} eine gleiche mittlere elektromotorische Kraft ansetzen:

$$4\pi i_1 + 8 n i_2^0 \sin \pi \frac{a_1}{h},$$

wobei a_1 jedenfalls kleiner als $h/2$ und größer als a' ist, falls der Spulenmantel von der kürzesten der Kraftlinien N_{12}, die gerade auch noch i_1 umschlingt, an der Stelle a' geschnitten wird.

---

1) Vgl. z. B. P. Drude, Physik d. Äthers p. 72. Stuttgart 1894.

2) Das +-Zeichen vor dem zweiten Gliede gilt, falls positives i_1 und i_2 gleichsinnig gerechnet wird.

Es ist daher nach dem Gesetz vom magnetischen Kreislauf zu setzen:

$$N_{12} = \frac{4\pi i_1 + 8 n i_2^0 \sin(\pi a_1/h)}{W_{12}}, \tag{6}$$

wobei W_{12} den magnetischen Widerstand sämtlicher Kraftröhren N_{12} in Parallelschaltung bedeutet.

Nach (2) und (4) entsteht daher:

$$4\pi\left(\frac{1}{W_{11}} + \frac{1}{W_{12}}\right)\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{8n}{W_{12}}\sin\frac{\pi a_1}{h}\frac{d^2 i_2^0}{dt^2} + w_1\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = 0. \tag{7}$$

Die Differentialgleichung für die Stromstärke i_2 in der Spule enthält t und z als unabhängige Variabele.

Wenn e_2 die auf der Längeneinheit $dz = 1$ der Spule liegende elektrische Ladung (nach elektromagnetischem Maße) bedeutet, $\mathfrak{C}_2$ die Kapazität dieser Längeneinheit, V_2 das Potential auf der Spule an der Stelle z, so gilt:

$$\frac{\partial i_2}{\partial z} = -\frac{\partial e_2}{\partial t}, \quad e_2 = \mathfrak{C}_2 V_2. \tag{8}$$

Sind ferner N_2 die Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche den Spulenquerschnitt in der Höhe z der Spule durchsetzen, so gilt zwischen zwei Stellen z und $z + dz$, zwischen denen $(n/h)dz$ Windungen liegen, falls $i_2^2 w_2 dz$ gleich dem Energieverlust pro Zeiteinheit gesetzt wird (Widerstand und Strahlung):

$$i_2 w_2 = -\frac{n}{h}\frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{\partial V_2}{\partial z}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt:

$$\frac{n}{h}\frac{\partial^2 N_2}{\partial t^2} + w_2\frac{\partial i_2}{\partial t} - \frac{1}{\mathfrak{C}_2}\frac{\partial^2 i_2}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

Diese partielle Differentialgleichung für i_2 können wir in eine totale für i_2^0 umwandeln, wenn wir auch N_2 nach einer Fourierschen Reihe entwickeln, beim Anfangsglied

$$N_2 = N_2^0 \cos\frac{\pi z}{h} \tag{11}$$

stehen bleiben, und wenn wir unter w_2 und $\mathfrak{C}_2$, die eigentlich auch von z abhängig sind, Mittelwerte für die ganze Spule verstehen, d. h. sie als Konstanten behandeln. Dann ergibt nämlich (3), (10) und (11):

$$\frac{n}{h}\frac{d^2 N_2^0}{dt^2} + w_2\frac{di_2^0}{dt} + \frac{\pi^2}{h^2\mathfrak{C}_2} i_2^0 = 0. \tag{12}$$

N_2^0 bedeutet nach (11) die Anzahl Kraftlinien, welche den Spulenquerschnitt an der Spulenmitte $z = 0$ durchsetzen. Auch diese Zahl zerfällt in zwei Teile

$$N_2 = N_{22} + N_{12}, \tag{13}$$

wobei die Kraftlinien N_{22} nur die Spule durchsetzen, aber nicht den Kreis 1 umschlingen, während N_{12} sowohl Spulenwindungen, als auch den Primärkreis 1 umschlingen. Für die N_{22} ist nun wiederum die magnetomotorische Kraft nicht konstant, wir können aber für sie eine gleiche mittlere magnetomotorische Kraft

$$8\,n\,i_2^0 \sin\left(\pi \cdot \frac{a_2}{h}\right)$$

in Ansatz bringen, wobei $a_2 < a'$, d. h. auch $a_2 < a_1$ ist. Daher gilt

$$N_{22} = \frac{8\,n\,i_2^0 \sin\left(\pi \frac{a_2}{h}\right)}{W_{22}}, \tag{14}$$

falls W_{22} der magnetische Widerstand der Kraftröhren N_{22} ist. Dagegen ergibt (12):

$$\left\{ 8\,n^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{a_1}{h}}{W_{12}} + \frac{\sin \pi \frac{a_2}{h}}{W_{22}} \right) \frac{d^2 i_2^0}{d t^2} + \frac{4\,\pi\,n}{W_{12}} \frac{d^2 i_1}{d t^2} \right. \tag{15}$$
$$\left. + w_2\,h \frac{d\,i_2^0}{d\,t} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{C}_2 h} i_2^0 = 0. \right.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit Gleichung (7) bildet die Grundgleichungen unseres Problemes. Schreibt man jetzt zur Vereinfachung i_2 für i_2^0, d. h. *bedeutet von nun an i_2 die Stromstärke in der Mittelwindung der Teslaspule*, so haben unsere Grundgleichungen die bekannte Form:

$$\left\{ \begin{aligned} L_{11} \frac{d^2 i_1}{d t^2} + L_{12} \frac{d^2 i_2}{d t^2} + w_1 \frac{d i_1}{d t} + \frac{i_1}{C_1} &= 0, \\ L_{22} \frac{d^2 i_2}{d t^2} + L_{21} \frac{d^2 i_1}{d t^2} + w_2 \frac{d i_2}{d t} + \frac{i_2}{C_2} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Dabei ist gesetzt:

$$\left\{ \begin{aligned} L_{11} &= 4\,\pi \left(\frac{1}{W_{11}} + \frac{1}{W_{12}} \right), & L_{22} &= \frac{16\,n^2}{\pi} \left(\frac{\sin \pi \frac{a_1}{h}}{W_{11}} + \frac{\sin \pi \frac{a_2}{h}}{W_{22}} \right), \\ L_{12} &= \frac{8\,n}{W_{12}} \sin \frac{\pi\,a_1}{h}, & L_{21} &= \frac{8\,n}{W_{12}}, \\ w_2 &= \frac{2}{\pi} w_2\,h, & C_2 &= \mathfrak{C}_2\,h : 2\,\pi. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Aus (17) folgt:

$$L_{12} : L_{21} = \sin \frac{\pi a_1}{h}, \tag{18}$$

d. h. *es ist nicht mehr, wie bei zwei linearen Stromkreisen, zu setzen* $L_{12} = L_{21}$, *sondern es ist* $L_{12} < L_{21}$, und zwar um so mehr, je kleiner a_1 ist, d. h. je näher der Primärkreis der Mittelwindung der Teslaspule liegt und je höher letztere im Vergleich zu diesem Abstand vom Primärkreis ist. *Bei verschiedenen Lagen der Teslaspule zum Primärkreis wechselt also das Verhältnis* $L_{12} : L_{21}$, *und zwar wird es um so kleiner, je stärker die gegenseitige Induktion (magnetische Koppelung) zwischen Teslaspule und Primärkreis gemacht wird.* Dieses Resultat, zu dessen Ableitung die Interpretation der Koeffizienten der bekannten Gleichungen (16) unternommen wurde, *gilt auch für beliebige und unsymmetrische Lagen der Teslaspule zum Primärkreis.*

Von den Koeffizienten L sind L_{11} und L_{21} verhältnismäßig einfach theoretisch zu berechnen, während L_{22} und L_{12} wohl nur durch sehr langwierige Rechnungen zu erhalten sind. L_{21} rührt von den Kraftlinien her, welche der Strom i_1 durch den Querschnitt q der Teslaspule hindurchsendet. Nennen wir diese Anzahl, falls $i_1 = 1$ ist, an einer beliebigen Stelle z der Spule N_{21}, so ist das Anfangsglied N_{21}^0 der Fourierschen Entwickelung

$$N_{21} = N_{21}^0 \cos \frac{\pi z}{h}$$

gegeben durch

$$N_{21}^0 = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} N_{21} \cos \frac{\pi z}{h} \, dz. \tag{19}$$

Daher ist

$$L_{21} = \frac{4n}{\pi h} \int_{-h/2}^{+h/2} N_{21} \cos \frac{\pi z}{h} \, dz. \tag{20}$$

Wenn die Primärwindungen Kreise sind, so ist die durch i_1 an einer beliebigen Raumstelle hervorgebrachte magnetische Kraft durch Kugelfunktionen darstellbar, daher ist N_{21} und deshalb auch L_{21} zu berechnen. Für die Selbstinduktion L_{11} sind schon bekannte Formeln entwickelt.[1]) Diese Formeln darf

1) Für Spulen bedürfen die Stefanschen Formeln bei oszillatorischen Kondensatorentladungen einer Korrektion, vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 604. 1902.

man aber für L_{22} nicht auch benutzen, da i_2 längs der Spule 2 nicht konstant ist.

Setzt man an Stelle der Gleichungen (16) Gleichungen für die Potentialdifferenz V_1 an der Kapazität C_1 im Stromkreis 1, und für das Potential V_2 (eigentlich V_2^h zu schreiben) an einem freien Ende $z = h/2$ der Spule, so ergibt sich vermöge (1) und (8) aus (16):

$$(21)\quad \begin{cases} L_{11} C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} - 2 L_{12} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + w_1 C_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0, \\ L_{22} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} - \frac{L_{21} C_1}{2} \frac{d^2 V_1}{dt^2} + w_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = 0.^1) \end{cases}$$

Diese Gleichungen wollen wir entweder in der Form benutzen:

$$(I)\quad \begin{cases} \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dV_1}{dt} + (\nu_1^2 + \delta_1^2) V_1 = p_{12} \frac{d^2 V_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dV_2}{dt} + (\nu_2^2 + \delta_2^2) V_2 = p_{21} \frac{d^2 V_1}{dt^2}, \end{cases}$$

wobei also gesetzt ist:

$$(22)\quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{w_1}{2 L_{11}}, \quad \nu_1^2 + \delta_1^2 = \frac{1}{L_{11} C_1}, \quad p_{12} = 2 \frac{L_{12} C_2}{L_{11} C_1}, \\ \delta_2 = \frac{w_2}{2 L_{22}}, \quad \nu_2^2 + \delta_2^2 = \frac{1}{L_{22} C_2}, \quad p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2}, \end{cases}$$

oder in der Form:

$$(II)\quad \begin{cases} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2\vartheta_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2}, \\ (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2\vartheta_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2}, \end{cases}$$

1) Diese Gleichungen nehmen die Gestalt von den Gleichungen bei M. Wien (Ann. d. Phys. 8. p. 694. 1902) an, wenn man berücksichtigt, daß $2 V_2$ die Potentialdifferenz zwischen beiden Spulenenden ist. Daher besteht auch die hier gültige Gleichung

$$i_2^0 = 2 C_2 \frac{d V_2^h}{dt}.$$

Die nachfolgenden Entwickelungen gelten daher auch für den Fall, daß der Sekundärkreis aus keiner Spule, sondern aus einem linearen Strom mit angehängter großer Kapazität C_2 besteht. $2 V_2$ ist dann die sekundäre Potentialdifferenz.

wobei gesetzt ist

$$(23)\quad \begin{cases} \vartheta_1 = \frac{1}{2} w_1 C_1, \quad \tau_1^2 + \vartheta_1^2 = L_{11} C_1, \quad p_{12} = 2 \frac{L_{12} C_2}{L_{11} C_1}, \\ \vartheta_2 = \frac{1}{2} w_2 C_2, \quad \tau_2^2 + \vartheta_2^2 = L_{22} C_2, \quad p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2}. \end{cases}$$

Als Integral der Form (I) wählen wir

$$(24)\qquad V_1 = A e^{xt}, \quad V_2 = B e^{xt}, \quad x = -\delta + i\nu,$$

als Integral von (II) wählen wir:

$$(25)\qquad V_1 = A e^{t/y}, \quad V_2 = B e^{t/y}, \quad y = -\vartheta + i\tau.$$

Dabei bedeutet $i = \sqrt{-1}$.

Es wird sich erweisen, daß in einem Falle die Form (I) zweckmäßig ist, im anderen Falle die Form (II).

Aus (I) und (24) folgt:

$$(26)\qquad \begin{cases} A(x^2 + 2\delta_1 x + \nu_1^2 + \delta_1^2) = p_{12} x^2 B, \\ B(x^2 + 2\delta_2 x + \nu_2^2 + \delta_2^2) = p_{21} x^2 A. \end{cases}$$

Dagegen folgt aus (II) und (25):

$$(27)\qquad \begin{cases} A(\tau_1^2 + \vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 y + y^2) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) B, \\ B(\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_2 y + y^2) = p_{21}(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) A. \end{cases}$$

Durch Elimination von $A:B$ folgen für x und y die biquadratischen Gleichungen:

$$(28)\quad (x^2 + 2\delta_1 x + \nu_1^2 + \delta_1^2)(x^2 + 2\delta_2 x + \nu_2^2 + \delta_2^2) = p_{12} p_{21} x^4,$$

$$(29)\quad \begin{cases} (y^2 + 2\vartheta_1 y + \tau_1^2 + \vartheta_1^2)(y^2 + 2\vartheta_2 y + \tau_2^2 + \vartheta_2^2) \\ \qquad = p_{12} p_{21} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2). \end{cases}$$

Wenn $p_{12} = 0$ ist, d. h. der Primärkreis allein vorhanden ist, so ergibt (26):

$$(30)\qquad x = -\delta_1 \pm i\nu_1.$$

ν_1 bezeichnet also die Frequenz, δ_1 die Dämpfung der Eigenschwingung des Primärkreises. Nennt man T_1 die Schwingungsdauer, γ_1 das logarithmische Dekrement, so ist

$$(30')\qquad \nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma_1}{T_1}.$$

Analog bezeichnet ν_2 und δ_2 Frequenz bez. Dämpfung der Eigenschwingung der Teslaspule allein. ϑ_1, τ_1, ϑ_2, τ_2 haben

nicht direkt so anschauliche physikalische Bedeutungen, jedenfalls ist aber für die Eigenschwingungen zu setzen:

$$y = -\vartheta_1 \pm i\tau_1 \quad \text{bez.} \quad y = -\vartheta_2 \pm i\tau_2. \tag{31}$$

Wenn ϑ_1^2 gegen τ_1^2, ϑ_2^2 gegen τ_2^2 zu vernachlässigen ist, so gilt

$$e^{\frac{t}{-\vartheta_1 + i\tau_1}} = e^{-\frac{\vartheta_1}{\tau_1^2}t} \cdot e^{-t\frac{i}{\tau_1}}.$$

Setzt man also

$$e^{\frac{t}{-\vartheta_1 + i\tau_1}} = e^{-\gamma \cdot \frac{t}{T_1}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_1}t},$$

so ist

$$\tau_1 = \frac{T_1}{2\pi}, \quad \vartheta_1 = \frac{\gamma_1 T_1}{4\pi^2}. \tag{32}$$

Dabei ist T_1 die Periode, γ_1 das logarithmische Dekrement des Kreises 1.

Die Gleichung (I), (24) und (28) ist nun praktisch, wenn *die magnetische Koppelung* k^2

$$k^2 = p_{12}p_{21} = \frac{L_{12}L_{21}}{L_{11}L_{22}} \tag{33}$$

so klein ist, daß sie gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Verfolgen wir zunächst diesen ersten Fall.

II. Die magnetische Koppelung ist sehr klein.

Wenn $p_{12}p_{21}$ gegen 1 vernachlässigt wird, so ergibt (28) die vier Wurzeln für x:

$$x_1 = -\delta_1 + i\nu_1,\ x_2 = -\delta_1 - i\nu_1,\ x_3 = -\delta_2 + i\nu_2,\ x_4 = -\delta_2 - i\nu_2. \tag{34}$$

Demnach ist das allgemeine Integral von (I):

$$\begin{cases} V_1 = A_1 e^{x_1 t} + A_2 e^{x_2 t} + A_3 e^{x_3 t} + A_4 e^{x_4 t}, \\ V_2 = B_1 e^{x_1 t} + B_2 e^{x_2 t} + B_3 e^{x_3 t} + B_4 e^{x_4 t}. \end{cases} \tag{35}$$

Aus (1) folgt:

$$-\frac{i_1}{C_1} = x_1 A_1 e^{x_1 t} + x_2 A_2 e^{x_2 t} + x_3 A_3 e^{x_3 t} + x_4 A_4 e^{x_4 t}, \tag{36}$$

aus (3) und (8):

$$\pi \frac{i_2}{\mathfrak{C}_2 h} = x_1 B_1 e^{x_1 t} + x_2 B_2 e^{x_2 t} + x_3 B_3 e^{x_3 t} + x_4 B_4 e^{x_4 t}. \tag{37}$$

Als Anfangsbedingung für $t = 0$ gilt nun:

$$V_1 = F, \quad V_2 = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0. \tag{38}$$

Daher ergibt (35), (36), (37) und (38):

$$(39)\quad \sum A_n = F,\quad \sum A_n x_n = 0,\quad \sum B_n = 0,\quad \sum B_n x_n = 0,$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Nun ist nach der zweiten der Gleichungen (26):

$$(40)\qquad B_n\left(x_n + 2\,\delta_2 + \frac{\nu_2^2 + \delta_2^2}{x_n}\right) = p_{21}\, x_n\, A_n.$$

Durch Addition dieser vier für $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten Gleichungen entsteht wegen der Gleichungen (39):

$$(41)\qquad \frac{B_1}{x_1} + \frac{B_2}{x_2} + \frac{B_3}{x_3} + \frac{B_4}{x_4} = 0.$$

Ferner folgt aus der zweiten der Gleichungen (26):

$$(42)\qquad B_n\left(1 + \frac{2\,\delta_2}{x_n} + \frac{\nu_2^2 + \delta_2^2}{x_n^2}\right) = p_{21}\, A_n.$$

Durch Addition dieser vier für $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten Gleichungen folgt wegen (39) und (41):

$$(43)\qquad \frac{B_1}{x_1^2} + \frac{B_2}{x_2^2} + \frac{B_3}{x_3^2} + \frac{B_4}{x_4^2} = p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}.$$

Daher ergibt (43), (41), und die beiden letzten Gleichungen (39):

$$(44)\qquad \frac{B_1}{x_1^2}\cdot\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^3, & x_2^3, & x_3^3, & x_4^3 \end{vmatrix} = p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}\, x_2\, x_3\, x_4 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_2, & x_3, & x_4 \\ x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretenden Determinanten lassen sich sofort hinschreiben. Denn es ist

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^3, & x_2^3, & x_3^3, & x_4^3 \end{vmatrix} = +(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4).$$

Daher ergibt (44):

$$(46)\qquad B_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) = -\,p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}\, x_1^2\, x_2\, x_3\, x_4,$$

und ähnlich folgt (zyklische Buchstabenvertauschung):

$$(47)\qquad B_2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1) = -\,p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}\, x_1\, x_2^2\, x_3\, x_4,$$

$$(48)\qquad B_3 (x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = -\,p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}\, x_1\, x_2\, x_3^2\, x_4,$$

$$(49)\qquad B_4 (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = -\,p_{21}\,\frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4^2.$$

Von besonderem Interesse ist das Potential V_2 am Spulenende. Durch (35) und (46) bis (49) ist dasselbe durch die Anfangspotentialdifferenz im Primärkreis ausgedrückt.

Es ergibt sich B_2 zu B_1 konjugiert komplex, ebenso B_4 zu B_3, gerade wie auch x_2 zu x_1, x_4 zu x_3.

Daher ergibt sich V_2 nach (35) gleich einer reellen Größe.

Um das Resultat übersichtlich zu gestalten, kann man die Gleichung (36), wenn man für die x die Werte (34) einsetzt, in der Form schreiben:

$$(50)\quad \begin{cases} V_2 = e^{i\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t}\left[B_1 e^{-\delta_1 t} e^{+i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t} + B_2 e^{-\delta_2 t} e^{-i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t}\right] \\ \quad + e^{-i\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t}\left[B_2 e^{-\delta_1 t} e^{-i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t} + B_4 e^{-\delta_2 t} e^{+i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t}\right]. \end{cases}$$

Setzt man also

$$(50')\quad B_1 e^{-\delta_1 t} e^{+i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t} + B_3 e^{-\delta_2 t} e^{-i\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t} = -iBe^{i\chi},$$

wobei B und χ reelle Größen sind, so wird

$$(51)\qquad V_2 = 2B\sin\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t+\chi\right).$$

B bezeichnet also die Amplitude des Potentiales am Ende der Teslaspule. Es entstehen Schwebungen für V_2, da B von der Zeit abhängt.

Aus (50) folgt nun, da B_2 konjugiert komplex zu B_1 ist, und B_4 zu B_3:

$$(52)\quad \begin{cases} B^2 = B_1 B_2 e^{-2\delta_1 t} + B_3 B_4 e^{-2\delta_2 t} \\ \quad + e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\left[B_1 B_4 e^{i(\nu_1-\nu_2)t} + B_3 B_2 e^{-i(\nu_1-\nu_2)t}\right]. \end{cases}$$

Nun ist nach (46)

$$(53)\qquad B_1 = -p_{21}F(\delta_1^2+\nu_1^2)\frac{-\delta_1+i\nu_1}{2i\nu_1}\cdot\frac{1}{[-(\delta_1-\delta_2)+i(\nu_1-\nu_2)]}\cdot\frac{1}{[-(\delta_1-\delta_2)+i(\nu_1+\nu_2)]}.$$

Da nun $\delta_1-\delta_2$ stets klein gegen $\nu_1+\nu_2$, und δ_1 klein gegen ν_1 ist, so kann man setzen bis auf erste Ordnung in δ_1 bez. δ_2:

$$(54)\quad B_1 = p_{21}F\frac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)}\left(1+i\frac{\delta_1\nu_2+\delta_2\nu_1}{\nu_1(\nu_1+\nu_2)}\right)\cdot\frac{1}{\nu_1-\nu_2+i(\delta_1-\delta_2)}.$$

Analog ergibt sich

$$(54)\quad \begin{cases} B_2 = \quad p_{21} F \cdot \dfrac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)} \left(1 - i \dfrac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1(\nu_1+\nu_2)}\right) \cdot \dfrac{1}{\nu_1 - \nu_2 - i(\delta_1 - \delta_2)}, \\ B_3 = -p_{21} F \cdot \dfrac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)} \left(1 + i \dfrac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_2(\nu_1+\nu_2)}\right) \cdot \dfrac{1}{\nu_1 - \nu_2 + i(\delta_1 - \delta_2)}, \\ B_4 = -p_{21} F \cdot \dfrac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)} \left(1 - i \dfrac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_2(\nu_1+\nu_2)}\right) \cdot \dfrac{1}{\nu_1 - \nu_2 - i(\delta_1 - \delta_2)}. \end{cases}$$

Folglich ergibt (52):

$$(55)\quad B = p_{21} F \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)} \sqrt{\frac{e^{-2\delta_1 t} + e^{-2\delta_2 t} - 2e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\cos\varphi}{(\nu_1-\nu_2)^2 + (\delta_1-\delta_2)^2}},$$

wobei

$$(56)\quad \varphi = (\nu_1 - \nu_2)t + \frac{\delta_1\nu_2 + \delta_2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right).$$

Man kann auch B in der Form schreiben:

$$(57)\quad B = p_{21} F \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1+\nu_2)} e^{-\frac{\delta_1+\delta_2}{2}t} \sqrt{\frac{\left(e^{+\frac{\delta_1-\delta_2}{2}t} - e^{-\frac{\delta_1-\delta_2}{2}t}\right)^2 + 4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{(\nu_1-\nu_2)^2 + (\delta_1-\delta_2)^2}}.$$

Für den Fall der *Resonanz* $\nu_1 = \nu_2$ wird

$$(58)\quad B = p_{21} F \frac{\nu_1}{4} \frac{e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}}{\delta_1 - \delta_2}.$$

B nimmt einen maximalen Wert an, wenn ist

$$(59)\quad e^{(\delta_1-\delta_2)t} = \delta_1 : \delta_2, \text{ d. h. für } t = \frac{\log \delta_1/\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}.$$

Dieser maximale Wert (bei Resonanz) ist nach (58) und (59):

$$(60)\quad \begin{cases} B_{\text{Max.}} = -p_{21} F \dfrac{\nu_1}{4\delta_2} \cdot \left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_2-\delta_1}} \\ \qquad\quad = -p_{21} F \dfrac{\nu_1}{4} \dfrac{\delta_1^{\delta_1/\delta_2-\delta_1}}{\delta_2^{\delta_2/\delta_2-\delta_1}}. \end{cases}$$

Dies stimmt mit der von Bjerknes[1]) erhaltenen Formel überein.

Für $\nu_1 = \nu_2$, $\delta_1 = \delta_2$ nimmt (58) die unbestimmte Form 0/0 an. Wenn man aber in (57) nach Potenzen von $\nu_1 - \nu_2$ und $\delta_1 - \delta_2$ entwickelt, so entsteht, falls man für φ in (56) nur schreibt $\varphi = (\nu_1 - \nu_2)t$, eine bestimmte Form, da $(\nu_1-\nu_2)^2 + (\delta_1-\delta_2)^2$ im Zähler und Nenner auftritt. Man erhält dadurch:

$$(61)\quad B = p_{21} F \frac{\nu_1}{4} t e^{-\delta_1 t},$$

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 134, Formel (9a). 1895.

welche Formel ebenfalls von Bjerknes[1]) abgeleitet ist. Ob es bei φ gestattet ist, in seinem zweiten Gliede den Grenzübergang $\nu_1 = \nu_2$ früher auszuführen, als in seinem ersten Gliede $(\nu_1 - \nu_2)\,t$, mag hier nicht untersucht werden.[2])

III. Messung der Periode und der Dämpfung.

Wir nehmen den Sekundärkreis als unveränderlich an. Von praktischem Interesse ist sowohl die Frage, ob die Wirkung im Sekundärkreis bei stetiger Veränderung der Frequenz ν_1 des Primärkreises ein Maximum annimmt, wenn genau $\nu_1 = \nu_2$ ist, als auch die Frage, ob man aus quantitativer Ausmessung der Resonanzkurve, d. h. aus quantitativer Messung der Wirkung im Sekundärkreis bei verschiedener Frequenz ν_1 des Primärkreises die Dämpfungen δ_1 und δ_2 der beiden Schwingungskreise bestimmen kann. Beide Fragen hat Bjerknes l. c. behandelt, aber nur für den Integraleffekt erschöpfend, der bei elektrometrischen, bolometrischen, thermoelektrischeu (Joulewärme) Meßmethoden maßgebend ist. Indes ist sein Verfahren insofern noch zu verallgemeinern, als es einen Unterschied ausmacht, ob man zur Veränderung von ν_1 die Kapazität C_1 verändert, während L_{11} festbleibt[3]) (Fall a), oder ob man umgekehrt C_1 festhält, aber L_{11} variiert (Fall b). Im Fall a) ist nämlich nach (22) der für die Wirkung im Sekundärkreise maßgebende Koeffizient p_{21} nicht konstant; er ist, falls δ^2 gegen ν^2, d. h. γ^2 gegen $4\pi^2$ vernachlässigt wird, in die Gestalt zu bringen:

$$p_{21} = \tfrac{1}{2}\,\frac{L_{21}}{L_{11}}\,\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\,; \tag{62}$$

---

1) l. c., Formel (8a). Aus ihr folgt:

$$B_{\text{Max.}} = p_{21}\,F\,\frac{\nu_1}{4\,e\,\delta_1}\,.$$

2) Der Fall $\nu_1 = \nu_2$, $\delta_1 = \delta_2$ erfordert streng genommen eine besondere Behandlung schon von Gleichung (28) an, da diese dann lautet: $x^2 + 2\,\delta_1\,x + \nu_1^2 + \delta_1^2 = \pm\,x^2\,k$, und k nicht mehr gegen 1 vernachlässigt werden darf, da nach (40) die B proportional zu k sind. Aus diesem Grunde ist es auch unmöglich, daß die Wurzeln x paarweise genau gleich werden, was aus (34) für $\delta_1 = \delta_2$, $\nu_1 = \nu_2$ scheinbar hervorgeht.

3) Dieser Fall liegt meinen Beobachtungen (Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902) zugrunde.

im Fall b) dagegen ist p_{21} konstant, vorausgesetzt, Änderung von L_{11} der Koeffizient der wechselseitig duktion L_{21} fest bleibt, was man experimentell leicht rea kann. Den Bjerknesschen Betrachtungen liegt nur der zugrunde. Aber auch in anderer Hinsicht ist eine Erg zu dieser grundlegenden Arbeit von Bjerknes wünsche nämlich um die Maximalamplitude ebenfalls erschöpf behandeln, weil sich herausstellt, daß durch Kombinat Beobachtungen der Resonanzkurve des Integraleffekt der Maximalamplitude die Dämpfungen δ_1 und δ_2 Schwingungskreise einzeln zu berechnen sind, was mei achtens ein einfacheres Beobachtungsverfahren bedeut die von Bjerknes vorgeschlagenen. Die Maximalan (größter Wert des Potentiales V_2) kann aus Funkenschla oder besser aus der elektrischen Ablenkung der Ka strahlen in einer Braunröhre experimentell quantitativ werden.

Die Betrachtungen sowohl für den Integral- als Maximaleffekt haben an die Formel (55) anzuknüpfen. Se

$$\nu_1 = \nu_2(1 + \zeta), \tag{63}$$

so schreibt sich ganz allgemein in jedem Falle der im Se kreis eintretende Effekt E in der Form:

$$E = P(1 + a\zeta - b\zeta^2), \tag{64}$$

wobei a positiv und negativ sein kann, b aber stets po b ist sehr groß gegen 1. Das Maximum E_m von E tritt n ein bei

$$\zeta_m = \frac{a}{2b} \tag{65}$$

und hat den Wert

$$E_m = P\left(1 + \frac{a^2}{4b}\right). \tag{66}$$

Setzt man

$$\zeta = \zeta_m + \eta, \quad \nu_1 = \nu_2(1 + \zeta_m + \eta), \tag{67}$$

d. h. bezeichnet η die prozentische Differenz der Frec von der *Resonanzfrequenz* $\nu_2(1 + \zeta_m)$, worunter die F

verstanden sein soll, welche die größte Wirkung im Sekundärkreis ergibt, so folgt aus (64):

$$E = P\left(1 + \frac{a^2}{4b} - b\eta^2\right), \tag{68}$$

d. h. nach (66):

$$\frac{E_m - E}{E_m} = b\eta^2. \tag{69}$$

η ist experimentell bestimmbar, wenn man den Primärkreis nach Schwingungsdauer oder Wellenlänge geeicht hat. Daher gibt (69) an, in welcher Weise man quantitativ aus der Resonanzkurve den Koeffizienten b berechnen kann. Die Resonanzkurve ist um so steiler, je größer b ist. Hat man so b gefunden, so ist die Schwingungsdauer v_2 aus (65) und (67) zu berechnen, wenn man a kennt.

Es wird nun die spezialisiertere Betrachtung lehren, daß man wegen der Abhängigkeit[1]) der Dämpfung δ_1 von der Frequenz v_1 den Koeffizienten a nicht rechnerisch angeben kann, aber wohl ist b aus (55) theoretisch ableitbar. b hängt nur von den logarithmischen Dekrementen γ_1 und γ_2 (bez. den Dämpfungen δ_1 und δ_2) der beiden Schwingungskreise ab. *Man erhält daher aus den Resonanzkurven Aufschluß über diese von beiden Dämpfungen abhängende Größe b, dagegegen nicht*[2]) *über den genauen Wert der Frequenz v_2.* Kombiniert man aber die Resonanzbeobachtungen an den zwei verschiedenen Effekten (Maximal- und Integraleffekt) miteinander, so kann man auch v_2 genau bestimmen, sowie die Dämpfungen beider Schwingungskreise einzeln. Dies wird nun gezeigt werden.

Wir behandeln jetzt die einzelnen Fälle gesondert.

---

1) Eine solche kann bestehen sowohl direkt wegen veränderter Frequenz, als auch wegen veränderter Stromstärke i_1 (bei variiertem C_1). Auch Bjerknes zieht dies in Rücksicht.

2) Das scheinbar abweichende Resultat von Bjerknes wird nur dadurch veranlaßt, daß er die Resonanzkurve auf größere Werte ζ ausdehnt, als wir es hier tun wollen. Tatsächlich bedeutet die Bjerknessche Bestimmung der Differenz des Isochronitätspunktes und des Resonanzpunktes (es handelt sich dabei um die von Bjerknes mit S bezeichnete Größe) auch nur eine Taxierung der Größenordnung, vgl. V. Bjerknes, l. c. p. 150.

1. *Die Maximalamplitude. a) C_1 wird verändert.* Formel (57) und (62) liefert für den nach (59) folgenden Wert[1]) von t für die im Laufe der Zeit erreichte größte Amplitude des Potentiales V_2:

$$(70)\quad B_{\text{Max.}} = F\frac{L_{21}}{L_{11}}\cdot\frac{\nu_2^2}{4(\nu_1+\nu_2)}\cdot q\sqrt{\frac{1+\delta_1\delta_2\left(\frac{\log\delta_1/\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\right)^2\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{\delta_1-\delta_2}\right)^2}{1+\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{\delta_1-\delta_2}\right)^2}},$$

wobei bedeutet

$$(71)\quad q = \frac{\delta_2^{\,\delta_2/\delta_1-\delta_2}}{\delta_1^{\,\delta_1/\delta_1-\delta_2}}.$$

Führt man (63) ein, so entsteht:

$$(72)\quad B_{\text{Max.}} = F\frac{L_{21}}{L_{11}}\frac{\nu_2}{8(1+\frac{1}{2}\zeta)}\left(q+\frac{\partial q}{\partial\delta_1}\cdot\frac{d\delta_1}{d\zeta}\right)\sqrt{1-b\zeta^2},$$

wobei ist

$$(73)\quad b = \left(\frac{\nu_2}{\delta_1-\delta_2}\right)^2\left(1-\delta_1\delta_2\left(\frac{\log\delta_1/\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\right)^2\right).$$

Diese Größe b ist beständig positiv und sehr groß gegen 1. In der Tat liefert eine Reihenentwickelung:

$$(74)\quad b = \frac{\nu_2^2}{12\,\delta_1^2}\left(1+x+\frac{13}{15}x^2+\frac{11}{15}x^3+\frac{103}{140}x^4+\ldots\right),$$

$x = 1-\delta_2/\delta_1$ gesetzt, gültig für $\delta_1 > \delta_2$, oder

$$(75)\quad b = \frac{\nu_2^2}{12\,\delta_2^2}\left(1+x+\frac{13}{15}x^2+\frac{11}{15}x^3+\frac{103}{140}x^4+\ldots\right),$$

$x = 1-\delta_1/\delta_2$ gesetzt, gültig für $\delta_1 < \delta_2$.

Entwickelt man (72) nach ζ und behält nur erste Potenzen von ζ bei, abgesehen vom Gliede $b\zeta^2$ (wegen der Größe des Faktors b) und setzt

$$(76)\quad \frac{d\delta_1}{d\zeta} = \delta\zeta,$$

so wird (72):

$$(77)\quad B_{\text{Max.}} = F\cdot\frac{L_{21}}{L_{11}}\frac{\nu_2}{8}\,q\sqrt{1-\zeta\left(1-\frac{2\delta}{q}\frac{\partial q}{\partial\delta_1}\right)-b\zeta^2}.$$

1) Dieser Wert von t gibt streng genommen nur für $\nu_1 = \nu_2$ die größte Amplitude $B_{\text{Max.}}$. Da aber ν_1 nahe benachbart zu ν_2 angenommen wird, können wir diesen Wert von t benutzen. Die Berücksichtigung dieser Veränderung von t würde nur auf den Koeffizienten a in Formel (64) Einfluß gewinnen, auf den es nicht genau ankommt nach oben im Text angestellten Überlegungen.

Nennt man V^2 das Quadrat der maximalen Potentialdifferenz $2B_{\text{Max.}}$ zwischen den Enden des Sekundärkreises, so nimmt nach (77) V^2 die Gestalt der Formel (64) an, wobei ist

$$(78)\quad a = -\left(1 - \frac{2\delta}{q}\frac{\partial q}{\partial \delta_1}\right) = -1 + \frac{2\delta}{\delta_1 - \delta_2}\left(\frac{\delta_2 \log \delta_1/\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} - 1\right),$$

während b den aus (73), (74) oder (75) folgenden Wert hat. Nach (69) gewinnt man also aus der quantitativ in der Nähe der Resonanz ausgemessenen Resonanzkurve:

$$\frac{V_m^2 - V^2}{V_m^2} = b\eta^2$$

Aufschluß über den Wert von b, während nach (65) die Resonanzfrequenz liegt bei

$$(79)\quad \nu_1 = \nu_2(1 + \zeta_m) = \nu_2\left(1 - \frac{1 + \frac{2\delta}{\delta_1 - \delta_2}\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\log\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)}{2b}\right).$$

Ob der Wert von ζ_m positiv oder negativ ist, d. h. ob die Resonanzfrequenz größer oder kleiner als die Frequenz ν_2 des Sekundärkreises ist, kann man ohne Kenntnis des Wertes δ, d. h. der Abhängigkeit des δ_1 von ν_1, nicht sagen. Jedenfalls ist δ von der Größenordnung des δ_1 oder δ_2, so daß nach (79) und (73) ζ_m von der Größenordnung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2$$

ist, wobei γ_1, γ_2 die logarithmischen Dekremente der beiden Schwingungskreise bedeuten (vgl. Formel (30') p. 520). Selbst wenn $\gamma_1 = 1$ sein sollte, was einer sehr großen Dämpfung entspricht, die nur eine schwach ausgeprägte Resonanz geben würde, und $\gamma_2 = 0$, so würde daher die Resonanzfrequenz des Primärkreises nur um etwa 1—2 Proz. von der Frequenz ν_2 des Sekundärkreises abweichen.[1])

b) L_{11} *im Primärkreis wird verändert.* Nach (22) p. 519 ist p_{21} konstant. (57) liefert für den nach (59) folgenden Wert von t und nach (63):

$$(80)\quad B_{\text{Max.}} = p_{21} F \frac{\nu_2}{4}(1 + \tfrac{3}{2}\zeta)\left(q + \frac{\partial q}{\partial \delta_1}\cdot\frac{d\delta_1}{d\zeta}\right)\sqrt{1 - b\zeta^2},$$

1) Bei meinen Versuchen (Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902), bei denen ich die Eigenschwingungsdauern von Spulen durch Resonanz ermittelt habe, war dieselbe sehr scharf ausgebildet, so daß der Fehler sicher unter $^1/_4$ Proz. lag.

wobei b denselben Wert (73) wie im Falle a) hat. Dagegen ist hier

$$\frac{d\,\delta_1}{d\,\zeta} = \delta'\,\zeta \tag{81}$$

im allgemeinen verschieden anzunehmen von dem Werte $d\,\delta_1/d\,\zeta$ im Falle a) (vgl. die dortige Formel (76)). Entwickelt man (80) nach Potenzen von ζ, so entsteht die Form (64), wobei aber jetzt ist

$$a = +\,3 + \frac{2\,\delta'}{\delta_1 - \delta_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\log\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right). \tag{82}$$

Aus der Resonanzkurve erhält man also wiederum Aufschluß über die Größe b, die Resonanzfrequenz liegt aber nach (65) jetzt bei

$$\nu_1 = \nu_2(1 + \zeta_m) = \nu_2\left(1 + \frac{3 - \dfrac{2\,\delta'}{\delta_1 - \delta_2}\left(1 - \dfrac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\log\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)}{2\,b}\right). \tag{83}$$

Vergleicht man diese Formel mit der entsprechenden Formel (79) des Falles a), so erkennt man, daß, wenn nicht eine starke Verschiedenheit der Änderungskoeffizienten δ und δ' das Resultat beeinflußt, die Resonanzfrequenz in diesem Falle b) größer ist als im Falle a).

2. *Der Integraleffekt.*[1]) Beobachtet man die durch den Sekundärstrom i_2 in der Mitte des Sekundärkreises ($i_2 = i_2^0$) entwickelte Joule-Wärme, was durch ein dort eingeschaltetes Thermoelement bequem geschehen kann, so kommt es auf den Integraleffekt an

$$J = \int_0^\infty i_2^2\,d\,t.$$

Da aus (3), (8) und (17) folgt

$$i_2^0 = 2\,C_2\frac{d\,V_2^h}{d\,t} \text{ (vgl. Anm. 1 auf p. 519)},$$

1) Man kann auch aus dem Integraleffekt auf einen metallisch geschlossenen Sekundärkreis (der also keine Eigenschwingungen besitzt) die Dämpfung im Primärkreis bestimmen (vgl. R. Lindemann, Ann. d. Phys. 12. p. 1012. 1903). Diese Methode ist besonders bequem, wenn man die Änderung der Dämpfung γ_1 durch Variation von C_1 oder F studieren will. Ich gedenke bei anderer Gelegenheit ausführlicher darauf einzugehen und die Messungen zu publizieren.

so ergibt (51) auf p. 523:

$$J = \int_0^\infty 4\, C_2^2\, B^2\, (\nu_1 + \nu_2)^2 \cos^2\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \chi\right)$$

$$= 2\, C_2^2 (\nu_1 + \nu_2)^2 \int_0^\infty B^2 \left(1 + \cos\left[(\nu_1 + \nu_2) t + 2\chi\right]\right) d t.$$

Der Effekt des zweiten mit dem cos multiplizierten Gliedes unter dem Integralzeichen ist zu vernachlässigen[1]) gegen den Effekt des ersten Gliedes, so daß entsteht:

$$J = 2\, C_2^2 (\nu_1 + \nu_2)^2 \int_0^\infty B^2\, d t.$$

Setzt man hierin den Wert von B nach (55) ein, so folgt, da ist

$$\int e^{-(\delta_1 + \delta_2) t} \cos(\alpha t + \beta)\, d t$$

$$= e^{-(\delta_1 + \delta_2) t}\, \frac{\alpha \sin(\alpha t + \beta) - (\delta_1 + \delta_2) \cos(\alpha t + \beta)}{\alpha^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2},$$

$$J = p_{21}^2\, F^2\, \frac{\nu_1^4}{2}\, C_2^2\, \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}$$

$$\left\{\frac{1}{2\,\delta_1} + \frac{1}{2\,\delta_2} - 2\, \frac{(\delta_1 + \delta_2)\cos\beta - \alpha \sin\beta}{\alpha^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}\right\}.$$

Dabei ist (vorübergehend) gesetzt nach (56):

$$\alpha = \nu_1 - \nu_2, \quad \beta = \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1 + \nu_2}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right).$$

Da man nun δ^2 gegen ν^2 vernachlässigen kann, so folgt:

$$J = p_{21}^2\, F^2\, \frac{\nu_1^4}{4}\, C_2^2\, \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}$$

$$\left\{\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} - 4\, \frac{\delta_1 + \delta_2 + (\nu_1 - \nu_2)^2\, \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{(\nu_1 + \nu_2)\,\nu_1\,\nu_2}}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}\right\}.$$

Nun ist in der Nähe der Resonanz $(\nu_1 - \nu_2)^2$ zu vernachlässigen neben $(\nu_1 + \nu_2)\,\nu_1\,\nu_2\,(\delta_1 + \delta_2) : \delta_1\,\nu_2 + \delta_2\,\nu_1$, dagegen nicht zu vernachlässigen neben $(\delta_1 + \delta_2)^2$ oder neben $(\delta_1 - \delta_2)^2$. Daher ist die letzte Formel zu schreiben:

---

1) Vgl. V. Bjerknes, l. c. p. 137.

$$J = p_{21}^2 F^2 \frac{\nu_1^4}{4} C_2^2 \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2} \left\{ \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} - \frac{4(\delta_1 + \delta_2)}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2} \right\},$$

oder:

$$(84)\quad J = p_{21}^2 F^2 \frac{\nu_1^4}{4} C_2^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \cdot \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, *daß man aus Beobachtung der Resonanzkurve des Integraleffektes Aufschluß über* $\delta_1 + \delta_2$ *erhält*, ein Resultat, das schon Bjerknes[1]) abgeleitet hat. Zur genaueren Diskussion, in welcher Weise $\delta_1 + \delta_2$ aus der Resonanzkurve gewonnen wird, sind aber wieder die zwei Fälle zu unterscheiden, ob bei Variation von ν_1 nur C_1 verändert wird, oder nur L_{11}.

a) *Die Kapazität* C_1 *im Primärkreis wird verändert.* Nach (62) p. 525 ist in diesem Falle zu setzen:

$$p_{21} = \tfrac{1}{2} \frac{L_{21}}{L_{11}} \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}.$$

Daher wird (84) in Rücksicht auf $\nu_2^2 = 1 : L_{22} C_2$ [nach (22)]:

$$J = \frac{F^2}{16} \frac{L_{21}^2}{L_{11}^2 L_{22}^2} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \cdot \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

Setzt man nun nach (63) $\nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta)$ und nach (76) $d\delta_1 : d\zeta = \delta\zeta$, so wird

$$J = \frac{F^2}{16} \frac{L_{21}^2}{L_{11}^2 L_{22}^2} \frac{1}{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)} \left(1 - \frac{\delta_2 \delta}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)} \zeta - \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)^2 \zeta^2 \right),$$

d. h. man gewinnt wiederum die Form (64) mit der Bedeutung der Koeffizienten

$$(85)\qquad a = -\frac{\delta_2 \delta}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}, \qquad b = \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)^2.$$

Aus der Steilheit der Resonanzkurve nach (69) ergibt sich also $\gamma_1 + \gamma_2$, während die Resonanzfrequenz aus (65) folgt zu

$$(86)\qquad \nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta_m) = \nu_2 \left(1 - \frac{\delta_2 \delta (\delta_1 + \delta_2)}{2 \delta_1 \nu_2^2} \right).$$

Vergleicht man die Werte b nach (74) oder (75) mit dem hier ermittelten Werte b nach (85), so erkennt man, daß letzterer immer etwas größer ist als ersterer, am meisten für

---

1) V. Bjerknes, l. c. p. 148.

den Fall $\delta_1 = \delta_2$. Da nun nach p. 527 größeres b eine steilere (ausgeprägtere) Resonanzkurve ergibt, *so ergibt die Beobachtung des Integraleffektes schärfere Resonanz, als die des Maximaleffektes*, ein Resultat, welches auch Bjerknes l. c. p. 165 schon gezogen hat.[1])

Durch Kombination der Beobachtungen der Resonanzkurve des Integraleffektes und des Maximaleffektes kann man die logarithmischen Dekremente γ_1, γ_2 beider Schwingungskreise einzeln berechnen, da man nach (73) und (85) dadurch zwei verschieden aus γ_1 und γ_2 zusammengesetzte Ausdrücke berechnet. Dies ergibt eine experimentell leicht ausführbare Bestimmungsmethode von γ_1 und γ_2.

Wenn man in dieser Weise γ_1 und γ_2, oder δ_1 und δ_2 berechnet hat, *so ergibt dann das Verhältnis der aus beiden Effekten erhaltenen Resonanzfrequenzen (79) und (86) auch eine Formel zur Berechnung des Änderungskoeffizienten δ, d. h. auch des genauen Wertes der Frequenz ν_2 des Sekundärkreises.*

b) L_{11} *im Primärkreis wird verändert.* Nach (22) p. 519 ist p_{21} konstant. Nach (84) wird

$$J \sim 1 + \left(4 - \frac{\delta_2 \delta'}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}\right) \zeta - \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2}\right)^2 \zeta^2,$$

wobei δ' den nach (81) definierten Änderungskoeffizienten von δ_1 bedeutet. Aus der Resonanzkurve ergibt sich also wiederum $\nu_2 : \delta_1 + \delta_2$, die Resonanzfrequenz liegt bei:

$$(87) \qquad \nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta_m) = \nu_2 \left(1 + \frac{4 - \frac{\delta_2 \delta'}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}}{2 \nu_2^2 : (\delta_1 + \delta_2)^2}\right).$$

Diese Resonanzfrequenz wird im allgemeinen größer sein, als die Resonanzfrequenz im Falle a) nach (86). Ein Vergleich mit (82) lehrt, daß man auch im Falle b) durch Kombination der Beobachtungen des Integral- und des Maximaleffektes δ_1, δ_2, δ', ν_2 experimentell bestimmen kann.

---

1) Auch für $\nu_1 = \nu_2$ hängt der Integraleffekt viel mehr von der Dämpfung ab, da er nach (84) der vierten Potenz von $\delta_{1,2}$ umgekehrt proportional ist, als die Maximalamplitude, da nach Anm. 1 p. 525 $V^2_{\text{Max.}}$ proportional $1/\delta_1^2$ ist.

IV. Die magnetische Koppelung ist nicht sehr klein.

Wenn die magnetische Koppelung k^2 (Formel (33)) nicht gegen 1 zu vernachlässigen ist, so benutzen wir die Gleichungsform (II), (25) und (29). Für

$$y = z - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \tag{88}$$

ergibt (29):

$$\begin{cases} z^4 + z^2\left[\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2\right] - z(\tau_1^2 - \tau_2^2)(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ \qquad + \left[\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)^2 + \tau_1^2\right]\left[\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) + \tau_2^2\right] \\ \qquad - k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) = 0. \end{cases} \tag{89}$$

Die vier Wurzeln z dieser Gleichung müssen die Form haben

$$z_1 = \beta + i\tau, \quad z_2 = \beta - i\tau, \quad z_3 = -\beta + i\tau', \quad z_4 = -\beta - i\tau'. \tag{90}$$

Da nun (89) identisch ist mit

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = 0,$$

so ergibt die Koeffizientenvergleichung dieser letzten Gleichung mit den Koeffizienten der Gleichung (89) und Benutzung der Form (90):

$$\begin{cases} \tau^2 + \tau'^2 - 2\beta^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2, \\ 2\beta(\tau^2 - \tau'^2) = -(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\tau_1^2 - \tau_2^2) = Q, \\ (\tau^2 + \beta^2)(\tau'^2 + \beta^2) = \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)^4 + (\tau_1^2 + \tau_2^2)\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) \\ \qquad + \tau_1^2\tau_2^2 - k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2). \end{cases} \tag{91}$$

Quadriert man die erste dieser Gleichungen und zieht davon die mit 4 multiplizierte letzte Gleichung ab, so entsteht:

$$\begin{cases} (\tau^2 - \tau'^2)^2 - 8\beta^2(\tau^2 + \tau'^2) = (\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 - 2(\tau_1^2 + \tau_2^2)(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 \\ \qquad + 4k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) = P. \end{cases} \tag{92}$$

Nun macht es einen wesentlichen Unterschied, ob diese Größe P positiv oder negativ ist. Bei nicht zu kleiner magnetischer Koppelung k^2 ist P jedenfalls positiv. Wenn wir in der Nähe der Resonanz $\tau_1 = \tau_2$ beobachten, so folgt aus der zweiten der Gleichungen (91), daß jedenfalls eine der beiden Größen β oder $\tau^2 - \tau'^2$ sehr klein sein muß. Falls also P

positiv ist, muß dies nach (92) die Größe β selbst sein, und wir erhalten für $\tau_1 = \tau_2$:

$$\beta = 0, \quad \tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P} \quad \text{für} \quad \tau_1 = \tau_2. \tag{93}$$

Die vier Wurzeln y haben also gemeinsame reelle Anteile, aber die imaginären Anteile sind verschieden. *Es entstehen also bei nicht zu kleiner magnetischer Koppelung im Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$ zwei Schwingungen mit verschiedenen Perioden und verschiedener*[1] *Dämpfung*, denn es ist dann, falls ϑ^2 gegen τ^2 vernachlässigt wird, d. h.[2]) das Quadrat des logarithmischen Dekrementes gegen $4\pi^2$, was stets zulässig ist, wenn Resonanz überhaupt deutlich zutage tritt:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{-\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau} = -\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\tau^2} - \frac{i}{\tau},$$

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{-\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau'} = -\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\tau'^2} - \frac{i}{\tau'}.$$

Die langsamere Schwingung (Periode $\sim \tau$) *hat also kleinere absolute Dämpfung und kleineres logarithmisches Dekrement als die schnellere Schwingung* (Periode $\sim \tau'$, $\tau' < \tau$).

Wenn umgekehrt P negativ ist, was bei sehr kleiner Koppelung k^2 in der Nähe der Resonanz eintreten kann, so würde $\tau^2 - \tau'^2$ klein, β groß sein. Mit Vernachlässigung von k^2 würde dann (91) die Wurzeln liefern: $\tau = \tau_1$, $\tau' = \tau_2$, $\beta = -\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$, d. h. nach (88) und (90) wäre

$$y_1 = -\vartheta_1 + i\tau_1, \quad y_2 = -\vartheta_1 - i\tau_1,$$
$$y_3 = -\vartheta_2 + i\tau_2, \quad y_4 = -\vartheta_1 - i\tau_2.$$

Dies ergibt also den unter II. schon behandelten und dort erledigten Fall.

---

1) M. Wien (Wied. Ann. **61**. p. 177. 1897; vgl. auch Ann. d. Phys. **8**. p. 695. 1902) hatte abgeleitet, daß der Fall der magnetischen Koppelung sich nicht wesentlich unterscheidet von dem der elektrischen Koppelung, und daß daher die Dämpfungen beider Wellen gleich seien. Dies Resultat ist aber nur gültig, wenn die Koppelung k^2 (nach Wiens Bezeichnung $\varrho_1 \varrho_2$) klein gegen 1 ist, weil sonst die Wienschen Vernachlässigungen unstatthaft sind. Mit A. Oberbeck (Wied. Ann. **55**. p. 681. 1895) steht das hier abgeleitete Resultat in Einklang.

2) Vgl. oben p. 521, Formel (32).

Wir haben also hier P als positiv anzunehmen. Die allgemeine Lösung von (91), (92) gestaltet sich in der Nähe der Resonanz $\tau_1 = \tau_2$ einfach, weil dort Q klein ist, d. h. auch β^2 klein ist gegen $\tau^2 - \tau'^2$. In (92) kann daher in dem Faktor von $8\beta^2$ für $\tau^2 + \tau'^2$ derjenige Näherungswert $\tau^2 + \tau'^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$ eingesetzt werden, der sich aus der ersten der Gleichungen (91) ergibt für $\beta = 0$ und mit Vernachlässigung von $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ gegen $\tau_1^2 + \tau_2^2$. Daher ergibt dann (92):

$$(\tau^2 - \tau'^2)^2 - 8\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) = P. \tag{94}$$

Die zweite der Gleichungen (91) und (94) kann man nun leicht nach den beiden Unbekannten $\tau^2 - \tau'^2$ und β^2 auflösen. Man erhält:

$$\begin{cases} (\tau^2 - \tau'^2)^2 = \dfrac{P + \sqrt{P^2 + 8\,Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}}{2}, \\ 8\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) = \dfrac{-P + \sqrt{P^2 + 8\,Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}}{2}. \end{cases} \tag{95}$$

Da in der Nähe der Resonanz $8\,Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)$ klein gegen P^2 ist, so kann man für (95) setzen:

$$\begin{cases} \tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P}\left(1 + \dfrac{Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}{P^2}\right), \\ \beta = -\dfrac{Q}{2\sqrt{P}}, \end{cases} \tag{96}$$

während die erste der Gleichungen (91) liefert:

$$\tau^2 + \tau'^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \frac{Q^2}{2P}. \tag{97}$$

Es gilt nun weiter (für beliebige Werte der Koppelung k^2) nach (25), (88) und (90):

$$\begin{cases} V_1 = A_1 e^{t/y_1} + A_2 e^{t/y_2} + A_3 e^{t/y_3} + A_4 e^{t/y_4}, \\ V_2 = B_1 e^{t/y_1} + B_2 e^{t/y_2} + B_3 e^{t/y_3} + B_4 e^{t/y_4}. \end{cases} \tag{98}$$

$$\begin{cases} y_1 = \beta - \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau, \qquad y_2 = \beta - \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau, \\ y_3 = -\beta - \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau', \; y_4 = -\beta - \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau'. \end{cases} \tag{99}$$

Aus (1) folgt:

$$(100) \qquad -\frac{i_1}{C_1} = \frac{A_1}{y_1} e^{t/y_1} + \frac{A_2}{y_2} e^{t/y_2} + \frac{A_3}{y_3} e^{t/y_3} + \frac{A_4}{y_4} e^{t/y_4},$$

aus (3) und (8):

$$(101) \qquad \pi \frac{i_2}{\mathfrak{C}_2 h} = \frac{B_1}{y_1} e^{t/y_1} + \frac{B_2}{y_2} e^{t/y_2} + \frac{B_3}{y_3} e^{t/y_3} + \frac{B_4}{y_4} e^{t/y_4}.$$

Die Anfangsbedingungen (38) ergeben daher:

$$(102) \qquad \sum A_n = F, \quad \sum \frac{A_n}{y_n} = 0, \quad \sum B_n = 0, \quad \sum \frac{B_n}{y_n} = 0,$$
$$n = 1, 2, 3, 4.$$

Nun ist nach der zweiten[1]) der Gleichungen (27):

$$B_n \left(\frac{\tau_2^2 + \vartheta_2^2}{y_n} + 2\vartheta_2 + y_n \right) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{A_n}{y_n}.$$

Durch Addition dieser aus $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten vier Gleichungen entsteht wegen der Gleichungen (102):

$$(103) \qquad \sum B_n y_n = 0.$$

Ferner folgt aus (27):

$$B_n (\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_2 y_n + y_n^2) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) A_n.$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen folgt wegen (102) und (103):

$$(104) \qquad \sum B_n y_n^2 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F.$$

Aus (102), (103) und (104) lassen sich die B sofort als Determinanten-Quotienten ausdrücken, z. B. ist

$$\frac{B_1}{y_1} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_1^3, & y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F. \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \end{vmatrix}.$$

1) Aus ihr folgt auch für den Fall $\tau_1 = \tau_2$ und $\vartheta_1 = \vartheta_2$, daß $A_1 : B_1 = \tau_2^2 - \tau'^2 : p_{21} \tau_2^2$ ist, also negativ, da $\tau > \tau_2$, und daß $A_2 : B_2 = \tau_2^2 - \tau'^2 : p_{21} \tau_2^2$ ist, d. h. positiv, da $\tau' < \tau_2$ ist. In Rücksicht auf (100) und (101) ergibt dies, daß die Schwingung τ in i_1 und i_2 gleich gerichtet ist, die Schwingung τ' aber in i_1 und i_2 entgegengesetzt verläuft. Daher kann man die Periode τ durch eine in der Nähe von i_1 aufgestellte Resonanzleitung (vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. **9**. p. 611. 1902) eventuell leichter messen als die Periode τ'.

Nach (45) ergibt dies

$$B_1(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4) = +p_{21}(\tau_2^2+\vartheta_2^2)Fy_1,$$

und analog:

$$B_2(y_2-y_3)(y_2-y_4)(y_2-y_1) = p_{21}(\tau_2^2+\vartheta_2^2)Fy_2,$$
$$B_3(y_3-y_4)(y_3-y_1)(y_3-y_2) = p_{21}(\tau_2^2+\vartheta_2^2)Fy_3,$$
$$B_4(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_4-y_3) = p_{21}(\tau_2^2+\vartheta_2^2)Fy_4.$$

Nach (99) ist daher

$$B_1 = p_{21}(\tau_2^2+\vartheta_2^2)F\frac{\beta-\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+i\tau}{2i\tau\left(2\beta+i(\tau-\tau')\right)\left(2\beta+i(\tau+\tau')\right)}.$$

Nun ist $(2\beta)^2$ stets zu vernachlässigen gegen $(\tau+\tau')^2$ Daher ist

$$\frac{1}{2\beta+i(\tau+\tau')} = \frac{1+i\frac{2\beta}{\tau+\tau'}}{i(\tau+\tau')},$$

und es ist, wenn man ϑ_2^2 gegen τ_2^2 sowie β^2 gegen τ^2 vernachlässigt, was gestattet ist, falls es sich überhaupt um Resonanz handelt, und die Abkürzung benutzt:

$$\delta = \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+\beta\frac{\tau-\tau'}{\tau+\tau'}. \tag{105}$$

$$\left\{\begin{aligned}
B_1 &= -p_{21}\tau_2^2F\frac{\tau-\tau'-2\frac{\beta}{\tau}\delta+i\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau}\delta\right)}{2(\tau+\tau')[4\beta^2+(\tau-\tau')^2]},\\
B_2 &= -p_{21}\tau_2^2F\frac{\tau-\tau'-2\frac{\beta}{\tau}\delta-i\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau}\delta\right)}{2(\tau+\tau')[4\beta^2+(\tau-\tau')^2]},\\
B_3 &= +p_{21}\tau_2^2F\frac{\tau-\tau'-2\frac{\beta}{\tau'}\delta+i\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau'}\delta\right)}{2(\tau+\tau')[4\beta^2+(\tau-\tau')^2]},\\
B_4 &= +p_{21}\tau_2^2F\frac{\tau-\tau'-2\frac{\beta}{\tau'}\delta-i\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau'}\delta\right)}{2(\tau+\tau')[4\beta^2+(\tau-\tau')^2]}.
\end{aligned}\right. \tag{106}$$

Dabei ist β^2 nicht gegen $(\tau-\tau')\tau$ vernachlässigt, um zunächst auch die Fälle kleiner Koppelung, bei denen $\tau-\tau$ klein ist, nicht auszuschließen.

Nun ist mit Vernachlässigung von β^2 gegen τ^2 nach (99)

$$\frac{1}{y_1} = \frac{\beta}{\tau^2}-\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2\tau^2}-\frac{i}{\tau},$$

daher wird nach (98):

$$V_2 = -\frac{p_{21}\,\tau_2^2\,F\,\Phi}{2(\tau+\tau')[4\beta^2+(\tau-\tau')^2]}, \tag{107}$$

wobei Φ bedeutet:

$$\left\{\begin{aligned}\Phi &= e^{-\frac{t}{\tau^2}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-\beta\right)}\cdot\left[\left(\tau-\tau'-2\frac{\beta\delta}{\tau}\right)\cos\frac{t}{\tau}+\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau}\delta\right)\sin\frac{t}{\tau}\right]\\ &\quad -e^{-\frac{t}{\tau'^2}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+\beta\right)}\cdot\left[\left(\tau-\tau'-2\frac{\beta\delta}{\tau'}\right)\cos\frac{t}{\tau'}+\left(2\beta+\frac{\tau-\tau'}{\tau'}\delta\right)\sin\frac{t}{\tau'}\right].\end{aligned}\right. \tag{108}$$

Wenn wir zunächst fragen, *für welches Verhältnis $\tau_1:\tau_2$ wird stärkste Induktion eintreten*, d. h. V_2 ein Maximum annehmen, so ist, gerade wie oben p. 526, zu unterscheiden, ob bei der Variation von τ_1 die Kapazität C_1 variiert wird, oder die Selbstinduktion L_{11}. Abgesehen hiervon kann man aber zur Taxierung der Verhältnisse folgendes aus (107) ablesen: Bei Variation von τ_1 (während τ_2 fest bleibt) ändert sich V_2 hauptsächlich wegen des Nenners $4\beta^2+(\tau-\tau')^2$ und wegen des Zählers Φ, während p_{21} sich nur unwesentlich ändert. Da nun β in der Nähe der Resonanz sehr klein ist, und da auch δ klein ist, so hat Φ einen Wert[1]), der beständig kleiner als $2(\tau-\tau')$ ist; wir können also setzen:

$$\Phi = 2\varrho(\tau-\tau'),\quad \varrho<1. \tag{109}$$

Der Wert des echten Bruches ϱ variiert nicht sehr stark, wenn $\tau_1:\tau_2$ sich ändert. Mit der bei starker Koppelung zulässigen Vernachlässigung von $4\beta^2$ gegen $(\tau-\tau')^2$ wird also (107):

$$V_2 = \frac{p_{21}\,\tau_2^2\,F\,\varrho}{\tau^2-\tau'^2}. \tag{110}$$

Maximale Induktion tritt also ein, wenn die Perioden der beiden induzierten Schwingungen sich möglichst nahe kommen,

1) Eine Zerlegung des Φ in ein Produkt

$$\sin\tfrac{1}{2}t\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau'}\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau'}\right)$$

hat nur dann physikalischen Sinn (Schwebungen), wenn τ nahezu gleich τ' ist. Das können wir hier bei stärkerer Koppelung nicht voraussetzen.

d. h. wenn $\tau^2 - \tau'^2$ ein Minimum ist. Nach (92) ist nun näherungsweise zu setzen:

$$\tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 + 4 k^2 \tau_1^2 \tau_2^2}, \tag{111}$$

woraus hervorgeht, daß für $\tau_1 = \tau_2$ das Minimum für $\tau^2 - \tau'^2$ eintritt. *Stärkste Induktion tritt also jedenfalls in der Nähe der Isochronität $\tau_1 = \tau_2$ ein.* Zugleich geht auch aus (110) und (111) hervor, *daß die Resonanzkurve um so flacher wird, je stärker die Koppelung ist*[1]), denn wenn k^2 groß ist, so ändert sich $\tau^2 - \tau'^2$ bei Veränderung von $\tau_1^2 - \tau_2^2$ prozentisch viel weniger, als wenn k^2 klein ist.

Zur Messung von Schwingungsdauern durch Resonanzversuche muß man also mit möglichst kleiner Koppelung arbeiten.

V. Die Wirksamkeit der Teslatransformatoren.

Nach den zuletzt erhaltenen Resultaten können wir den Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$ voraussetzen, und erhalten dann aus (92) und (110), da nach (91) β streng gleich Null zu setzen ist, für das Potential am Ende der Teslaspule den Wert:

$$V_2 = \frac{p_{21} F \varrho}{2\sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}} = \frac{\varrho F}{4} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}}.$$

Für p_{21} ist der Wert nach (22) eingesetzt.

Da nun nach (33) ist

$$L_{21} = k \sqrt{L_{11} \frac{L_{22}}{L_{12}} L_{21}},$$

so folgt

$$V_2 = \frac{\varrho F}{4} \frac{C_1}{C_2} \frac{k}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{12}}},$$

oder da im Resonanzfall $L_{11} C_1 = L_{22} C_2$ ist, und unter Rücksicht auf (32):

1) Dies geht sowohl aus den Messungen von F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 895. 1901 hervor, der die flachere Resonanzkurve interpretierte als eine Zunahme der Dämpfungen, als auch aus zahlreichen Beobachtungen von mir, nach denen ich stets die Resonanz um so schärfer erhielt, je schwächer ich die Koppelung wählte.

$$(112) \qquad V_2 = \frac{\varrho}{4} F \sqrt{\frac{C_1}{C_2}\frac{L_{21}}{L_{12}}} \cdot \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2}. \quad ^{1})$$

Aus (108) folgt dabei für ϱ der Wert:

$$2\varrho = e^{-\frac{t}{\tau^2}\cdot\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}}\left(\cos\frac{t}{\tau} + \frac{\delta}{\tau}\sin\frac{t}{\tau}\right)$$
$$- e^{-\frac{t}{\tau'^2}\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}}\left(\cos\frac{t}{\tau'} + \frac{\delta}{\tau'}\sin\frac{t}{\tau'}\right).$$

Nach (105) ist $\delta = \vartheta_1 + \vartheta_2/2$, und man kann setzen

$$\cos\frac{t}{\tau} + \frac{\delta}{\tau}\sin\frac{t}{\tau} = \cos\frac{t-\delta}{\tau},$$

da $(\delta:\tau)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist. Folglich wird

$$2\varrho = e^{-\frac{t\delta}{\tau^2}}\cdot\cos\frac{t-\delta}{\tau} - e^{-\frac{t\delta}{\tau'^2}}\cdot\cos\frac{t-\delta}{\tau'}.$$

Führt man eine neue Zeit $t_1 = t - \delta$ ein, so wird

$$2\varrho = e^{-\frac{\delta}{\tau}\left(\frac{t_1+\delta}{\tau}\right)}\cdot\cos\frac{t_1}{\tau} - e^{-\frac{\delta}{\tau'}\left(\frac{t_1+\delta}{\tau'}\right)}\cdot\cos\frac{t_1}{\tau'}.$$

Da die Maximalwerte von ϱ zu Zeiten t_1 erreicht werden, welche etwa gleich T_1 oder größer als T_1 sind, so kann man δ neben t_1 im Exponentialglied vernachlässigen und erhält, wenn man wiederum t für t_1 schreibt:

$$(113) \qquad 2\varrho = e^{-\frac{\delta t}{\tau^2}}\cdot\cos\frac{t}{\tau} - e^{-\frac{\delta t}{\tau'^2}}\cdot\cos\frac{t}{\tau'}.$$

Um das absolute Maximum von V_2 zu finden, ist diejenige Zeit t aufzusuchen, zu welcher ϱ ein absolutes Maximum wird. Bevor wir dies tun, mögen einige allgemeine Bemerkungen an (112) angeknüpft werden.

Wenn wir von der Dämpfung γ_1 und γ_2 absehen könnten, so würde $\varrho_{\text{Max.}}$ den Wert 1 haben und es würde nach (112) V_2 von der Stärke der Koppelung ganz unabhängig sein, falls wie bei linearen Stromkreisen $L_{12} = L_{21}$ zu setzen wäre. Nach

1) Diese Formel stimmt mit der von A. Oberbeck (Wied. Ann. 55. p. 629. 1895) abgeleiteten Formel (20) bis auf den Faktor

$$\sqrt{\frac{L_{21}}{L_{12}}}\cdot\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2\pi}\right)^2}}.$$

p. 518 wächst aber $L_{21} : L_{12}$ mit wachsender Koppelung, *daher muß aus diesem Grunde und wegen vorhandener Dämpfung die Erregung der Teslaspule mit wachsender Koppelung zunehmen.*

Nicht induktiv wirkende (tote) Selbstinduktion des Primärkreises ist aus zwei Gründen schädlich für die beste Wirksamkeit des Teslatransformators. Erstens wird, da bei vorliegender Teslaspule die Schwingungsperiode vorgeschrieben ist, die Kapazität C_1 des Primärkreises herabgesetzt, zweitens wird die Koppelung kleiner, wie aus (33) hervorgeht.

Da nach (112) V_2 proportional zu $\sqrt{C_1 : C_2}$ ist, *so muß also zur besten Konstruktion eines Teslatransformators der Primärkreis aus einer Windung möglichst dicken Drahtes bestehen* (da dadurch L_{11} möglichst klein wird und C_1 bei gegebenem T_1 möglichst groß), *während die Sekundärspule recht kleine Kapazität im Vergleich zu C_1 haben muß.* Eine einzige offene Kreiswindung als Sekundärkreis ist daher wegen der damit verbundenen Kleinheit des C_2 relativ günstig, jedenfalls günstiger als eine aus wenigen Windungen (2—10) bestehende Sekundärspule, da die dicht beieinander liegenden Endwindungen derselben, welche ja entgegengesetzte elektrische Ladungen tragen, viel größere Kapazität C_2 ergeben. Dieses Resultat wird durch Versuche, die ich angestellt habe (Potentialmessung durch Beobachtung von Funkenlängen oder qualitativ durch Aufleuchten von Vakuumröhren) durchaus bestätigt.

Man muß also Spulen von viel mehr Windungen anwenden, um wieder auf günstige kleine Werte der Kapazität C_2 zu kommen.

Es sei h die Höhe, r der Radius, g die Ganghöhe, δ die Drahtdicke, n die absolute Windungszahl der Teslaspule. Dann ist die Wellenlänge λ ihrer Eigenschwingung bestimmt durch

$$^1/_2 \lambda = l . f(h/r, g/\delta),$$

wobei $l = 2 r \pi n$ die Drahtlänge der Teslaspule bedeutet, während f ein von h/r, g/δ und von der Natur des Spulenkernes abhängender Faktor ist, für den ich früher[1]) Tabellen angegeben habe.

Nennt man r_1 den Radius des Kreises, welchen der Primärkreis bildet (wir wollen ihn entsprechend unseren obigen Über-

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 322. 1902.

legungen als einen Kreis von einer Windung annehmen), ϱ_1 den Radius seines Drahtes (halbe Drahtdicke), so gilt[1]) für die Selbstinduktion des Primärkreises:

$$L_{11} = 4\pi r_1 [(\text{lognat}\, 8 r_1/\varrho_1) - 2],$$

daher muß für C_1 gelten, da ist

$$2\pi\sqrt{L_{11} C_1} = \lambda_1,$$

falls C_1 nach elektrostatischem Maße gemessen wird:

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2}{4\pi^2 L_{11}} = \frac{r^2 n^2 f^2}{\pi r_1 (\log 8 r_1/\varrho_1 - 2)}.$$

Die Kapazität C_2 der Teslaspule (nach elektrostatischem Maße) können wir jedenfalls in der Form schreiben

$$C_2 = r\varphi(h/r, g/\delta).$$

Da nun nach (17) und (18) p. 517 $L_{21} : L_{12}$ und ebenso k^2 nach (33) nicht von n abhängen, sondern nur von h/r, r_1/r, und da der Maximalwert, den ϱ im Laufe der Zeit annimmt, nur von k^2, γ_1 und γ_2 abhängt, so gewinnen wir aus (112) den Satz:

Bei konstanten Verhältnissen h/r, r_1/r, r_1/ϱ_1, und bei konstanten Dekrementen γ_1 und γ_2 ist das Maximumpotential der Teslaspule proportional mit ihrer Windungszahl.

Es würde nun vor allem die für die Praxis wichtige Frage zu untersnchen sein: *Für welches Verhältnis h/r der Teslaspule ist ihre Wirkung bei gegebener Windungszahl n am größten?* Die Beantwortung dieser Frage werde ich später auf experimentellem Wege geben. Ungefähr liegt das beste Verhältnis h/r zwischen 1,5 und 3.

Wenn man, was bei Teslatransformatoren meist erlaubt ist, $(\gamma_1 - \gamma_2)^2 : 4\pi^2$ neben k^2 vernachlässigt, so schreibt sich (112) unter Benutzung der Umgestaltung

$$C_2 = r_1 \cdot r/r_1 \cdot \varphi(h/r, g/\delta) = L_{11} \cdot \chi(h/r, r/r_1, r_1/\varrho_1, g/\delta)$$

$$V_2 = \varrho F \sqrt{\frac{C_1}{L_{11}}} \cdot \psi(h/r, r/r_1, r_1/\varrho_1, g/\delta). \tag{114}$$

Nun ist nach (22) und (30')

$$\gamma_1 = \frac{w_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_{11}}}.$$

Daher wird

$$V_2 = 2\varrho F \frac{\gamma_1}{w_1} \psi(h/r. r/r_1, r_1/\varrho_1, g/\delta). \tag{114'}$$

1) M. Wien, Wied. Ann. **53.** p. 931. 1894.

w_1 besteht nun fast nur aus dem Funkenwiderstande. Derselbe ist von L_{11} unabhängig, dagegen abhängig von F und von C_1. Mit wachsendem C_1 nimmt er ab.[1]) ϱ nimmt mit wachsendem γ_1 ab. Bei *schwachen* Koppelungen kann man annähernd[2]) $\varrho\gamma_1$ als konstant betrachten (vgl. Abschnitt VI), wobei unter ϱ der im Laufe der Zeit erreichte Maximalwert verstanden sein soll. Daher folgt aus (114'): *Die Wirksamkeit eines nicht sehr stark gekoppelten Teslatransformators hängt bei konstanten Verhältnissen h/r, r/r_1, r_1/ϱ_1, g/δ nur von der Kapazität C_1 des Primärkreises ab, einerlei, ob die Spule kleine Dimensionen und viel Windungen oder größere Dimensionen und weniger Windungen besitzt.* Bei sehr starken Koppelungen wächst dagegen $\varrho\gamma_1$ mit γ_1. *Daher ist dann großes n und kleines r etwas günstiger als kleines n und großes r.*

In jedem Falle kommt es darauf an, daß das zur Resonanz nötige C_1 möglichst groß ist.

Die Abhängigkeit der Teslawirkung vom Primärfunkenpotential F ist innerhalb gewisser Grenzen gering; das haben mir sowohl Versuche gezeigt, als auch geht es aus (114') hervor, da w_1 mit der Funkenlänge, daher auch mit F zunimmt.

Eine Einbettung der Spule in Petroleum ist wegen der damit verbundenen Erhöhung ihrer Kapazität ungünstig, wegen der Möglichkeit stärkerer Koppelung k^2 (r annähernd gleich r_1) eventuell günstig. Der Vorteil wird bei starken Dämpfungen den Nachteil überwiegen; bei schwachen Dämpfungen dagegen nicht.

Jetzt soll untersucht werden, in welcher Weise der Maximalwert des Faktors ϱ in Formel (112) von Dämpfung γ_1, γ_2 und Koppelung k^2 abhängt.

VI. Abhängigkeit der Teslawirkung von Dämpfung und Koppelung.

Nach (92) ist für den Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$, da nach (91) $\beta = 0$ ist:

$$\tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P} = 2\tau_1^2 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2} = 2\tau_1^2 k',$$

wobei k' eine neue Abkürzung ist für

$$k'^2 = k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2 = k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2. \tag{115}$$

1) Vgl. R. Lindemann, Ann. d. Phys. **12.** p. 1012. 1903.

2) Dabei ist γ_2 als klein neben γ_1 angenommen.

Nach (91) ist, da $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ gegen $2\tau_1^2$ zu vernachlässigen ist:

$$\tau^2 + \tau'^2 = 2\tau_1^2.$$

Hieraus folgt

(116) $$\tau^2 = \tau_1^2(1 + k'), \quad \tau'^2 = \tau_1^2(1 - k').$$

Nach (115) ist k'^2 nur bei nicht zu kleiner Koppelung k^2 direkt als Koppelungskoeffizient zu deuten. Ganz allgemein kann man k' aus (116) definieren, nämlich

(117) $$\frac{\tau^2}{\tau'^2} = \frac{1+k'}{1-k'}, \quad \frac{\tau^2 - \tau'^2}{\tau^2 + \tau'^2} = k'.$$

Nach (113) und (32) ist nun

(118) $$2\varrho = e^{-\alpha\frac{t}{\tau}} \cdot \cos\frac{t}{\tau} - e^{-\alpha'\frac{t}{\tau'}} \cdot \cos\frac{t}{\tau'},$$

wobei gesetzt ist

(119) $$\alpha = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1+k'}}, \quad \alpha' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-k'}}.$$

Für numerisches Rechnen ist bequemer, (118) in der Form zu schreiben

(120) $$2\varrho = e^{-\alpha\frac{t}{\tau}} \cdot \cos\frac{t}{\tau} - e^{-\alpha''\frac{t}{\tau}} \cdot \cos\frac{t}{\tau'},$$

wobei ist:

(121) $$\alpha'' = \alpha \cdot \frac{\tau^2}{\tau'^2}.$$

Die Abhängigkeit des ϱ von dem Verhältnisse $\tau : \tau'$ und von dem mittleren logarithmischen Dekrement $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ kann nur durch numerische Auswertung übersichtlich erhalten werden. In den folgenden Tabellen sind die sukzessiven Maxima von ϱ und die Werte t/T_1, bei denen sie stattfinden, für verschiedene Verhältnisse $T : T' = \tau : \tau'$ und für verschiedene logarithmische Dekremente $\gamma_1 + \gamma_2/2$, wie sie in praxi vorkommen können[1]), angegeben. Die absoluten Maxima sind durch Druck hervorgehoben. T_1 ist die (gemeinsame) Schwingungsdauer des Primär- oder Sekundärkreises, wie sie ohne Koppelung jeder Kreis für sich allein besitzt. Die Maxima von 2ϱ, welche auf das letzte in den Tabellen angegebene Maximum folgen, sind stets kleiner, als dieses zuletzt angegebene.

1) Das Dekrement $\gamma = 0{,}15$ ist schon ziemlich klein. Es ist von mir bei Vermeidung Hertzscher Strahlung beobachtet in Abhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 23. p. 99. 1896. — Man kann aber noch kleinere Dekremente herstellen (z. B. $\gamma_1 = 0{,}09$), worüber ich später berichten werde.

$T : T' = 1{,}1, \quad k' = 0{,}095, \quad k'^2 = 0{,}0090.$

Nr. des Max.	$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$		Nr. des Max.	$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$	
	$t : T_1$	2ϱ		$t : T_1$	2ϱ
1	0,34	+ 0,17	11	5,23	+ 1,12
2	0,78	− 0,42	....	.....	.....
3	1,25	+ 0,63	....	.....	.....
4	1,75	− 0,83	21*	10,45	+ 0,10
5	2,24	+ 0,97	....	.....	.....
6	2,74	− 1,07	27	13,66	+ 0,36
7	3,23	+ 1,16	28	14,18	− 0,37
8	3,73	− 1,18	29	14,69	+ 0,36
9	4,23	+ 1,18	30	15,19	− 0,35
10	4,73	− 1,15	31	15,68	+ 0,34
			....	.....	.....

* Vgl. die Anmerkung zur nächsten Tabelle bei Max. Nr. 9*.

$T : T' = 1{,}25, \quad k' = 0{,}219, \quad k'^2 = 0{,}048.$

Nr. des Max	$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}25$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}5$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}75$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 1{,}0$	
	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ
1	0,31	+0,37	0,30	+0,36	0,29	+0,32	0,27	+0,29	0,26	+0,27
2	0,75	−0,90	0,74	−0,83	0,73	−0,68	0,71	−0,57	0,70	**−0,48**
3	1,23	+1,26	1,22	+1,11	1,21	**+0,82**	1,19	**+0,61**	1,18	+0,46
4	1,71	**−1,44**	1,71	**−1,20**	1,70	−0,78	1,69	−0,51	1,67	−0,35
5	2,20	+1,42	2,20	+1,13	2,20	+0,65	2,19	+0,38	2,18	+0,23
6	2,69	−1,23	2,69	−0,94	2,70	−0,48	2,70	−0,25	2,70	−0,13
7	3,18	+0,93	3,18	+0,67	3,19	+0,31	3,20	+0,15	3,22	+0,07
8	3,68	−0,56	3,79	−0,39	3,75	−0,17	3,77	−0,08	3,79	−0,04
9*	4,41	+0,15	4,41	+0,16	4,41	+0,11	4,41	+0,05	4,41	+0,02
10	5,13	−0,45	5,08	−0,29	5,07	−0,10	4,99	−0,05	—	—
11	5,62	+0,64	5,61	+0,38	5,58	+0,11	5,54	+0,03	—	—
12	6,11	−0,73	6,10	−0,40	6,08	−0,10	6,07	−0,02	—	—
13	6,62	+0,73	6,62	+0,38	6,62	+0,09	6,62	+0,02	—	—

* Nr. 9 ist für kleines $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$ $\left(\text{für } \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15 \text{ und } 0{,}25\right)$ kein Maximum, sondern ein Minimum. Zwischen dem achten und zehnten Maximum nimmt nämlich dann ϱ zwei positive Maxima und ein positives Minimum an. Letzteres ist unter Nr. 9* rubriziert. Für größeres $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$ ist aber 9* wirklich ein Maximum, da zwischen 8 und 10 dann nur dies eine Maximum Nr. 9 liegt.

$T : T' = 1{,}29$, $k' = 0{,}249$, $k'^2 = 0{,}062$.

Nr. des Max.	$\frac{\gamma_2+\gamma_2}{2} = 0{,}15$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}25$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}5$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}75$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 1{,}0$	
	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ
1	0,31	+0,42	0,30	+0,42	0,28	+0,36	0,27	+0,33	0,26	+0,30
2	0,75	−1,01	0,74	−0,93	0,73	−0,77	0,71	−0,64	0,70	**−0,54**
3	1,22	+1,39	1,21	+1,23	1,21	**+0,89**	1,19	**+0,66**	1,18	+0,50
4	1,71	**−1,50**	1,70	**−1,26**	1,70	−0,82	1,69	−0,54	1,68	−0,36
5	2,20	+1,38	2,20	+1,09	2,19	+0,63	2,19	+0,37	2,18	+0,22

$T : T' = 1{,}332$, $k' = 0{,}279$, $k'^2 = 0{,}078$.

1	0,31	+0,48	0,30	+0,46	0,28	+0,41	0,27	+0,37	0,25	+0,34
2	0,75	−1,11	0,74	−1,03	0,72	−0,85	0,71	−0,71	0,69	**−0,59**
3	1,22	+1,49	1,21	**+1,31**	1,20	**+0,95**	1,19	**+0,71**	1,16	+0,52
4	1,69	**−1,52**	1,69	−1,28	1,69	−0,82	1,69	−0,54	1,68	−0,36

$T : T' = 1{,}412$, $k' = 0{,}332$, $k'^2 = 0{,}110$.

1	0,30	+0,56	0,29	+0.54	0,28	+0,49	0,27	+0,45	0,25	+0,41
2	0,73	−1,28	0,72	−1,18	0,72	−0,97	0,70	**−0,81**	0,68	**−0,69**
3	1,19	**+1,59**	1,19	**+1,40**	1,18	**+1,03**	1,17	+0,77	1,15	+0,57

$T : T' = 1{,}50$, $k' = 0{,}384$, $k'^2 = 0{,}148$.

1	0,30	+0,66	0,29	+0,63	0,27	+0,57	0,26	+0,51	0,25	+0,48
2	0,72	−1,44	0,71	−1,32	0,69	**−1,09**	0,68	**−0,91**	0,67	**−0,77**
3	1,17	**+1,63**o	1,17	**+1,44**	1,17	+1,04	1,16	+0,77	1,15	+0,58
4	1,64	−1,22	1,65	−1,01	1,66	−0,66	1,67	−0,45	1,68	−0,31
5*	2,35	+0,22	2,35	+0,26	2,35	+0,28	2,35	+0.22	2,35	+0,16
6	3,05	−0 97	3,04	−0,71	3,01	−0,36	2,97	−0,21	2,96	−,012
7	3,53	+1,10	3,52	+0,77	3,52	+0,34	3,52	+0,16	3,51	+0,08

$T' : T'' = 1{,}667$, $k' = 0{,}470$, $k'^2 = 0{,}221$.

1	0,28	+0,80	0,27	+0,76	0,26	+0,69	0,25	+0,62	0,20	+0,58
2	0,69	**−1,61**s	0,68	**−1,49**	0,67	−1.21	0,66	**−1,01**	0,65	**−0,85**
3	1,13	+1,49	1,13	+1,31	1,13	+0,94	1,13	+0,70	1,14	+0,53
4*	1,82	−0,24	1,82	−0,31	1,82	−0,36	1,82	−0,32	1,82	−0,26
5	2,50	+1,17	2,49	+0,90	2,46	+0,50	2,44	+0,31	2,43	+0,20

$T : T' = 2{,}0, \quad k' = 0{,}60, \quad k'^2 = 0{,}360.$

$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}25$		$\frac{\gamma_2+\gamma_2}{2} = 0{,}5$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}75$		$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 1{,}0$	
$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ	$t : T_1$	2ϱ
0,25	+1,02	0,25	+0,97	0,24	+0,88	0,23	+0,80	0,21	+0,74
0,63	−1,74	0,63	−1,60	0,62	−1,28	0,62	−1,04	0,61	−0,89
1,26	+0,28	1,26	+0,36	1,26	+0,48	1,26	+0,46	1,26	+0,42
1,90	−1,33	1,89	−1,05	1,88	−0,64	1,87	−0,44	1,86	−0,31

$T : T' = 2{,}5, \quad k' = 0{,}724, \quad k'^2 = 0{,}524.$

0,22	+1,27	0,22	+1,20	0,21	+1,06	0,18	+0,96	0,18	+0,88
0,54	−1,55	0,54	−1,41	0,55	−1,10	0,55	−0,91	0,56	−0,76
1,31	+1,39	1,31	+1,14	1,31	+0,77	1,31	+0,59	1,31	+0,49

$T : T' = 3, \quad k' = 0{,}80, \quad k'^2 = 0{,}64.$

0,19	+1,39	0,19	+1,32	0,18	+1,18	0,18	+1,04	0,17	+0,95
0,67	−0,36	0,67	−0,48	0,67	−0,65	0,67	−0,68	0,67	+0,65
1,34	+0,54	1,34	+0,65	1,34	+0,65	1,34	+0,57	1,34	+0,49
2,01	−0,64	2,01	−0,68	2,01	−0,57	2,01	−0,45	2,01	−0,34
2,68	+0,66	2,68	+0,66	2,68	+0,49	2,68	+0,35	2,68	+0,24

$T : T' = 4, \quad k' = 0{,}882, \quad k'^2 = 0{,}778.$

0,15	+1,52	0,15	+1,42	0,14	+1,21	0,13	+1,08	0,12	+1,01
0,69	−1,39	0,69	−1,16	0,69	−0,90	0,69	−0,77	0,69	−0,69
1,37	+0,73	1,37	+0,82	1,37	+0,69	1,37	+0,58	1,37	+0,49
2,06	−0,93	2,06	−0,77	2,06	−0,58	2,06	−0,45	2,06	−0,34
2,74	+0,77	2,74	+0,69	2,74	+0,49	2,74	+0,35	2,74	−0,24

$T : T' = 5, \quad k' = 0{,}923, \quad k'^2 = 0{,}854.$

0,12	+1,56	0,11	+1,46	0,11	+1,27	0,10	+1,12	0,10	+1,02
0,69	−0,69	0,69	−0,80	0,69	−0,83	0,69	−0,76	0,69	−0,70
1,39	+0,83	1,39	+0,82	1,39	+0,70	1,39	+0,58	1,39	+0,49
2,08	−0,83	2,08	−0,76	2,08	−0,58	2,08	−0,45	2,08	−0,34
2,77	+0,81	2,77	+0,69	2,77	+0,49	2,77	+0,35	2,77	+0,24
3,47	−0,77	3,47	−0,63	3,47	−0,41	3,47	−0,26	3,47	−0,17

$T : T' = 10, \quad k' = 0{,}98, \quad k'^2 = 0{,}96.$

Max. (zugleich absolutes) bei $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$ für $t/T_1 = 0{,}066$: $2\varrho = +1{,}55.$

$T : T' = 100, \quad k' = 0{,}9998.$

Max. (zugleich absolutes) bei $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15$ für $t/T_1 = 0{,}0047$: $2\varrho = +1{,}02.$

Die mit * bezeichneten Maxima sind für kleine $\gamma_1+\gamma_2/2$ nicht Maxima, sondern Minima des absoluten Betrages von 2ϱ (vgl. Anm. zu p. 546). Z. B. ist für

$$T:T' = 3, \quad \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15, \quad t:T_1 = 0{,}45, \quad 2\varrho = -1{,}22.$$

$$T:T' = 2, \quad \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15, \quad t:T_1 = 1{,}02, \quad 2\varrho = +0{,}82.$$

$$T:T' = 1{,}5, \quad \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 0{,}15, \quad t:T_1 = 2{,}09, \quad 2\varrho = +0{,}44.$$

Der Verlauf von 2ϱ ergibt sich auch aus den graphischen Darstellungen (vgl. unten).

Zunächst interessieren die absoluten Maxima, die in den Tabellen durch Druck hervorgehoben sind. Man bemerkt, daß dieselben mit wachsender Koppelung und abnehmender Dämpfung im allgemeinen zunehmen, *jedoch ist bei nicht zu großen Dämpfungen* ($\gamma_1+\gamma_2/2 \gtrless 0{,}5$) *die Koppelung*[1]) $k' = 0{,}6$, $k'^2 = 0{,}36$, $T:T' = 2$ *am günstigsten, d. h. auch besser, als stärkere Koppelungen.* Die Abhängigkeit der absoluten Maxima $2\bar{\varrho}$ von der Koppelung ist in der beistehenden Fig. 2 dargestellt, bei der der Koeffizient k' und das absolute Maximum $2\bar{\varrho}$ als Ordinaten aufgetragen sind.

Die Kurven sind von kompliziertem Charakter. Bei der Koppelung $k' = 0{,}6$ ist für $\gamma_1+\gamma_2/2 = 0{,}15$ $2\bar{\varrho} = 1{,}74$, d. h. es bleibt um 13 Proz. zurück hinter dem Werte $2\bar{\varrho} = 2$, der für verschwindende Dämpfung eintreten würde.

Für $\gamma_1+\gamma_2/2 = 1$ ist bei $k' = 0{,}6$ $2\bar{\varrho} = 0{,}89$, d. h. es ist etwa halb so groß als $2\bar{\varrho}$ bei $\gamma_1+\gamma_2/2 = 0{,}15$. *Bei so starker Koppelung hängt also die Maximalamplitude nur wenig von der Dämpfung ab, dagegen sehr bedeutend bei schwacher Koppelung.* Aus Fig. 2 hat man die beste Anschauung davon, in welchen Grenzen die Wirksamkeit eines mit guter Resonanz gebauten Teslatransformators durch wechselnde Dämpfung schwanken kann. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß nach (112) wegen des Faktors

$$\sqrt{k^2 : k^2 - \left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2n}\right)^2} = \sqrt{k'^2 + \left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2n}\right)^2 : k'^2}$$

1) Ich gebe hier immer nur den Koeffizienten k' oder k'^2 an. Der eigentliche Koppelungskoeffizient k^2 ist nach Formel (115) aus k'^2 zu berechnen, wenn man $\gamma_1-\gamma_2$ kennt. Für $k'^2 = 0{,}36$ ist der Unterschied zwischen k'^2 und k^2 schon zu vernachlässigen.

das Maximum von V^2 bei kleinem k'^2 noch wesentlich größer wird als

$$\frac{\varrho}{4} F \sqrt{\frac{C_1}{C_2} \frac{L_{21}}{L_{12}}},$$

nämlich wenn $(\gamma_1 - \gamma_2 / 2\pi)^2$ einen merklichen Betrag hat gegen k'^2.

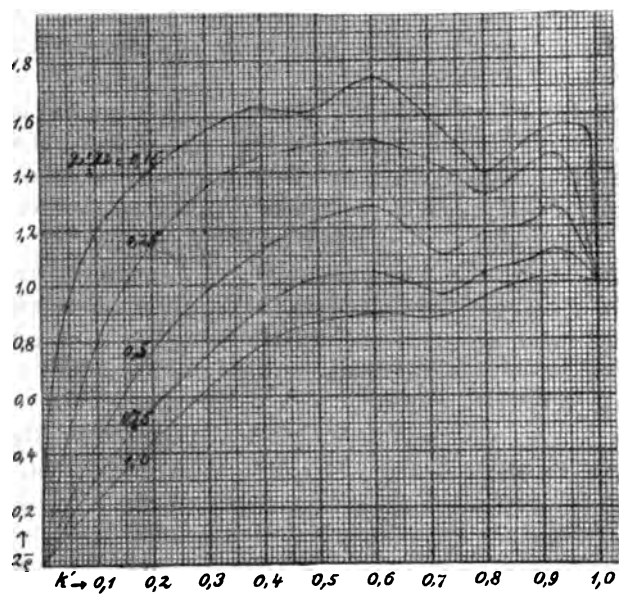


Fig. 2.

VII. Anwendung auf die drahtlose Telegraphie.

Verwendet man einen Sendeapparat mit induktiver Erregung (magnetischer Koppelung), so bleibt Formel (112) im wesentlichen bestehen, obwohl der Sekundärkreis (Teslaspule) zur Vermehrung der Strahlung mit Antennen versehen wird. Verzichtet man nun im Empfangsapparat auf Resonanz, so kommt es nur auf Erzielung eines möglichst großen absoluten Maximums von V^2 an. Man wird also die Koppelung $k' = 0{,}6$ wählen (nur bei sehr starker Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2 \geqq 0{,}75$ möglichst noch eine stärkere). Verwendet man aber das Resonanzprinzip,

um den Empfänger auf den Sender abstimmen zu können, so ist der zeitliche Verlauf des Faktors ϱ in Formel (112) wichtig. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem man einen einfachen ungekoppelten, oder nur sehr lose gekoppelten (zweifachen) Empfangsapparat benutzt, der nur *eine* Eigenschwingungsperiode besitzt, oder einen eng gekoppelten zweifachen Empfänger, der *zwei* verschiedene Eigenperioden besitzt.

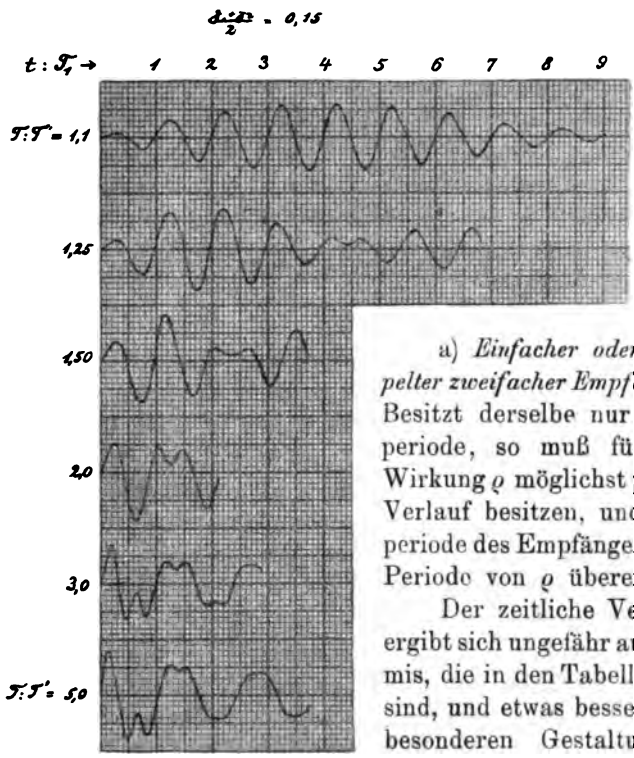


Fig. 3.

a) *Einfacher oder lose gekoppelter zweifacher Empfangsapparat.* Besitzt derselbe nur *eine* Eigenperiode, so muß für maximale Wirkung ϱ möglichst periodischen Verlauf besitzen, und die Eigenperiode des Empfängers mit dieser Periode von ϱ übereinstimmen.

Der zeitliche Verlauf von ϱ ergibt sich ungefähr aus den Maximis, die in den Tabellen mitgeteilt sind, und etwas besser (wegen der besonderen Gestaltung der ϱ-Kurve in der Umgebung der mit * versehenen Maximis) aus der graphischen Darstellung der Fig. 3, welche den zeitlichen Verlauf von ϱ bei verschiedenem k' nur für die kleinste Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0{,}15$ darstellt, da das Charakteristische dabei am meisten zutage tritt.

Der allgemeine Charakter dieser Kurven besonders bei kleiner Koppelung ($T : T' = 1{,}1$ und $T : T' = 1{,}25$) ist der der sogenannten *Schwebungen.* Die erste Schwebung ist bei dem in den Tabellen mit * bezeichneten Maximum beendet (in den Kurven durch einen Sattel erkenntlich). Innerhalb einer Schwebung ist

der Verlauf von ϱ annähernd periodisch mit der Periode $^1/_2 T_1$, jedoch ist die zweite Schwebung um π in Phase versetzt gegen die erste Schwebung, so daß auf einen Empfangsapparat, der als einfacher Resonator mit der Periode T_1 gebaut ist, *die zweite Schwebung schädlich für die Wirkung der ersten Schwebung ist.* Wenn man daher bei der drahtlosen Telegraphie Wert auf Abstimmung legt, so muß man die Koppelung beim Sendeapparat derartig wählen, daß die zweite Schwebung eine Maximalamplitude enthält, die relativ klein ist im Vergleich zur Maximalamplitude in der ersten Schwebung. Dies ist um so mehr der Fall, je kleiner die Koppelung im Sendeapparat ist. Denn nach den Tabellen sind z B. für $\gamma_1+\gamma_2/2 = 0{,}15$ die Maximalamplituden $\bar\varrho_1$ und $\bar\varrho_2$ der beiden ersten Schwebungen:

Bei	$T:T' = 1{,}1$,	$k' = 0{,}095$,	$2\bar\varrho_1 = 1{,}18$,	$2\bar\varrho_2 = 0{,}37$,	$\bar\varrho_1:\bar\varrho_2 = 3{,}19$.
„	$= 1{,}25$,	$= 0{,}219$,	$= 1{,}44$,	$= 0{,}73$,	$= 1{,}97$.
„	$= 1{,}50$,	$= 0{,}384$,	$= 1{,}63$,	$= 1{,}10$,	$= 1{,}48$.

Daher muß im Sender die Koppelung sehr klein sein, wenn in einem einfachen Empfänger scharfe Resonanz erzielt werden soll.[1]) Wenn man nun aber neben scharfer Abstimmung zugleich auch noch Wert legt auf möglichste Empfindlichkeit des Empfangsapparates, so ist zu berücksichtigen, daß die Maximalamplitude $\bar\varrho_1$ der ersten Schwebung mit abnehmender Koppelung abnimmt. Aus diesem Grunde wird man die Koppelung nicht zu klein wählen. Es hängt die beste Wahl der Koppelung im Sender sowohl von der Dämpfung $\gamma_1+\gamma_2/2$ im Sender, als auch von der Eigendämpfung des Empfängers ab. Denn es ist klar, daß für einen stark gedämpften Empfänger, dessen Eigenschwingung nach etwa 20 halben Eigenperioden nahezu abgeklungen ist ($\gamma = 0{,}4$, Amplitude nur 2 Proz. der Anfangsamplitude), die zweite Schwebung der Koppelung $T:T' = 1{,}1$, $k' = 0{,}095$, welche überhaupt erst nach 21 halben Eigenperioden T_1 einsetzt, vollkommen unschädlich ist. Daher

1) Dies Resultat deckt sich mit dem schon von W. Wien (Ann. d. Phys. 8. p. 711. 1902) abgeleiteten. Für kleine Koppelungen ist ja auch kein Unterschied zwischen den Wienschen und meinen Entwickelungen hier vorhanden, sondern nur für starke Koppelungen, da nach meinen Entwickelungen für sehr starke Koppelung, von der allerdings zweifelhaft ist, ob sie sich realisieren läßt, wiederum gute Resonanz möglich wäre (vgl. weiter unten im Text).

würde für einen solchen Empfänger jedenfalls nicht eine noch kleinere Koppelung im Sender zu wählen sein. Aber auch von der Dämpfung $\gamma_1+\gamma_2/2$ im Sender hängt die richtige Wahl der Koppelung ab, denn das Verhältnis $\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$ der Maximalamplituden der beiden ersten Schwebungen wird um so größer, je größer $\gamma_1+\gamma_2/2$ ist, wie folgende Tabelle lehrt:

$T : T' = 1{,}25, \quad k' = 0{,}219.$

$\gamma_1 + \gamma_2/2$	0,15	0,25	0,5	0,75	1,0
$2\bar{\varrho}_1$	1,44	1,20	0,82	0,61	0,48
$2\bar{\varrho}_2$	0,73	0,40	0,11	0,05	0,02
$\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$	1,97	3,0	7,5	12,2	24,0

$T : T' = 1{,}50, \quad k' = 0{,}384.$

$\gamma_1 + \gamma_2/2$	0,15	0,25	0,5	0,75	1,0
$2\bar{\varrho}_1$	1,63	1,44	1,09	0,91	0,77
$2\bar{\varrho}_2$	1,10	0,77	0,36	0,22	0,16
$\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$	1,48	1,87	3,0	4,1	4,8

Wenn also z. B. die zweite Schwebung der zehnte Teil der Amplitude der ersten Schwebung sein darf, ohne daß ihre schädliche Wirkung bemerkbar wird, und es ist im Sender $\gamma_1+\gamma_2/2 = 0{,}75$, so braucht man keine schwächere Koppelung als $k'=0{,}219$ zu wählen, weil schon für diese $\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2 = 12{,}2$ ist.

Wenn wir nun die unteren Kurven der Fig. 3 betrachten, welche für sehr starke Koppelungen gelten, so treten wieder andere Verhältnisse ein, weil dann ϱ einen periodischen Verlauf ohne Schwebungen annimmt. Dies tritt für Verhältnisse $T : T'$, welche größer als 3 sind, d. h. für Koppelungen k', die größer als $k' = 0{,}8$ sind, aus den Kurven der Fig. 3 deutlich zutage. Es liegt dies daran, daß für sehr starke Koppelungen die schnellere Schwingung der beiden Perioden T, T' des Senders viel stärker gedämpft ist, als die langsamere, so daß dann nur diese allein merklich bleibt. *Wenn also Koppelungen, die größer als $k' = 0{,}8$ sind, experimentell realisiert werden können, so kann man zur Erzielung guter Resonanz und zugleich kräftiger Wirkung auch mit sehr starker Koppelung im Sender arbeiten. Die Eigenperiode des Empfängers muß dann aber $\sqrt{2} = 1{,}41$ mal so groß sein, als die Eigenperiode T_1 der beiden (ungekoppelten) Schwingungskreise des Senders.*

Nach (60) p. 524 *hängt die Maximalamplitude eines einfachen Empfängers stark von der Dämpfung des Senders und Empfängers ab, der Integraleffekt nach (84) noch mehr.*

b) *Enggekoppelter Empfangsapparat.* Besitzt derselbe (wegen der engen Koppelung seiner beiden Teile) *zwei* Eigenperioden T und T', und nennt man V_2 das Potential am freien Ende der Antennen des Empfängers, V_1 die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators in dem Stromkreise 1 des Empfängers, der mit dem Stromkreise 2 des Empfängers, welcher die Antennen enthält, eng gekoppelt ist, so gelten entsprechend den Gleichungen (II) der p. 519 oben die Formeln:

$$(122)\quad (\tau_1^2 + \vartheta_1^2)\frac{d^2V_1}{dt^2} + 2\vartheta_1\frac{dV_1}{dt} + V_1 = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)\frac{d^2V_2}{dt^2},$$

$$(123)\quad (\tau_2^2 + \vartheta_2^2)\frac{d^2V_2}{dt^2} + 2\vartheta_2\frac{dV_2}{dt} + V_2 = p_{21}(\tau_2^2 + \vartheta_2^2)\frac{d^2V_1}{dt^2} + a\,.\,V_1$$

Dabei beziehen sich jetzt alle Größen, abgesehen von V_2', auf die beiden Stromkreise 1 und 2 des Empfangsapparates, nur V_2' bezieht sich auf den Sender und bedeutet die in dem bisherigen Teil dieser Arbeit mit V_2 bezeichnete Größe, d. h. das Potential am Antennenende des Senders, für welche ja in Formel (112) und (113) genauere Ausdrücke gegeben sind. Der Term $a\,V_2'$ bezeichnet die Erregung des Empfängers (strenger ausgedrückt der Antennen des Empfängers) durch die vom Sender ausgestrahlten Wellen elektrischer Kraft. Der Faktor a hängt also von der Entfernung des Senders vom Empfänger und von der spezielleren Konstruktion, z. B. Antennenlänge des Empfängers ab.

Nach (112) und (113) ist zu setzen

$$(124)\qquad a\,V_2' = S\left(e^{-\frac{\delta t}{\tau^2}}\cos\frac{t}{\tau} - e^{-\frac{\delta t}{\tau'^2}}\cos\frac{t}{\tau'}\right).$$

Wir können setzen:

$$(125)\qquad a\,V_2' = S_1 e^{t/z_1} + S_2 e^{t/z_2} + S_3 e^{t/z_3} + S_4 e^{t/z_4},$$

wobei

$$(126)\quad \begin{cases} z_1 = -\delta + i\tau, \quad z_2 = -\delta - i\tau, \quad z_3 = -\delta + i\tau', \\ \qquad\qquad\qquad\quad z_4 = -\delta - i\tau', \end{cases}$$

und

$$(127)\qquad S_1 = S_2 = S, \quad S_3 = S_4 = -S$$

gesetzt ist.

Als Integral von (122), (123) schreiben wir analog wie früher Formel (25) p. 520:

$$(128)\quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{t/y_1} + A_2 e^{t/y_2} + A_3 e^{t/y_3} + A_4 e^{t/y_4} \\ \quad + D_1 e^{t/z_1} + D_2 e^{t/z_2} + D_3 e^{t/z_3} + D_4 e^{t/z_4}, \\ V_2 = B_1 e^{t/y_1} + B_2 e^{t/y_2} + B_3 e^{t/y_3} + B_4 e^{t/y_4} \\ \quad + E_1 e^{t/z_1} + E_2 e^{t/z_2} + E_3 e^{t/z_3} + E_4 e^{t/z_4}. \end{cases}$$

Die mit A und B proportionalen Glieder sind die Eigenschwingungen des Empfängers, die mit D und E proportionalen Glieder die durch den Sender erzwungenen Schwingungen. Daher sind die y die vier Wurzeln der Gleichung (vgl. (29) p. 520):

$$(129)\quad \begin{cases} (y^2 + 2\vartheta_1 y + \tau_1^2 + \vartheta_1^2)(y^2 + 2\vartheta_2 y + \tau_2^2 + \vartheta_2^2) \\ \qquad - p_{12} p_{21} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2 \\ = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) = 0. \end{cases}$$

Als Anfangsbedingungen (für $t = 0$) gilt:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0,$$

daher (vgl. (102) p. 537) gilt:

$$(130)\quad \begin{cases} \sum A + \sum D = 0, \quad \sum B + \sum E = 0, \\ \sum \frac{A}{y} + \sum \frac{D}{z} = 0, \quad \sum \frac{B}{y} + \sum \frac{E}{z} = 0. \end{cases}$$

Nun gilt nach (122):

$$(131)\quad A_1(\tau_1^2 + \vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 y_1 + y_1^2) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) B_1,$$

$$(132)\quad D_1(\tau_1^2 + \vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 z_1 + z_1^2) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) E_1,$$

und noch sechs analoge Gleichungen für A_2, y_2, B_2 und D_2, z_2, E_2 etc. Dividiert man (131) durch y_1, (132) durch z_1 und addiert, so entsteht:

$$(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)\left(\frac{A_1}{y_1} + \frac{D_1}{z_1}\right) + 2\vartheta_1(A_1 + D_1) + A_1 y_1 + D_1 z_1 = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)\left(\frac{B_1}{y_1} + \frac{E_1}{z_1}\right).$$

Addiert man hierzu die drei analogen Gleichungen, die man erhält, wenn man in A, D, y, z den Index 1 durch 2, 3, 4 ersetzt, so entsteht wegen der Relationen (130):

$$(133)\quad \sum A y + \sum D z = 0.$$

Addiert man (131) und (132), so entsteht:

$$(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(A_1 + D_1) + 2\vartheta_1(A_1 y_1 + D_1 z_1) + A_1 y_1^2 + D_1 z_1^2 = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(B_1 + E_1).$$

Addiert man hierzu die drei analogen Gleichungen, die man erhält, wenn man wiederum in Δ, D, y, z den Index 1 durch 2, 3, 4 ersetzt, so entsteht wegen (130) und (133):

$$\sum \Delta y^2 + \sum D z^2 = 0. \tag{134}$$

In (130), (133), (134) sind nun vier lineare Gleichungen für Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 enthalten, aus denen man die Δ durch die D ausdrücken kann, z. B. wird

$$\frac{\Delta_1}{y_1}\Delta = -\, y_2 y_3 y_4 \Delta_{11} \sum \frac{D}{z} + \Delta_{12} \sum D - D_{13} \sum D z + \Delta_{14} \sum D z^2.$$

Dabei sind die Δ die Determinanten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_1^3, & y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)\,(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4),$$

$$\Delta_{11} = \Delta_{14} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \end{vmatrix} = -\,(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4),$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -\,(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)(y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4),$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -\,(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)(y_2 + y_3 + y_4).$$

Daher wird

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\Delta_1}{y_1}(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) &= y_2 y_3 y_4 \sum \frac{D}{z} \\ &\quad - (y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4) \sum D \\ &\quad + (y_2 + y_3 + y_4) \sum D z - \sum D z^2 \\ &= -\sum \frac{D}{z}(z - y_2)(z - y_3)(z - y_4). \end{aligned}\right. \tag{135}$$

Dabei sind in der $\sum$ für D und z die Indizes 1, 2, 3, 4 zu nehmen und diese vier Glieder zu addieren. Aus der Gleichung (123) folgt nun

$$E_1(\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2\,\vartheta_2 z_1 + z_1^2) = p_{21}(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) D_1 + S_1 z_1^2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit (132) und dividiert durch E_1, so entsteht:

$$D_1[(z_1^2 + 2\vartheta_1 z_1 + \tau_1^2 + \vartheta_1^2)(z_1^2 + 2\vartheta_2 z_1 + \tau_2^2 + \vartheta_2^2) - p_{12}p_{21}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2)] = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)S_1 z_1^2,$$

oder wegen (129):

(136) $$D_1(z_1 - y_1)(z_1 - y_2)(z_1 - y_3)(z_1 - y_4) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)z_1^2 S_1.$$

Setzt man diesen Wert in (135) ein, so folgt:

(137) $$\frac{A_1}{y_1}(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = -p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)\sum' S_n \frac{z_n}{z_n - y_1}.$$

Unter dem $\sum'$-Zeichen hat S und z sukzessive die vier Indizes $n = 1, 2, 3, 4$, während y_1 seinen Index nicht ändert. Die Formeln für A_2, A_3, A_4 ergeben sich aus (137) durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3, 4 bei den Größen A, S, y, z der Formel (137).

Die Formeln (128), (136) und (137) geben die vollständige Lösung der Aufgabe für V_1 bei beliebigen Werten y und z, d. h. bei beliebigen Dämpfungen und Eigenschwingungen sowohl vom Sender wie vom Empfänger. Es ist klar, daß letzterer im Resonanzfall am stärksten angeregt wird; man wird es also so einrichten, daß die beiden Eigenperioden des Senders identisch mit denen des Empfängers sind. Wenn z. B. identisch (auch hinsichtlich der Koppelung) konstruierte Apparate als Sender und Empfänger benutzt werden, nur mit dem Unterschied, daß beim Sender der Stromkreis 1 eine Funkenstrecke enthält, beim Empfänger dagegen an Stelle der Funkenstrecke einen Strom- oder Potentialindikator (Rutherfords magnetischer Stromindikator oder Kohärer), so sind die Eigenperioden von Sender und Empfänger gleich. In Hinsicht auf (126) ist also dann zu setzen:

(138) $$\begin{cases} y_1 = -\sigma + i\tau, & y_2 = -\sigma - i\tau, \\ y_3 = -\sigma + i\tau', & y_4 = -\sigma - i\tau'. \end{cases}$$

Die Dämpfungsgröße σ der Eigenschwingungen des Senders ist im allgemeinen verschieden anzunehmen von der Dämpfungsgröße δ des Senders, bei identisch konstruierten Apparaten wird wohl δ meist größer als σ sein, weil der Sender eine Funkenstrecke enthält. Da aber der Wellenindikator im Empfänger auch elektrische Energie verzehrt, so kann es eventuell auch eintreten, daß $\sigma = \delta$ wird.

Wir wollen der weiteren Rechnung den Fall $\delta = \sigma$ zugrunde legen, weil dadurch die Formeln sehr einfach werden, und weil das Wesentliche dabei schon zur Genüge hervortreten wird.

Unter der Annahme $\delta = \sigma$ werden die y und z gleich, d. h. es wird $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$, $y_4 = z_4$. Wir können also nach (136) schreiben:

$$(139)\quad D_1(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 \frac{\tau_1^2}{z_1 - y_1},$$

und nach (137):

$$(140)\quad A_1(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = -p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 \frac{z_1 y_1}{z_1 - y_1}.$$

Von der $\sum$ auf der rechten Seite von (137) ist nämlich nur das mit S_1 behaftete Glied beizubehalten, weil es den Nenner $z_1 - y_1 = 0$ enthält.

Aus (128) folgt nun weiter:

$$(141)\quad \begin{cases} V_1 = (A_1 + D_1) e^{t/y_1} + (A_2 + D_2) e^{t/y_2} \\ \qquad + (A_3 + D_3) e^{t/y_3} + (A_4 + D_4) e^{t/y_4}. \end{cases}$$

Durch Addition von (139) und (140) ergibt sich:

$$(A_1 + D_1)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 y_1,$$

oder nach (138):

$$(A_1 + D_1)(\tau^2 - \tau'^2) = -\tfrac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 (1 + i\sigma/\tau)$$

und analog:

$$(A_2 + D_2)(\tau^2 - \tau'^2) = -\tfrac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_2 (1 - i\sigma/\tau),$$
$$(A_3 + D_3)(\tau^2 - \tau'^2) = -\tfrac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_3 (1 + i\sigma/\tau'),$$
$$(A_4 + D_4)(\tau^2 - \tau'^2) = -\tfrac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_4 (1 - i\sigma/\tau').$$

Unter Rücksicht auf (127) wird also nach (141), wenn man ϑ_1^2 gegen τ_1^2 vernachlässigt, und σ^2 gegen τ^2 resp. gegen τ'^2:

$$(142)\quad V_1 = -\frac{p_{12}\tau_1^2 S}{\tau^2 - \tau'^2}\left(e^{-\frac{\sigma t}{\tau^2}} \cdot \cos\frac{t-\sigma}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t}{\tau'^2}} \cos\frac{t\sigma}{\tau'}\right).$$

Setzt man $t - \sigma = t'$, und sieht man von Anfangszeiten ab, die von der Größenordnung $t = \sigma$ sind, so kann man (142) schreiben:

$$V_1 = -\frac{p_{12}\tau_1^2 S}{\tau^2 - \tau'^2}\left(e^{-\frac{\sigma t'}{\tau^2}} \cdot \cos\frac{t'}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t'}{\tau'^2}} \cdot \cos\frac{t'}{\tau'}\right).$$

Nach den Entwicklungen des Abschnittes V p. 540 ist dies nun umzugestalten in:

$$(143)\quad V_1 = -\frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}\frac{L_{12}}{L_{22}}} \cdot \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2}\left(e^{-\frac{\sigma t'}{\tau^2}} \cos\frac{t'}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t'}{\tau'^2}} \cos\frac{t}{\tau'}\right).$$

Die Potentialdifferenz V_1 im Empfänger wird also durch eine analoge Formel dargestellt, wie das Potential V_2 am Sender nach (112), nur daß $C_1 L_{21}$ und $C_2 L_{12}$ ihre Rolle als Zähler und Nenner vertauschen. Man muß daher, wenn V_1 möglichst hoch werden soll, C_1 klein gegen V_2 wählen, wenn man aber einen möglichst starken Primärstrom erhalten will, muß C_1 groß gegen C_2 sein, weil

$$i_1 = - C_1 \frac{dV_1}{dt}$$

ist, nach (1) p. 514. Für den Rutherfordschen magnetischen Wellenindikator ist jedenfalls diese Anordnung zu wählen, und selbst für den Kohärer scheint sie mir wegen seiner großen und unkonstanten Kapazität zweckmäßiger zu sein, als die neuerdings meist gewählte Transformierung auf hohes Potential V_1, wenigstens wenn man mit deutlicher Resonanz arbeiten will.[1])

Die Abhängigkeit des V_1 von der Zeit ist dieselbe, wie sie in V. beim Teslatransformator ausführlich behandelt ist, nämlich sie ist die Differenz zweier verschieden gedämpfter Schwingungen verschiedener Periode. Wie dort dargelegt wurde, muß also auch hier die Koppelung $k' = 0{,}6$ ($\tau : \tau' = 2$) beider Teile des Empfängers besonders günstig sein. *Veränderungen von Dämpfungen machen dann auch*, wie aus Fig. 2 hervorgeht, *für die Maximalamplitude wenig Unterschied aus, jedenfalls viel weniger, als für den Integraleffekt*[2]), da dieser, wie aus (143) leicht zu erhalten ist, proportional zu $1 : \sigma$ ist. Jedenfalls sieht man, daß beim zweifach gebauten (gekoppelten) Empfänger der unperiodische Verlauf des Senderpotentials für die Resonanz nicht mehr hinderlich ist.

Immerhin wird man die schärfste Resonanz (aber mit Verzicht auf möglichst große Intensität) erhalten, wenn man nach M. Wien einen sehr lose gekoppelten Sender und einen sehr lose gekoppelten Empfänger benutzt, bei welchen die Dämpfungen

---

1) Diesen Punkt werde ich bei späterer Gelegenheit ausführlicher behandeln.

2) Der Kohärer reagiert auf die Maximalamplitude, Rutherfords magnetischer Indikator vermutlich auf den Integraleffekt. Daher wird man bei letzterem mehr als bei ersterem auf kleine Dämpfung achten müssen.

der beiden Stromkreise 1, welche die große Kapazität C_1 enthalten, möglichst klein zu machen sind. Ferner ist für scharfe Resonanz besser ein auf den Integraleffekt reagierender Indikator zu benutzen, als ein auf die Maximalamplitude reagierender. Denn ganz allgemein muß die Resonanz bei der Anordnung am besten wahrzunehmen sein, bei der die Intensität am stärksten (selbst im Resonanzfall) von der Dämpfung beeinflußt wird.

Es ist eine Frage für sich (die später behandelt werden soll), wie man die Antennen am zweckmäßigsten im Vergleich zur Sekundärspule und wie diese nach Höhe, Radius, Wicklungszahl am besten zu dimensionieren ist für den Zweck der Ausstrahlung elektromagnetischer Energie.

Zusammenfassung der Hauptresultate.

1. Aus der kombinierten Beobachtung der Resonanzkurve der Maximalamplitude und des Integraleffektes ergibt sich *die Dämpfung beider Schwingungskreise einzeln, sowie die Frequenz des Resonators.*

2. Die Resonanzkurve wird um so ausgeprägter, je schwächer die Koppelung beider Schwingungskreise ist. Ferner ist sie für den Integraleffekt ausgeprägter, als für die Maximalamplitude.

3. Der wirksamste Teslatransformator besteht aus *einer* Primärwindung und *vielen* Sekundärwindungen, die einen Spulenkörper *von bestimmtem* (noch nicht genau ermitteltem) *Verhältnis von Höhe zu Durchmesser* bilden. Die Anzahl der Sekundärwindungen ist begrenzt durch die Nebenforderungen, daß die Isolation nicht durchschlagen wird, und die Drahtdicke nicht zu klein wird. Ferner erfordert eine Steigerung der Zahl der Sekundärwindungen einen Speise-Induktor von höherer Schlagweite. Tote (nicht induktiv wirkende) Selbstinduktion des Primärkreises ist möglichst zu vermeiden, seine Drahtdicke soll möglichst groß sein und *die Koppelung zwischen Primärkreis und Teslaspule soll den Wert* $k^2 = 0{,}36$ (Verhältnis der beiden durch Koppelung entstandenen Frequenzen 1 : 2) *möglichst erreichen.* Die Primärkapazität muß den Primärkreis in Resonanz mit der Teslaspule bringen und soll (wegen Ver-

meidung von Entladungen und Rückstand) aus Metallplatten in gut isolierendem, rückstandsfreiem Dielektrikum (Petroleum, nicht Glas oder Luft) gebildet sein.

Bei schwacher Koppelung kommt es nur darauf an, *daß diese Primärkapazität C_1 möglichst groß ist*, einerlei, ob dies durch kleine Spulen von hoher Wickelungszahl n erreicht wird, oder durch größere Spulen von kleinerem n; bei starker Koppelung ist hohes n etwas wirksamer. — Vom Funkenpotential hängt die Teslawirkung innerhalb gewisser Grenzen wenig ab.

4. Bei schwacher Koppelung hat die Dämpfung der Primär- und Sekundärschwingungen starken Einfluß auf die Wirksamkeit des Teslatransformators, bei starker Koppelung (schon von $k^2 = 0{,}16$ an) viel weniger.

5. Bei der drahtlosen Telegraphie erhält man schärfste Resonanz (aber mit Verzicht auf Intensität) bei schwach gekoppeltem und wenig gedämpften Sender und Empfänger. Letzterer enthält dann zweckmäßig einen auf den Integraleffekt reagierenden Indikator.

6. Verwendet man einen schwach gekoppelten (oder einfachen) Empfänger und einen stark gekoppelten Sender, so tritt keine deutliche Resonanz auf. *Erst bei sehr starker Koppelung im Sender* ($k^2 > 0{,}6$) *kann man den Empfänger auf den Sender abstimmen. Die Empfängerfrequenz muß dann aber im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ kleiner sein, als die Frequenz der beiden* (aufeinander abgestimmten) *Senderschwingungskreise einzeln.*

7. Verwendet man zwei gleich gebaute und gleich gekoppelte Apparate als Sender und Empfänger, so kann man größte Intensität erhalten und mäßige Deutlichkeit der Resonanz, letztere mehr beim Integraleffekt, als bei der Maximalamplitude. Zur Erzielung größter Wirkung ist in beiden Apparaten die Koppelung $k^2 = 0{,}36$ zu wählen. Bei Benutzung eines auf Maximalamplitude reagierenden Indikators im Empfänger hängt dann die Wirkung wenig von den Dämpfungen ab, dafür wird die Resonanz aber auch undeutlicher, als wenn man einen auf Integraleffekt reagierenden Indikator wählt.

Giessen, November 1903.

(Eingegangen 25. November 1903.)

6. *Die Faraday-Maxwellschen Spannungen; von G. Bakker.*

Die Faradaysche Vorstellung über den Spannungszustand elektrischer, magnetischer oder elektromagnetischer Felder ist bekanntlich durch Maxwell mathematisch formuliert worden. Sehr oft aber werden nun die absoluten Werte dieser Spannungen, welche sich als Vektoren von Flächenintegralen präsentieren, identifiziert mit den Flächenkräften, welche nach der Elastizitätstheorie die Deformationen der Körper bestimmen. Da eine solche Auffassung *im allgemeinen* ganz irrig ist, wünsche ich einige hierauf bezügliche Bemerkungen zu machen.

Maxwell isoliert einen Teil des betrachteten Mediums durch eine geschlossene Fläche und zeigt, daß die Wirkung des übrigen Teiles auf den isolierten Teil in der Form eines Flächenintegrals, genommen über diese Fläche, dargestellt werden kann. Auf diese Weise findet er die bekannten Vektoren:

$$(1)\quad \begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}^{1}), & p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} \\ p_{yy} = \text{etc.} & p_{yz} = \text{etc.} \end{cases}$$

Der x-Komponent X der Kraft auf den isolierten Teil wird nun:

$$(2)\qquad X = \int\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) d\tau \quad (d\tau = \text{Raumelement})$$

und dieses Raumintegral kann wieder transformiert werden in ein Flächenintegral:

$$(3)\qquad X = \int\left(p_{xx}\cos\lambda + p_{xy}\cos\mu + p_{xz}\cos\nu\right) ds$$

genommen über die Fläche, welche den isolierten Teil ganz einschließt.

Aus (2) folgt, daß die Größen p_{xx} etc., *aufgefaßt als definiert durch* (2), etwas Unbestimmtes haben. Denn wird z. B.

---

1) Sind die Einheiten nicht festgestellt, so ist mehr allgemein $1/8\pi$ durch $1/8\pi f$ zu ersetzen. Für die Schwere wird f negativ.

die Größe p_{xx} durch den ganzen isolierten Teil des Raumes um eine bestimmte Größe vermehrt, so würde man denselben Wert für X erhalten haben. Ist der isolierte Teil z. B. ein Teil von einem Dielektrikum, so kann man also die Spannungen[1]) p_{xx} etc. nicht mehr als die gewöhnlich in der Elektrizitätstheorie betrachteten Flächenkräfte[1]) (die inneren Spannungen) auffassen, da diese Größen in jedem Punkte einen bestimmten Wert haben und bestimmte Deformationen hervorrufen. Allein man kann behaupten, daß die Flächenkräfte (1) eine *mögliche* Auflösung geben, um die Kraft X durch ein Flächenintegral darzustellen. Wendet man die Faraday-Maxwellschen Auffassungen auf die Gravitation an und betrachtet man die Kräfte, welche durch die Schwere auf einen isolierten Teil der Erde ausgeübt werden, so sieht man sehr leicht ein, daß die Maxwellschen Flächenkräfte p_{xx} etc., auch was ihre absoluten Werte anbetrifft, ganz etwas anderes sind, als die Spannungen der Elastizität, welche den betrachteten Teil deformieren. (Der betrachtete Körper, *ohne* Gravitation gedacht, wird als im Null-Zustand befindlich aufgefaßt.)

Betrachten wir z. B. eine ruhende, homogene flüssige, gravitierende Kugel mit einer konstanten Dichte ϱ und nennen wir für einen Punkt im Innern des Körpers die Beschleunigung ihrer Schwere g, so wird die Kraft auf die Volumeneinheit ϱg; ist weiter der Abstand vom Mittelpunkt r, so gibt die bekannte Gleichung der Hydrostatik:

$$dp = -\varrho g\, dr.$$

Ist f die Gravitationskonstante, so ist weiter:

$$g = \tfrac{4}{3}\pi f \varrho r.$$

Deshalb:

$$dp = -\tfrac{4}{3}\pi f \varrho^2 r\, dr.$$

Ist R der Radius der Kugel und wirken auf sie keine äußeren Kräfte, so hat man:

(4a) $$p = \tfrac{2}{3}\pi f \varrho^2 (R^2 - r^2).$$

Im Mittelpunkt wird also der Druck:

(4b) $$p_M = \tfrac{2}{3}\pi f \varrho^2 R^2.$$

1) Was ihre absoluten Werte anbetrifft.

Nennt man die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche der Kugel g_0, so wird auch:

$$p_M = \frac{3}{8\pi f} g_0^2. \tag{5}$$

Da f sehr klein ist, würde für eine Wasserkugel von der Größe unserer Erde der innere Druck im Mittelpunkt *sehr groß* ausfallen. *Die Maxwellschen Flächenkräfte p_{xx} etc. werden hingegen im Mittelpunkt gleich Null*, denn die Differentialausdrücke:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \text{ etc. (Kräfte auf die Masseneinheit bezogen)}$$

haben im Mittelpunkt den Wert Null.

Aus diesen Betrachtungen geht genügend hervor, daß die absoluten Werte der Maxwellschen Flächenkräfte nicht identifiziert werden dürfen mit denen der Spannungen (Drucke) der Elastizitätstheorie. Wenn also C. Christiansen und J. C. Müller in ihren „Elementen der theoretischen Physik" (p. 105, § 31, zweite Auflage 1903) die Formeln (6) von § 31 vergleichen mit denen von § 29 (6), so soll das nicht in absolutem Sinne aufgefaßt werden.

In seiner „Theorie des Potentials" (p. 259, § 6, II. Teil, III. Kapitel) bemerkt Emile Mathieu, daß die Deformationen eines dielektrischen Mittels nicht mit denjenigen eines isotropen festen Körpers verglichen werden können. Er schließt, *daß die Moleküle der Substanz, in welcher sich elastische Kräfte entwickeln, eine endliche Veränderung in ihrer Lagerung erleiden, indem sie sich nach den Kraftlinien richten.*

Unzweifelhaft sollen die elektrischen Kräfte die Beschaffenheit des Körpers ändern; *ich bin aber der Meinung, daß man nicht so weit zu gehen braucht*, um zu erklären, *weshalb* die Maxwellschen Flächenkräfte die Gleichungen der Elastizitätstheorie nicht befriedigen, aber daß schon aus obigen Auseinandersetzungen genügend hervorgeht, daß die Spannungen der Elastizitätstheorie, welche die Deformationen der Körper bestimmen, ganz etwas anderes sind, als die Flächenkräfte der Maxwellschen Theorie.

Mathematisch kommt die Sache auf das Folgende hinaus: Die Spannungen X_x X_y etc. der Elastizitätstheorie und die Vo-

lumenkräfte (X, Y, Z) genügen für das Gleichgewicht der Beziehungen:

$$\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ etc.} \tag{6}$$

Nun darf für die elektrostatischen Kräfte der Komponent ϱX nach **Maxwell** ersetzt werden durch:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}.$$

Also wird (6):

$$\frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{xy} + X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Hieraus folgt nun aber nicht a priori:

$$p_{xx} = - X_x \text{ etc.}$$

Betrachten wir wieder z. B. eine homogene, ruhende, flüssige, gravitierende Kugel mit der Dichte ϱ, frei von äußeren Kräften, so ist bekanntlich das Potential für einen inneren Punkt:

$$V = \tfrac{2}{3} \pi f \varrho (x^2 + y^2 + z^2) - 2 \pi f \varrho R^2.$$[1])

Hieraus findet man unmittelbar:

$p_{xx} = \frac{2}{3} \pi f \varrho^2 (x^2 - y^2 - z^2)$, $p_{xy} = \frac{4}{3} \pi f \varrho^2 x y$, $p_{xz} = \frac{4}{3} \pi f \varrho^2 x z$

und (4a) gibt:

$$X_x = Y_y = Z_z = p = \tfrac{2}{3} \pi f \varrho^2 (R^2 - x^2 - y^2 - z^2),$$

während:

$$X_y = Y_z = Z_x = 0.$$

Deshalb:

$$\frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} = \tfrac{4}{3} \pi f \varrho^2 x - \tfrac{4}{3} \pi f \varrho^2 x,$$

$$\frac{\partial (p_{xy} + X_x)}{\partial y} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \tfrac{4}{3} \pi f \varrho^2 x,$$

und

$$\frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \tfrac{4}{3} \pi f \varrho^2 x.$$

Also notwendigerweise:

$$\frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{xy} + X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = 0.$$

---

1) Vgl. z. B. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune Dirichlet, p. 17.

Als ein anderes Beispiel betrachte ich eine elektrisierte Hohlkugel. Die Kugel soll ein Leiter sein und auf ihrer Oberfläche die Ladung $+e$ besitzen. *Die Flächenkräfte p_{nn} etc. von Maxwell sind im Innern der Kugel gleich Null,* denn das Potential ist im Innern eine Konstante. Die Spannungen X_n etc. hingegen findet man auf folgende Weise.

Wenn der Kugelmittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist und für einen Punkt die Größe ε nur eine Funktion des Abstandes r zum Mittelpunkt ist, so ergibt sich für die Verrückung dieses Punktes:

$$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \zeta = \varepsilon z.$$

Ist φ eine neue Funktion von r, so können wir also setzen:

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Im Innern der Kugel wirken keine Volumenkräfte, denn dort ist $\varrho = 0$ und die dielektrische Konstante ist eine Konstante.[1]) Also:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ etc.} \tag{8}$$

Hieraus folgt mit Hilfe der bekannten Gleichungen:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 \xi = 0 \text{ etc. } \{\Theta = \text{Dilatation}\},$$

oder:

$$\nabla^2 \varphi = \text{Konstante } = a.$$

Die Beziehungen zwischen Verrückungen und Spannungen werden nun:

$$X_x = \lambda a + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{ etc.}, \quad Z_y = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \text{ etc.}$$

und hieraus mit Hilfe der Formel für die Spannung auf einem Flächenelement:

$$P = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma,$$

$$P = \left(\lambda a + \mu 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)\frac{x}{r}.$$

---

1) Vgl. z. B. C. Christiansen, Elemente der Theor. Physik p. 108. Erste Auflage.

Auf diese Weise findet man in der Theorie der Elastizität eine Hauptspannung:

$$A = \lambda a + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

in der Richtung des Radius und für ein Flächenelement, das r enthält, eine Hauptspannung:

$$B = \lambda a + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Die Beziehung $\Delta^2 \varphi = a$ wird hier:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2} = a,$$

woraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \tfrac{1}{3} a r - \frac{b}{r^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \tfrac{1}{3} a + \frac{2b}{r^3}.$$

Demnach:

(9a) $$A = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) a - \frac{4\mu b}{r^3}$$

und

(9b) $$A = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) a + \frac{2\mu b}{r^3}.$$

Hat die betrachtete Hohlkugel nur eine Ladung e auf ihrer äußeren Oberfläche und sind R_1 und R_2 der innere bez. der äußere Radius, so ist für R_1: $A = 0$ und für R_2:

$$A = \frac{K}{8\pi} E^2,$$

wenn E die „elektrische Kraft" und K die dielektrische Konstante des umgebenden Mittels ist. Hieraus findet man:

$$a = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{K}{8\pi} E^2 \cdot \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

und

$$b = \frac{K}{32\mu\pi} \cdot E^2 \cdot \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_2^3 R_1^3}$$

und die Hauptspannungen werden:

$$A = \frac{K E^2}{8\pi} \left\{ \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1}{r^3} \right\}$$

und

$$B = \frac{K E^2}{8\pi} \left\{ \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} + \tfrac{1}{2} \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Da

$$E^2 = \frac{e^2}{K^2 R_2^4},$$

sieht man, daß die Spannungen für einen bestimmten inneren Punkt der Hohlkugel proportional dem Quadrat der Ladung wächst. *Die Maxwellschen Spannungen hingegen sind gleich Null*

Räumliche Dilatation.

Für die räumliche Dilatation eines isotropen Körpers fand C. Chree[1]):

$$(10) \quad \begin{cases} \delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Xx + Yy + Zz)\, d\tau \\ \qquad + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Fx + Gy + Hz)\, ds, \end{cases}$$

wo X, Y, Z die Komponenten der *Volumenkräfte* und F, G, H die Komponenten der Kräfte an der Oberfläche des Körpers darstellen. Sind nun die Volumenkräfte eine Folge von im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräften, so kann man nach Maxwell für die Komponenten X, Y, Z bez. substituieren:

$$X = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \text{ etc.},$$

wo p_{xx} etc. die bekannten Bedeutungen haben.

Nach einer leichten Umformung erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} \int (Xx + Yy + Zz)\, d\tau = \int \{x(p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n) \\ \qquad + y(p_{yx} l + p_{yy} m + p_{yz} n) + z(p_{zx} l + p_{zy} m + p_{zz} n)\} ds \\ \qquad\qquad - \int (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})\, d\tau. \end{cases}$$

Nun ist der Ausdruck:

$$p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n$$

nichts anderes als der x-Komponent der Maxwellschen Flächenkraft für das Flächenelement ds. Nennen wir also ihre drei Komponenten P, Q und R, so wird das Flächenintegral in der Gleichung (11)

$$\int (Px + Qy + Rz)\, ds$$

1) C. Chree, Trans. of the Cambridge philos. Soc. 15. p. 318. 1892.

und ist also das zweifache Varial (mit entgegengesetztem Zeichen) der Maxwellschen Flächenkräfte an der Oberfläche des Körpers. Weiter wird die Summe $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ (welche gleich ist der Summe der Hauptspannungen) für Schwere, elektrostatische Kräfte und magnetische Kräfte bez.

$$\frac{g^2}{8\pi f}, \quad -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad \text{und} \quad -\frac{\mu H^2}{8\pi},$$

wenn g = Beschleunigung der Schwere, f = Gravitationskonstante, ε = dielektrische Konstante und μ = magnetische Permeabilität darstellen.

Für die räumliche Dilatation des Körpers erhält man also z. B. in dem zweiten Fall:

$$(12) \quad \begin{cases} \delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left\{ \int (Px + Qy + Rz)\, ds \right. \\ \qquad \left. + \int (Fx + Gy + Hy)\, ds + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2\, d\tau \right\}. \end{cases}$$

Das zweite Integral verschwindet, wenn keine anderen Kräfte betrachtet werden als solche, welche im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken. Ist der Körper ein Leiter, so verschwindet auch das letzte Integral und man erhält nur:

$$(13) \qquad \delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Px + Qy + Rz)\, ds.$$

Dieses letzte Resultat ist im Einklang mit der gewöhnlichen Betrachtung, wo die Maxwellsche Spannung als „elastische" Spannung betrachtet wird. Der Ausdruck (12) für δv lehrt aber, daß die Berechnung von δv *im allgemeinen* nicht so einfach ist.

Emile Mathieu[1]) setzt die Maxwellschen Flächenkräfte unmittelbar in die bekannten Kirchhoffschen Gleichungen ein, welche die Beziehungen zwischen Spannungen und Verrückungen geben und findet als Ausdruck der räumlichen Dilatation das letzte Glied von (12). Wie schon bemerkt, sagt er, daß dieser Ausdruck unmöglich gelten kann, gibt aber den exakten Ausdruck nicht an.

1) Emile Mathieu, Theorie des Potentiales, p. 259. 1890.

Für die räumliche Kontraktion einer homogenen isotropen Kugel zufolge ihrer eigenen Schwere würden die Flächenkräfte geben:

$$-\delta v = -\frac{1}{3\lambda+2\mu}\int(Px+Qy+Rz)\,ds.$$

Ist die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche der Kugel g_0, so wird die Flächenkraft:

$$-\frac{g_0^2}{8\pi f}$$

und der bekannte Ausdruck für das Virial eines auswendigen Druckes, $\frac{3}{2}pv$, gibt unmittelbar:

$$(14)\quad -\delta v = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{3g_0^2}{8\pi f}v \quad (v = \text{Volumen des Körpers}).$$

Die gewöhnliche Betrachtung nach der Elastizitätstheorie würde gegeben haben[1]):

$$(15)\qquad -\delta v = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{9g_0^2}{20\pi f}v.$$

Fügen wir weiter bei dem Ausdrucke (14) das Raumintegral hinzu, welches bei der Schwere das letzte Glied von (12) ersetzen muß, das heißt das Integral:

$$\frac{1}{8\pi(3\lambda+2\mu)f}\int g^2\,d\tau = \frac{4\pi g_0^2}{R^2}\int r^4\,dr$$

$$= \tfrac{4}{5}\pi g_0^2 R^3 = \frac{3}{40\pi f}\cdot\frac{g_0^2}{3\lambda+2\mu}v$$

$$\left(R = \text{Kugelradius und } g = g_0\frac{r}{R}\right),$$

so erhält man:

$$-\delta v = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{g_0^2}{\pi f}v\left(\tfrac{3}{40}+\tfrac{3}{8}\right) = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\cdot\frac{9g_0^2}{20\pi f}v$$

und das ist notwendigerweise der Ausdruck (15).

Für einen Leiter hat man für die räumliche Dilatation zufolge einer Ladung auf seiner Oberfläche Formel (13), oder wenn U das Virial der äußeren Kräfte darstellt:

$$(16)\qquad \delta v = -\frac{2U}{3\lambda+2\mu}.$$

Berechnen wir nun als ein anderes Beispiel die räumliche Dilatation eines homogenen isotropen leitenden Ellipsoids.

1) C. Chree, Trans. of the Cambridge phil. Soc. 15. p. 331. 1892.

Ist σ die Flächendichte, e die ganze Ladung und p das Lot, welches vom Mittelpunkt auf die in dem betrachteten Punkt an das Ellipsoid gelegte Ebene gefällt ist, so hat man:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \times p.$$

Die elektrische Spannung wird deshalb

$$\frac{e^2}{8\pi a^2 b^2 c^2} p^2,$$

wenn wir die dielektrische Konstante des umgebenden Mediums gleich 1 setzen.

Ist ds ein Element der Oberfläche des Ellipsoids, und r sein Radiusvektor, so wird bekanntlich der Ausdruck für das Virial der elektrischen Spannungen:

$$U = -\tfrac{1}{2}\int R r \cos(R, r)\, ds,$$

wenn R diese Spannungen darstellt.

Weiter ist

$$\cos(R, r) = \frac{p}{r}$$

und also:

$$U = -\frac{e^2}{16\pi a^2 b^2 c^2}\int p^3\, ds.$$

Die ganze Vergrößerung des Ellipsoids wird deshalb:

$$\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{e^2}{8\pi a^2 b^2 c^2}\int p^3 ds. \tag{17}$$

Wenn $a > b > c$, so setzen wir:

$$l^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}; \quad l'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

und weiter:

$$\Delta = \sqrt{1 - l^2 \sin^2 u}, \quad \Delta' = \sqrt{1 - l'^2 \sin^2 v}.$$

Das Flächenelement ds kann auf diese Weise ausgedrückt werden durch:

$$ds = \frac{l^2\cos^2 u + l'^2 \cos^2 v}{\Delta \cdot \Delta'} \sqrt{(a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}\, du\, dv.$$

Weiter ist:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

und

$$x = a \sin u \cdot \Delta, \quad y = b \cos u \cos v, \quad z = c \sin v \cdot \Delta.$$

Demnach:

$$p = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{(a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u)(c^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)}}.$$

Durch Substitution in (17) wird also die Frage zurückgeführt auf die Berechnung von elliptischen Integralen.

Ist $a = b$, so erhält man leicht:

$$\int p^3\,d\,s = a^4 c \int\int \frac{d\,u\,.\,d(\sin v)}{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\sin^2 u}.$$

Setzen wir:

$$\frac{a^2}{c^2} - 1 = h^2\,(a > c),$$

so wird:

$$\int p^3\,d\,s = \frac{a^4 c}{h}\,\text{arc}\,.\,\text{tg}\,(h\sin v)\int d\,u.$$

Für einen Oktant des Ellipsoids müssen u und v zwischen 0 und $\pi/2$ genommen werden, und:

$$\tfrac{1}{8}\int p^3\,d\,s = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^4 c}{h}\,\text{arc}\,.\,\text{tg}\,h.$$

Die Vergrößerung des Volumens des Ellipsoids wird deshalb:

$$\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{e^2}{2a\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}\,\text{arc}\,.\,\cos\frac{c}{a}.$$

Für eine bestimmte Ladung und für gleichförmige Ellipsoide sind also die Dilatationen den Dimensionen umgekehrt proportional.

's Gravenhage, November 1903.

(Eingegangen 17. November 1903).

7. *Über die radioaktive Emanation der Wasser- und Ölquellen; von F. Himstedt.*

(Aus den Ber. d. Naturf.-Ges. Freiburg i. B. 14. p. 181. 1903.)

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich gezeigt, daß Luft sowie andere Gase eine bedeutende Erhöhung ihres elektrischen Leitvermögens erfahren, wenn sie durch Wasser hindurchgeblasen werden. Ich habe ferner gezeigt, daß es sich nicht um eine einfache Ionisierung der Luft handeln kann, und habe darauf hingewiesen, daß man zur Erklärung entweder eine aus dem Wasser durch die Luft mitgeführte Emanation annehmen muß, oder aber die Hypothese aufstellen kann, daß das Wasser auf Gase in ähnlicher Weise ionisierend wirkt wie etwa auf Säuren und Salze.

Ich habe diese Versuche inzwischen weiter fortgesetzt, zum Teil in Gemeinschaft mit Hrn. v. Traubenberg, der an anderer Stelle ausführlicher über seine Beobachtungen berichten wird. Ich glaube, daß diese neuen Versuche in überzeugender Weise dartun, daß es sich um eine Emanation des Quellwassers handelt, und daß diese Emanation in ihrem Verhalten der des Radiums sehr ähnlich, vielleicht sogar vollkommen gleich ist. Ich werde zu einer kurzen Mitteilung veranlaßt dadurch, daß Hr. J. J. Thomson, wie ich in der Naturw. Rundschau vom 31. Juli 1903 gelesen habe, über denselben Gegenstand: „Radioaktives Gas aus Leitungswasser", einige Beobachtungen mitgeteilt hat.

1. Das Wasser aller Quellen, welche ich zu untersuchen Gelegenheit hatte, ebenso frisch heraufgeholtes Grundwasser zeigt die Fähigkeit, die durchgepreßte Luft leitend zu machen; dagegen habe ich in keinem offen fließenden Bache oder Flusse diese Eigenschaft finden können. Ich habe Quellen untersucht, welche aus dem *Gneis* kommen (Höllental, Kybfelsen etc. bei Freiburg), solche aus *Kalkstein* (Schönberg, Schnewburg bei

1) F. Himstedt, Ber. d. Naturf.-Ges. Freiburg i. B. 13. p. 101. 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 107. 1903.

Freiburg), aus *Buntsandstein* (Heidelberg) und solche vulkanischer Natur, Kaiserstuhl, die Quellen von Baden-Baden, von Wildbad, von Fachingen im Lahntal u. a. Alle kalten Quellen zeigten angenähert gleich starke Wirkung, die Thermalquellen eine größere, zum Teil sehr große Wirkung; die größte die Murquelle von Baden-Baden.

Um die Resultate vergleichbar zu machen, wurden bei jedem Versuche $^3/_4$ Liter Wasser verwendet. Mittels einer Pumpe mit zwei Ventilen wurde aus dem a. a. O. beschriebenen großen Glasgefäße von ca. 50 Liter Inhalt Luft angesaugt, durch das Wasser gepreßt, und dann durch Trockenröhren wieder in den Apparat zurückgedrückt. Nach tausend Stößen der Pumpe trat keine weitere Vermehrung der Leitfähigkeit im Gefäße ein. Die in der früher beschriebenen Weise ausgeführten Beobachtungen am Elektroskop ergaben dann, wievielmal größer die Leitfähigkeit der Luft nach dem Durchpressen durch das Wasser war, als vorher. Bei dem Wasser der oben erwähnten Murquelle, das zwei Tage nach dem Auffangen untersucht wurde, ergab sich, *daß die 50 Liter Luft des Versuchsgefäßes durch die Emanation aus $^3/_4$ Liter Wasser eine ca. 40 mal größere Leitfähigkeit erlangt hatten*, ein Skt. des Elektroskops brauchte nämlich in Zimmerluft 59 Min. 45 Sek.; nachdem die Emanation in den Apparat gebracht war, 1 Min. 27 Sek. Ich unterlasse es, die Zahlenwerte für alle untersuchten Wassersorten anzugeben, da die Resultate, wie sich zeigen wird, wesentlich beeinflußt werden können durch die Art des Auffangens des Wassers, sowie durch die Zeit, die zwischen dem Einfüllen und der Untersuchung verstrichen ist.

2. Leitet man Wasserstrahlpumpenluft, also „aktive" Luft, durch irgend eine unwirksame Flüssigkeit, so wird dieselbe dadurch aktiviert, d. h. stellt man mit dieser Flüssigkeit jetzt den im vorigen Abschnitt beschriebenen Versuch an, so erhält man dieselben Resultate wie bei frischem Quellwasser. Die beim Durchstreichen von Luft durch aktives Wasser mitgeführte Emanation kann also von anderen Flüssigkeiten aufgenommen, absorbiert werden. Hr. v. Traubenberg, der diese Versuche ausgeführt hat, hat gefunden, daß die Kohlenwasserstoffe den größten Absorptionskoeffizienten besitzen. Ein Liter Petroleum z. B. vermag, wenn durch Durchleiten von Wasser-

strahlluft gesättigt, ca. 20 mal soviel Emanation aufzunehmen, als ein ebenso behandeltes gleiches Quantum Wasser.

3. Die eben erwähnte Tatsache mußte den Gedanken nahelegen, Erdöl, welches direkt am Bohrloche aufgefangen ist, zu untersuchen. Die Elsässische Petroleum-Gesellschaft in Walburg i. E. hatte die Freundlichkeit, mir zwei Proben von Petroleum zu schicken, welche direkt an den Bohrlöchern zweier verschiedener Quellen aufgefangen waren. Beide Proben erwiesen sich als aktiv. Daß das käufliche Petroleum nicht aktiv ist, erklärt sich sehr einfach daraus, daß es durch Destillation gewonnen ist. So wie man die von einer Flüssigkeit absorbierten Gase durch Sieden austreiben kann, so wird auch die gasförmige Emanation durch diesen Prozeß ausgetrieben. Ich habe auch mit Quellwassern derartige Versuche angestellt, doch erwies sich die oben beschriebene Art, vermittelst Durchblasen von Luft durch die zu untersuchende Flüssigkeit die Emanation auszuziehen, bei meiner Versuchsanordnung als bequemer.

4. Nach dem Vorhergehenden ist zu erwarten, daß wenn man aktive Kellerluft durch eine inaktive Flüssigkeit saugt, oder die Flüssigkeit längere Zeit in der Kellerluft stehen läßt, dieselbe dadurch aktiviert werden kann. Der Versuch bestätigt dies, und führt somit zu der Vorstellung, daß zwischen einer Flüssigkeit und einem Gase sich stets ein Gleichgewichtszustand hinsichtlich der Aktivität herzustellen sucht, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß die verschiedenen Flüssigkeiten verschieden große Absorptionskoeffizienten für die Emanation besitzen. Am besten wird dies wohl durch folgende Beobachtungen illustriert. Ein Liter Petroleum und ein Liter Wasser wurden entaktiviert, d. h. es wurde eine Stunde lang Zimmerluft durch dieselben hindurchgeblasen. Sie sind hierdurch mit der Zimmerluft im Gleichgewicht. Wird mit ihnen ein Versuch angestellt, wie unter Nr. 1 beschrieben, so zeigt sich keine Änderung der Leitfähigkeit im Gefäße. Die Flüssigkeiten wurden hierauf in flachen Glasschalen nebeneinander in dem Keller aufgestellt. Nach drei Wochen wurden sie untersucht. Beide waren aktiv geworden, das Petroleum enthielt aber, dem größeren Absorptionskoeffizienten entsprechend, bedeutend mehr Emanation als das Wasser.

Man kann am einfachsten wohl die Sache so darstellen, daß man sagt: Für diese Emanation gilt das Daltonsche bez. Henrysche Gesetz. Aus dieser Vorstellung erklären sich ganz zwanglos die folgenden Beobachtungen. Wasser, das direkt an der Quelle eingefüllt war, erwies sich stark aktiv, ca. 50 m von der Quelle entfernt eingefülltes Wasser war wesentlich schwächer aktiv, und nachdem das Wasser ca. 200 m über Geröll stark bergab geflossen war, erwies es sich als inaktiv. Ein zementiertes Gartenbassin wurde mit aktivem Leitungswasser gefüllt. Nach 24 Tagen wurde eine Probe untersucht, und es ergab sich das überraschende Resultat, daß die Leitfähigkeit der Luft im Apparate durch das Hindurchstreichen durch dieses Wasser nicht *erhöht* sondern *vermindert* wurde. Die Erklärung war leicht zu finden. Die Luft im Freien über dem Wasser besaß, wie der Versuch zeigte, eine geringere Leitfähigkeit als die Zimmerluft. Ebenso erklärt es sich, daß frisch aufgefangenes Regenwasser einmal eine geringe Abnahme, ein anderes Mal eine geringe Zunahme der Leitfähigkeit der Zimmerluft verursachte; das Regenwasser befindet sich sozusagen im Gleichgewicht mit der Außenluft, und zeigt der Versuch nur den Unterschied dieser gegen die Zimmerluft.

Sehr deutlich trat dies Verhalten bei Versuchen mit Seewasser hervor. Das Wasser war auf freier See bei Helgoland aufgefangen und kam drei Tage nach dem Auffangen in Freiburg zur Untersuchung. Die Zerstreuung in Zimmerluft ergab 1 Skt. in 60 Min. Nachdem die Luft durch das Seewasser gesaugt war, 1 Skt. in 81 Min. Man kann hieraus geradezu den Schluß ziehen, daß die Zerstreuung in der Seeluft bei Helgoland entschieden geringer gewesen sein muß als in der Zimmerluft in Freiburg, denn der Absorptionskoeffizient von Salzwasser ist nach unseren Versuchen nicht so sehr von dem des Wassers verschieden.

Teiche und kleine Seen, die ich untersucht habe, zeigten zum Teil eine geringe Aktivität. Ein sicherer Schluß läßt sich hieraus nicht ziehen, da ich nicht angeben kann, ob bez. wieviel Quellen am Boden der Gewässer vorhanden waren. Daß aber auch für diese Gewässer der Satz gilt, daß sie sich hinsichtlich der Aktivität mit der darüber befindlichen Luft ins Gleichgewicht zu setzen suchen, glaube ich aus vielen Ver-

suchen an dem mir leicht zugänglichen Waldsee bei Freiburg schließen zu können. Dieser Teich erhält sein Wasser aus einer am Kybfelsen gefaßten Quelle. Stets erwies sich das Wasser, das nahe dem Einfluß der Quelle entnommen war, stärker aktiv als das an anderen Punkten aufgefangene. Das an dem ca. 100 m entfernten Abfluß des Sees aufgefangene Wasser war so gut wie inaktiv.

5. In der oben zitierten Arbeit habe ich gezeigt, daß wenn man aktivierte Wasserstrahlpumpenluft durch eine Kupferspirale leitet, die in flüssige Luft taucht, dieselbe ihre Aktivität vollständig verliert, daß aber, wenn man den Inhalt der Spirale untersucht, nachdem dieser wieder auf Zimmerluft erwärmt ist, er sich als außerordentlich stark aktiv erweist. Um ziffernmäßig dies festzustellen, wurde folgender Versuch angestellt. Das Elektroskop mit einem kleineren Zerstreuungskörper wurde in ein Blechgefäß von ca. 4 Liter Inhalt gebracht. Mit Zimmerluft gefüllt ergab sich ein Abfall von 1 Skt. in 8 Stunden. Mit Wasserstrahlpumpenluft gefüllt 1 Skt. in 1 Min. 30 Sek. Also Wasserstrahlluft zeigt eine 320 mal so große Leitfähigkeit als Zimmerluft. Wurden nun in das vor jedem neuen Versuche längere Zeit ausgelüftete und mit Zimmerluft gefüllte Gefäß nur 100 cbcm Wasserstrahlluft gebracht, so ergab 1 Skt. — 32 Min. 48 Sek., wurden dagegen 100 ccm Luft aus der Kupferspirale entnommen, so ergab 1 Skt. — 50 Sek. Durch die in flüssige Luft getauchte Kupferspirale war sechs Stunden lang Wasserstrahlpumpenluft geleitet, den hierdurch kondensierten Sauerstoff ließ man langsam verdampfen, fing den letzten Rest des langsam verdampfenden Gases auf, und benutzte zu dem obigen Versuche hiervon 100 cbcm. Man kann aus den mitgeteilten Zahlen den Schluß ziehen, daß dieses Gas eine ca. 12000 mal so große Leitfähigkeit besitzt als die Zimmerluft.

6. Es schien mir von Interesse zu sein, wenn möglich, die Temperatur genauer zu bestimmen, bei der die Emanation in dem Kupferrohr ausfriert, bez. wieder auftaut. Die Kupferspirale wurde zusammen mit einem Pentan-Thermometer in ein Glasgefäß von 5 cm Durchmesser und 30 cm Länge gesteckt, das seinerseits wieder in ein Dewarsches Gefäß von 9 cm Durchmesser und 45 cm Länge gehängt werden konnte.

Zuerst wurden beide Gefäße mit flüssiger Luft gefüllt und wurde zwei Stunden lang durch die Kupferspirale getrocknete, von CO_2 und O befreite Wasserstrahlluft geschickt. Dann wurde die flüssige Luft aus dem inneren Glasgefäße entfernt, und dasselbe oben möglichst dicht mit Watte verschlossen, durch die hindurch nach außen nur die beiden an die Kupferspirale gesetzten Gummischläuche ragten. Solange das Dewarsche Gefäß bis zum Rande mit flüssiger Luft gefüllt, das innere Glasgefäß also nahezu 30 cm in diese eintauchte, zeigte das Thermometer konstant -182^0 C. Um andere Temperaturen zu erhalten, wurde die flüssige Luft aus dem Dewarschen Gefäße so weit fortgenommen, daß das innere Glasgefäß nicht mehr eintauchte, und es wurde oben die Öffnung ebenfalls gut mit Watte verschlossen. Durch diese hindurch ging ein Glasrohr, das je nach Bedarf bis auf den Boden des Dewarschen Gefäßes oder nur so weit hineingesteckt wurde, daß sein unteres Ende oberhalb der flüssigen Luft sich befand. Durch verschieden starkes Hindurchblasen von Luft durch dieses Glasrohr ließ sich jede gewünschte Temperatur von -189^0 bis -140^0 C. auf 2—3 Grade genau einstellen und beliebig lange konstant halten. Es wurden nun bei verschiedenen Temperaturen mit einer Hempelschen Gasbürette mit Quecksilbererfüllung jeweils 100 cbcm Gas aus der Kupferschlange langsam herausgesaugt, in den Versuchsapparat gebracht und untersucht, ob eine Änderung der Leitfähigkeit eintrat. Wiederholte Versuche, bei denen mit auf- und mit absteigenden Temperaturen gearbeitet wurde, haben ergeben, daß unterhalb -154^0 C. nie eine nachweisbare Menge der Emanation aus dem Kupferrohre erhalten wurde, und daß umgekehrt oberhalb -147^0 C. stets die Wirkung der gasförmigen Emanation nachweisbar war. Ich glaube deshalb, daß der Kondensationspunkt zwischen -147 und -154^0 C. liegt. Enger habe ich die Grenzen trotz wiederholter Versuche nicht ziehen können. Rutherfood und Soddy[1]) haben inzwischen gezeigt, daß die Radiumemanation ebenfalls in flüssiger Luft kondensiert wird, und haben nach einer ähnlichen Methode den Kondensationspunkt zu -150^0 C. bestimmt. Die Übereinstimmung ist eine

1) E. Rutherfood u. F. Soddy, Phil. Mag. (4) 5. p. 516. 1903.

so augenfällige, daß sich die Vermutung nicht von der Hand weisen läßt, es handle sich in beiden Fällen um dieselbe Emanation.

7. Hr. v. Traubenberg hat deshalb auf meine Veranlassung untersucht, ob auch die Radiumemanation ähnlich wie die Emanation des Wassers von verschiedenen Flüssigkeiten verschieden stark absorbiert wird, und hat gefunden, daß hier in der Tat ein unverkennbarer Parallelismus besteht.

8. Hr. Crookes[1]) hat gezeigt, daß Sidotblende unter dem Einfluß der Radiumemanation die Erscheinung des Szintillierens zeigt. Die Herren Elster und Geitel haben dann festgestellt, daß ein Sidotblendeschirm auch in Kellerluft die gleiche Erscheinung zeigt, vorausgesetzt, daß man ihn mit dem negativen Pol einer Hochspannung verbindet. Diesen letzteren Versuch habe ich mit bestem Erfolge mit Wasserstrahlluft nachmachen können. Aber auch bei der Crookesschen Anordnung, also ohne den Schirm negativ zu laden, glaube ich die Erscheinung mit Wasserstrahlluft gesehen zu haben. Die Beobachtung wurde allerdings dadurch sehr erschwert, daß mein Sidotblendeschirm selbst nach mehrmonatlichem Liegen im Dunkeln nie ganz aufhörte zu szintillieren. Nach wiederholter Untersuchung mit völlig ausgeruhtem Auge konnte ich mich im Dunkeln auf dem Schirm geradeso orientieren wie nach den Sternbildern am Himmel, indem stets an zwei Stellen heller leuchtende Punkte, an anderen (7) Stellen ganz schwach leuchtende Pünktchen wahrnehmbar blieben. Der Schirm war aus der Buchlerschen Fabrik in Braunschweig, in der auch die Gieselschen Radiumpräparate dargestellt werden, bezogen, und ich vermutete deshalb, daß er mit Radium infiziert sein könnte. Auf eine diesbezügliche Mitteilung hatte die Firma die Freundlichkeit, mir zwei neue Präparate zu schicken, von denen sie glaubte, daß eine Infektion ausgeschlossen sei. Doch auch diese zeigten das gleiche Verhalten, so daß ich darauf angewiesen war, daß Hellerwerden der ohnehin leuchtenden Punkte bez. das Auftreten neuer Lichtpunkte bei Behandlung des

1) Entnommen aus Physik. Zeitschr. 4. p. 489. 1903. Über die durch radioaktive Emanation erregte szintillierende Phosphoreszenz der Sidotblende von Elster und Geitel.

Schirmes mit Wasserstrahlluft zu beobachten, und das ist natürlich viel schwieriger bez. unsicherer, als wenn man anfangs einen vollkommen dunklen Schirm besitzt. Ich werde noch versuchen, ob sich ein solcher überhaupt herstellen läßt, oder ob ein Rest des Szintillierens stets vorhanden ist.

Ganz sicher und ohne Schwierigkeit habe ich das Szintillieren mit der in flüssiger Luft kondensierten Emanation nachweisen können, weil dasselbe hier weit stärker auftrat.

9. In der zitierten Arbeit habe ich gezeigt, daß wenn man den Versuchsapparat mit gut leitender Wasserstrahlluft füllt und dann verschlossen stehen läßt, die Leitfähigkeit langsam aber beständig bis auf den normalen Wert der Zimmerluft abnimmt. An dem Apparate waren gefettete Hähne, in demselben waren größere Metalloberflächen, und es erschien deshalb nicht undenkbar, daß infolge von kleinen Undichtigkeiten etc. das wirksame Agens verloren ging. Um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, habe ich eine Anzahl von gleich großen Glasröhren mit Wasserstrahlluft gefüllt und zugeschmolzen. Die erste wurde noch am gleichen Tage in den Versuchsapparat entleert und die dadurch bewirkte Steigerung der Leitfähigkeit gemessen. Die zweite am folgenden Tage etc. Es zeigte sich genau das gleiche Abklingen der Wirksamkeit, wie es früher beobachtet war. Die nach 29 Tagen entleerte Röhre brachte keine meßbare Steigerung der Leitfähigkeit mehr hervor.

Ebenso wurden eine Anzahl von Flaschen mit aktivem Wasser gefüllt und verschlossen aufbewahrt. Es ergab sich das gleiche Abklingen der Wirksamkeit. Auch ein dickwandiges Bleigefäß wurde mit Wasser gefüllt, zugelötet und, in ein Wasserreservoir versenkt, vier Wochen lang aufbewahrt. Die Untersuchung ergab, daß das Wasser nach dieser Zeit keine Emanation mehr enthielt bez. abgab.

Auf den ersten Blick könnten die Resultate dieser letzten Versuche in Widerspruch zu stehen scheinen mit der Tatsache, daß das hiesige Leitungswasser aktiv ist. Demgegenüber möchte ich darauf aufmerksam machen, daß wenn ein Strang der Wasserleitung längere Zeit nicht benutzt ist, das Wasser also mehrere Tage in den Röhren gestanden hat, daraus entnommene Proben in der Tat weniger aktiv sind, als wenn man vorher das Wasser hat längere Zeit laufen lassen.

10. Über Versuche, welche ich in Gemeinschaft mit Hrn. Prof. G. Meyer hier ausgeführt habe, das Spektrum des Emanationsgases zu photographieren, soll in Bälde berichtet werden. Hier möchte ich nur kurz erwähnen, daß ich bei Gelegenheit dieser Versuche festgestellt habe, daß die Emanation nicht zerstört wird, wenn man sie durch beliebige Säuren oder Alkalien gehen läßt, wenn man sie über glühendes Kupfer oder glühendes Magnesium leitet, noch wenn man elektrische Funken oder stille elektrische Entladungen darauf einwirken läßt.

11. Aus den vorstehend kurz beschriebenen Versuchen glaube ich den Schluß ziehen zu können, daß sich in unserer Erde weit verbreitet — vielleicht überall — radioaktive Stoffe finden, von denen eine gasförmige Emanation ausgeht, die vom Wasser (Erdölen) absorbiert wird, mit diesem an die Oberfläche kommt und sich dort dann in die Luft verbreitet. Der Umstand, daß diese Emanation in mehrfacher Beziehung das gleiche Verhalten zeigt wie die Emanation des Radiums, läßt es nicht unmöglich erscheinen, daß beide identisch sind, das würde dann heißen, daß entweder die Uranerze, aus denen die Radiumemanation stammt, sehr weit verbreitet sein müssen, oder aber, daß es noch andere Stoffe gibt, die, wenn auch vielleicht in viel geringerem Maße als jene, die Fähigkeit besitzen, eine Emanation abzugeben. Die Thoremanation kann bei meinen Versuchen kaum eine große Rolle gespielt haben, da dieselbe, wie bekannt, viel schneller abklingt, womit aber nicht gesagt sein soll, daß nicht auch vielleicht Spuren dieser Emanation im Wasser nachweisbar sein werden. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, daß die starke „Aktivität" der Thermalwasser vielleicht bei der Erklärung ihrer Heilwirkung mit heranzuziehen ist. Sollte sich diese Vermutung bestätigen, so würde es leicht begreiflich erscheinen, daß diese Wasser, wie, glaube ich, als feststehend angesehen werden darf, durch das Verschicken so schnell und stark an Heilkraft verlieren können.

Bedenkt man, daß der Absorptionskoeffizient des Wassers wie des Petroleums für diese Emanation, wie wir durch Versuche festgestellt haben, mit steigender Temperatur abnimmt, daß anderseits die Thermalquellen eine besonders große Aktivität gezeigt haben, so drängt sich die Annahme auf, daß vielleicht

in größeren Tiefen der Erde bedeutendere Mengen radioaktiver Mineralien sich finden als in den oberen Schichten, und nach den Beobachtungen Curies von der fortgesetzten Wärmeentwicklung des Radiums wäre die Frage aufzuwerfen, ob nicht möglichenfalls die radioaktiven Bestandteile der Erde bei der Erklärung der Erdtemperatur in Betracht zu ziehen wären.

Allen denen, welche mich in freundlicher Weise durch Zusendung von Quellwasser bei meiner Untersuchung unterstützt haben, insbesondere den Direktionen der Quellen von Baden-Baden, Wildbad, Fachingen, bitte ich, auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen zu dürfen.

Freiburg i. B., 19. Oktober 1903.

(Eingegangen 15. November 1903.)

8. *Über drehende Schwingungen von dünnen Stäben mit rechteckigem Querschnitt und ihre Verwendung zur Messung der Elastizitätskonstanten; von F. A. Schulze.*

Torsionsschwingungen sind bisher nur für Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt berechnet und in der Experimentalphysik benutzt worden. Seitdem jedoch M. de Saint-Vénant[1]) die Grundlage für die Berechnung der Deformationsgrößen bei der Torsion eines Prismas geschaffen hat, ist man in der Lage, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Torsionswellen auch in Stäben von anderem als kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Nach bekannten dynamischen Prinzipien ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a von Torsionswellen gegeben durch

$$a = \sqrt{\frac{D}{Jd}},$$

wenn man mit D die Direktionskraft, d. h. das Drehungsmoment für eine Drehung um den Winkel 1 pro Längeneinheit der Torsionsachse, mit d die Dichte des Materiales, und mit J das sogenannte polare Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf seinen Mittelpunkt bezeichnet, wobei J definiert ist durch die Gleichung $J = q \int r^2 dq$, wenn q der Querschnitt, r der Abstand eines seiner Punkte vom Mittelpunkt ist.

De Saint-Vénant ist es gelungen, die Größe D für verschiedene Querschnittsformen zu berechnen; und zwar ist für elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen b und c:

$$D = G \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}.$$

G bedeutet den Schiebungsmodul

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

1) M. de Saint-Vénant, Mém. présentés par div. savants 14. p. 233—560. 1856.

E den Elastizitätsmodul, μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdehnung. Für rechteckigen Querschnitt ist, wenn $2b$ und $2c$ die Kantenlängen sind:

$$D = G b c^3 \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{c}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \frac{e^{\frac{2n-1}{2c}\pi b} - e^{-\frac{2n-1}{2c}\pi b}}{e^{\frac{2n-1}{2c}\pi b} + e^{-\frac{2n-1}{2c}\pi b}} \right\}.$$ [1]

Da ferner für die Ellipse:

$$J = \frac{\pi b c}{4}(b^2 + c^2),$$

für das Rechteck:

$$J = \tfrac{4}{3} b c (b^2 + c^2),$$

so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Torsionswellen in einem Stabe mit elliptischem Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)}} \frac{2bc}{b^2 + c^2},$$

oder, wenn wir das Verhältnis der Achsenlängen c/b mit v bezeichnen:

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} \frac{2v}{1+v^2},$$

also unabhängig von v. Für rechtwinkligen Querschnitt ist

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} \sqrt{\frac{3}{4(1+v^2)}}$$
$$v \left\{ \frac{16}{8} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \frac{e^{\frac{2n-1}{2v}\pi} - e^{-\frac{2n-1}{2v}\pi}}{e^{\frac{2n-1}{2v}\pi} + e^{-\frac{2n-1}{2v}\pi}} \right\},$$

also ebenfalls nur abhängig von dem *Verhältnis* der Kantenlängen. Bei Vertauschung von b und c, oder Ersetzung von v durch $1/v$, behält der Ausdruck von a seinen Wert, wie M. de Saint-Vénant zeigt.[2]

1) M. de Saint-Vénant, l. c. p. 335 u. 370.

2) Der von A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, p. 261. Leipzig 1862 angegebene Wert von a ist mit dem hier angegebenen identisch, wenn man berücksichtigt, daß die dort mit B_0 bezeichnete Funktion dieselbe ist, wie die von M. de Saint-Vénant mit u bezeichnete Funktion, die die Verrückungen in Richtung der Torsionsachse angibt. (In dem einfachsten Fall des kreisförmigen Querschnittes ist $u = B_0 = 0$.)

Ist v klein, also der Stab dünn, so vereinfacht sich dieser Ausdruck erheblich, und zwar wird [1])

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{2v}{\sqrt{1+v^2}} \sqrt{1 - 0{,}630249\, v}.$$

Selbst für gar nicht so sehr kleine Werte von v ist diese Formel schon mit sehr großer Genauigkeit richtig.

Für $v = \frac{1}{3}$ z. B. würde die Abweichung vom wahren Wert erst etwa $^1/_{100}$ Promille betragen.

Schreibt man

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \sqrt{1+v^2}\, \sqrt{1 - 0{,}630249\, v} \cdot \frac{2v}{1+v^2},$$

so tritt die Analogie mit dem Ausdruck für elliptischen Querschnitt hervor. Bei gleicher Größe von v ist also die Geschwindigkeit der Torsionswellen in Stäben von rechteckigem Querschnitt größer als in Stäben von elliptischem Querschnitt von gleichem Achsenverhältnis, und zwar im Verhältnis

$$1 : \sqrt{(1+v^2)(1 - 0{,}630249\, v}.$$

Die Abweichung beträgt für $v = 0{,}1$ nur etwa 2 Proz., dagegen für $v = 0{,}2$ bereits ungefähr 10 Proz.

Übrigens hat de Saint-Vénant [2]) für D auch sehr bequeme Annäherungsformeln gegeben, nämlich

$$D = GK\frac{\sigma^4}{J},$$

wo σ der Flächeninhalt des Querschnittes und K eine Konstante ist. Für elliptischen Querschnitt ist genau $K = 1/4\pi^2$, für rechteckigen Querschnitt

für	$b = c$	$b = 2c$	$b = 4c$	$b = 8c$
	$K = 0{,}0224$	0,0238	0,0249	0,0260

Hiernach wird für rechteckigen Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\, 12\sqrt{K},$$

für elliptischen Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \cdot 2.$$

1) M. de Saint-Vénant, l. c. p. 373.

2) M. de Saint-Vénant, Compt. rend. 88. p. 142. 1879.

Ist der Stab so eingeklemmt, daß das eine Ende fest, das andere frei ist, so ergeben sich bei der Stablänge l in bekannter Weise für die Schwingungszahlen N der Torsionsschwingungen

$$N = \frac{(2n-1)a}{4l}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Also bei rechteckigem Querschnitt, wenn v klein ist:

$$(1) \qquad N_{\text{tors.}} = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}}\,2v\sqrt{\frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2}}.$$ [1])

Hiermit mögen zusammengestellt werden die Schwingungszahlen desselben einseitig befestigten Stabes mit rechteckigem Querschnitt bei longitudinalen und bei transversalen (Biegungs-) Schwingungen. Es ist

$$(2) \qquad N_{\text{long.}} = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{d}},$$

$$(3) \qquad N_{\text{transv.}} = \frac{2\varepsilon^2\pi c}{\sqrt{3}\,4l^2}\sqrt{\frac{E}{d}}$$ [2]),

wo

$$\varepsilon = 0{,}59686, \quad 1{,}49418, \quad 2{,}50025, \quad 3{,}4999 \ldots \frac{2n-1}{2}.$$

Zur Bestimmung der beiden Elastizitätskonstanten E und μ bez. E und dem Torsionsmodul $E/2(1+\mu)$ kann man nun einmal $N_{\text{tors.}}$ und $N_{\text{long.}}$ benutzen. Dies ist von Wertheim[3]) und Schneebeli[4]) an Stäben von kreisförmigem Querschnitt ausgeführt, und aus dem Verhältnis $N_{\text{long.}}/N_{\text{tors.}}$ die Konstante μ

---

1) A. Clebsch macht l. c. p. 261 folgende Bemerkung: „Freilich kann man diese Zahlen in diesem Fall nicht mehr als die Repräsentanten von Tönen ansehen." Diese Bemerkung ist vielleicht ähnlich aufzufassen wie eine (nach mündlicher Mitteilung) von Hrn. Prof. Richarz aufgeworfene Frage, wie bei Torsions-„Tönen" bei Stäben von kreisförmigem Querschnitt die Übertragung der Schwingungen auf die Luft erfolgt. Der Unterschied in der Tonstärke ist bei gleich starkem Anstreichen mit dem Bogen für Stäbe von kreisförmigem und rechteckigem Querschnitt sehr auffallend. Bei ersterem ist der Torsionston nur eben wahrzunehmen, bei letzterem durch das ganze Zimmer gut zu hören.

2) Vgl. z. B. A. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik 1. p. 769.

3) G. Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) 50. p. 262. 1857.

4) H. Schneebeli, Pogg. Ann. 140. p. 598. 1870.

bestimmt. Oder aber man könnte $N_{\text{tors.}}$ und $N_{\text{transv.}}$ bestimmen und daraus E und μ berechnen, bez. wenn es nur auf die Bestimmung von μ ankommt, den Quotienten $N_{\text{tors.}}/N_{\text{transv.}}$ ermitteln. Und zwar hat dieses Verfahren vor dem von Wertheim und Schneebeli benutzten bedeutende Vorteile, wenn man den zu untersuchenden Stäben nicht kreisförmigen, sondern schmalen rechteckigen Querschnitt gibt. Bei solchen Stäben sind nämlich einmal torsionale Schwingungen sehr viel leichter zu erzeugen als bei Stäben mit Kreisquerschnitt und geben auch sehr viel lautere, direkt stark hörbare Töne. (Vgl. die Anmerkung p. 586.) Ferner aber, und darin liegt wohl der Hauptvorteil, kommt man mit verhältnismäßig geringer Dimension, also wenig Material aus, wie aus den unten mitgeteilten Beispielen ersichtlich ist. Bei der von Wertheim und Schneebeli angewandten Methode mußten die Stäbe ungefähr eine Länge von 1 m haben, damit sowohl die Torsions- wie die Longitudinalspannungen bequem zu erzeugen waren, so daß also Unterschiede in der Homogenität leicht zu befürchten sind. Demgegenüber braucht die Länge der Stäbchen bei Anwendung der jetzt zu beschreibenden Methode mit schmalem rechteckigen Querschnitt nicht über 10 cm zu betragen und kann sicher noch bedeutend kleiner genommen werden.

Will man die Konstante E und μ bez. E und den Torsionsmodul $E/2(1+\mu)$ einzeln bestimmen, so hat man natürlich die Formeln (1) und (3) direkt anzuwenden. Kommt es nur auf die Bestimmung von μ an, so kann man zweifach verfahren. Entweder man bestimmt $N_{\text{transv.}}/N_{\text{tors.}}$ bei *derselben* Länge des Stäbchens, oder aber man ermittelt diejenigen Längen $l_{\text{transv.}}$ und $l_{\text{tors.}}$, für welche der Transversalton gleich dem Torsionston ist. Bezeichnen wir die Höhe des Stäbchens $2c$ mit h, die Breite $2b$ mit B, so wird, da $v = h/B$ ist

$$N_{\text{tors.}} = \frac{2n-1}{4l}\sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}}\sqrt{1-0{,}630249\,v}\,\frac{2h}{B\sqrt{1+v^2}},$$

$$N_{\text{transv.}} = \frac{s^2\pi h}{4\sqrt{3}\,l^2}\sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Demnach:

$$\frac{N_{\text{tors.}}}{N_{\text{transv.}}} = \frac{2n-1}{n\,s^2}\,\frac{l\sqrt{3}\,2}{B}\sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}}\sqrt{\frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2}}.$$

Im ersten Fall wird also, wenn wir das experimentell zu bestimmende Tonintervall $N_{\text{tors.}}/N_{\text{transv.}}$ mit i bezeichnen,

$$\mu = 0{,}60793\,\frac{(2n-1)^2}{\varepsilon^4 i^2}\,\frac{l^2}{B}\cdot\frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2} - 1. \qquad v = \frac{h}{B}.$$

Im zweiten Fall ist $N_{\text{tors.}} = N_{\text{transv.}}$, oder

$$\frac{2n-1}{4\,l_{\text{tors.}}}\sqrt{\frac{E}{2\,d\,(1+\mu)}}\;2\,v\sqrt{\frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2}} = \frac{\varepsilon^2\,\pi\,h}{4\sqrt{3}\,l^2_{\text{transv.}}}\sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Daraus

$$\mu = \frac{0{,}60793}{\varepsilon^4}\,\frac{(2n-1)^2}{B^2}\,\frac{l^4_{\text{transv.}}}{l^2_{\text{tors.}}}\,\frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2} - 1. \qquad v = \frac{h}{B}.$$

Wie man sieht, kommt in beiden Ausdrücken für μ die Größe h, die kürzeste Kantenlänge des rechteckigen Querschnittes, bei deren Messung am leichtesten ein beträchtlicher prozentischer Fehler gemacht werden könnte, explizit nicht mehr vor; sie steckt noch in v; jedoch ändert sich der Ausdruck $1 - 0{,}630249\,v/1 + v^2$ nur sehr wenig mit v, wenn v klein ist, z. B. ist für

$$v = 0{,}10 : \frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2} = 0{,}9277,$$

$$v = 0{,}15 : \frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2} = 0{,}8855,$$

$$v = 0{,}20 : \frac{1-0{,}630249\,v}{1+v^2} = 0{,}8403.$$

Sogar ein sehr erheblicher Fehler bei der Messung von h fälscht den Wert von μ nur außerordentlich wenig.

Messungen.

Die eigentlichen Messungen wurden an Stäben aus Gußstahl, Messing, Wismut, Glas und Ebonit ausgeführt. Die Breite B betrug bei allen ungefähr 1 cm, die Höhe h zwischen ca. 1—2 mm.

Die Stäbe aus Gußstahl und Messing waren übrigens dieselben, die F. Melde[1]) zur Bestimmung der Schwingungs-

1) F. Melde, Wied. Ann. **52.** p. 238—261. 1894; **66.** p. 767—780. 1898.

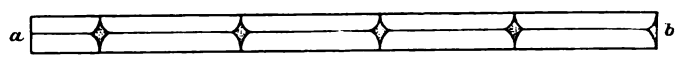
zahlen sehr hoher Töne nach der von ihm angegebenen Resonanzmethode verwendet hat. Auch zur Festklemmung des einen Endes der Stäbe diente die sehr zweckmäßige von F. Melde bei jenen Messungen benutzte Klemmvorrichtung.[1]) Zur Erzeugung der Torsionsschwingungen hält man den Mittelpunkt des freien Endquerschnittes durch Gegendrücken einer feinen Spitze fest und streicht mit dem Bogen an dem langen Rande nahe dem Ende oder besser am Endquerschnitt selbst. Der entstehende Ton ist überaus intensiv. Gewöhnlich entsteht natürlich der erste Torsionston; man erhält auch leicht den zweiten, und, wenn man die entsprechenden Knotenlinien festhält, auch höhere, wovon man sich durch aufgestreuten Sand leicht überzeugen kann. Durch das Gehör erkennt man leicht, daß der zweite Torsionston die Quinte der Oktave des ersten ist. Der Sand sammelt sich in einer haarscharfen Linie in der Mittellinie parallel der Längsachse an und bildet in den Knotenlinien leicht geschweifte Vierecke, deren Mittelpunkt auf der Mittelachse liegt (vgl. die Figur auf p. 590). In analoger Weise erhält man die Transversalschwingungen bis zu sehr hoher Ordnung sehr kräftig, indem man mit der feinen Spitze auf einer der beiden schmalen in der Längsrichtung parallelen Flächen in der Mittelfaser an der Stelle des dem Ende zunächst liegenden Knotens die Bewegung verhindert. Durch aufgestreuten Sand ist wieder leicht zu erkennen, den wievielten Transversalton man erhalten hat.

Falls man die Länge des Stäbchens nicht zu klein und die Ordnungszahlen der Schwingungen nicht zu groß genommen hat, sind bei den gewählten Dimensionen die Töne noch vollkommen im Bereich der hörbaren und dem Intervall nach erkennbaren Schwingungszahlen, wie aus den nachstehend mitgeteilten Versuchen zu ersehen ist. Es wurde nun stets die zweite der angegebenen Methoden benutzt, also immer die Längen $l_{\text{transv.}}$ und $l_{\text{tors.}}$ aufgesucht, bei denen der Transversalton und der Torsionston *dieselbe* Schwingungszahl hatte. Bei der verhältnismäßig starken Intensität der Töne konnte dies leicht so erreicht werden, daß die Längen so lange geändert

1) Abgebildet und beschrieben Wied. Ann. **66**. p. 772. 1898.

wurden, bis beide Töne mit *derselben* Stimmgabel keine Schwebungen mehr lieferten, oder auch mit derselben Genauigkeit, bis der erzeugte Ton des Stabes die nahebei aufgestellte, mit Resonanzboden versehene Stimmgabel zur maximalen Resonanz anregte. Auf beide Weisen konnte nach kurzer Übung die Länge auf etwa $^1/_4$ mm genau in kurzer Zeit ermittelt werden, und zwar gleich gut für den Torsions-, wie für den Transversalton. Ist die Schwingungszahl der Stimmgabel bekannt, so erhält man *beide* Elastizitätskonstanten, ist sie unbekannt, so kann man μ berechnen.

Natürlich könnte man zur Ermittelung der Schwingungszahlen auch in leicht ersichtlicher Weise die Kundtschen Staubfiguren benutzen; auch könnte man sie nach der von Melde zur Messung hoher Schwingungszahlen ausgearbeiteten Resonanzmethode bestimmen. Doch empfiehlt es sich mehr,



($^1/_2$ nat. Größe.)
a freies Ende, *b* festes Ende.

letztere hier in folgender Weise anzuwenden: Derselbe hohe Ton, etwa der einer Meldeschen Stimmplatte, wird auf den zu untersuchenden Stab übertragen, und zwar einmal so, wie Melde dies ausführlich beschrieben hat, daß der Stab *transversal* schwingt, ein anderes Mal dagegen so, daß der Stab *Torsions*schwingungen, natürlich der gleichen Periode ausführt. Diese übertragenen Torsionsschwingungen entstehen überraschend leicht, falls man die richtige Länge gefunden hat; man braucht nicht einmal den Mittelpunkt der Endfläche festzuhalten, man muß nur den die Schwingung übertragenden Korkkeil nicht ganz genau auf die Mitte der Endkante des Stabes aufsetzen. Bei diesem Verfahren ist also die Mitwirkung des Gehörs nicht nötig. Daß die Torsionsschwingung vorhanden ist, wird, wie bei den Transversalschwingungen, durch aufgestreuten Sand erkannt, der sich in den Knotenlinien anhäuft. Vorstehend ist eine derartige Sandfigur abgebildet, die auf einem Stahlstab von 165 mm Länge, 1 cm Breite und 0,2 cm Dicke durch Übertragung der Schwingung einer Meldeschen Stimmplatte von 16384 v. d. erhalten wurde.

Wie man sieht, schwingt der Stab mit dem 5. Torsionston. Die angegebene Methode ist eine dynamische, ist also frei von den durch die elastische Nachwirkung entstehenden Fehlern. Da die Schwingungsbewegungen kaum sichtbare Elongationen erreichen, so ist selbstverständlich Einhaltung der Elastizitätsgrenze gewährleistet.

Es mögen noch einige nach der beschriebenen Methode ausgeführten Messungen mitgeteilt werden.

1. Stahlstab Nr. 1.

$h = 0{,}152$ cm, $B = 0{,}995$ cm, $d = 7{,}801$.

1. Torsionston $= 1024$ v. d. bei $l_{\text{tors.}} = 22{,}30$ cm.
3. Transversalton $= 1024$ v. d. „ $l_{\text{transv.}} = 14{,}55$ cm.

Daraus $E = 18952 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 8106 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}$, $\mu = 0{,}169$.

1. Torsionston $= 896$ v. d. bei $l_{\text{tors.}} = 25{,}55$ cm.
3. Transversalton $= 896$ v. d. „ $l_{\text{transv.}} = 15{,}40$ cm.

Daraus $E = 19142$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 8111$, $\mu = 0{,}180$.

2. Stahlstab Nr. 2.

$h = 0{,}100$ cm, $B = 1{,}00$ cm, $d = 7{,}798$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{\text{tors.}} = 7{,}40$ cm,
oder $= 1024$ v. d. „ $l_{\text{tors.}} = 14{,}80$ cm.
3. Transversalton $= 1024$ v. d. „ $l_{\text{transv.}} = 11{,}65$ cm.

Daraus $E = 19120$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 7873$, $\mu = 0{,}220$.

3. Stahlstab Nr. 3.

$h = 0{,}199$ cm, $B = 0{,}9998$, $d = 7{,}800$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{\text{tors.}} = 14{,}25$ cm.
3. Transversalton $= 2048$ v. d. „ $l_{\text{transv.}} = 11{,}69$ cm.

Daraus $E = 19120$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 8084$, $\mu = 0{,}182$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{\text{tors.}} = 14{,}25$ cm.
3. Transversalton $= 1024$ v. d. bei $l_{\text{transv.}} = 16{,}60$ cm.

Daraus $E = 19220$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 8084$, $\mu = 0{,}189$.

4. Wismutstab.

$h = 0{,}200$ cm, $B = 0{,}999$ cm, $d = 9{,}90$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{tors.} = 10{,}00$ cm,
oder $= 1024$ v. d. „ $l_{tors.} = 20{,}00$ cm,
2. Transversalton $= 1024$ v. d. „ $l_{transv.} = 8{,}09$ cm.

Daraus $E = 3293$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 1372$, $\mu = 0{,}200$.

5. Messingstab.

$h = 0{,}195$ cm, $B = 0{,}995$ cm, $d = 8{,}300$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{tors.} = 9{,}38$ cm.
3. Transversalton $= 2048$ v. d. „ $l_{transv.} = 9{,}42$ cm.

Daraus $E = 9308$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 3908$, $\mu = 0{,}191$.

6. Glasstab.

$h = 0{,}165$ cm, $B = 1{,}005$ cm, $d = 2{,}500$.

1. Torsionston $= 2048$ v. d. bei $l_{tors.} = 13{,}30$ cm.
2. Transversalton $= 2048$ v. d. „ $l_{transv.} = 7{,}15$ cm.

Daraus $E = 7722$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 3191$, $\mu = 0{,}210$.

7. Ebonitstab.

$h = 0{,}200$ cm, $B = 1{,}00$ cm, $d = 0{,}8316$.

1. Torsionston $= 1024$ v. d. bei $l_{tors.} = 9{,}00$ cm.
3. Transversalton $= 1024$ v. d. „ $l_{transv.} = 9{,}45$ cm.

Daraus $E = 2087$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 849$, $\mu = 0{,}299$.

Für den Stahlstab Nr. 3 kann man auch die Elastizitätsgrößen aus den nach der Meldeschen Methode durch die Stimmplatte mit der Schwingungszahl $N = 16384$ v. d. auf den Stab übertragenen Schwingungen berechnen, für die die Torsionsschwingung die abgebildete Sandfigur ergab. Bei diesem Stahlstab ergab sich der 12. Transversalton bei Übertragung durch dieselbe Stimmplatte bei einer Länge von $l_{transv.} = 18{,}88$ cm. Es war also hier:

5. Torsionston $= 16384$ v. d. bei $l_{tors.} = 16{,}89$ cm.
12. Transversalton $= 16384$ v. d. „ $l_{transv.} = 18{,}88$ cm.

Daraus $E = 19130$, $\frac{E}{2(1+\mu)} = 8038$, $\mu = 0{,}190$.

Die benutzten Stimmgabeln stammen von R. König in Paris. (Die Gabel mit 896 Schwingungen von seinem Geschäftsnachfolger Landry.)

Die Genauigkeit der einzelnen Messung ist, da die Längen auf etwa $^1/_4$ mm eingestellt werden können, für E etwa $^1/_3$ Proz., für $E/2(1+\mu)$ etwa $^1/_6$ Proz. Nimmt man den ungünstigsten Fall, daß $l_{\text{transv.}}$ $^1/_4$ mm zu groß (klein), $l_{\text{tors.}}$ $^1/_4$ mm zu klein (groß) bestimmt wird, so resultiert ein Fehler in der Bestimmung von μ um etwa 4 Proz. Durch mehrfache Messungen läßt sich natürlich dieser Fehler verringern.

Die für E und $E/2(1+\mu)$ gefundenen Werte liegen ungefähr in den nach anderen Methoden gefundenen Werten. Was die Werte von μ betrifft, so sind sie außer bei Ebonit kleiner als der von der Poissonschen Theorie geforderte Wert $\mu = {}^1/_4$. Für Stahl und Messing liegen die sonst gefundenen Werte von μ meist um 0,30.

Jedoch findet z. B. Baumeister[1]) für Eisendrähte von 0,5—1,0 mm $\mu=0{,}23$, A. Bock[2]) für Stahl $\mu=0{,}256$. Überhaupt sind Werte von μ unter 0,25 keine Seltenheit. So findet Katzenelsohn[3]) für Platin $\mu=0{,}16$, für Gold $\mu=0{,}17$, für Aluminium $\mu = 0{,}13$. Ferner ist nach den Versuchen von Cl. Schäfer[4]) für Silber $\mu = 0{,}195$. Und gerade die von Schäfer gefundenen Werte von μ sind in Verbindung mit seinen Messungen der Temperaturkoeffizienten von E und $E/2(1+\mu)$ besonders glaubwürdig, weil sie so vorzüglich dem von ihm gefundenen Gesetz folgen, daß μ bei Annahme linearer Änderung von E und $E/2(1+\mu)$ mit der Temperatur beim Schmelzpunkt genau den Wert $^1/_2$ ergibt.

Für Glas liegen die meisten Werte von μ zwischen 0,20 und 0,25. Der hier gefundene Wert ist fast genau derselbe, den W. Voigt[5]) an einem Spiegelglasstreifen gefunden hat, dessen Isotropie er besonders nachgewiesen hat, und zwar ist besonders bemerkenswert, daß die dabei von W. Voigt angewandte Methode der hier benutzten ganz analog ist, indem

1) M. Baumeister, Wied. Ann. 18. p. 578. 1883.
2) A. Bock, Wied. Ann. 52. p. 209. 1894.
3) N. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. Berlin 1887.
4) Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 5. p. 233. 1901.
5) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 497—513. 1882.

dort der statische Zustand, hier der dynamische Vorgang zur Verwendung kommt.

Für Ebonit findet Mallock[1]) $\mu = 0{,}389$.

Der Wert von E scheint für Ebonit bisher noch nicht gemessen zu sein.

Für Wismut scheinen beide Elastizitätskonstanten bisher noch nicht bestimmt zu sein, wenigstens konnte ich in der Literatur keine Angaben darüber finden.

Es dürfte nach diesen Ergebnissen die Vermutung, daß μ einmal nicht genau den Wert 0,25 zu haben braucht und ferner überhaupt von Stoff zu Stoff verschieden ist, eine neue Stütze erfahren haben.

Die beschriebene Methode zur Messung der Elastizitätskonstanten dürfte sich überall, wo das Material leicht in Stabform zu bringen ist, empfehlen, und zwar erstens wegen des geringen Materialbedarfs, ferner wegen der Genauigkeit und Einfachheit der Messung, schließlich wegen der kurzen Zeit, die sie erfordert — eine solche Messung beider Elastizitätskonstanten ist eine Sache *weniger Minuten.*

Die Methode soll zunächst zur Messung der Elastizitätskonstanten von Wismut-Zinnlegierungen benutzt werden. Die Elastizitätsverhältnisse scheinen hier eine ähnliche Anomalie zu haben, wie die thermischen und elektrischen Leitfähigkeiten.[2]) Diejenige Legierung von Wismut und Zinn nämlich, die ein Minimum der genannten Leitfähigkeiten hat, besitzt eine abnorm große Sprödigkeit, so daß die Bearbeitung dieser Legierung Schwierigkeiten bietet. Bei kleinerem und größerem Zinngehalt scheint die Sprödigkeit schnell wieder abzunehmen.

Marburg, Physik. Institut der Universität.

1) A. Mallock, Proc. Roy. Soc. **29.** p. 157. 1879.
2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **9.** p. 555. 1902.

(Eingegangen 9. November 1903.)

9. *Untersuchungen über kritische Dichte; von Gustav Teichner.*

(Auszug aus der Wiener Inaugural-Dissertation.)

Bekanntlich ist die Frage, ob bei der kritischen Temperatur Flüssigkeit und Dampf identisch werden, noch nicht endgültig entschieden. Während die Anhänger der Andrewsschen Theorie das Verschwinden des Meniskus auf einen vollständigen Dichteausgleich zwischen beiden Phasen zurückführen, haben andere Forscher zahlreiche Beobachtungen mitgeteilt, welche dieser Annahme widersprechen. Die Entscheidung dieser für unsere ganzen Molekularvorstellungen außerordentlich wichtigen Frage wurde durch den Umstand sehr erschwert, daß eine direkte Methode zur Bestimmung der kritischen Dichte bisher nicht existierte. Die gebräuchlichen, größtenteils auf Volumablesungen beruhenden Methoden versagen meist bei der Annäherung an den kritischen Punkt. Im Laufe einer auf Veranlassung des Hrn. Prof. J. Traube ausgeführten Untersuchung über „kritische Verdampfungswärme" bemühte ich mich, diesem Mangel abzuhelfen und es gelang mir eine Methode auszuarbeiten, welche eine leichte und vollständig sichere Dichtebestimmung bis über die kritische Temperatur hinaus gestattet.

Das Verfahren beruht auf der Anwendung kleiner gläserner Schwimmkörper von bestimmtem spezifischem Gewicht, welche, in ein Versuchsrohr mit Flüssigkeit eingebracht, sich unterhalb und oberhalb der kritischen Temperatur an den ihrer Dichte entsprechenden Stellen des Rohres schwebend erhalten. Bringt man mehrere Kügelchen von verschiedener Dichte in dasselbe Rohr, so gibt ihr gleichzeitiges Schweben den Beweis für das Vorhandensein entsprechender Dichteunterschiede.

Die angewandten Glaskügelchen sind zweckmäßig nicht viel größer als ein Stecknadelkopf. Sie wurden aus Kapillarröhrchen von gefärbtem Glas in der Weise hergestellt, daß

dieselben zunächst an einem Ende zu dem Kügelchen von entsprechender Größe aufgeblasen und dann durch ein feinmaschiges Drahtnetz durchgesteckt wurden, worauf mittels Stichflamme das Abschmelzen der restlichen Kapillaren erfolgte. Bei einiger Übung erhält man so Schwimmer von 1—2 mm Durchmesser, deren Dichte durch entsprechend dünnes Aufblasen beliebig variiert werden kann. Ich bestimmte ihre Dichte, indem ich sie mit Äther oder Isopentan in einem zugeschmolzenen Rohr erhitzte und die Temperatur notierte, bei der sie eben schwebten. Die Dichten beider Flüssigkeiten sind in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur durch Young[1]) u. a. genau festgestellt worden. Ich stellte mir so eine vollkommene Dichteskala zwischen den Grenzdichten 0,350 bis 0,730 her. Es konnten 20 Kügelchen und mehr in ein Rohr von 8 mm lichter Weite eingeschlossen werden, ohne daß eine gegenseitige Störung erfolgte.

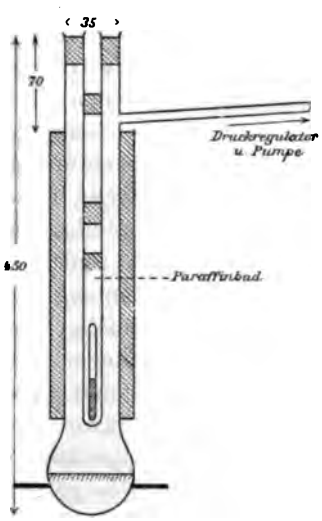


Fig. 1.

Als Versuchsflüssigkeit diente ausschließlich Chlorkohlenstoff, der sich wegen seiner hohen kritischen Dichte für diese Untersuchungen gut eignet. Das von Kahlbaum bezogene Produkt wurde durch Kali vollständig von Schwefelkohlenstoff befreit, mit Chlorcalcium getrocknet, und fraktioniert destilliert. Der Siedepunkt der von mir benutzten mittleren Fraktion war absolut konstant und stimmte mit den Angaben von Thorpe überein. 76,4° korr., spez. Gew. 1,6319 °/₄.

Ich benutzte als Erhitzungsapparat einen im wesentlichen von Galitzine[2]) angegebenen Thermostaten in den Dimensionen der vorstehenden Zeichnung (Fig. 1).

1) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 178. A. p. 57. 1887; S. Young, Proc. Phys. Soc. 13. p. 602. 1895; vgl. auch P. Eversheim, Dissertation, Bonn 1902.

2) B. Galitzine, Wied. Ann. 50. p. 52. 1893.

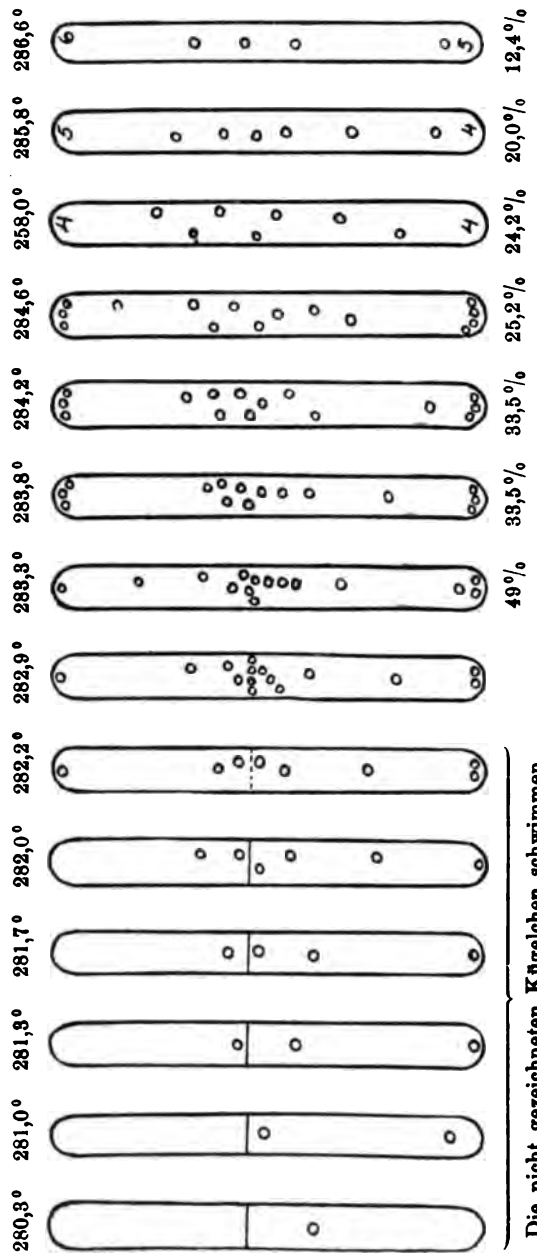
Als Heizflüssigkeit diente Diphenylamin. Das innere Rohr war mit reinstem flüssigen Paraffin gefüllt. Sorgt man durch Einsetzen von Korken für Luftabschluß, so bleibt das Paraffin bis 300° völlig farblos. Auch zur Erzielung einer völligen Temperaturkonstanz erwies sich das Einsetzen von Korken als notwendig. Außen ist der Apparat mit dickem Filz umkleidet, welcher mit entsprechenden Ausschnitten versehen ist. Eine kleine Heizflamme genügt, um den Dampf bis zum seitlichen Ansatz zu treiben. Die Heizung erfolgte zweckmäßig durch direkte Flamme, da hierdurch Überhitzung am besten und vollständigsten vermieden wird. Der Apparat steht mittels des Ansatzrohres mit einem gewöhnlichen Druckregulator und einem Manometer in Verbindung, von dem aus die Leitung zur Pumpe führt.

Von den zahlreichen von mir angestellten Versuchen sollen nur einige der charakteristischsten durch Zeichnungen veranschaulicht werden. Die Erhitzung wurde ganz allmählich so geleitet, daß nach jeder Temperatursteigerung stets die Erreichung des vollen Temperaturgleichgewichtes abgewartet wurde.

1. Versuch. (Vgl. Fig. 2, p. 598 und 599.) Jenenser Verbundglasrohr, 8 mm licht, 10 cm lang, mittlere Dichte der Füllung 0,578.

15 Kügelchen von folgenden Dichten: 0,415, 0,455, 0,469, 0,493, 0,513, 0,531, 0,555, 0,578, 0,598, 0,624, 0,637, 0,658, 0,678, 0,700, 0,726.

Das Rohr befand sich über 2^h oberhalb der kritischen Temperatur. Trotzdem war die Durchmischung noch nicht vollständig, wie daraus hervorgeht, daß beim Abkühlen die Nebelbildung nicht durchs ganze Rohr reicht. Der Nebel verdichtet sich besonders in der Mitte desselben und ganz unmerklich erscheint darin der Meniskus. Bei konstanter Temperatur verschwindet dann allmählich der Nebel, und der Meniskus wird immer deutlicher. Geht man mit der Temperatur weiter um 0,1° herunter, so tritt neuerlich Nebelbildung ein, die gleich darauf in einen äußerst feinen, dichten Regen übergeht. Es ist charakteristisch, daß dieser Regen in beiden Phasen entsteht: in der Dampfphase fallen feine Flüssigkeitströpfchen herunter, und in der Flüssigkeit steigen feine Gasbläschen auf. Diese überaus merkwürdige und charakteristische


280,3°
281,0°
281,9°
281,7°
282,0°
282,2°
282,9°
283,3°
283,8°
284,2°
284,6°
258,0°
285,8°
286,6°
49%
33,5%
33,5%
25,2%
24,2%
20,0%
12,4%
Die nicht gezeichneten Kügelchen schwimmen im Meniskus.
Meniskus verschwindet.

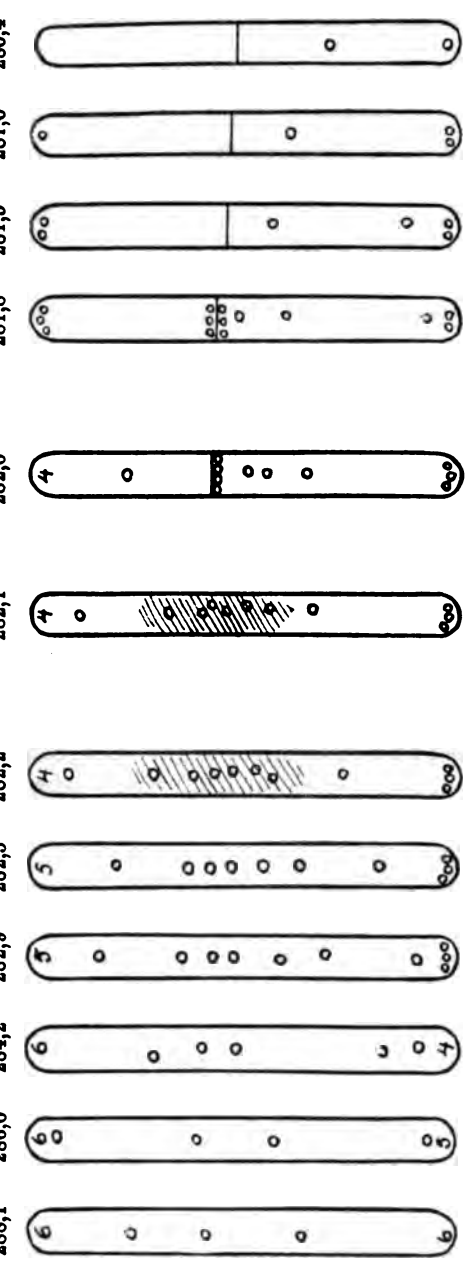


Fig. 2.

Da infolge der hohen Temperatur die Korrektur für den herausragenden Faden recht unsicher ist, sind nur die relativen Werte der oben angegebenen Temperaturen zuverlässig. Nach Young verschwindet der Meniskus bei 288,0°. — Es wären somit alle Temperaturen um 1,1° zu erhöhen.

Erscheinung kann überhaupt nur als ein „Entmischungsvorgang“ gedeutet werden.

2. Versuch. Dasselbe Rohr, dieselben Kügelchen. Im Rohr befindet sich ein kleiner elektromagnetischer Rührer, bestehend aus einem mit Eisenfeilspänen gefüllten, zugeschmolzenen Glasröhrchen, das durch einen kräftigen Elektromagneten im Versuchsrohr auf und ab bewegt werden kann. Mittlere Dichte der Füllung 0,578.

281,3° Meniskus deutlich vorhanden. Beim kräftigen Rühren entsteht an seiner Stelle ein dichtes Nebelband, das immer breiter wird, bis schließlich das ganze Rohr von einer gleichmäßigen Trübung erfüllt ist. Dabei herrscht bei vollkommener Temperaturkonstanz dauernde lebhafte Schlierenbildung. Alle Kügelchen bis auf eines (0,578) sind in die Spitzen gegangen. Unterbricht man das Rühren, so hält die Trübung und Schlierenbildung stundenlang an, ohne daß Entmischung unter Rückbildung des Meniskus erfolgt.

281,9° Zustand unverändert, Trübung und Schlierenbildung durchs ganze Rohr, nur schwächer als früher. 0,578 schwebt.

283,1° Trübung und Schlierenbildung noch schwächer.

285,0° Die Flüssigkeit ist vollkommen klar geworden, Schlierenbildung vollständig verschwunden. 0,578 schwebt.

283,1° Rohrinhalt bereits wieder sichtbar trüb (schwach) und Schlierenbildung deutlich vorhanden.

282,4° Deutliche Trübung durchs ganze Rohr, lebhafte Schlierenbildung bei vollkommen konstanter Temperatur.

282,0° Starke Trübung, das eine schwebende Kügelchen (0,578) wogt infolge der starken Schlierenbildung auf und ab.

281,3° Intensiver Nebel durchs ganze Rohr; bei weiterer Abkühlung erscheint in dichtem, weißem Nebel (durchs ganze Rohr) der Meniskus und unter lebhaftem beiderseitigen Regen tritt Entmischung ein.

Aus diesen beiden Versuchsreihen sind folgende wesentliche Punkte hervorzuheben:

1. Das Verschwinden des Meniskus hängt von der Art des Erhitzens ab und ist ein wesentlich verschiedenes, je nach-

dem, ob man durch Rühren für Durchmischung sorgt oder nicht. Es ändert sich dabei sowohl die Temperatur als auch die Höhe im Rohr, wo der Meniskus verschwindet.

2. Wird eine Durchmischung des Inhaltes möglichst verhindert, so sind bis einige Grade oberhalb der kritischen Temperatur wesentliche Dichteunterschiede vorhanden. Dieselben betrugen im vorliegenden Versuch 1^0 oberhalb der Temperatur des Verschwindens des Meniskus 49 Proz., 2^0 oberhalb 33,5, 3^0 oberhalb 23, 4^0 oberhalb 13, 6^0 oberhalb noch ca. 8 Proz.

3. Die Dichtezunahme im Inneren des Rohres ist keine kontinuierliche, sondern die Kügelchen zeigen deutlich an, daß nach dem Verschwinden des Meniskus an dessen Stelle eine Übergangszone besteht, auf welche sich die ganzen Dichteänderungen konzentrieren. Oberhalb und unterhalb dieser Zone sind die Änderungen nur geringfügig.

4. Wird während des Erhitzens kräftig gerührt, so verschwindet der Meniskus bei niedrigerer Temperatur als in 2., der Inhalt wird vollständig homogen, zeigt aber deutliche Trübung und bei vollkommen konstanter Temperatur lebhafte Schlierenbildung. Eine Entmischung unter Wiederauftreten des Meniskus findet nicht mehr statt.

5. Bei weiterem Erhitzen wird die Trübung und Schlierenbildung immer geringer und verschwindet gänzlich einige Grade (ca. 4^0) oberhalb der Temperatur des Verschwindens des Meniskus.

6. Beim Wiederabkühlen tritt wieder einige Grade oberhalb der kritischen Temperatur eine anfangs kaum wahrnehmbare Trübung ein, die mit sinkender Temperatur immer dichter wird und schließlich im Augenblick, wo der Meniskus erscheint, in einen feinen Regen übergeht.

Diese Resultate stehen in Widerspruch mit der Andrewsschen Theorie und bestätigen aufs vollste die von de Heen, Galitzine u. a. nach anderen Methoden gemachten Beobachtungen. Man hat bisher von seiten der Anhänger der Andrewsschen Theorie stets versucht, die genannten Beobachtungen durch Annahme von Temperatur- oder Druckdifferenzen, oder Verunreinigungen zu erklären. Ich habe daher diesen Punkten eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet und will sie im folgenden getrennt besprechen.

1. Temperaturdifferenzen.

Galitzine[1]) hat für Äthyläther ausgerechnet, daß zur Erklärung der von ihm beobachteten Dichteunterschiede von 25 Proz. eine Temperaturdifferenz von 4° erforderlich wäre. Da die Isothermen für CCl_4 nicht genau bekannt sind, so läßt sich eine ähnliche Rechnung hier nicht durchführen; doch würden jedenfalls die von mir festgestellten Dichtedifferenzen von 50 Proz. noch weit größere Temperaturunterschiede erfordern. Die ganze Konstruktion des Thermostaten schließt derartige Temperaturunterschiede vollständig aus, wie die weiter oben gegebene Beschreibung desselben deutlich erkennen läßt.

Ganz genaue Temperaturmessungen in den verschiedenen Höhen des Paraffinbades habe ich nicht gemacht, da mir keine Thermoelemente zur Verfügung standen und Quecksilberthermometer bei so hoher Temperatur wegen des herausragenden Fadens keine genauen Messungen gestatten.

Man kann mit diesen nur feststellen, daß die Temperaturdifferenzen 0,2—0,3° nicht überschreiten. Viel schärfer als durch direkte Messung läßt sich die Temperaturkonstanz auf anderem Wege nachweisen. Die minimalste Temperaturdifferenz verrät sich nämlich sofort durch lebhafte Schlierenbildung im Innern des Versuchsrohres.

Ändert man (durch Verstellen des Druckregulators) die Temperatur nur um 0,1°, so tritt sofort deutliche Schlierenbildung ein, die nach einigen Minuten verschwunden ist[2]) und bei jeder neuerlichen Temperaturänderung wieder erscheint. Wie empfindlich dieses Kriterium ist, zeigt folgende Episode in meinen Untersuchungen. Ich hatte mein Röhrchen zum Zwecke des Einsenkens und Heraushebens gewöhnlich an einem Glasstabe befestigt und versuchte einmal, diesen durch einen Kupferdraht zu ersetzen. Dies genügte, um eine dauernde

1) B. Galitzine u. J. Wilip, Bulletin de l'Acad. des Sciences, St. Pétersbourg (5) 11. p. 117. 1899.

2) Diese Angaben beziehen sich nur auf ein unbewegt in vertikaler Stellung gehaltenes Rohr; hat man durch Rühren für Vermischung (oberhalb der kritischen Temperatur) gesorgt, so hält, wie wir gesehen haben, auch bei vollkommener Temperaturkonstanz die Schlierenbildung dauernd an.

Schlierenbildung im Rohr hervorzurufen, indem der Kupferdraht etwas Wärme nach außen ableitete. Die so entstandene Temperaturdifferenz liegt wohl der Grenze des Meßbaren nahe, wird aber durch die Schlierenbildung noch angezeigt.

Auch müßte bei Annahme von Temperaturdifferenzen die Dichteänderung im Rohr eine kontinuierliche sein, während sie sich in Wirklichkeit auf eine schmale Übergangszone konzentriert.

Ferner müßten nach dem Rühren die Dichteunterschiede neuerdings auftreten, was nicht der Fall ist.

Schließlich möchte ich noch folgendes hervorheben: Wenn überhaupt Temperaturdifferenzen ins Spiel kommen, so können sie nach der ganzen Konstruktion des Thermostaten nur in der Weise auftreten, daß das Paraffinbad an seiner Oberfläche Wärme ausstrahlt und somit oben kälter ist als unten. Dann müßte aber auch die Dichte im Versuchsrohr oben größer sein als unten, während wir gerade das Gegenteil gefunden haben.

Durch den Umstand, daß die Dichteunterschiede stundenlang anhalten, wird endlich auch die Möglichkeit ausgeschlossen, daß der Rohrinhalt sich mit dem äußeren Paraffinbad noch nicht vollständig ins Temperaturgleichgewicht gesetzt hat.

2. Druckdifferenzen.

Gouy hat die Beobachtungen von Battelli, Cailletet, le Heen u. a. durch die Einwirkung der Schwere erklären wollen, die infolge der hohen Kompressibilität der Materie in der Nähe des kritischen Punktes nicht zu vernachlässigen ist. Er hat die dadurch bedingten Dichteunterschiede für Kohlensäure berechnet. In einem 10 cm langen Rohr können dieselben höchstens 5—6 Proz. betragen. Im Vergleich zu den von mir gefundenen Dichtedifferenzen kann man diese Größe wohl vernachlässigen. Da die Versuchsrohre 6—8 mm weit waren und keinen kapillaren Teil besaßen, kann auch von Reibungswirkungen nicht gesprochen werden. Eine Druckdifferenz wäre also nur noch möglich als Folge von

3. Verunreinigungen.

Dieser Punkt, so einfach er erscheint, ist doch der heikelste der ganzen Untersuchung. Wer nicht selbst auf kritischem

Gebiet gearbeitet hat, hat keine Vorstellung von den ganz außerordentlichen Schwierigkeiten, die die absolut reine, luftfreie Füllung eines Röhrchens bietet. Die Reinigung des CCl_4 habe ich schon besprochen; derselbe zeigte absolut konstanten Siedepunkt. Die Füllung geschah bei den obigen Versuchen stets in folgender Weise. Das mit einer langen Kapillare versehene Rohr wurde mit einem Überschuß von gut ausgekochtem CCl_4 beschickt und in schräger Lage über einer Asbestplatte langsam und gleichmäßig erwärmt, so daß kein Aufsieden eintrat. Die völlige Austreibung der Luft gab sich dadurch zu erkennen, daß die entweichenden Dämpfe sich in der Kapillare zu einem geschlossenen, nicht mehr durch Luftbläschen getrennten Flüssigkeitsfaden kondensierten. Wenn der richtige Flüssigkeitsstand im Rohr erreicht war, wurde die Kapillare rasch durch eine Gummikappe verschlossen und die untere Rohrhälfte gekühlt. Dabei destillierte die in der Kapillare befindliche Flüssigkeit heraus und ich konnte mit einer Stichflamme zuschmelzen, ohne eine Zersetzung des CCl_4 befürchten zu müssen. Mit den in dieser Weise gefüllten Röhrchen wurden sämtliche obigen Versuche ausgeführt. Die Publikation der Resultate erfuhr jedoch eine unerwartete Verzögerung infolge eines Einwandes, der von seiten des Hrn. Prof. S. Young in Bristol gegen meine Versuchsanordnung erhoben wurde. Prof. Young, dem ich ein Rohr zur Ansicht geschickt hatte, machte mich darauf aufmerksam, daß meine oben beschriebene Füllmethode nicht geeignet sei, die letzten Reste der in der Flüssigkeit gelösten und an den Glaswandungen haftenden Luft zu entfernen. Er teilte mir mit, daß er mit einem von ihm selbst gefüllten Rohr meine Versuche wiederholt und einen vollständigen Dichteausgleich bei der kritischen Temperatur beobachtet habe. Diese Mitteilung veranlaßte mich natürlich meine Publikation zu verschieben und neue Kontrollversuche anzustellen. Prof. Young hatte dabei die besondere Güte, mir den reichen Schatz seiner Erfahrungen auf diesem Gebiet zur Verfügung zu stellen und mir neben anderen wertvollen Ratschlägen eine Beschreibung der Methode zu geben, deren er sich zur Füllung seiner Röhrchen bedient. Es sei mir gestattet, ihm an dieser Stelle für sein außerordentlich gütiges Entgegenkommen meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ich richtete nun selbstverständlich mein Hauptbestreben auf Erzielung eines absolut reinen Rohrinhaltes und verwendete dazu mit geringen Modifikationen das von Young angegebene Verfahren. Zur Füllung dient der nachstehend abgebildete Apparat (Fig. 3), der ebenso wie das Versuchsrohr vor seiner Verwendung mit Chromsäure und Schwefelsäure ausgekocht wird. Das Versuchsrohr wird nach dem Einbringen der betreffenden Kügelchen oben zu einer engen Kapillare ausgezogen. Es empfiehlt sich dies so zu tun, daß der Übergang in die Kapillare kein allmählicher ist, sondern etwa wie Fig. 3 *B*, weil sich die Kügelchen sonst leicht in dem konischen Teil des Rohres festklemmen. Der Füllapparat wird an das Rohr oberhalb der Kapillare angeschmolzen und der ganze Apparat durch wiederholtes Evakuieren und Einlassen von über Schwefelsäure getrockneter Luft unter gleichzeitigem Erwärmen vollständig getrocknet. Durch *a* wird mittels Fülltrichter etwas CCl_4 eingefüllt und der ganze Apparat damit tüchtig ausgekocht. Nach Entfernung dieser Flüssigkeit wird *c* zu etwa $^2/_3$ mit neuem CCl_4 beschickt und Öffnung *a* zugeschmolzen. Hierauf kocht man $^1/_2{}^h$ mit Rückfluß, wobei die Flüssigkeit wiederholt in das untere Rohr eingelassen und wieder hinaufdestilliert wird. Dann wird bei *b* die Verbindung mit der Pumpe hergestellt und unter andauerndem kräftigen Evakuieren 1^h lang mit Rückfluß gekocht, wozu die bloße Handwärme ausreicht. Auch hier läßt man das Röhrchen sich wiederholt vollständig mit Flüssigkeit erfüllen und treibt letztere durch Erwärmen mit der Hand wieder in das Gefäß *c*. Das leere Rohr wird zur Zerstörung der anhaftenden Lufthaut auf ca. 300° erhitzt (alles im Vakuum). Schließlich, nachdem trotz des Kühlers ca. $^3/_4$ des CCl_4 in die Pumpe gegangen sind, läßt man das Röhrchen sich wieder ganz anfüllen und destilliert die Flüssigkeit langsam hinauf bis eben der richtige Flüssigkeitsstand erreicht ist (etwas mehr als $^1/_3$ des Rohrinhaltes). Während ein langsamer Gasstrom aus dem Röhrchen in das obere Gefäß zieht, wird die Kapillare durch eine

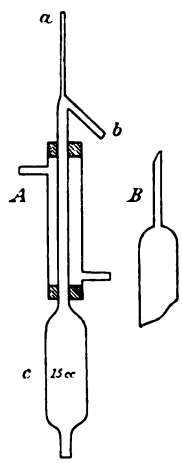


Fig. 3.

feine Stichflamme in einem Augenblick abgeschmolzen. Um diese Operation möglichst rasch ausführen zu können, ist die Kapillare an einer Stelle so fein ausgezogen, als dies mit Rücksicht auf das Gewicht des anhängenden Rohres nur überhaupt möglich ist.

Mit den so gefüllten Röhrchen wiederholte ich nun meine Versuche unter Beibehaltung meiner früheren wohlbewährten Erhitzungsvorrichtung. Die angewendeten Vorsichtsmaßregeln hatten den Erfolg, daß der CCl_4, der bei den früheren Versuchen stets eine leichte Gelbfärbung angenommen hatte, nun vollständig farblos blieb und sich auch bei wiederholtem Erhitzen nicht veränderte. Trotzdem führten die neue Versuche zu einer vollen Bestätigung meiner früheren Resultate. Auch hier wieder blieben nach dem Verschwinden des Meniskus Dichteunterschiede von weit über 30 Proz. (ich hatte leider diesmal keine umfassendere Dichteskala) dauernd bestehen. Der auffallende Gegensatz zwischen Youngs und meinen Beobachtungen klärte sich erst auf, als ich meinen Thermostaten nach dem Muster des Youngschen umänderte. Young erhitzte seine Röhrchen ohne Paraffin entweder im direkten Heizdampf oder in einem von diesem umspülten Luftbad. Es ergab sich nun das merkwürdige Resultat, daß ich bei Weglassung des Paraffins den Siedepunkt des Diphenylamins um 1,2—1,3° höher steigern mußte, um das Verschwinden des Meniskus zu bewirken, als mit Paraffin. Auch war bei dieser Anordnung in der Flüssigkeit stets ein dauerndes feines Sieden und oberhalb der kritischen Temperatur lebhafte Schlierenbildung im ganzen Rohr bemerkbar. Unter diesen Umständen trat auch tatsächlich innerhalb weniger Minuten nach dem Verschwinden des Meniskus ein vollständiger, restloser Dichteausgleich ein, sämtliche Kügelchen begaben sich teils in die obere, teils in die untere Spitze des Rohres. Dieser Dichteausgleich erfolgte sogar, als ich durch Zerbrechen eines Kügelchens absichtlich etwas Luft in das Rohr gebracht hatte. Es ergibt sich daraus zweifellos, daß geringe Temperaturdifferenzen imstande sind, durch die entstehenden Strömungen einen raschen und vollständigen Dichteausgleich bei der kritischen Temperatur herbeizuführen. Der Temperaturunterschied von 1,3° mit und ohne Paraffinbad ist um so merkwürdiger, als die ganze Kon-

struktion des Thermostaten auch bei Weglassung des Paraffinbades eine vollkommene Temperaturkonstanz erwarten lassen würde. Das Röhrchen taucht nicht nur vollständig in den Heizdampf ein, sondern letzterer geht noch um ca. 15 cm über die Spitze desselben hinauf. Daß die an der Aufhängevorrichtung kondensierte und an den Rohrwandungen herabrinnende Flüssigkeit die Abkühlung verursacht ist deshalb unwahrscheinlich, weil dasselbe Herabfließen an den Wandungen des Paraffinrohres ja in gleicher Weise stattfinden muß. Wie mir Prof. Young schrieb, beobachtete er bei Anwendung eines in den Heizdampf eingesetzten Luftbades noch eine weitere Steigerung der kritischen Temperatur um 1,6°, so daß der Gesamtunterschied gegenüber dem Paraffinbad nahezu 3° beträgt. Diese Verhältnisse bedürfen jedenfalls noch einer Untersuchung, zu welcher mir leider die Zeit mangelt. Soviel steht jedoch fest, daß der von Young beobachtete rasche Dichteausgleich bei seinen nach meiner Methode ausgeführten Versuchen durch Strömungen infolge unvollkommener Temperaturkonstanz bewirkt worden sind. Prof. Young schrieb mir, daß er nur diesmal infolge Zeitmangels zu einer unvollkommenen Erhitzungsvorrichtung greifen mußte und daß seine früheren über kritische Dichte ausgeführten Untersuchungen, die eine Bestätigung der Andrewsschen Theorie ergeben hatten, mit sehr sorgfältig konstruierten Apparaten ausgeführt worden seien, daß er auch damals keine Strömungen im Innern der Röhrchen wahrgenommen habe; indessen glaube ich doch, aus meinen Beobachtungen schließen zu können, daß ohne Paraffinbad überhaupt eine volle Temperaturkonstanz nicht erzielbar ist und daß daher alle Youngschen Resultate durch eine Vermischung der beiden Phasen infolge von Strömungen bedingt worden sind. Aus meinen Versuchen ergibt sich deutlich, daß bei vollkommener Temperaturkonstanz auch die Dichteunterschiede bei und oberhalb der kritischen Temperatur dauernd bestehen bleiben, ein Resultat, welches mit der Andrewsschen Theorie nicht vereinbar ist. Allerdings wird eine absolut sichere Widerlegung der Andrewsschen Theorie auf experimentellem Wege nicht leicht möglich sein, da es den Anhängern derselben stets unbenommen bleibt, mit Hinweis auf die enorme Kompressibilität der Materie in der Nähe des

kritischen Punktes irgend eine Spur einer Verunreinigung für die auftretenden Dichtedifferenzen verantwortlich zu machen. Bei Anwendung einer organischen Flüssigkeit ist ja durch das Zuschmelzen des Röhrchens, sowie überhaupt durch das Erhitzen auf die kritische Temperatur die Möglichkeit einer spurenweisen Zersetzung nie ausgeschlossen und bei Verwendung von unzersetzlichen Substanzen, wie CO_2 oder N_2O wird stets die eventuell unvollständige Entfernung der Luft einen Angriffspunkt der Gegner bilden. Immerhin wäre es wünschenswert, einmal solche unzersetzliche Substanzen zu diesen Untersuchungen zu verwenden. Young schlug als Kriterium für die Abwesenheit von Luft in einem zugeschmolzenen CCl_4-Röhrchen vor, durch rasches Umwenden desselben ein Dampfbläschen in einer Spitze zu fangen und zu sehen, ob dasselbe sich vollständig kondensiert. Diese Probe habe ich bei meinen Versuchen stets mit bestem Erfolg ausgeführt, doch kann ich sie nicht als beweiskräftig ansehen, da nach meinen Beobachtungen auch unzweifelhafte Luftbläschen von der luftfreien Flüssigkeit rasch und vollständig absorbiert werden.

Wenn somit auch ein absolut sicherer Beweis gegen die Andrewssche Theorie experimentell schwer zu erbringen ist, so reichen die angeführten Beobachtungen doch wohl aus, dieselbe sehr unwahrscheinlich zu machen. Es ist um so weniger nötig, an ihr festzuhalten, als es ja an plausiblen Erklärungen der beobachteten Dichteunterschiede keineswegs mangelt. Ich verweise hier speziell auf die Theorie von Traube[1]), die, unabhängig von den kritischen Erscheinungen entwickelt, doch für die Eigentümlichkeiten derselben eine vollkommen ausreichende Erklärung bietet. Traube nimmt bekanntlich die Existenz zweier durch ihr Volumen unterschiedener Molekülarten, der Gasonen und Fluidonen an. Danach verschwindet der Meniskus nicht weil beide Phasen identisch, sondern nur weil sie in jedem Verhältnis miteinander mischbar werden. Verhindert man diese Mischung, so bleiben die Unterschiede bestehen und erst bei wesentlich höherer Temperatur dürfte der Punkt erreicht werden, wo infolge der fortgesetzten Dila-

1) J. Traube, Ann. d. Phys. 8. p. 267. 1902; Physik. Zeitschr. 4. p. 569. 1903; Zeitschr. f. anorg. Chem. 37. p. 225. 1903.

tation der Flüssigkeit und Kompression des Dampfes ein wirkliches Gleichwerden beider Phasen erfolgt. Die plötzliche intensive Krümmung der Dichtekurve ist durch die Vermischung der beiden Phasen bedingt und die Dichtekurve nimmt einfach die bekannte Form einer Löslichkeitskurve an. Wäre man imstande, die Durchmischung vollständig zu verhindern, so würden die Dichtekurven wahrscheinlich in gleichmäßiger Krümmung weitergehen und sich schließlich bei wesentlich höherer Temperatur schneiden. Die Vereinigung beider Kurven unter einem Winkel scheint mir für diesen Fall auch viel plausibler zu sein als der kontinuierliche Übergang der einen in die andere, der an und für sich schon für einen Mischungsvorgang spricht.

Noch eine Erklärung des kritischen Zustandes scheint mir möglich. Nach der kinetischen Theorie ist der Gaszustand durch eine fortschreitende, der Flüssigkeitszustand durch eine kreisförmige, rollende Molekularbewegung charakterisiert. Bei einer Temperatursteigerung werden die Kreisbahnen der Flüssigkeitsmoleküle infolge Erhöhung der kinetischen Energie immer größer, während andererseits den Dampfmolekülen für ihre fortschreitende Bewegung immer weniger Platz bleibt, so daß sie sich schließlich auch auf einem kleinen Raum um eine Ruhelage herum bewegen müssen. Temperatursteigerung hat also die Tendenz, die Molekularbewegungen in beiden Phasen einander ähnlicher zu machen. Nun ist es eine bekannte physikalische Tatsache, daß sehr verschiedenartige Bewegungsformen sich gegenseitig nahezu unbeeinflußt lassen, während solche, die einander ähnlich sind, zu einer Interferenzbewegung zusammentreten. Etwas Ähnliches muß auch hier der Fall sein. Wenn bei steigender Temperatur die Molekularbewegungen in beiden Phasen einander immer ähnlicher werden, so muß schließlich ein Moment eintreten, wo sie nicht mehr getrennt nebeneinander existieren können, so daß an der Berührungsfläche Interferenz entsteht, die in dem Verschwinden des Meniskus ihren sichtbaren Ausdruck findet. Die Dichten der beiden Phasen können dabei noch wesentlich verschieden sein. Vom kinetischen Standpunkt ist es eigentlich gar nicht anzunehmen, daß zwei Bewegungsarten bis zu ihrem vollständigen Gleichwerden getrennt nebeneinander bestehen können;

sobald sie einander nur ähnlich geworden sind, muß es schon zu einer Interferenzbewegung an der Berührungsfläche kommen. Diese zunächst vielleicht etwas ungeordnete Bewegung mag optisch als Nebel wahrgenommen werden und es sind vielleicht auf diese Weise die verschiedenen merkwürdigen Nebelerscheinungen, auf die ich hier des Raummangels wegen nicht näher eingehen kann, zu erklären. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es als ganz selbstverständlich, daß das Verschwinden des Meniskus schon stattfinden muß noch lange bevor Flüssigkeit und Dampf wirklich identisch geworden sind.

Charlottenburg, Phys.-chem. Lab. d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 25. November 1903.)

10. *Untersuchungen über kritische Verdampfungswärme; von Gustav Teichner.*

(Auszug aus der Wiener Inaugural-Dissertation.)

Auf Veranlassung des Hrn. Prof. J. Traube habe ich das thermische Verhalten des Äthyläthers in der Nähe der kritischen Temperatur untersucht. Es sollte versucht werden, auf diesem Wege zu einer klareren Erkenntnis des Molekularzustandes der Materie in der Nähe des kritischen Punktes zu gelangen und vielleicht experimentelle Anhaltspunkte für die von Traube[1]) unabhängig von den kritischen Erscheinungen entwickelte Theorie der Gasonen und Fluidonen zu gewinnen. Da diese Theorie eine Umwandlung liquidogener in gasogene Teilchen auch bei und oberhalb der kritischen Temperatur vorhersehen läßt, diese aber jedenfalls mit einer Wärmeaufnahme verbunden ist, so schien es nicht unmöglich, direkt auf thermischem Wege die Existenz der beiden Molekülarten durch den Gang der Wärmekurven nachweisen zu können. Außerdem bot die Untersuchung noch deshalb Interesse, weil das thermische Verhalten der Flüssigkeiten von den Anhängern der Andrewsschen Theorie häufig — und zwar mit Unrecht — als Beweis für die Richtigkeit derselben angeführt wird. Diese Ansicht gründet sich auf die von Mathias[2]) ausgeführten Untersuchungen über die Verdampfungswärme von Schwefeldioxyd, welche ergeben hatten, daß dieselbe mit steigender Temperatur abnimmt und bei der kritischen Temperatur Null wird. Man schloß daraus auf einen vollständigen Dichteausgleich zwischen Flüssigkeit und Dampf beim kritischen Punkt. Dieser Schluß ist jedoch deshalb unzulässig, weil die Mathiasschen Resultate selbst auf der Kenntnis der zugehörigen Dichten aufgebaut sind. Wie eine Durchsicht der

1) J. Traube, Ann. d. Phys. 8. p. 267. 1902; Zeitschr. f. anorg. Chem. 37. p. 225. 1903.

2) E. Mathias, Ann. de chim. et phys. 8. p. 267. 1890.

Arbeit ergibt, berechnete Mathias die spezifische Verdampfungswärme aus der Formel

$$\lambda = \frac{Q}{P}\frac{\delta - \delta'}{\delta},$$

in welcher Q die gemessene Wärmemenge, P den Gewichtsverlust des Versuchsrohres und δ, δ' die bez. Dichten von Flüssigkeit und Dampf vorstellen. Man sieht, daß die Berechnung von λ die Kenntnis von δ und δ' zur unbedingten Voraussetzung hat und wenn man für die kritische Temperatur $\delta = \delta'$ setzt, so ergibt sich $\lambda = 0$ als eine mathematische Notwendigkeit, die von experimentellen Bestimmungen ganz unabhängig ist. Es ist daher verkehrt, die Mathias'schen Resultate umgekehrt zu einem Schluß auf die Dichten zu benützen.

Da es überhaupt keine Methode gibt, die Verdampfungswärme unabhängig von den zugehörigen Dichten zu bestimmen, so sah ich davon ab und begnügte mich mit der Messung einer anderen Größe, die sich auf rein experimentellem Wege ohne Zugrundelegung irgendwelcher Hypothesen gewinnen läßt. Zu diesem Zweck schloß ich eine gegebene Äthermenge in ein Gefäß ein, erhitzte dasselbe samt Inhalt auf eine gegebene Temperatur und bestimmte dann durch Einwerfen in ein Kalorimeter seinen (relativen) Wärmeinhalt. Diese Größe, abzüglich des auf das Gefäß entfallenden Betrages, stellt die Wärmemenge vor, welche nötig ist um 1. die eingeschlossene Flüssigkeit von der Kalorimetertemperatur auf die Versuchstemperatur zu erhitzen, 2. den eingeschlossenen Dampf um denselben Betrag zu erwärmen und 3. eine gewisse Menge Flüssigkeit in Dampf überzuführen. Der Einfachheit wegen werde ich diese komplexe Größe als „Gesamtwärme", auf 1 g Substanz bezogen als „spezifische Gesamtwärme" bezeichnen. Mit welchem Betrag jeder der drei angeführten Faktoren an ihrer Bildung partizipiert, läßt sich ohne Kenntnis der zugehörigen Dichten nicht ermitteln, doch stand zu erwarten, daß auch die Messung dieser Gesamtwärme in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur Anhaltspunkte zur Beurteilung der kritischen Frage liefern würde.[1])

1) Ähnliche Messungen wurden schon 1888 von de Heen ausgeführt (Bull. Acad. Roy. Belg. 15. p. 168. 1888). Er wendete die sogenannte

Als Versuchsflüssigkeit diente reiner Äthyläther, der wegen seiner leichten Reinigung und Unzersetzlichkeit hierfür sehr geeignet ist. Er wurde in der üblichen Weise aus reinstem käuflichen Äther durch wiederholte Destillation über Natrium bereitet. Zu seiner Aufnahme diente ein nahtloses Mannesmannrohr von 0,8 mm Wandstärke, 16,53 ccm Inhalt und 38,2 g Gewicht, welches durch ein sorgfältig angefertigtes Schraubenventil vollkommen dicht verschlossen werden konnte. Der Wasserwert wächst mit der Temperatur bedeutend; er betrug 4,355 g bei 150°, 4,480 g bei 230° und wurde durch eigene Versuche für jede Temperatur ermittelt.

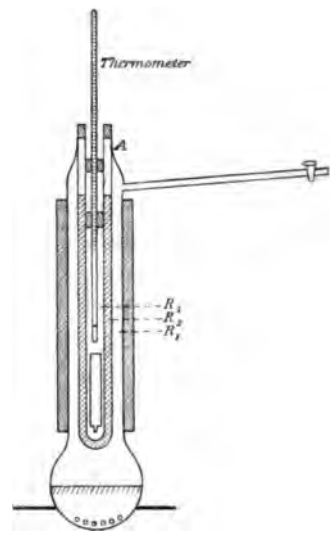


Fig. 1.

Von besonderer Wichtigkeit war die Konstruktion eines geeigneten Thermostaten. Da in der Nähe der kritischen Temperatur das Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf sich nur langsam herstellt, so war es unbedingt nötig über einen Thermostaten zu verfügen, der stundenlang absolute Temperaturkonstanz gewährleistet. Da die in der Literatur beschriebenen Apparate teils dieser Bedingung nicht vollständig genügen, teils zu umständliche und kostspielige Einrichtungen erfordern, so stellte ich mir unter Zugrundelegung bereits bekannter Typen einen für meine Zwecke besonders geeigneten Apparat zusammen, der im wesentlichen eine Modifikation des Galitzineschen[1]) Thermostaten ist und dessen Wirkungsweise Fig. 1 erkennen läßt. R_1 und R_2 sind oben miteinander verschmolzen, zwischen R_2 und R_3 befindet sich Glyzerin. Bei A ist eine kleine Öffnung zur Vermei-

---

Erkaltungsmethode an, die auf Messung der Abkühlungsgeschwindigkeit beruht, und fand auf diesem Wege, daß die Gesamtwärme bei der kritischen Temperatur ein Maximum erreicht, dann rapide abfällt und schließlich dauernd langsam abnimmt. Doch ist diese Methode für genaue Messungen wohl nicht geeignet.

1) B. Galitzine, Wied. Ann. 50. p. 521. 1893.

dung eventuellen Überdruckes. Durch eine dichte Filzumkleidung ist die Wärmeausstrahlung so herabgesetzt, daß eine ganz kleine direkte Flamme genügt, um den Heizdampf bis zum seitlichen Ansatzrohr zu treiben; letzteres führt zur Pumpe. Durch Zwischenschaltung eines Manometers und Druckregulators ist für Messung und Konstanthaltung des Druckes gesorgt. Als Heizflüssigkeiten verwendete ich Anilin (140—180°) und Normalpropylbenzoat (180—230°). Bei gutem Abdichten aller Schlauchverbindungen und zeitweiliger Kompensation eventueller — geringer Druckschwankungen mit Hilfe des Regulators gibt — dieser Apparat beliebig lange eine innerhalb weniger hundertstel Grade konstante Temperatur.

Das Kalorimeter war ein Silbergefäß von ca. 800 ccm Inhalt und 300 g Gewicht. Es war mit einem zum Auffangen des Versuchsrohres dienenden Silberdrahtkorb und einem vertikalen Rührer, sowie den üblichen Wassermänteln versehen. Der gesamte Wasserwert betrug 18,8 g.

Zur Ausführung der Messungen wurde das mit der gewogenen Äthermenge beschickte Rohr 2—3 Stunden im Thermostaten auf konstanter Temperatur erhalten und zur Erzielung vollständigen Gleichgewichtes mit einer eigenen Vorrichtung innerhalb des Thermostaten wiederholt durchgeschüttelt. Dann wurde der Glashahn geschlossen, die Verbindung mit dem Druckregulator gelöst, Öffnung *A* verstoppelt und nach Entfernung des Thermometers mit den eingesetzten Korken das Substanzrohr durch rasches Umkippen des ganzen Apparates in den Drahtkorb des Kalorimeters geworfen. Bei genügender manueller Fertigkeit gelingt es, alle diese Operationen in weniger als 15″ und zwar so auszuführen, daß kein Verspritzen der Kalorimeterflüssigkeit eintritt. Der Gang des Beckmann-thermometers im Kalorimeter wurde 10′ vor und 10′ nach dem Temperaturausgleich abgelesen und daraus die nötige Strahlungskorrektur ermittelt.

In dieser Weise wurden zunächst die sämtlichen „mittleren spezifischen Gesamtwärmen“ zwischen 17° einerseits und Versuchstemperatur andererseits bestimmt und die erhaltenen Werte in eine Kurve eingezeichnet (Fig. 2). Durch entsprechende Umrechnung ergab sich daraus dieselbe Größe für Intervalle von 5 zu 5°. Die entsprechende Kurve zeigt Fig. 3.

wurden vier Versuchsreihen ausgeführt, in welchen die mittleren Dichten der Füllungen bez. 0,245, 0,292, 0,362 und 0,477 waren. Nachstehend folgen die Resultate der Messungen.

Tabelle 1.

I. Mittlere Dichte 0,245.

Temperatur-intervall 17° bis:	Mittlere spezifische Gesamtwärme in cal:
157,9	0,6701
167,9	0,6847
173,8	0,6945
174,1	0,6930
174,2	0,6901
178,2	0,7003
184,0	0,7107
184,1	0,7022
184,4	0,7028
188,0	0,7091
193,3	0,7186
194,1	0,7204
194,1	0,7204
194,7	0,7198
195,8	0,7170
196,1	0,7224
197,4	0,7193
198,2	0,7171
198,6	0,7174
198,6	0,7175
198,7	0,7174
205,5	0,7158
213,0	0,7093
213,0	0,7068
221,7	0,7045

II. Mittlere Dichte 0,292.

Temperatur-intervall 17° bis:	Mittlere spezifische Gesamtwärme in cal:
152,3	0,6496
164,2	0,6631
184,5	0,6859
190,0	0,6898

III. Mittlere Dichte 0,362.

Temperatur-intervall 17° bis:	Mittlere spezifische Gesamtwärme in cal.:
159,3	0,6490
170,8	0,6567
171,3	0,6595
180,6	0,6679
190,1	0,6770

IV. Mittlere Dichte 0,477.

Temperatur-intervall 17° bis:	Mittlere spezifische Gesamtwärme in cal.:
149,9	0,6287
157,2	0,6323
166,3	0,6380

Fig. 2 zeigt, daß die Gesamtwärme mit der Temperatur nahezu geradlinig ansteigt. Ein vollständig geradliniger Verlauf ist nicht zu erwarten, da sich ja die vier Kurven bei genügend tiefer Temperatur zu einer Kurve vereinigen müssen. Denn wenn der ganze Äther sich im flüssigen Zustand befindet, so stellt die Gesamtwärme nichts anderes dar, als die spezifische Wärme des flüssigen Äthers, die natürlich von der Größe der Füllung ganz unabhängig ist. Die Kurven mit

größerer Füllung konnten nicht bis zur kritischen Temperatur geführt werden, da schon vorher vollständige Erfüllung des Rohres mit Flüssigkeit eintreten mußte und eine weitere Erhitzung daher, abgesehen von der Explosionsgefahr, auch kein theoretisches Interesse mehr geboten hätte.

Charakteristisch ist das scharfe Maximum der Kurve 1 beim kritischen Punkt. Allerdings ist die Art, wie ich die Kurve gezeichnet habe, nicht frei von Willkür. Wie sich aus den Versuchswerten ergibt, hätte ich das Maximum um 1—2° nach aufwärts oder abwärts verschieben und ebenso den scharfen

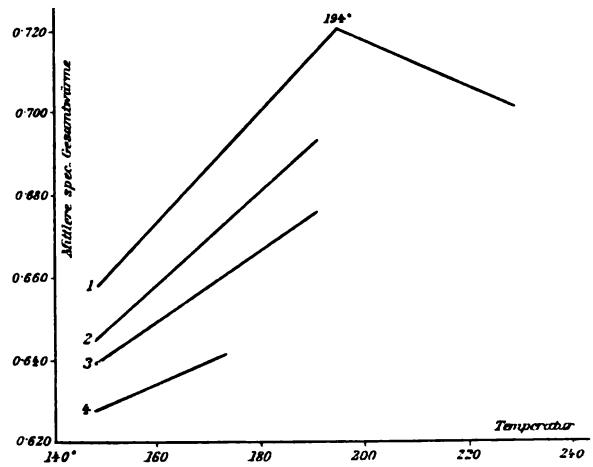


Fig. 2.

Knick durch eine Krümmung von geringem Radius ersetzen können. Es liegt in der Methode selbst, daß sich eine größere Sicherheit nicht gewinnen läßt, da es dazu nötig wäre, die Bestimmungen auf hundertstel Kalorien genau auszuführen, was bei den großen in Betracht kommenden Wärmemengen ganz ausgeschlossen ist.

Noch prägnanter wird die Erscheinung, wenn wir zu Fig. 3 übergehen, die die mittlere spezifische Gesamtwärme in Intervallen von je 5° darstellt. Die Berechnung dieser Größen geschah aus den Kurven der Fig. 2 und läßt sich am besten aus einem Beispiel erkennen. Nach Kurve 1, Fig. 2, beträgt die zur Erwärmung von 1 g Äther (in einem geschlossenen Rohr bei 0,245 mittlerer Dichte) von 17° auf 160° dienende

Wärmemenge $0.873 \times 143 = 96.24$ cal. Zur Erwärmung der gleichen Menge unter den gleichen Bedingungen von 17° auf 17.1° benötigt es $0.687 \times 153 = 105.07$ cal. Die Differenz von 8.83 cal. wurde offenbar benötigt, um den Kalorinhalt um 10° zu erwärmen. Es ist daher 0.883 die mittlere spezifische Gesamtwärme in dem Intervall zwischen 160—170°. Die so berechneten Werte haben natürlich eine viel größere Bedeutung

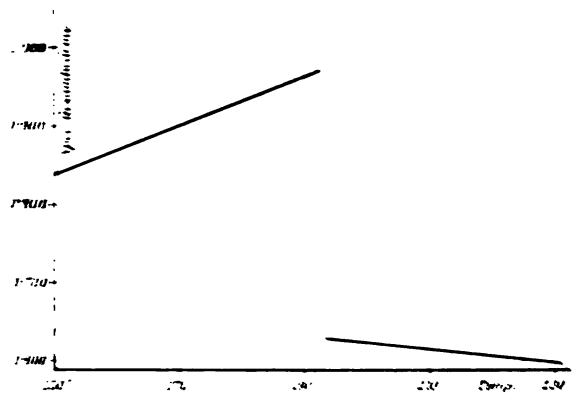


Fig. 3.

als die der Fig. 2. Ihre direkte experimentelle Bestimmung in so kleinen Intervallen ist unmöglich, da sie die Differenz zweier Wärmemengen vorstellen, die über 1000 cal. betragen und von denen jede mit einem Fehler von mehreren Kalorien behaftet ist. Ich mußte daher zuerst die Kurven Fig. 2 festlegen und konnte aus diesen, von den zufälligen Versuchsfehlern befreiten Werten dann leicht jene der Fig. 3 berechnen.

Tabelle 2.

Temperaturintervall	Spezifische Gesamtwärme in cal.	Temperaturintervall	Spezifische Gesamtwärme in cal.
150—155	0,844	190—194	0,965
155—160	0,860	195—200	0,610
160—165	0,875	200—205	0,606
165—170	0,890	205—210	0,601
170—175	0,906	210—215	0,597
175—180	0,922	215—220	0,592
180—185	0,938	220—225	0,588
185—190	0,954	225—230	0,584

Das früher beobachtete Maximum gibt sich hier in noch prägnanterer Weise durch eine scharfe Diskontinuität zu erkennen. Die Zahlen steigen bis zur kritischen Temperatur allmählich an und fallen dann plötzlich um $^1/_3$ ihres Wertes, um hierauf in regelmäßiger Weise dauernd abzunehmen.

Was die Deutung dieser Verhältnisse betrifft, so wissen wir, daß die Gesamtwärme sich aus drei Größen zusammensetzt: 1. Spezifische Wärme des Dampfes, 2. spezifische Wärme der Flüssigkeit, und 3. Verdampfungswärme. Da für eine Änderung der beiden ersten Größen bei der kritischen Temperatur gar keine Ursache vorhanden wäre, so ist es sehr wahrscheinlich, daß die rapide Abnahme der Gesamtwärme durch eine korrespondierende Abnahme der Verdampfungswärme bedingt ist. Leider ist die Methode nicht genau genug, um die Art dieses Überganges genau festzulegen; ich kann meinen Resultaten nur so viel mit Sicherheit entnehmen, daß der Abfall in einem Intervall vom Maximum 10° erfolgt. Die Entscheidung, ob es sich hier wirklich um eine scharfe Diskontinuität oder nur um einen rapiden, aber immerhin stetigen Abfall handelt, entzieht sich der experimentellen Bestimmung. Ebensowenig gestattet das Verfahren eine Entscheidung der wichtigen Frage, ob oberhalb der kritischen Temperatur noch Prozesse mit „latenter Wärme" vor sich gehen. Mehrere Grade oberhalb der kritischen Temperatur scheinen derartige Prozesse, allerdings in Anbetracht der niedrigen Gesamtwärme, keine bedeutende Rolle mehr zu spielen.[1])

Die Kurven, welche die Versuchsreihen mit größerer Füllung darstellen, liegen selbstverständlich tiefer als Kurve 1, haben aber einen analogen Verlauf. Die Differenz der korrespondierenden Werte gibt uns die Wärmemenge, die beim Übergang der Materie von der größeren zur geringeren Dichte gebunden wird, ist also unterhalb der kritischen Temperatur reine Verdampfungswärme. Leider ist die Berechnung dieser Größe ohne Kenntnis der zugehörigen Dichten wieder nicht durchführbar.

1) Meine Bemühungen, zur Entscheidung dieser Frage den interessanten Versuch von Villard (Ann. de chim. et phys. 10. p. 387. 1897), vgl. auch J. Traube (Ann. d. Phys. 8. p. 267. 1902) mit CO_2 zu wiederholen, scheiterten leider an den experimentellen Schwierigkeiten.

Ein Umstand ist mir bis jetzt unerklärlich. Ich habe die Füllungen in den einzelnen Versuchsreihen so bemessen, daß beim Übergang von der einen zur anderen die gleiche Menge Flüssigkeit verdampfen müßte. Die mittleren Dichten waren 0,245, 0,292, 0,362 und 0,477, die entsprechenden mittleren spezifischen Volumina 4,08, 3,42, 2,76 und 2,10. Wie man sieht, entspricht dem Übergang von einer Füllung zur anderen die gleiche Volumendifferenz 0,66, somit müßten auch die entsprechenden Verdampfungswärmen gleich groß sein. In der graphischen Darstellung müßte dies durch gleiche Vertikalabstände der Kurven zum Ausdruck kommen. Die Intervalle zwischen 1 und 2 einerseits (Fig. 2), 3 und 4 andererseits, stimmen in der Tat vollständig überein. Man findet z. B. bei 150° für den Übergang von 1 zu 2 (auf 5 g Substanz bezogen) 8,18 cal., für den korrespondierenden Übergang von 3 zu 4 8,05 cal. Der Übergang von 2 zu 3 dagegen würde nur 4,19 cal. verbrauchen. Entsprechend findet man

für 160°:	1 → 2	10,87 cal.
	3 → 4	10,72
	2 → 3	6,08
für 170°:	1 → 2	13,93
	3 → 4	13,40
	2 → 3	8,34

Es wäre wohl zu gewagt, aus diesen wenigen Zahlen einen Schluß auf eine etwaige unregelmäßige Kondensation oder molekulare Veränderung zu ziehen und ich behalte mir vor, weitere Untersuchungen zur Aufklärung dieses Punktes anzustellen.

Charlottenburg, Phys.-chem. Labor. d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 25. November 1903.)

11. *Bemerkung über die kritische Temperatur des Wassers und des Quecksilbers; von J. Traube und G. Teichner.*

Die kritische Temperatur des Wassers ist bisher nur nach indirekten Methoden bestimmt worden. Cailletet und Colardeau[1]), Battelli[2]) und Chas T. Knipp[3]) benutzten als Kriterium für den Eintritt des kritischen Zustandes den Umstand, daß bis zur kritischen Temperatur der Dampfdruck von der Größe der Füllung unabhängig ist, oberhalb derselben sich aber mit der Füllung wesentlich ändert. Sie fanden die kritische Temperatur gleich 365,0, 364,3 bez. 359°. Nadejdine[4]) ließ ein mit Wasser gefülltes Stahlrohr in Form eines Wagebalkens auf einer Schneide aufruhen. Der Dichteausgleich bei der kritischen Temperatur wurde alsdann durch Horizontalstellung des Rohres angezeigt. Indessen diese Methode und eine andere von Strauss[5]) angewandte sind wohl kaum zuverlässig.

Wir haben nun die kritische Temperatur des Wassers mittels (unter Überdruck) siedenden Quecksilbers direkt bestimmt mit Hilfe eines von der Firma Dr. Siebert & Kühn in Kassel möglichst luftfrei zu $^1/_3$ mit destilliertem Wasser gefüllten Quarzrohres.

Der Meniskus verschwand bei 374° und erschien wieder bei derselben Temperatur. Das Rohr wurde zwar ein wenig angegriffen, indessen scheint obiges Resultat doch zuverlässig, da auch bei stundenlangem Erhitzen die kritische Temperatur sich nicht änderte.

1) L. Cailletet u. E. Colardeau, Compt. rend. **106.** p. 1489. 1888.

2) A. Battelli, Mem. della R. Acc. di Torino (2) **41.** 1890.

3) Chas T. Knipp, Phys. Rev. **11.** p. 129. 1900; Ref. Zeitschr. f. phys. Chem. **40.** p. 117. 1902.

4) B. Nadejdine, Kiewer Univ.-Unters. **6.** p. 32. 1885.

5) F. Strauss, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **14.** p. 510. 1882.

Vom Standpunkte der Gasonenhypothese[1]) war besonders das kritische Verhalten des einatomigen Quecksilbers interessant. Versuche, die kritische Temperatur des Quecksilbers im Quarzrohre zu bestimmen, führten zwar vorläufig zu keinem positiven Ergebnis, indessen immerhin zu dem Resultat, daß die kritische Temperatur jedenfalls höher liegt als 1000° C. Nach der von Guldberg und Guye aufgefundenen Regel wäre zu erwarten gewesen, daß dieselbe bei $^3/_2(359 + 273) = 675°$ C. liege.

Charlottenburg, Technische Hochschule.

---

1) J. Traube, Ann. d. Phys. 8. p. 267. 1902 und Physik. Zeitschr. 4. p. 569. 1903.

(Eingegangen 31. Juli 1903.)

12. *Über die Wirkung von Kanalstrahlen auf Aluminiumoxyd und Zinkoxyd (Antwort an Hrn. J. Tafel); von G. C. Schmidt.*

In einer vor kurzem veröffentlichten Abhandlung[1]) habe ich nachgewiesen, daß die Kanalstrahlen stark zersetzende Wirkungen ausüben; so wurde NaCl zersetzt und es trat hierbei die *D*-Linie auf. In vielen Fällen waren die Reaktionen abhängig vom Gasinhalt; auch hier ließen sich dieselben leicht übersehen, wenn man annahm, daß die Kanalstrahlen die Gase zersetzen, die dann in statu nascendi, also sekundär, die chemischen Umsetzungen hervorriefen. So wurde Eisenchlorid in Wasserstoff reduziert, in Sauerstoff dagegen nicht; in Luft und Sauerstoff wurden die unedlen Metalle oxydiert, in Wasserstoff wurden dagegen deren Verbindungen reduziert. Im Verlauf dieser Untersuchung habe ich mich auch mit der durch Kanalstrahlen hervorgerufenen Fluoreszenz beschäftigt, deren Farbe im allgemeinen identisch war mit der durch Kathodenstrahlen hervorgerufenen. Da nun von den letzteren bekannt ist, daß sie von anorganischen Körpern im allgemeinen nur feste Lösungen zum *lebhaften* Leuchten erregen[2]), so schloß ich, daß dasselbe auch für Kanalstrahlen gelte und daß daher auch die von Hrn. W. Wien[3]) beschriebenen Fluoreszenzerscheinungen festen Lösungen zuzuschreiben seinen. Gegen diese Erklärung hat sich vor kurzem Hr. J. Tafel[4]) gewandt. Er schreibt: „Diese rein hypothetische Interpretation" — daß nämlich die reinen Oxyde nicht leuchten, sondern nur die festen Lösungen — „scheint mir von vornherein nicht recht glücklich, weil sie das rasche Abblassen der Fluoreszenz während der Bestrahlung nicht berücksichtigt. Außerdem dürften die

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **9**. p. 707. 1902.

2) Einige Uransalze, Baryumplatincyanür und einige andere Körper scheinen auch in absolut reinem Zustand lebhaft zu fluoreszieren.

3) W. Wien, Physikal. Zeitschr. **3**. p. 440. 1902.

4) J. Tafel, Ann. d. Phys. **11**. p. 613. 1903.

Verunreinigungen des reinsten Zinkes so minimal sein, daß eine Zurückführung der eminenten Kanalstrahlenfluoreszenz auf dieselben wenig plausibel erscheint. Weiter scheint mir die Annahme allzu willkürlich und der gemeinhin bestehenden Ansicht widersprechend, daß das auf nassem Wege bereitete Zinkoxyd bez. das aus Zinklösungen gefällte Zinkkarbonat oder Zinkhydroxyd die mit ausfallenden Verunreinigungen *nicht* ebensogut im Zustande fester Lösung enthalten solle, wie das aus verunreinigtem Zink durch Verbrennen gewonnene Zinkoxyd. Aus früheren Publikationen von G. C. Schmidt selbst ließen sich eine Reihe von Zitaten anführen, welche auf das Gegenteil schließen lassen.

Nimmt man hinzu, daß jene Schmidtsche Hypothese mit dem bleibenden Verschwinden der Fluoreszenzfähigkeit des Zinkoxyds unter der Wirkung hohen Druckes kaum in Einklang zu bringen sein wird, so dürfte es zweckmäßig sein, sie fallen zu lassen und das Fluoreszieren des Zinkoxyds im Kanalstrahlenfelde als Begleiterscheinung einer Umwandlung desselben in eine andere Modifikation anzusehen."

Ich glaube, daß Hr. Tafel, wenn er die diesbezügliche Literatur gekannt hätte, diesen Absatz unterdrückt und seine Ansichten wesentlich modifiziert hätte.

Ich habe meine Versuche wieder aufgenommen und Aluminiumoxyd und besonders eingehend Zinkoxyd, auf welches Hr. Tafel seine Arbeit beschränkt hat, untersucht. Es hat sich hierbei ergeben, *daß diese Oxyde in absolut reinem Zustand nicht fluoreszieren, sondern nur, wenn sie ein anderes Oxyd in fester Lösung enthalten.*

Aluminiumoxyd: Behufs Darstellung von reinem Aluminiumoxyd ging ich aus von dem reinsten, in den Handel kommenden Alaun, von dem zwei Präparate, das eine von Merck, das andere von Kahlbaum zur Verwendung kamen. Dieselben wurden zunächst dreimal aus Platinschalen umkristallisiert. Das hierzu benutzte destillierte Wasser wurde unmittelbar in die Platingefäße destilliert, damit keine Verunreinigung aus dem Glase aufgenommen werden konnte. Das zur Fällung benutzte Ammoniak wurde ebenfalls direkt in die Platingefäße als Gas geleitet. Kalilauge war durch zweimaliges Lösen in Alkohol in silbernen Schalen gereinigt; zur Verwendung kam

stets eine alkoholische Lösung, die unmittelbar vor dem Versuch hergestellt wurde.

Das durch Fällung des dreimal umkristallisierten Alauns gewonnene Oxyd gab eine rote Fluoreszenz[1]), welches aus einer Linie bei 689,5 und einigen schwächeren Linien, sowie einer kontinuierlichen Bande, welche ungefähr bei der *C*-Linie beginnt, besteht.[2]) Da nach früheren Versuchen bekannt ist, daß die Fluoreszenz von Spuren Chrom herrührt — ebenso wie die des Rubins — so wurde jetzt versucht, diese Verunreinigungen zu entfernen. Hierzu benutzte ich zwei Verfahren. Die alkalische Alaunlösung wurde mit Chlor längere Zeit behandelt und hierdurch das Chrom oxydiert. Nach dem Fällen und Auswaschen, wobei das destillierte Wasser wieder direkt auf das Filter geleitet wurde, wurde das Aluminiumoxyd zehnmal fraktioniert gefällt und geglüht. Die erste Fluoreszenzfarbe verschwand immer mehr und mehr bis schließlich nur unter den allerkräftigsten Kathoden- und Kanalstrahlen ein schwach roter Schimmer zu sehen war. Sobald zu diesem Präparat eine Spur Chromoxyd zugefügt wurde, trat nach dem Glühen wieder die intensive rote Fluoreszenz auf.

Auch durch Oxydation mittels Bleisuperoxyd, nachheriges Entfernen des Bleis und fraktionierte Fällung wurde ein schwach leuchtendes Präparat gewonnen, welches durch Chrom zur Fluoreszenz gebracht werden konnte.

Gegen die Beweiskraft dieser Versuche lassen sich eine Reihe von Einwänden erheben. So hätte das Chlor aus dem Glase irgend eine Substanz lösen können, die nachher beim Glühen mit dem Aluminiumoxyd eine nicht fluoreszierende feste Lösung gab; aus den Versuchen von E. Wiedemann und mir[3]) geht hervor, daß die Fluoreszenz durch Zusatz gewisser Stoffe vernichtet werden kann. Um dies zu prüfen, wurde in das im Glasbecher befindliche Wasser Chlor geleitet und nach 10 Tagen durch Kochen entfernt. In dem Wasser wurde jetzt Alaun gelöst und gefällt; das so dargestellte Aluminiumoxyd leuchtete intensiv rot. Bei einem zweiten Ver-

1) E. Becquerel, Ann. d. chim. et phys. 57. p. 50. 1859.

2) Das Spektrum ist auch genau von W. Crookes beschrieben Nature 39. p. 542. 1889; Chem. News Aug. 1887.

3) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 56. p. 226. 1895.

such wurde in ähnlicher Weise verfahren, nur wurde das Chlor in eine alkalische Lösung geleitet; der Erfolg war derselbe.

Aus diesen Versuchen folgt: Reines Aluminiumoxyd fluoresziert nicht, nach Zusatz einer Spur von Chromoxyd tritt eine intensive rote Fluoreszenz auf.

Diese Ergebnisse stehen im besten Einklang mit den Versuchen von Lecoq de Boisbaudran[1]), der schon im Jahre 1888 zu denselben Resultaten gelangt ist, E. Becquerel[2]) und W. Arnold.[3]) Da somit vier Beobachter ganz unabhängig voneinander dieselben Resultate erhalten haben, so kann wohl kaum ein Zweifel herrschen, daß das absolut reine Aluminiumoxyd nicht fluoresziert. Auch die Versuche von Crookes[4]) deuten darauf hin, daß Chrom die rote Fluoreszenz des Aluminiumoxydes hervorruft.

Die Spuren von Chrom, welche das Leuchten erregen, sind außerordentlich klein. Nach Lecoq de Boisbaudran genügt 1 Teil Chromoxyd in 10000 Aluminiumoxyd, um die rote Fluoreszenz hervorzurufen. Die festen Lösungen verhalten sich hierin, wie aus diesen und anderen Versuchen hervorgeht, wie die flüssigen und gasförmigen. Bekannt ist, daß Fluorescein in einer Verdünnung, in der man es nicht mehr chemisch nachweisen kann, noch intensiv fluoresziert und ebenso, daß die geringsten Spuren Natrium die Flamme färben.

Das von Hrn. W. Wien untersuchte Präparat, welches durch Verbrennen von Aluminium gewonnen war, leuchtete blau und grün. Nach den Versuchen von E. Wiedemann und mir[5]) zweifelte ich nicht, daß diese Fluoreszenzfarbe ihren Ursprung einem Gehalt an Kupfer verdankten. Diese Vermutung hat sich bestätigt.

Das reine Aluminiumoxyd, das also nicht mehr fluoreszierte, wurde in Schwefelsäure oder Salzsäure gelöst und mit

---

1) Lecoq de Boisbaudran, Compt. rend. **103.** p. 1107. 1887; **104.** p. 330, 478, 554, 824. 1887; vgl. auch die Bände **105.** u. **106.**

2) E. Becquerel, Ann. de chim. et phys. **57.** p. 51. 1889.

3) W. Arnold, Inaug.-Diss. Erlangen 1896; Wied. Ann. **61.** p. 318. 1897.

4) W. Crookes, Chem. News, 12. u. 19. August 1887.

5) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **56.** p. 213. 1895; vgl. auch W. Arnold, Wied. Ann. **61.** p. 318. 1897.

wechselnden Mengen von Kupfersulfat versetzt, indem ein Platinstab in eine verdünnte Kupfersulfatlösung und darauf in die Aluminiumlösung getaucht wurde. Das zweite Präparat enthielt die doppelte Kupfermenge etc. Nach der Fällung wurden die Präparate geglüht. Die folgende Tabelle, in der x einen kleinen Bruch bedeutet, enthält die Resultate.

Tabelle I.

Reines Al_2O_3	Fluoreszenz nichts
$Al_2O_3 + x\,CuO$	schwach grün
$Al_2O_3 + 2x\,CuO$	schön grün
$Al_2O_3 + 6x\,CuO$	blaugrün
Al_2O_3 + 1 Tropfen CuO	blau
Al_2O_3 + 6 Tropfen CuO	einzelne blaue und grüne Stellen, das meiste dunkel

Aus der Tabelle geht hervor, daß Spuren von Kupfer in Aluminiumoxyd eine grüne, größere Mengen eine blaue Fluoreszenz hervorrufen.

Hiernach kann es wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß das Wiensche Präparat kupferhaltig war und daß die durch die Verbrennung des Aluminiums gebildete feste Lösung die Ursache der grünen und blauen Fluoreszenz war. Dies ist um so wahrscheinlicher, als überhaupt kein kupferfreies Aluminium in den Handel kommt. Die von mir untersuchten Proben enthielten alle Kupfer; auch nach den in den Lehrbüchern der technischen Chemie, Handbüchern der Chemie etc. mitgeteilten Analysen ist stets ein Kupfergehalt im Aluminium vorhanden.

Zinkoxyd. Als Ausgangsmaterial verwandte ich zwei Präparate von Zinksulfat, die von Merck und Kahlbaum bezogen waren. Das eine gab, mit reinem Ammoniak gefällt und geglüht, eine intensiv gelbe, das andere auf dieselbe Weise gewonnene eine intensiv gelbgrüne Fluoreszenz. Beide Präparate wurden viermal aus Platinschalen umkristallisiert, ohne daß die Fluoreszenz geringer wurde. Es konnte dies davon herrühren, daß 1. das reine Zinkoxyd fluoreszierte, dann war aber nicht recht einzusehen, weswegen das eine Präparat gelb, das andere gelbgrün leuchtete, oder 2. daß das Zinksulfat eine isomorphe Verunreinigung enthielt, die zugleich mit dem Zink

gefällt wurde. Es kamen hier in Betracht Kadmium-[1]), Eisen-, Mangan-, Kupfer-, Nickel-, Kobalt- und Chromsulfat. Quecksilber, Silber und Blei konnten wegen der Schwerlöslichkeit ihrer Sulfate nicht im Zinksulfat enthalten sein.

Um das Zinkoxyd von diesen Verunreinigungen zu trennen, wurde reinstes Zinkmetall des Handels von Merck im Vakuum destilliert. Das was zuerst überging, wurde gesondert aufgefangen; es konnte darin Kadmium chemisch nachgewiesen werden. Sowohl von dem Zurückgebliebenen als auch vom Destillat wurden Proben verbrannt und auf chemischem Wege durch Lösen in Schwefelsäure, Fällen und Glühen in ZnO verwandelt. Alle Präparate fluoreszierten lebhaft gelb oder grüngelb. Dies Fluoreszenzlicht konnte somit nur entweder dem reinen Zinkoxyd zugeschrieben werden, was die Herren Wien und Tafel tun, oder es konnte von einem Gehalt an Kadmium herrühren, welches mit überdestilliert war. Bei der Schwerflüchtigkeit von Mangan, Silber, Kupfer, Eisen, Nickel und Kobalt war das Vorhandensein dieser Metalle im Destillat so gut wie ausgeschlossen. Ich richtete mein Augenmerk daher besonders auf das Kadmium. Zunächst wurde das Zinkmetall nochmals destilliert, darauf in absolut reiner Salzsäure, die unmittelbar vor dem Versuch durch Destillation gewonnen war, gelöst; die Zinkchloridlösung wurde zur Trockene eingedampft, und das Zinkchlorid nachher im Vakuum destilliert. Das aus diesem Präparat gewonnene Zinkoxyd fluoreszierte zwar noch lebhaft, aber bedeutend schwächer als die ungereinigten Zinkoxyde. Das Zinkchlorid wurde nun nochmals bei gewöhnlichem Atmosphärendruck destilliert. Von der Destillation im Vakuum sah ich ab, da bei niedrigem Drucke die Siedepunkte im allgemeinen einander näher liegen, daher eine Trennung schwieriger ist.

Die Destillation führte ich folgendermaßen aus. Über einen Platintiegel, in dem sich das Zinkchlorid befand, wurde eine längere, sorgfältig gereinigte Glasröhre gestülpt und nun mit sehr kleiner Flamme langsam erhitzt. Dämpfe stiegen in die Höhe und schlugen sich am Glase nieder. Wie langsam

---

1) Kadmiumsulfat ist nach Retgers (Zeitschr. f. phys. Chem. 16. p. 577. 1895; Beibl. 20. p. 113. 1896) isomorph mit Zinksulfat.

destilliert wurde, geht am besten daraus hervor, daß erst nach 48 Stunden genügend $ZnCl_2$ gewonnen wurde, um eine Fällung in der Lösung hervorzurufen. Das destillierte Zinkchlorid wurde in zwei Teile geteilt, in das, was sich unten in der Nähe des Tiegels niedergeschlagen hatte und in die oberen Teile. Da Kadmiumchlorid schwerer flüchtig ist, als Zinkchlorid, so erwartete ich, daß vielleicht in dem ersten Präparat noch eine Spur von Kadmiumchlorid enthalten sein würde. Beide Proben wurden in Platinschalen mit Kalilauge gefällt, im Platintrichter ausgewaschen und längere Zeit geglüht. Die unteren Teile gaben eine schwache Fluoreszenz, die oberen leuchteten nicht. Als beide in Salzsäure gelöst und mit einer Spur von Kadmiumsulfat versetzt waren, gaben sie nach der Fällung und dem Glühen ein intensives gelbes bez. gelbgrünes Licht.

Das reinste Zinkchlorid von Merck wurde bei Atmosphärendruck zweimal in ähnlicher Weise, wie eben beschrieben, destilliert. Auch die so gewonnenen Oxyde leuchteten nicht; nach Zusatz einer Spur von Kadmium trat sofort wieder das intensive gelbgrüne Fluoreszenzlicht auf. Ein Präparat von C. A. Kahlbaum in Berlin verhielt sich ebenso. Bemerkt möge noch werden, daß, wenn man nur langsam und sorgfältig destilliert und jede Überhitzung vermeidet, man nach der ersten Destillation bereits ein nur schwach oder gar nicht fluoreszierendes Zinkoxyd erhält.

Gegen diese Versuche ließe sich der Einwand erheben, daß das feste Zinkchlorid von dem Glase, auf welches es sich niederschlug, eine Verunreinigung mit aufgenommen hat, welche die Fluoreszenz vernichtet. So unwahrscheinlich dies war, so habe ich es doch geprüft. Neben dem kleinen Platintiegel, in welchem sich das zu destillierende $ZnCl_2$ befand, wurde eine größere Platinschale gestellt und über das ganze ein größerer Trichter gestülpt. Die sich entwickelnden Dämpfe schlugen sich zum größten Teil auf den Trichter nieder; eine geringe Menge derselben verdichtete sich in der Platinschale. Nach 72 Stunden wurde das letztere Präparat gelöst und gefällt; nach dem Glühen zeigte es keine Spur von Fluoreszenz, die aber sofort nach Zusatz von Kadmium wieder auftrat. Dies Präparat ist überhaupt mit Glas nicht in Berührung ge-

kommen; es konnte daher auch nichts aus demselben aufnehmen.

Daß auch tatsächlich das Zinkchlorid nichts aus dem Glase aufnimmt, konnte direkt bewiesen werden. Zu dem Zweck wurde nicht gereinigtes Zinkchlorid in einem Glasgefäß in Wasser gelöst; nachdem es 10 Tage gestanden, zeigte das Präparat nach der Fällung und dem Glühen eine ebenso intensive Fluoreszenz, wie dasjenige, welches nur mit Platin in Berührung gestanden hatte. Auch eine Zinkchloridlösung, die mindestens 5 Jahre im Glasgefäß gestanden hatte, gab ein intensiv leuchtendes Präparat. Daß durch die zur Fällung benutzte Kalilauge keine die Fluoreszenz vernichtende Verunreinigung in die Präparate gelangt war, davon habe ich mich mehrfach überzeugt; es geht dies ja auch aus den obigen Versuchen hervor.

Aus allen diesen Versuchen läßt sich also mit Sicherheit der Schluß ziehen: *Reines Zinkoxyd leuchtet nicht; die feste Lösung von Kadmiumoxyd in Zinkoxyd gibt dagegen ein lebhaftes gelbes oder gelbgrünes Fluoreszenzlicht*

Diese Versuche, soweit sie das reine ZnO betreffen, stehen in bestem Einklang mit denen von Lecoq de Boisbaudran[1]) aus dem Jahre 1886.

Nach dem Vorhergehenden kann es keinem Zweifel unterliegen, daß, sowohl das Präparat von Hrn. Wien als auch das von Hrn. Tafel kadmiumhaltig gewesen ist und daß sich alle ihre Beobachtungen auf die feste Lösung von Kadmiumoxyd in Zinkoxyd beziehen.

Auch durch Verbrennen von Zinkmetall kann man leicht ein nicht, oder sehr schwach fluoreszierendes Zinkoxyd gewinnen. Das reinste Metall des Handels wurde ausgewalzt und dann verbrannt. Das so gewonnene Zinkoxyd fluoresziert intensiv gelb oder gelbgrün und zwar an verschiedenen Stellen verschieden intensiv, was wahrscheinlich auf die Bildung verschieden dichter Präparate zurückzuführen ist.[2]) Die Ent-

1) Lecoq de Boisbaudran, Compt. rend. **103**. p. 468. 1886; Beibl. **11**. p. 38. 1887.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. **12**. p. 439. 1903. Ähnliche Beobachtungen sind auch von J. R. Mourelo (Compt. rend. **124**. p. 1024. 1897; Beibl. **21**. p. 634. 1897) beschrieben worden.

stehung eines fluoreszierenden Körpers hatte ich in meiner vorigen Arbeit folgendermaßen erklärt: Das reine ZnO fluoresziert nicht; verbrennt man aber Zink, das stets etwas Kadmium enthält, so verbrennt sowohl das Zink als auch das Kadmium. Durch die hierbei auftretende Hitze werden die Moleküle so beweglich, daß sie sich gegenseitig durchdringen und eine feste Lösung bilden.[1]) Eine analoge Erklärung gilt für das von Hrn. Wien am Aluminiumoxyd und den anderen Metalloxyden beobachtete Fluoreszenzlicht.

Verbrennt Zink, so bilden sich bekanntlich Flocken, die sogenannten lanae philosophicae. Ihre Entstehung kann wohl nur so erklärt werden, daß die Zinkoxydmoleküle aufeinander Anziehungskräfte ausüben in ähnlicher Weise wie die eines Kristalles, und sich infolgedessen zusammenlagern. Die Moleküle irgend einer anderen Substanz werden dagegen im allgemeinen nicht aufgenommen, ebensowenig wie ein Kristall in der Lösung irgend eines anderen nicht isomorphen Körpers wächst. Die letzteren werden sich eventuell ebenfalls zusammmenlagern; schlagen sich nun beide an ein und derselben Stelle nieder, so lagern die einzelnen Partikel *neben*einander und bilden keine feste Lösung. Zink sowohl als auch Kadmium bilden beim Verbrennen Rauch; es müssen sich daher in beiden Fällen die Oxydmoleküle zu größeren Aggregaten vereinigen. Besitzt nun das Zinkoxyd keine große Anziehungskraft zum Kadmiumoxyd, so werden beim Verbrennen eines Gemisches von Zink und Kadmium beide sich nebeneinander niederschlagen, ohne eine feste Lösung zu bilden. Fluoreszieren die beiden nicht, so wird natürlich auch das Gemisch nicht leuchten. Durch intensives Glühen wird man die Moleküle eventuell so beweglich machen können, daß sie sich durchdringen, dann kann eine fluoreszierende feste Lösung entstehen.

Daß tatsächlich weder das reine ZnO, noch das reine CdO fluoreszieren, davon kann man sich auf Grund der vorhergehenden Überlegungen leicht überzeugen. *Die beim Verbrennen des kadmiumhaltigen Zinks sich bildenden weißen Flocken fluoreszieren nicht oder nur sehr schwach;* sobald man sie aber

1) Vgl. E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 54. p. 618. 1895.

glüht, tritt sofort das intensiv gelbe Fluoreszenzlicht auf; offenbar hat sich jetzt die feste Lösung gebildet. Schlägt sich der beim Verbrennen des Zinks bildende Rauch auf kaltes Platin nieder, so erhält man ebenfalls ein nicht leuchtendes Präparat, welches aber nach dem Glühen leuchtet. Die Annahme von Hrn. Tafel, daß hier zwei verschiedene Modifikationen vorliegen, ist auch aus dem Grunde nicht haltbar, daß das absolut reine Zinkoxyd auch nach sehr langem Glühen nicht leuchtet.

Im Vorhergehenden hoffe ich gezeigt zu haben, daß meine Interpretation der Wienschen Versuche nicht „rein hypothetisch" war; auch ohne meine neuen Versuche wären sie dies nicht gewesen, da ihr Ausgangspunkt die sehr sorgfältigen Arbeiten von Lecoq de Boisbaudran, Becquerel, Arnold, Crookes u. a. waren. Auch die Zurückführung der Fluoreszenz auf Spuren von Verunreinigungen ist keine Hypothese, sondern nur eine Umschreibung von Tatsachen. Nicht nur bei den Oxyden, sondern ebenso bei den Sulfaten[1]), Sulfiden[2]) etc. genügen ganz geringe Mengen, um einen nicht leuchtenden Körper fluoreszenzfähig zu machen.

Hr. Tafel schreibt ferner: „Mir scheint die Annahme allzu willkürlich und der gemeinhin bestehenden Ansicht widersprechend, daß das auf nassem Wege bereitete Zinkoxyd bez. das aus Zinklösungen gefällte Zinkkarbonat oder Zinkhydroxyd die mit ausfallenden Verunreinigungen nicht ebensogut im Zustand fester Lösung enthalten sollte, wie das aus verunreinigtem Zink durch Verbrennen gewonnene Zinkoxyd". Das durch Verbrennen gewonnene Zinkoxyd enthält aber, wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, das Kadmiumoxyd gar nicht als feste Lösung, sondern diese entsteht erst durch Glühen. Ebenso enthalten die durch Fällen gewonnenen Präparate im allgemeinen die Verunreinigungen nicht als feste Lösung, sondern beide lagern sich nebeneinander ab; die festen Lösungen entstehen erst beim Glühen. Die von E. Wiedemann und mir, Arnold und anderen im hiesigen Institut unter-

1) Lecoq de Boisbaudran, l. c.; E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 56. p. 209. 1895.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Wied. Ann. 38. p. 90. 1889; L. Visser, Rec. trav. chim. 22. p. 183. 1903.

suchten anorganischen Substanzen (feste Lösungen) sind alle geglüht worden.[1])

Alle Körper verlieren ihre Fluoreszenz unter den Kanalstrahlen sehr schnell. Hr. Tafel führt dies beim ZnO auf die Bildung einer neuen Modifikation zurück; ich habe diese ganz allgemein auftretende Erscheinung auf eine Zersetzung des gelösten Körpers, also beim ZnO auf die Zersetzung des Kadmiumoxyds zurückgeführt. Beide Annahmen sind hypothetisch. Nach Hrn. Tafel müßten wir die Chemie, da bei *allen* Substanzen die Kanalstrahlen eine Schwächung der Fluoreszenz hervorrufen, mit einer unendlichen Anzahl von neuen Modifikationen bereichern, während nach meiner Erklärung wir keiner neuen Hypothese bedürfen, da, wie aus meinen Versuchen hervorgeht, die Kanalstrahlen tatsächlich stark zersetzende Wirkungen ausüben. Ich kann keinen Beweis dafür beibringen, daß das gelöste Kadmiumoxyd zersetzt wird, wohl aber ist mir dies bei einer Reihe von anderen Körpern gelungen, nämlich solchen, die Natrium enthalten. Sobald Kanalstrahlen auf NaCl, KCl, das eine Spur NaCl enthält, Feldspat etc. fallen, tritt hell die *D*-Linie auf. Möglicherweise zerfällt in ähnlicher Weise das gelöste Kadmiumoxyd.

Hr. Tafel hat nachgewiesen, daß durch Druck die Fluoreszenz der festen Lösung von CdO in ZnO geringer wird und gleichzeitig das Präparat sich braun färbt. Ob die unter den Kanalstrahlen entstehende braune Substanz identisch ist mit der durch Druck erhaltenen, ob hier tatsächlich neue Modifikationen vorliegen, oder ob hier nur die Korngröße verändert worden ist[2]), ferner ob die braune Färbung unter den Kanalstrahlen nicht vielleicht einem Zersetzungsprodukt seine Entstehung verdankt — unter den Kanalstrahlen treten bei vielen Substanzen Farbenänderungen auf[3]) — alles dies sind Fragen, welche noch der Erledigung harren. Da ihre Beantwortung

1) In der Natur, wo die Bildung der Mineralien sich in Jahrtausenden vollzieht, liegen die Verhältnisse anders; hier bilden sich feste Lösungen auch bei gewöhnlicher Temperatur.

2) Nach W. Ostwald (Zeitschr. f. physik. Chem. **34.** p. 495. 1900) unterscheidet sich das gelbe Quecksilberoxyd von dem roten nur durch die Korngröße; durch Reiben läßt sich das eine in das andere überführen.

3) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **9.** p. 707. 1903.

ber mehr den Chemiker, als den Physiker interessiert, so habe ch von Versuchen in dieser Richtung abgesehen.

Hr. Wien beschreibt in seinem Aufsatz noch die Fluoreseenzfarben von Magnesiumoxyd. Nach dem Vorhergehenden ann man mit großer Sicherheit annehmen, daß sie ebenfalls Verunreinigungen ihren Ursprung verdankt. Ich selber habe iesen Körper nicht untersucht, da die Aufsuchung der Spuren erselben und Reinigung der Präparate stets eine Arbeit von Monaten ist. Daß aber auch dieses Oxyd in absolut reinem Zustand nicht oder nur sehr schwach leuchtet, geht aus den Arbeiten von Lecoq de Boisbaudran[1]) u. a. hervor; erst nach Zusatz von Spuren fremder Substanzen tritt das Fluoreszenzicht auf.

Erlangen, Physik. Institut, 1. Dezember 1903.

1) Lecoq de Boisbaudran, Compt. rend. **104**. p. 330. 1886; L. Becquerel, Ann. chim. phys. **57**. p. 51. 1889.

(Eingegangen 3. Dezember 1903.)

13. *Magnetostriktion ferromagnetischer Körper* (*Bemerkung zu einer Arbeit des Hrn. A. Heydweiller*); *von R. Gans.*

Hr. Heydweiller hat vor kurzem[1]) die Längenänderung eines ferromagnetischen Drahtes in einem gleichförmigen Magnetfelde durch einen Kreisprozeß berechnet. Da die Resultate aber infolge eines fehlerhaften Ansatzes für die Arbeit der Kräfte unrichtig geworden sind, so erlaube ich mir, eine meiner Ansicht nach einwandfreie Ableitung zu geben.

Ist die Permeabilität μ Funktion der Feldstärke M, so ist die magnetische Energie des Raumes τ

$$W_m = \int_\tau \frac{d\tau}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} M \, \partial \mathfrak{M}, \tag{1}$$

wo

$$\mathfrak{M} = \mu M \tag{2}$$

und nicht mehr

$$\frac{1}{8\pi} \int \mu M^2 \, d\tau.$$

Auf diese zwingende Folgerung der Maxwellschen Theorie hat Hr. Cohn[2]) hingewiesen; an seine Darstellung lehnt sich auch die folgende an.

Hr. Cohn findet[3]) die Zunahme der magnetischen Energie bei irgend welchen virtuellen Verschiebungen als

$$dW_m = \int d\tau \left[\psi \, \partial \varrho - \int_0^M \frac{\partial \mu}{4\pi} M \, \partial M \right]. \tag{3}$$

Hierin bedeutet ψ das Potential von M, also

$$M_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ etc.}$$

und ϱ die Dichte des wahren Magnetismus.

1) A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 12. p. 602. 1903.
2) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 510ff. Leipzig 1900.
3) l. c. p. 515.

Daraus ergibt sich unter der von Hrn. Cohn gemachten Annahme

$$\delta\mu = -\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta y - \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta z,$$

d. h., daß in einem konstanten Felde μ nur mit der Materie verschoben wird, die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft des Systems

$$(A) \qquad f_x^{(1)} = \varrho M_x - \frac{1}{4\pi}\int_0^M \frac{\partial\mu}{\partial x} M\,\partial M.$$

(Hier ist unter $\partial\mu$ die Zunahme von μ infolge der Änderung der Substanz allein, also bei konstantem M, gemeint.)

Hr. Cohn berücksichtigt ausdrücklich nicht die Änderungen der Permeabilität durch Deformationen, die für unsere Betrachtungen gerade wesentlich sind.

Die Beobachtungen zwingen uns anzunehmen, daß μ sich durch Deformation auch ändert, und zwar in anderer Weise bei einer Dilatation in Richtung der Kraftlinien als bei einer Dilatation senkrecht zu den Kraftlinien.[1])

Wir wollen setzen

$$(4) \qquad \Delta\mu = \alpha\frac{\Delta l}{l} + \frac{\beta}{2}\left(\frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta l}{l}\right).$$

$\Delta l/l$ soll die Dilatation parallel den Kraftlinien, $\Delta v/v$ die kubische Dilatation bedeuten, es ist also α bez. β die Zunahme der Permeabilität durch die lineare Dilatation 1 parallel bez. senkrecht zu den Kraftlinien.

Bezeichnen wir die Kosinus der Neigungswinkel von M mit den Koordinatenachsen bez. mit ε_x, ε_y, ε_z, so ist

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\partial\delta x}{\partial x}\varepsilon_x^2 + \dfrac{\partial\delta y}{\partial y}\varepsilon_y^2 + \dfrac{\partial\delta z}{\partial z}\varepsilon_z^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial\delta y}{\partial z} + \dfrac{\partial\delta z}{\partial y}\right)\varepsilon_y\varepsilon_z + \left(\dfrac{\partial\delta z}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta x}{\partial z}\right)\varepsilon_z\varepsilon_x \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial\delta x}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta y}{\partial x}\right)\varepsilon_x\varepsilon_y \end{cases}$$

und

$$(6) \qquad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}.$$

1) Vgl. F. Pockels, Grunerts Archiv 12. p. 57. 1894.

Setzt man (5) und (6) in (4) ein und (4) wiederum in (3), so ergibt sich außer der von Hrn. Cohn berechneten Kraft $f^{(1)}$ (vgl. Formel (A)) noch eine zweite

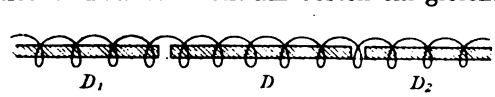
$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} f_x^{(2)} = &-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \varepsilon_x^{\,2}\,\frac{\alpha-\frac{\beta}{2}}{4\pi}\,M\partial M - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^M \varepsilon_x\varepsilon_y\,\frac{\alpha-\frac{\beta}{2}}{4\pi}\,M\partial M \\ &-\frac{\partial}{\partial z}\int_0^M \varepsilon_x\varepsilon_z\,\frac{\alpha-\frac{\beta}{2}}{4\pi}\,M\partial M - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \frac{\beta}{8\pi}\,M\partial M. \end{aligned}\right.$$

Diese läßt sich leicht durch Spannungen darstellen.

Legen wir die Kraftlinien in die Richtung der x-Achse, so ist

$$(B')\quad \left\{\begin{aligned} f_x^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^M \frac{\alpha}{4\pi}\,M\partial M, \\ f_y^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial y}\int_0^M \frac{\beta}{8\pi}\,M\partial M, \\ f_z^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial z}\int_0^M \frac{\beta}{8\pi}\,M\partial M. \end{aligned}\right.$$

Man erzeugt in einem dünnen, homogenen ferromagnetischen Draht D wohl am besten ein gleichförmiges Feld parallel der Achse, indem man demselben in einem stromdurchflossenen Solenoid zwei gleich dicke Drähte D_1 und D_2 aus demselben Material sehr nahe gegenüberstellt, wie die Figur es andeutet.



Hat der Draht keinen wahren Magnetismus, so ist

$$\varrho = 0;$$

wegen der Homogenität ist

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

also ist im ganzen Innern

$$f^{(1)} = 0.$$

Ebenso ist im Innern

$$f^{(\mathfrak{D})} = 0.$$

Es bleiben nur noch die Drucke auf die Oberfläche, welche sofort hingeschrieben werden können.

Hr. Cohn findet[1]) für den Zug in Richtung der Kraftlinien

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} M\,\partial\,\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\mu}\,\partial\,\mathfrak{M}.$$

Dieser muß gebildet werden für die Außen- und Innenseite einer Stirnfläche des Drahtes und dann die Differenz genommen werden.

Es wirkt also ein Zug nach außen vom Betrage

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} \mathfrak{M}\,\partial\,\mathfrak{M}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0\,\mu}\,\mathfrak{M}\,\partial\,\mathfrak{M}.$$

Dazu kommt infolge der Deformation ein Zug nach außen

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{M} \alpha\,M\,\partial\,M,$$

denn außerhalb des Drahtes können wir $\alpha = \beta = 0$ annehmen. Der Gesamtzug auf die Stirnfläche des Drahtes ist also

$$(C)\qquad P_i = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0\,\mu}\,\mathfrak{M}\,\partial\,\mathfrak{M} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{M} \alpha\,M\,\partial\,M.$$

Hier bedeutet M das Feld im Draht und nicht etwa zwischen D und D_1.

Ebenso findet Hr. Cohn für den Zug senkrecht zu den Kraftlinien, also radial einen Zug

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{M} (\mu-\mu_0)\,M\,\partial\,M.$$

1) E. Cohn, l. c. p. 518.

Infolge der Deformation kommt hinzu ein Zug

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^M \frac{\beta}{2}\, M\,\partial M,$$

also im ganzen wirkt auf die Mantelfläche ein Zug:

$$(D) \qquad P_r = \frac{1}{4\pi}\int_0^M \left(\mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2}\right) M\,\partial M.$$

Aus diesen Zügen auf Stirn- und Mantelfläche des Zylinders berechnen sich nach den Regeln der Elastizitätstheorie die Deformationen[1])

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}(P_l - 2\sigma P_r),$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E}(-\sigma P_l + (1-\sigma) P_r),$$

wo E den Elastizitätsmodul, σ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bedeutet.

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta r}{r} = \frac{1-2\sigma}{E}(P_l + 2P_r).$$

Noch einfacher ist der von Bidwell experimentell behandelte Fall, daß der Eisenkörper ein Ring ist, wenn wir nur voraussetzen, daß die Querschnittsdimensionen klein gegen den Radius sind. Dann ist nämlich ein allseitig gleicher Zug vorhanden, und es ist:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1-2\sigma}{E} P_r = \frac{1-2\sigma}{E\,4\pi}\int_0^M \left(\mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2}\right) M\,\partial M,$$

d. h.

$$\frac{\partial \log l}{\partial M} = \frac{1-2\sigma}{4\pi E}\left(\mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2}\right) M = \frac{(1-2\sigma)M}{E}\left(\varkappa + \frac{\beta}{8\pi}\right),$$

wenn $\varkappa$ die Suszeptibilität $(\mu - \mu_0)/4\pi$ bedeutet.

---

1) Vgl. z. B. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik 2. p. 174. Braunschweig 1901.

Hr. Heydweiller setzt den magnetischen Zug, wie er sich aus f_1 ergibt, allseitig gleich

$$\frac{\mu M^2}{4\pi} \text{ anstatt gleich } \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0\mu}\,\mathfrak{M}\,\partial\mathfrak{M} \text{ bez. } \frac{1}{4\pi}\int_0^{M}(\mu-\mu_0)\,M\,\partial M,$$

ferner setzt er die Arbeit, welche das System leistet, wenn ein starrer Körper zu Orten höherer Feldstärke gebracht wird, gleich

$$\frac{v}{4\pi} M\,\partial\,\mathfrak{M} \text{ anstatt gleich } \frac{\mu-\mu_0}{4\pi}\,v\,M\,\partial\,M.^{1})$$

Eine genaue Bestimmung der elastischen Konstanten E, σ und der magnetischen Konstanten μ, α, β wird erweisen können, ob die Maxwellsche Theorie auch die Magnetostriktion ferromagnetischer Körper beschreibt.

Tübingen, Physik. Institut, den 21. November 1903.

1) E. Cohn, l. c. p. 523.

(Eingegangen 24. November 1903.)

14. *Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels*

(Bemerkung zu der Abhandlung: G. Berndt, Das ultraviolette Funkenspektrum des Selen);

von J. M. Eder und E. Valenta.

In der Mitteilung über das ultraviolette Funkenspektrum des Selen von G. Berndt[1]) erwähnt der Autor, daß er die von etwaigen Verunreinigungen des Selen herrührende fremde Linie des von ihm gemessenen Selenspektrums ausgemerzt hat, mit Ausnahme der vielleicht vorhandenen Schwefellinien.

Er erwähnt, daß er die Schwefellinien nicht eliminieren konnte, weil „für Schwefel noch keine Wellenlängenmessungen im Ultraviolett vorliegen, so daß hier eine Vergleichung nicht möglich ist".[2]) Nun haben wir aber das Linien- und Bandenspektrum des Schwefels mit einem großen Konkavgitter photographiert und genau bis weit ins Ultraviolett ($\lambda > 3301$) ausgemessen[3]), so daß die Untersuchung der Linien im Berndtschen Selenspektrum auf etwa beigemengte Schwefellinien auf Grund der letzteren Arbeiten leicht ermöglicht wird.

Vergleicht man die Berndtsche Angabe über die Wellenlänge der ultravioletten Selenlinien mit den von uns gemessenen Linien im Funkenspektrum des Schwefels, so ergibt sich, daß im Berndtschen Selenspektrum keine Schwefellinien vorkommen, mit Ausnahme der Schwefellinie λ 4153,269, welche mit der Berndtschen Selenlinie λ 4153,2 zusammenfällt. Ob diese Linie eine wirkliche Selenlinie ist, welche nahe der erwähnten Schwefelhauptlinie liegt, oder eine Verunreinigung mit Schwefel vorliegt, läßt sich schwer entscheiden, weil die Berndtschen Wellenlängenmessungen auf Zehntel Ångström-Einheiten unsicher sind. Da jedoch andere von uns beobachtete Hauptlinien des Schwefels im Berndtschen Verzeichnis der Selenlinien fehlen, so ist es wahrscheinlich, daß das Selenspektrum Berndts frei von Schwefellinien ist.

Wien, 2. Dezember 1903.

1) G. Berndt, Ann. d. Phys. 12. p. 1115. 1903.

2) G. Berndt, l. c. p. 1116.

3) J. M. Eder u. E. Valenta, Denkschriften d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Mathem.-naturw. Klasse 67. p. 98. 1898.

(Eingegangen 9. Dezember 1903.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Photographisches Objektiv

Anastigmat f: 5—f: 6,5. Berechnung und Konstruktion wird von einer bekannten, größeren optischen Werkstätte zu erwerben gesucht. Das Objektiv muß möglichst patentfähig oder bereits patentiert sein, von nachweislich vorzüglicher Leistung und den bekannten ersten Fabrikaten gleichwertig. Auch wird ev. gegen Lizenz die Fabrikation übernommen; die Werkstätte ist auf das Beste eingerichtet. Gefl. Offerten unter Chiffre **J. A. B. 4** an die Expedition dieser Zeitschrift

Buchhandlung GUSTAV FOCK, G. m. b. H.

Leipzig

bietet in sauberen antiquarischen Exemplaren an:

Annalen der Physik und Chemie. Herausg. v. Poggendorff [illegible] Bd. 1—2 1824—89. [illegible]

Annalen der Physik und Chemie. *Neue Folge.* Hrsg. v. Wiedemann Bd. 1—[illegible] 1878—[illegible]. Gebunden ℳ 80,—

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 1—[illegible] nebst Register zu Bd. 1—15. 1877—1902. ℳ 360,—

Fortschritte der Physik. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Für die Jahre 1845—95. Jahrg. [illegible] 1845—95. ℳ 720,—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. von Ohrtmann und Müller Bd. 1—30. 1871—1901. Gebunden ℳ 900,—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Hrsg. v. Schlömilch Bd. 1—47. Mit Suppl. u. Reg. zu Bd. 1—25. 1856—1902. Gebunden ℳ 715,—

Zeitschrift für physikalische Chemie. Hrsg. v. Ostwald u. van't Hoff Bd. 1—43 m. Reg. zu Bd. 1—21. 1887—1902. Gebunden ℳ 750,—

Physikalischer Handapparat.

Sammlung von [illegible] aus der Bibliothek [illegible] Physiker [illegible]

Schöne reichhaltige [illegible] über Physik mit [illegible] aus dem Besitze des † Herrn [illegible] stammend.

***Anfragen** werden prompt beantwortet, **Dissertationen** und **Bücherlitteratur** gern angegeben.*

Katalog 230: Mathematik und Physik. Katalog 242: Chemie [illegible] gratis und franko.

Wir kaufen

stets einzelne Bände, größere und kleinere Serien [illegible] *et de physique*, Gilbert, Annal. [illegible] Zeitschr. [illegible]

Perorto

Fast [illegible] gedr. letzte Werke [illegible] von Prof. Dr. Winkler und Dr. [illegible] (Ges. Prüfg., Technologie, Wasserw.) [illegible] Preisliste K [illegible] Prüf- und Analysenwesen.

Man verlange gratis und franko das soeben erschienene

Spezialpreisverzeichnis

über

Selen-Zellen und Apparate,

System **Ruhmer,**

von

☛ RUHMERS' ☚

Physikalischem Laboratorium.

Berlin S.W. 48.

Neu: **Selen-Zellen flacher Form** in rundem Hartgummigehäuse, für wissenschaftliche und Gebrauchszwecke.
D.R.P. 146262. D.R.P. ang. D.R.G.M. 201140.

Selen-Zellen zylindrischer Form in evakuierter Glasbirne mit Gewindefassung.
D.R.P. 147113. D.R.P. ang. D.R.G.M. 189359.

Komplette Instrumentarien zum Nachweis der Lichtempfindlichkeit des Selens.

Selen-Zündapparate. D.R.P. 136094.

Apparate für intermittierende Beleuchtung des Selens.

Apparate für Lichttelephonie mittels Acetylen- oder Bogenlichts.

Photographophone neuester Konstruktion.

☛ *Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist weiß die Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hilfe derselben gelang, eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von 15 km herbeizuführen, ein bisher von keiner anderen Seite auch nur annähernd erreichtes Resultat.*

LEPPIN & MASCHE, Berlin S.O.,

Engelufer 17.

Elektrische Centrifugalmaschine.

D.R.G.M.

Für Anschluß an Starkstromleitungen.
Gleichzeitig Antriebsmotor.
Tourenzahl regulierbar und meßbar.
Vorhandene Nebenapparate verwendbar.

Näheres „Berichte".

Preis Mk. 160.—.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

NEW WAVE-LENGTH SPECTROSCOPE

ADVANTAGES:— **(CONSTANT DEVIATION).**

Collimator & telescope are fixed at right angles; thus the spectroscope will stand in a corner, and is always ready for use & in adjustment. The prism is of special form and automatically sets itself at minimum deviation.

Can be supplied reading in wavelengths direct. Great accuracy readily obtainable in wavelength measurements.

Descriptive Pamphlet of this Spectroscope price free on application to

ADAM HILGER, 75A. Camden Road, LONDON N.W.

PARIS 1900
GRAND PRIX

Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren,
Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. München.
Gegründet 1841.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

In meinem Verlag ging über:

THEORIE

der

optischen Instrumente

nach Abbe

von

Dr. S. Czapski,

wiss. Mitarbeiter der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena.

VIII, 392 Seiten mit 94 Abbildungen. 1893. geh. ℳ 9.60.

Sonderabdruck aus Winkelmanns Handbuch der Physik.

Der Inhalt des Werkes ist in seinen wesentlichen Grundlagen das geistige Eigentum Abbes; es ist der Darstellung seiner Untersuchungen und Anschauungen über das Wesen und die Wirkung der optischen Instrumente gewidmet. Da Abbe bis heute selbst keine zusammenfassende Darstellung geschrieben hat, wird daher jeder gern zu diesem Buche greifen, der sich über dieses Thema orientieren will, um so mehr als es von der Kritik einstimmig als vortrefflich befunden worden ist.

UNGER & HOFFMANN

Gegründet 1878 DRESDEN-A. 16 Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.

Alle Lichtquellen. Laterndispositive in reichster Auswahl.

Preislisten und sachkundliche Auskunft jederzeit zu Diensten.

Carl Zeiss, Optische Werkstaette, Jena.

Berlin NW., Dorotheenstrafse 29. II.
London W., 29 Margaret Street, Regent Street.
Wien IX/3., Ferstelgasse 1, Ecke Maximilianplatz.
Frankfurt a. M., Kaiserstrafse 16.
Hamburg, Rathausmarkt 8. **St. Petersburg.**

Spektrometer und Refraktometer (14 verschiedene Modelle);
Prismen jeder Art und optisch-physikalische Präparate, Spektroskope;
Dickenmesser, Komparatoren, Sphärometer und Fokometer;

Pulfrich's Stereo-Komparator, grofses Modell, für Platten 24 × 30 cm.

Dilatometer, Interferenzmefsapparate, Interferenztischchen etc.
Interferenzrefraktometer und Schlierenapparate;
Stereo-Telemeter und Stereo-Komparatoren;
Neues Stereoskop, Stereo-Mikrometer und Stereo-Diapositivbilder
Abbe'sches Diffraktionsmikroskop (Neukonstruktion).

Beschreibungen und Preislisten gratis und franko.
Bei Bestellungen Bezugnahme auf diese Annonce erbeten.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämmtlichen beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.

Mechanisches Institut,

gegründet 1866.

Specialität:

Physikalische und analytische Waagen

in garantirt vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Schnellstschwingende

Waagen für Chemiker.

Preislisten kostenfrei.

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20.

Ampèremeter und Voltmeter

nach Deprez-d'Arsonval, D. R.-P.

Funkeninduktoren, Condensatoren, Spiegelgalvanometer.

Thermosäule

nach Angabe des Herrn Prof. Dr. Rubens.

Pyrometer

zum Messen von Temperaturen bis 1600° Celsius.

Galvanometer

zu Linde'schen Kältemessungen.

= Preisverzeichnisse kostenfrei. =

E. LEITZ,

Optische Werkstätte,

Wetzlar.

Zweiggeschäfte: Berlin NW., Luisenstr. 45.
New York 411 W., 59th Str. Chicago 32—38, Clark Str.
Vertreter für München:
Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Neuestes Modell 1902.

Mikroskope,

Mikrotome, Mikrophotogr. und Projektions-Apparate.

Preislisten kostenfrei.

J. Robert Voss,

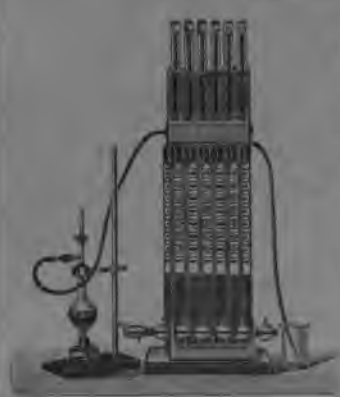
Mechaniker,
Berlin N.O. 18, Pallisadenstr. 20.

Specialität:

Influenz-Elektrisir-Maschinen
aller Systeme
(auch die dazu gehörigen Nebenapparate)
und
Metall-Spiral-Hygrometer
in allen Ausführungen.

Physikalische Apparate.

Projektionsapparate. Modelle jeder Art.
Röntgen-Apparate.



Neu!

Differential- und Doppel-Thermoskop und **sechsfaches Manometer** nach Kolbe.

Spinthariskop nach Crookes. Prospekt zu Diensten.

Apparat für elektrische Drahtwellen nach Cooligde-Blondlot.

Universal Instrumentarium nach Seibt-Ernecke für Resonanz elektr. Schwingungen, elektr. Wellen in Spulen, Tesla-Versuche, Abstimmung in der Marconi-Telegraphie.

Neue Preisliste, über
4000 Nummern und 1600 Abbildungen enthaltend,
erschienen.

Ferdinand Ernecke,

Hoflieferant Seiner Majestät des Kaisers.

Königgrätzerstr. 112, **Berlin S.W.**, Königgrätzerstr. 112.

Begründet 1869.

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Spezialitäten: Momentplatten für Astronomische und **Röntgenaufnahmen**, für Aufnahmen fliegender Geschosse, **Microphotographie** und Spectralphotographie. — **Orthochromatische** Platten. **Abziehplatten** für Lichtdruck, Celluloïdfolien. — **Rollfilms** für Tageslichtcameras.

Trockenplattenfabrik a. Actien
vormals **Dr. C. Schleussner** in **Frankfurt a. M.**

Doppelwandige Glasgefäße
Pentanthermometer bis — 200° C. } zur flüssigen Luft,
einfache und automatische **Quecksilberluftpumpen, Röntgenröhren** mit und ohne **Vakuumregulierung, ff. Glasschliffe** und **-Hähne, Markoniröhren** etc. empfiehlt

R. BURGER, Berlin N. 4, Chausseestr. 2 E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke,

sowie Räder, Triebe, Zeigerwellen, schräge Triebe und Zahnstangen

fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

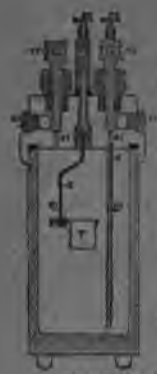
A. Eberhard vorm. R. Nippe,

Berlin NW.,

Platz vor dem neuen Thor 1a.

Chemische und physikalische Apparate und Gebrauchsgegenstände.

Glas-Präcisions-Instrumente und volumetrische Messapparate.
Feinste Thermometer von —200 bis +550 Grad.
Quecksilber-Luftpumpen neuester Construction.
Vacuum-Röhren
nach *Braun, Crookes, Geissler, Hittorff, Puluj, Röntgen* etc.
Spectral-Röhren.
Mikroskope, Photometer,
Projectionsapparate, Spectralapparate aller Werkstätten
zu Originalpreisen.
Physikalisch-analytische Waagen und Gewichte aller Systeme.
Complete Einrichtung von Laboratorien u. Vorlesungsräumen.
Sachgemässe Kostenanschläge. **Aeusserst billige Preise.**
Grosse illustrirte Preislisten kostenlos.



Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler,
verbessert nach Dr. Kroeker
(gesetzlich geschützt).

SOCIETE GENEVOISE

pour la Construction

D'INSTRUMENTS DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE

Genf. 5 Chemin Gourgas.

Kreis- und Längentheilmaschinen, Comparatoren, Kathetometer, Mikrometrische Schrauben, Normalmaasse,

Normalmeter

in verschiedenen Längen, aus Nickelstahl (Invar), Nickel, Bronze, in der H-Form, 5 Meter lang in Invar.

Höchste Garantie der sauberen Ausführung der exaktesten Arbeiten.

Astronomische, optische, elektrische Instrumente.

Vollständige Ausstattung für Universitäten.

Funkentelegraphische Apparate (hohe Frequenz), nach Tesla, Oudin etc.

Kataloge zur Verfügung.

Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vortheilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.

Keine Dämpfe kein Geruch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

Alleiniger Fabrikant: Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstr. 72/73.

Niederlage auch bei E. Leybold's Nachf., Cöln a. Rhein.

Hartmann & Braun, A.-G., Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Messinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Portugiesische Goldene Staatsmedaille.

Kompensationsapparat mit Kurbelschaltung.

Kataloge auf Verlangen zur Verfügung.

W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. DR. M. APEL.

Geschäftsgründung 1808. **Göttingen.** Geschäftsgründung 1808.

Chemische und physikalische Apparate.

Specialität:

Rauchgasapparate, Calorimeter zur Bestimmung des **Brennwertes** der verschiedenen **Brennstoffe** und von **Gasen, nach Ferd. Fischer.**

Thermometer nach Ferd. Fischer. (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach Nernst. (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.)

Totalreflectometer nach Kohlrausch.

Demonstrationsapparate n. Behrendsen und Grimsehl.

Krystallmodelle aus Holz und Glastafeln nach Klein, Naumann und Rose.

Milchprüfungsbestecke nach Tollens.

MEISER & MERTIG,

Dresden-N. 6.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate jeder Art

in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

Funkeninduktoren.

Hochspannungsapparate.

Apparate für drahtlose Telegraphie.

Röntgenapparate.

Chemische Geräte.

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

Neue Preisliste kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Auszeichnungen: *Staatsmedaillen.*

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.

Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 Gold. Med.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

Ausführung von Uhrwerken und Apparaten für wissenschaftliche und technische Zwecke. Mikrometerteilung $^1/_{10}$—$^1/_{100}$ mm direkt. Ablesung.

Max Stuhl, Berlin.

Glastechnische Werkstätte

jetzt

130 Friedrichstrasse 130

(früher Philippstr. 22).

Elektrische und mechanische

Apparate nach Angabe.

Werkstatt für Feinmechanik, elektrotechnisches Laboratorium

H. BICHTELER, Glashütte i. S.

ARTHUR PFEIFFER,

Wetzlar O.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik

—— Gegründet 1890. ——

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der

Patent-Geryk-Öl-Luftpumpen

in Deutschland

Komplette Pumpeinrichtung für Hand- und Motorbetrieb (1/4 P.S.)

Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Sämtliche Apparate zu Untersuchungen im hohen Vakuum, darunter Originalkonstruktionen:

Rezipient mit Flüssigkeitsdichtung D.R.G.M.
Umschalt- und Vielweghähne D.R.P. a. und D.R.G.M.
Durchgangshähne D.R.G.M.
Trockenröhre mit auswechselbarem Einsatz für P_2O_5. D.R.G.M.

Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

— Darmstadt. —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate. Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Luftelektrizität und Sonnenstrahlung.

Von **H. Rudolph.**

8°. 24 Seiten. Mit Figuren und Kurven im Texte. ℳ 1.—.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890:

Präcisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. (Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1890, Nov.-Dezember 1895.)

Normal-Widerstände von 0,0001—10000 Ohm. — Abzweig-Widerstände von 1—0,0001 Ohm mit Petroleum- oder Luftkühlung, für Strommessung bis 5000 Amp. — Rheostaten, Wheatstone'sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken für alle Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — Kompensations-Apparate für genaue Spannungsmessung in 5 Modellen. — Normal-Elemente, beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präcisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

— Illustrierte Preisliste. —

Günther & Tegetmeyer.

Werkstatt für Präcisions-Mechanik

Braunschweig.

Wasserstrahl-Duplicatoren, Actinometer, Quadrantenelectrometer, Electroscope mit Natriumtrocknung (D.R.G.M.), Apparate zur Messung der Electricitätszerstreuung in der Luft, etc. nach **Elster** und **Geitel.**

Registrir-Electroscope nach **Birkeland** (konstruirt für den Gebrauch bei der norwegischen Nordlicht-Expedition 1899).

Phototheodolite für meteorologische Zwecke nach **Koppe.**

Ablesefernrohre.

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Berliner Werk

Berlin SW., Markgrafenstrasse 94.

Kompensationsapparat für genaue Strom- und Spannungsmessungen.

Normalwiderstände für Strommessungen.

Messbrücken für **Thomson**'sche und **Wheatstone**'sche Schaltung.

Widerstände aus **Manganindraht** von 1 und 10 Megohm in je 10 Stufen.

Spiegelgalvanometer nach **Deprez-d'Arsonval.**

Spiegel-Elektrodynamometer.

Panzergalvanometer.

Apparate für Eisenuntersuchungen.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

Vertreter in allen Ländern.

* * * * Fabrik-Marke. * * * *

Emil Gundelach, Gehlberg i. Thüringen.

Glashütte mit Regenerativ-Gasofen. ❀ Glasbläserei mit eigener Gasanstalt.

Schleiferei. Tischlerei. Dampfbetrieb.

Röhren, Kolben, Bechergläser, Kochflaschen etc. aus Glas von hohem Widerstand gegen chemische Agentien und gegen Temperaturwechsel.

Sämmtliche Glasapparate und Instrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Doppelwandige Flaschen nach **Dewar** für flüssige Luft, versilbert und unversilbert.

Elektrische Vacuumröhren nach *Geissler, Crookes, Hittorf, Tesla, Moore* etc.,

speciell:

Röntgenröhren von hervorragender Qualität.

(Röntgenröhren für Wehnelt-Unterbrecher, D.R.P. No. 100440, **Röntgenröhren** mit Regenerirvorrichtung, D.R.P. No. 103100.)

Bis jetzt wurden über 20000 Stück Röntgenröhren geliefert.

* * * * Die Firma besteht seit 1852. * * * *

Neuer Widerstand oder Brücke mit 100- u. 1000-Teilung.
D. R.-Patent a.

Elektrizitätsgesellschaft

Gebr. Ruhstrat,

Göttingen.

Schlitten-, Schiefer- und Porzellanwiderstände von 15 ℳ an.

Schalttafeln
auf Schiefer oder Marmor
für physikalische,
medizinische und technische Zwecke.

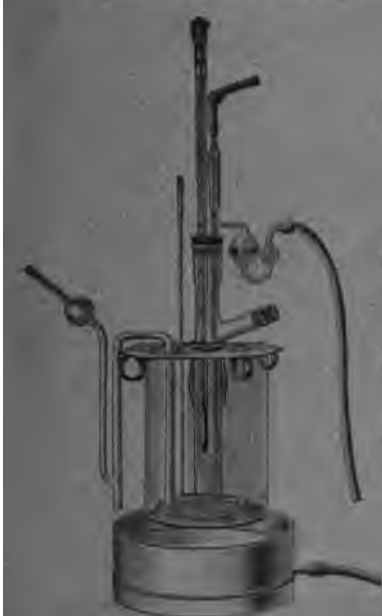
Dynamo-Maschinen, Elektromotoren,
sowie
Messinstrumente jeder Art.

Anfertigung elektrischer Apparate nach Zeichnung oder näherer Angabe.

Hauptkatalog gratis.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.



Thermometer
für
Wissenschaft und Technik,
von —200 bis +575°.

Barometer
mit constantem Nullpunkt,
eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren
nach
Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen,
Puluj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

! ! Selen- Zellen und -Apparate für Telephonie ohne Draht ! !

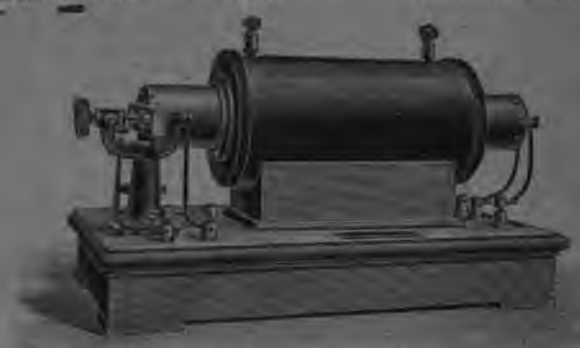
sowie sämtliche elektrophysikalische Demonstrations-Apparate liefern

CLAUSEN & v. BRONK, Berlin N 4, Chausseestrasse 3.

Man verlange gratis und franco illustr. Preisliste.

HANS BOAS BERLIN O.

Elektrotechnische Fabrik — Krautstraße 52



Funkeninduktoren

von höchster Nutzleistung im Vakuum hergestellt mit keilförmiger Isolation der Sekundärspule eigenen patentierten Systems

Meßinstrumente

Spiegel und Zeiger — Galvanometer, Kondensatoren

Telegraphen- und Telephonapparate. Apparate für Laboratoriumgebrauch.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS

Grands-Prix Paris 1889 — Anvers 1894
Expositions Universelles Bruxelles 1897 — Paris 1900

Cabinets de physique complets.

Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet adoptée pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard,** type 1902, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Rhutgen, et courants de haute fréquence.

Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.

Fils primaire du Dr. A. Vincent.

Paul Kröplin,
Bützow i. M.,
mech. Werkstätte für Lehrmittel,
Motorbetrieb,
liefert als Specialität
Apparate
nach Hertz, Marconi, Tesla, Röntgen, Lodge und Lecher.
Funkeninductoren und polarisirte Relais.
Alleinvertrieb für Oesterreich-Ungarn:
A. Pichlers Wittwe u. Sohn, Wien.

Rich. Magen,
Optiker und Mechaniker,
Berlin NW. 40, Scharnhorststr. 34a.
Für Spiegelgalvanometer:
Planparallel-Spiegel v. 3 bis 30 mm Durchm. Ganz dünn u. leicht, sowie Hohlspiegel von 14 mm Durchm. 1—1_{00} etc. bis 2 Mtr. Focus. Gradscalen von $^1/_2$ bis 1_{00} Mtr. lang. Maassstäbe in Glas u. Metall (in beliebigen Intervallen) bis $^1/_{100}$ mm genau. Interferenzgitter (z. Schulen von 10—400 Striche per mm. Planparallelglas jeder Stärke. Glasprismen. Metallspiegel in Spiegelmetall.
Preisverzeichniss gratis.

C. A. Steinheil Soehne,
optisch-astronomische Werkstätte,
Gegründet 1855. **MÜNCHEN.** Gegründet 1855.

Astronomische Fernrohr-Objektive, zwei- und dreiteilig in allen Dimensionen bis 1 Meter Durchmesser, normaler Konstruktion und ohne sekundäres Spektrum.
Okulare, Prismen, Lupen, Plan- und Planparallelgläser.
Komplette astronomische Fernrohre mit und ohne Stativ.
Ablesefernrohre, terrestrische Hand- und Stativfernrohre, Prismenfernrohre.
Spektralapparate verschiedenster Konstruktion, mit und ohne photograph. Einrichtung.
Spektroskope, Spektrographen und Goniometer.
Preislisten frei auf Verlangen, auch über photographische Objektive und Zubehör.

RICH. SEIFERT & CO., Hamburg 13.
Elektrotechnische Werkstatt.
Komplette Röntgeneinrichtungen nach Dr. Albers-Schönberg und Dr. Walter.
Schutzvorrichtungen — gegen Röntgenstrahlen. —
Starkstrom-Dekadenwiderstände,
sind genau nach Zehnern, Einern und Zehntel Ohm abgestuft, ermöglichen eine sehr feine Regulierung, sowie eine genaue Voraussberechnung der Stromstärke und sind besonders für Versuchszwecke zu empfehlen.
Die federnden Regulierstöcke werden auf Wunsch ebenfalls mit Ohmschaltern versehen und können außer zu Röntgenzwecken auch zu allen sonstigen Starkstromversuchen benutzt werden.
Kostenanschläge und Preislisten gratis.

Alt, Eberhardt & Jäger,

Ilmenau (Thüringen).

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläserei, Glasschleiferei, Holzwaarenfabrik, Mechanische Werkstatt, Schriftmalerei und Emaillieranstalt.

Glas-Apparate, -Instrumente und -Utensilien

für chemischen, physikalischen und wissenschaftlichen Gebrauch.

Apparate für Vorlesungen, botanische Studien u. s. w.

Chemische Glasgeräthschaften für Laboratorien von Schulen, höheren Lehranstalten, Fabrikslaboratorien des chemischen Grossbetriebes.

Standgefässe für Museen.

Elektrische Röhren, Röntgen-Röhren.

Normal-Thermometer, Chem. Thermometer — 200 + 550°.

Normal-Aräometer in feinster Herstellung.

Glasröhren und -Stäbe.

Geaichte chemische Messgeräthe.

Anfertigung neuer Apparate nach Skizzen und Angaben.

= Eigenes chemisches Laboratorium. =

Exakte Ausführung.

GEORG WESTPHAL,

Celle (Hannover).

Mechanisches Institut

(gegründet 1860).

Wagen und Gewichte für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke

in vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

C. M. J. Bodien, Hamburg IV. 200.

Fertigt als Specialität alle Arten Electrische Glühlichtlampen nach Muster oder Zeichnung.

Ferner: Geissler-Röhren, Crookes-Apparate &

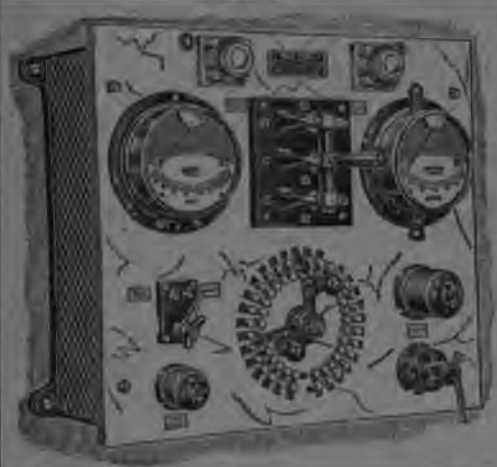
Glasinstrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Max Kohl, Chemnitz i. S.

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

fertigt als Spezialität:

Funkeninduktoren für Gleichstrom mit veränderlicher Selbstinduktion für jede Spannung bis 250 Volt durch Induktionskommutator nach Kohl; für **Wehnelt-Unterbrecher** mit **einem** oder **mehreren Kontaktstiften; gleichgut** geeignet für **Anwendung weicher, mittelweicher** oder **harter** Röntgenröhren; für **ganz langsame** und **allerschnellste** Unterbrechungen verwendbar; die Einrichtung ermöglicht größte **Schonung** der Röntgenröhren bei sehr geringem Stromverbrauch und liefert **großartige Durchleuchtungen.** Bei Anwendung der **Schaltung** für **mittelweiche Röhren** kann **jeder rotierende Unterbrecher** in **voller Leistung** betrieben werden.



Experimentier-Schalttafeln!

A) zum Anschluß an 110—160 Volt für Stromstärken bis 12 bezw. 24 Ampere.

B) zum Anschluß an 220 Volt für Stromstärken bis 10 bezw. 20 Ampere.

☛ *Man verlange ausführlichen Spezial-Prospekt!*

Neu! **Wechselstrom-Gleichrichter** *Neu!*

zum **direkten Laden** von **Akkumulatoren** an einer **Wechselstrom-Anlage** und zum **Betrieb von Funkeninduktoren** durch **Wechselstrom, ohne daß ein weiterer Unterbrecher nötig ist.**

Projektionsapparate für Bogenlicht, Gleich- oder Wechselstrom, Kalklicht, Acetylen- oder Zirkonbeleuchtung, mit angesetzter optischer Bank.

Durch Aufsetzen einzelner Ansätze ist es möglich, die Projektions-Apparate für alle Polarisations-, Doppelbrechungs-, Interferenz- und Lichtbrechungsversuche zu verwenden!

Fabrikation physikalischer Instrumente, Apparate nach Tesla, Hertz, Marconi.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen u. chem. Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Neu! Spinthariskope, Neu!

mit Fluorescenzschirm und einer kleinen Menge Radium auf beweglichem Zeiger, um die außerordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen. **Preis Mk. 24.—.**

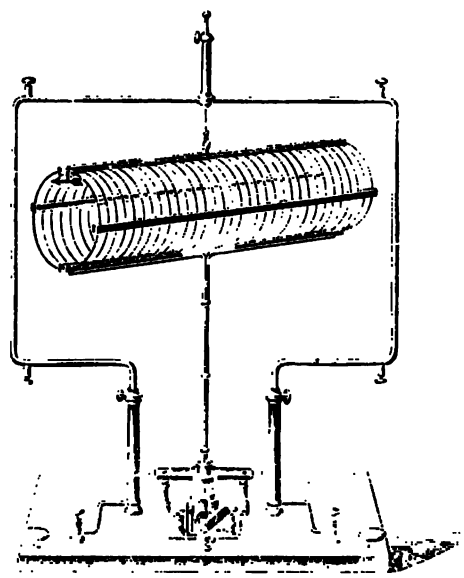
Spezial-Listen auf Wunsch.

E. Leybold's Nachfolger

Mechanische Werkstätten

Köln a. Rh.

Gegründet 1853 Gegründet 1853



Ampère'sches Gestell mit weithin sichtbaren beweglichen Leitern zum direkten Anschluß an eine Starkstromleitung.

Preisliste
über Neue Apparate und Versuche
auf Verlangen.

Alleinige Inseratenannahme durch Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Böhmestr. 9

1904. № 4.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 318. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 8. März 1904.)

Inhalt.

		Seite
1.	W. Wien. Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. I	641
2.	W. Wien. Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. II	668
3.	W. Wien. Über positive Elektronen und die Existenz hoher Atomgewichte	669
4.	Otto Frhr. v. u. z. Aufsess. Die Farbe der Seen	678
5.	K. Schütt. Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen	713
6.	G. N. St. Schmidt. Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium	747
7.	Emil Kohl. Über das innere Feld der Elektronen	770
8.	Wilhelm Elsässer. Über erzwungene Schwingungen von Stäben	791
9.	J. Zenneck. Objektive Darstellung von Stromkurven mit der Braunschen Röhre	819
10.	J. Zenneck. Die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke	822
11.	Jean Billitzer. Zu den kapillarelektrischen Bewegungen und über einen Strom im offenen Element	827
12.	W. Kaufmann. Bemerkungen zur Absorption und Diffusion der Kathodenstrahlen	838
13.	Zemplén Győző. Über den Energieumsatz in der Mechanik	840
14.	John Mills. Über die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Interferenz des natürlichen Lichtes	848
15.	Fred. J. Bates. Berichtigungen zu der Arbeit: „Über Versuchsfehler beim Messen der Rotationspolarisation absorbierender Substanzen"	856

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen**, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

PROSPEKT.

Die seit April 1903 im Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig** erscheinende

ZEITSCHRIFT

für

wissenschaftliche Photographie

Photophysik und Photochemie.

Unter Mitwirkung befreundeter Fachgenossen

und insbesondere von

H. Kayser,
o. ö. Professor an der Universität Bonn

herausgegeben von

E. Englisch,
Privatdozent an der Techn. Hochschule zu Stuttgart

und

K. Schaum,
Privatdozent an der Universität zu Marburg a. L.

hat soeben ihren ersten Band abgeschlossen. Aus dem nachstehend abgedruckten Inhaltsverzeichnis dürften die Ziele, die sich die Zeitschrift gesteckt hat, wohl besser als aus allen „Programmen" und „Empfehlungen" zu ersehen sein.

Preis für den aus 12 Heften bestehenden Band von wenigstens 24 Bogen Umfang M. 20.—. Bestellungen nehmen alle Buchhandlungen entgegen.

Inhalt des I. Bandes.

(April 1903—Februar 1904.)

	Seite
Ziele der Zeitschrift von H. Kayser	1
Leo Backeland, Die elektrolytische Wirkung metallischer Teilchen in lichtempfindlichen Papieren	419
— Eine praktische Methode zur quantitativen Bestimmung des Silbers in photographischem Papier	423
A. Bogujewlensky, Über die Einwirkung von einigen Metallen auf eine photographische Platte	353
B. Donath, Der Projektionsapparat der Urania für Dreifarbenphotographie	34

Seite

J. Drecker, Über Intensitätsverhältnisse in photographischen Lichthöfen . . 183
G. Eberhard, Untersuchungen über das Spektrum des Siliciums 346
J. M. Eder, Sensitometrische Prüfung gewöhnlicher und orthochromatischer Platten 119
E. Englisch, Das Verhalten der Bromsilbergelatine im Grenzgebiet der Solarisation 304
Aug. Hagenbach und H. Konen, Über das Emissionsspektrum des Quecksilbers in Geisslerröhren 342
J. Hartmann, Eine Revision des Rowlandschen Wellenlängensystems . . . 215
— Eine Reihe von Filtern zur Erzeugung von homogenem Licht 259
K. A. Hofmann, Die radioaktiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung 79
Hugo Kauffmann, Über den Ursprung der Farbe bei organischen Stoffen . 60
H. Konen, Neuere Arbeiten über Funkenspektren 237, 289
— Über die Kruppsche Gitteraufstellung im physikalischen Institut der Universität Bonn (siehe auch A. Hagenbach und H. Konen) 325
E. König, Über einige neue Sensibilisatoren 174
R. Kothe, Über Tiefenvorstellung und Tiefenwahrnehmung und ihre Beziehung zur stereoskopischen Photographie 268, 305
J. Lauwartz, Über Messungen und Gesetzmäßigkeiten im Bandenspektrum der Tonerde 160
Hans Lehmann, Über die Anwendung des Teleobjektivs in der Spektroskopie 41
— Ultrarote Flammenspektra 135
Josef Loos, Über Wellenlängen und Gesetzmäßigkeiten in den Hauptbanden des sogenannten Kohlenoxydbandenspektrums 151
A. und L. Lumière und A. Seyewetz, Über die Herstellung und die entwickelnden Eigenschaften des Metochinons, einer Verbindung des Methylparamidophenols (Metol) mit dem Hydrochinon 71
— Über die verschiedenen Entstehungsursachen und über die Zusammensetzung des sogenannten „dichroitischen Schleiers" in der Photographie 105
— Über die Zerstörung des photographischen Farbschleiers 277
— Über den Gebrauch des Acetons in den Entwicklern als Ersatz der Alkalien 283
Lüppo-Cramer, Zur Photochemie des Jodsilbers 11
— Photochemie einiger emulgierten Schwermetallverbindungen 50
R. Namias, Über die Fähigkeit gewisser Alkalisalze organischer Säuren, die Beständigkeit von Bichromatpräparaten zu erhöhen 417
A. Pflüger, Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes an der Emission und Absorption glühender Turmalins 8
— Die Absorptionsvermögen einiger Gläser im photographisch wirksamsten Teile des Spektrums 140, 214
J. Precht, Notiz über die Absorption des Tartrazins 262
— Die Methode der verzögerten Entwicklung 262
— Einige Anwendungen der Methode der verzögerten Entwicklung 355
E. Pringsheim, Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes 360
— Über das Strahlungsgesetz 391
Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1902 . 201
F. Richarz, Eine Bemerkung zur Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes . . . 5
— Nochmals [illegible] zur Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes . . . 359
[illegible] Schaum, Über die photochemische Verhalten [illegible] 377
[illegible] 383
[illegible] 18, 149

Referate

Emission und Absorption des Lichts. Spektralanalyse. Photometrie.

[illegible] Äquivalent der Lichteinheit 30
[illegible] Helligkeit von [illegible] 245

Seite

J. Formánek, Über die Beziehungen zwischen Konstitution und Absorptionsspektrum gefärbter organischer Verbindungen 247
W. N. Hartley, Die Absorptionsspektra der Metallnitrate 142
— Eine Untersuchung uber die Zusammensetzung von brüchigem Platin . . 143
— Absorptionsspektren und chemische Konstitution von organischen Stoffen . 211
J. Hartmann und G. Eberhard, Über das Auftreten von Funkenlinien in Bogenspektren 210
J. Hartmann, Über einen neuen Zusammenhang zwischen Bogen- und Funkenspektren 211
Th. Lymann, Über die Verlängerung von Spektrallinien 211
P. G. Nutting, Das Reflexionsvermögen von Selen, Cyanin und Glas im Ultraviolett 246
C. Runge und J. Precht, Die Stellung des Radiums im periodischen System nach seinem Spektrum 29
R. W. Wood, On screens Transparent only to Ultra-Violet Light and their Use in Spectrum Photography 30

Lumineszenz.

Alex. de Hemptinne, Sur la Luminescence des Gaz 98

Entladungen. elektrische Wellen.

E. Cohn, Metalloptik und Maxwellsche Theorie 179
E. Goldstein, Einwirkung von Kathodenstrahlen auf anorgan. und organ. Präparate 250
E. Hagen und H. Rubens, Über Beziehungen zwischen dem Reflexionsvermögen und ihrem elektrischen Leitvermögen 170
J. Härdén, Über die Analyse der Entladungen eines Kondensators in Verbindung mit einer Hochfrequenzspule 180
M. Planck, Über die optischen Eigenschaften der Metalle für lange Wellen . 179
H. Freiherr Rausch von Traubenberg, Über die elektrische Zerstreuung am Vesuv 143
K. von Wesendonk, Über Spitzenausströmungen infolge von Teslaentladungen 180

Radioaktivität. Elektronen.

S. J. Allan, Radioaktivität von frisch gefallenem Schnee 253
C. Barus, Die Beziehung der Ionisation zur Kondensation bei Phosphor . . 253
F. Cook Gates, Wirkung der Hitze auf induzierte Radioaktivität 253
F. Giesel, Über den Emanationskörper aus Pechblende und über Radium . 31
— Über Polonium 213
Über Polonium und die reduzierende Eigenschaft des Radiums . . . 251
W. M. J. Hammer, Radium, Polonium und Actinium 99
K. A. Hofmann und J. Wohlf, Über das radioaktive Blei 99
— Das radioaktive Blei als permanent wirksamer Strahler 251
K. A. Hofmann und F. Zerban, Über radioaktives Blei 93
G. C. Schmidt, Über die Emanation des Phosphors 98
E. von Schweidler, Über die angebliche Radioaktivität und die Luminiszenz von Reten 252
J. Strutt, Die Herstellung und die Eigenschaften eines intensiv radioaktiven Gases aus metallischem Quecksilber 252

Photochemie.

J. C. Bose, Zusammenhang der Wirkung von Lichtstrahlen und elektrischen Strahlen auf die Materie 102
— Über die Ähnlichkeit zwischen Strahlung und [illegible] 102
— Über die Zugtheorie [illegible] 103
— Molekulare Zugtheorie [illegible] 103
Gibson Dyson und Arthur H[illegible], Die Verbindungen von Kohlenoxyd mit Chlor unter dem Einfluß des Lichtes 100
Emanuel Goldberg, Beitrag zur Kinetik [illegible] Reaktionen. Die Oxydation von Chinin durch Chromsäure 32
Charles Soret, Über die radioplane Empfindlichkeit des Chlorsilbers . . . 101

Seite

Theorie photographischer Prozesse.

J. M. Eder, Experimentaluntersuchungen über Solarisationsphänomene. Entwicklung solarisierter Schichten zu normalen Negativen. — Unterschied des Solarisationsbildes auf Jodsilber und auf Bromsilber 33
B. Homolka, Über die Anwendung der Alkalisalze der Amidoessigsäure zum Abschwächen photographischer Silberbilder 249
F. König, Über die Entwicklung von Chlorsilbergelatineplatten 211
A. u. L. Lumière u. Seyewetz, Über die Anwendung des Trioxymethylens als Ersatz des Alkalis bei der Entwicklung 77
A. Miethe, Über die sensibilisierende Wirkung der sogenannten Isocyanine . 57
L. Radke, Solarisation und Umkehrwirkung in der Photographie 249
A. Reiss, Über die Wirkung von Metallsalzen auf das latente Bild 78
C. Schinuck, Beobachtung über Negativumkehrung 250
E. Valenta, Über Pyrogallolentwickler mit ätzenden Alkalien 35
— Zur Kenntnis der chemischen Vorgänge beim Schwärzen des mit Sublimat gebleichten Silberbildes mit Thiosulfaten 249
— Das Sensibilisierungsvermögen einiger Farbstoffe der Cyaningruppe auf Bromsilbergelatine 249

Farbenphotographie.

Die Farbenphotographie nach dem Ausbleichverfahren 111
R. Neuhauss, Neues über direkte Farbenphotographie (Ausbleichverfahren) . 250
Sanger Shepherd, Farbenphotographie auf Papier 114

Anwendungen der Photographie.

R. Kempf-Hartmann, Photographische Darstellung der Schwingungen von Telephonmembranen 58
W. Nikolaew, Photographieren des Augenhintergrundes der Tiere 106
E. Rühmer, Die photographische Darstellung von Mikrophon-Stromcurven . 114

Spektroskopie. Entfernungsmessung u. s. w.

P. Gratzner, Einige Versuche über stereoskopisches Sehen 144
E. Hering, Herstellung stereoskopischer Wandbilder mittels Projektionsapparates 111
W. A. Nagel, Stereoskopie und Tiefenwahrnehmung im Dämmerlicht . . 145
C. Pulfrich, Über die bis jetzt mit dem Stereokomparator auf astronomischem Gebiete erhaltenen Versuchsergebnisse 109

Physiologische Optik.

E. Aschkinass und W. Caspari, Über den Einfluß dissoziierender Strahlen auf organisierte Substanzen, insbesondere über die bakterienschädigende Wirkung der Becquerelstrahlen 31
V. Bonussi, Über den Einfluß der Farbe auf die Größe der Zöllnerschen Täuschung 146
Magnus Blix, Die sog. Poggendorffsche optische Täuschung 148
A. Brückner und E. Th. v. Brücke, Zur Frage der Unterscheidbarkeit rechts- und linksäugiger Gesichtseindrücke 107
E. Hering, Von der Farbenempfindlichkeit unabhängige Änderung der Weißempfindlichkeit 257
C. Hess, Zur Kenntnis des Ablaufs der Erregung im Sehorgan 256
— Untersuchungen über das Abklingen der Erregung im Sehorgan nach kurzdauernder Reizung 256
J. v. Kries, Über die Abhängigkeit der Dämmerungswerte vom Adaptionsgrade 254
— Theoretische Studien über die Umstimmung des Sehorgans 254
W. A. Nagel, Zwei optische Täuschungen 148
— Tiefenwahrnehmung im Dämmerlicht 145
E. v. Oppolzer, Grundzüge einer Farbentheorie 257
Em. Rádl, Untersuchungen über die Lichtreaktionen der Arthropoden . . . 108
E. Storch, Über das räumliche Sehen 143
M. Straub, Die normale Refraktion des menschlichen Auges 325
Otto Weiss, Das Verhalten der Akkommodation beim stereoskopischen Sehen 306

Seite

Technisches Repertorium.

Herstellung von Silberspiegeln 248
Die Entwicklung von Albertscher Collodiumemulsion 115
Prinzip des Sigriste-Verschlusses 116

Neue Bücher.

Felix Auerbach, Das Zeisswerk und die Carl Zeiss-Stiftung in Jena . . . 181
A. Frhr. von Hübl, Die Ozotypie 357
Dr. Lüppo-Cramer, Die Trockenplatte, ihre Eigenschaften und ihre Behandlung in der photographischen Praxis 258
Winkelmann, Handbuch der Physik 213

Preislisten, geschäftliche Mitteilungen . . . 78, 118, 214, 288, 324, 358, 490

Als Referenten haben an diesem Bande mitgearbeitet die Herren:

E. Baur (München),
M. Bodenstein (Leipzig),
H. Breyer (Tübingen-Göppingen),
E. Englisch (Stuttgart),
A. Hagenbach (Bonn),
F. Harms (Erlangen),
K. A. Hofmann (München),
H. Kauffmann (Stuttgart),
H. Konen (Bonn),
A. Pflüger (Bonn),
K. Schaum (Marburg),
M. Seddig (Marburg),
W. Seitz (Würzburg),
J. Zenneck (Straßburg).

Namen- und Sachregister.

Referate sind durch * hinter der Seitenzahl bezeichnet.

Abschwächer, Amidoessigsäure, Homolka 249*.
Absorption, von Gläsern, Pflüger 140. — Lichtfilter, Hartmann 259. — — von Tartrazin, Precht 262. — von Metallnitraten, Hartley 142*. — — und Konstitution, Formánek 247*; Hartley 211*.
Aceton im Entwickler, Lumière u. Seyewetz 283.
Actinium, Hammer 90*.
Adaptionsgrad, V. Kries 254*.
Akkomodation beim stereoskop. Sehen, Weiss 106*.
Alberts Collodiumemulsion 115*.
Allan, Radioaktivität von Schnee 253*.
Aluminium, Photometrie, Eder 245*.
Amidoessigsäure, Homolka 249*.
Angström, Äquivalent d. Lichtgeschwindigkeit 30*.
Arthropoden, Radl 105*.
Aschkinass u. Caspari, Bakterientötung durch Strahlen 37*.
Astronomie, Stereokomparator, Pulfrich 109*.
Atomgewicht des Radiums, Runge und Precht 29*.
Auerbach, Zeisswerk 181*.
Auge, Refraktion Straub 323*. Augen-Untergrund, Photographie, Nikolaew 108*.
Ausbleichverfahren 111*; Neuhauss 250*.

Backeland, Wirkg. mit Teilchen angeblich. Papier 410. — Silberhalbbesetzte Platten 123.
Bakterien durch Bogenlichtstrahlen, Aschkinass u. Caspari 37*.
Barus, Ionisation durch Phosphor 253*.
Bogenlichtstrahlen u. Bakterien, Aschkinass u. Caspari 37*.
Brunsi, Zöllnersche Täuschung 146*.
Bücherkatalogisierapparate, Nawias 417.
Bunte, radioaktives, Hofmann und Wolf 90*, 251*.
Bürstenerscheinung, Täuschung 148*.
Chromatographie, Hartmann 210*. — — und Lüppo-Cramer, Eberhard 210*.
Chromatopseudoskop, Wirkungsweise, Metallnitrat-Platte 384.
Cross, Zugspannungsindicatrix 102*, 102*, 103*, 103*.
Crum, Brum, Schwarzschichten, Halogensilberschichten 377.

Bromsilber und Jodsilber, Eder 35* (Solarisation).
Brücknersche u. v. Brückesche, Gesichtseindrücke 107*.

Caspari, s. Aschkinass.
Chlorsilbergelatineplatten, König 212*.
Chinin, Oxydation durch Chromsäure, Goldberg 32*.
Chromsäure, Oxydation d. Chinins, Goldberg 32*.
Cohn, Metalloptik u. Maxwellsche Theorie 179*.
Cyanin, Reflexionsvermögen, Nutting 246*. — Sensibilisator, Miethe 37*, Valenta 249*.

Dämmerungswerte, v. Kries 254*.
Dechrojt, Schleier, Lumière u. Seyewetz 195. 277.
Donath, Projektionsapparat 94.
Drecker, Intensität der Lichthöfe 183.
Dynar 358*.
Dyson u. Harden, CO u. Cl im Licht 100*.

Eberhard, Siliciumspektrum 346. — u. Hartmann, Bogenspektren etc. 210*.
Eder, Sensitometrie 119. — Photometrie von Mg, Al, P 245*. — Solarisationsuntersuchungen 35*.
Emissionsspektren des Si, Eberhard 346. — Hg, Hagenbach u. Konen 342. — Kaklenoxyd, Lauwartz 160. — Tonerde, Loos 151. — ultrarote, Lehmann 135.
Englisch, Solarisation 364.
Entladungen, Kondensator, Hardén 180*. — Teslaströme, v. Wesendonk 180*.
Entwicklung, mit Aceton, Lumière und Seyewetz 283. — Metochinon, dieselben 78*, Trioxymethylen, dieselben 77*. — von Chlorsilbergelatine, König 212*. — solar. Schichten, Eder 35*. Precht 262. 355. — verzögerte, Precht 262. 355.
Erregung des Sehorgans, Hess 256*, 256*.

Farbe org. Stoffe, Kauffmann 60.
Farbenempfindlichkeit (photograph.), Eder 119. — König 174. Miethe 37*. Valenta 249*.
Farbenempfindung (physiol.), Hering 257*.
Farbenphotographie 111*. — Neuhauss 250*. — Sanger Shepherd 114*.
Farbentheorie, Oppolzer 387*.
Farbschleier, Lumière u. Seyewetz 195. 277.
Flammenspektra, ultrarote, Lehmann 135.
Filter für homog. Licht, Hartmann 259.
Formánek, Konstitution u. Absorption 247*.
Funkenspektren, Hartmann 210*. — und Eberhard 210*. — Konen 237. 289.

Gase, radioaktive, Strutt 252*.
Gates, Radioaktivität und Hitze 253*.
Giesel, Radium 31*. Polonium 213*. Polonium u. Radium 251*.
Gitteraufstellung, Kruppsche, Konen 325.
Goldberg, Oxydation d. Chinins d. Chromsäure 32*.
Goldstein, Kathodenstrahlen 250*.
Grützner, stereoskop. Verss. 244*.

Hagen u. Rubens, Reflexions- und Leitvermögen 179*.
Hagenbach und Konen, Emissionsspektrum d. Hg 342.
Halogensilber, bindemittelfreies, Schaum und Braun 377. Schaum 383.
Hammer, Radium, Polonium, Actinium 99*.
Harden s. Dyson.
Hardén, Entladungen eines Kondensators 180*.
Hartley, Absorption u. Konstitution 211*, — von Metallnitraten 142*. — brüchiges Pt, Konstitution 143*.
Hartmann, Lichtfilter f. homog. Licht 259. — Revision v. Rowlands Wellenlängensystem 215. — Bogen- u. Funkenspektren 210*. — u. Eberhard 210*.
de Hemptinne, Luminescenz von Gasen 98*.
Hering, Farbenempfindlichkeit des Auges 257*. — stereoskop. Wandbilder 111*.
Hess, Abklingen d. Erregg. im Sehorgan 256*, 256*.
Hofmann, Radioaktivität (Sammelref.) 79. — u. Wölfl, radioakt. Blei 99*. 251*. — u. Zerban, radioakt. Thor 99*.
Homolka, Amidoessigsäure im Abschwächer 249*.
v. Hübl, Ozotypie 357*.

Isocyanine, Miethe 37*.
Jodsilber, Eder 35*. — Lüppo-Cramer 1).
Jonisation bei Phosphor, Barus 253*.

Kathodenstrahlen, Goldstein 250*.
Kayser, Ziele der Zeitschrift 1.
Kauffmann, Farbe org. Stoffe (Ref.) 60.
Kempf-Hartmann, Schwingungen der Telephonmembranen 38*.
Kirchhoffsches Gesetz, Pflüger 8. — Pringsheim 360. 391. — Richarz 5. 359.
Kondensator, Entladungen Hardén 180.
Konen, Funkenspektren (Sammelref.) 237. 289. — Kruppsche Gitteraufstellung 325. — u. Hagenbach, Emissionsspektrum d. Hg. 342.
König, Sensibilisatoren (Orthochrom T) 174. — Entw. v. Chlorsilbergel. 212*.
Konstitution und Absorption, Formánek 247*. — Hartley 211*.
Kothe, stereosk. Photographie 268. 305.
Kruppsche Gitteraufstellung, Konen 325.
v. Kries, Dämmerungserscheinungen und Adaption 254*. — Umstimmung d. Sehorgans 254*.

Latentes Bild, Baekeland 419. — Bogojawlensky 384. — Reiss 78*.
Lauwartz, Bandenspektrum d. Tozerd 160.
Lehmann, Teleobjektiv, Spektroskop 41. — ultrarote Flammenspektren 135.
Leit- und Reflexionsvermögen, Hagen. und Rubens 179*.
Lichteinheit, Ångström 30.
Lichtfilter, Hartmann 259. — ultraviolett durchlässige, Wood 301*.
Lichthöfe, Drecker 183.
Loos, Bandenspektren des Kohlenoxyds 151.
Lumière u. Seyewetz, Aceton im Entw. 283. — Metochinon 71*. — Trioxymethylen im Entw. 77*. — dichroitischer (Farb-)Schleier 135. 277.
Lumineszenz v. Gasen, de Hemptinne 98*. — v. Reten, v. Schweidler 262*.
Lüppo-Cramer, Photochemie d. Jodsilbers 11. — von Schwermet. 50. Trockenplatte 258*.
Lymann, Spektrallinienverlangerung 211*.

Magnesium, Photometrie, Eder 245*.
Maxwellsche Theorie und Metalloptik, Cohn 179*.
Metalle, Wirkg. auf phot. Platte, Bogojawlensky 384.
Metalloptik, Cohn 179*. — bei langen Wellen, Planck 179*.
Metallsalze, Wirkg. auf photogr. Platte, Reiss 78*.
Metochinon, Lumière u. Seyewetz 71*.
Miethe, Sensibilation d. Isocyanine 37*.
Mikrophonstromkurven, Ruhmer 114*.
Mikrophotographie, stereoskop., Scheffer 18. 149.

Nagel, Tiefenwahrnehmung im Dämmerlicht 145*. — opt. Täuschungen 148*.
Namias, Alkalisalze org. Säuren u. Bichromatpräp. 417.
Neuhauss, Ausbleichverfahren 250*.
Nutting, Reflexionsvermögen v. Ultraviolett 246*.

Objektive, Dynar 358*. Unofokal 306.
Oppolzer, Farbentheorie 387*.
Optik, Metall-, Cohn 179*. — bei langen Wellen, Planck 179*.
Optische Täuschungen, Benussi 146* Blix 148*. — Nagel 148*.
Orthochrom, König 174.
Ozotypie, v. Hübl 357*.

Papiere, phot., Baekeland 419. 422.
Pechblende, Giesel 31*.
Pflüger, Turmalin zur Prüf. d. Kirchhoffschen Ges. 8. — Absorpt. v. Glas im phot. wirksamsten Teil d. Spektrums 140. 214.
Phosphor, Emanation, G. C. Schmidt 98*. — Ionisation u. Kernbildg., Barus 253* Photometrie, Eder 245*.
Photochemie, v. Halogensilber, Schaum u. Braun 377; Schaum 383. — von Jodsilber, Lüppo-Cramer 11. — von Schwermetallen, dies. 50. — von Kohlenmonoxyd plus Chlor, Dyson u. Harden 100*. — Kinetik der Oxydation von Chinin, Goldberg 32*. — Zugtheorie, Rose 102*. 102*. 103*. 103*.
Photometrie, von brennendem Mg, Al, P, Eder 245*.
Planck, opt. Eigenschaften d. Metalle f. lange Wellen 179*.
Platin, brüchiges, Konstitution, Hartley 143*.
Poggendorffsche Täuschung, Blix 148*.
Polonium, Giesel 213*. 251*. Hammer 90*.
Precht, Absorption des Tartrazins 202. verzögerte Entw. 202; Anwend. 355. u. Runge, Radium 29*.
Pringsheim, Kirchhoffsches Gesetz 360. — Strahlungsgesetze 361.
Projektionsapparat, Donath 94. — stereoskop. Wandtafel, Hering 111*.
Pulfrich, Stereokomparator in der Astronomie 100*.
Pyrogallolentwickler, Valenta 35*.

Quecksilber, Emissionsspektrum, Hagenbach u. Konen 342. Radioaktivität, Strutt 252*.
Radioaktivität, Allg. 253*. Barus 253*. Cook Gates 252*. — Giesel 31. 213. 251*. — Hofmann 70. — Hofmann u. Wolf 251*. Hofmann u. Zerban 91*. — v. Schweidler 262*. Strutt 252*. — s. Radium.
Radium 324. — Giesel 31*. Hammer 90*. Runge u. Precht 29*.
Radke, Solarisation, Photographie 240*.
Raff, Antiquitäten 105*.
Reflexionsvermögen, Nutting 246*. — u. Leitvermögen, Hagen u. Rubens 179*.
Reflektor v. Ang. Strnad 325*.
Reiß, Sabattier 301.
Reiss, Metallsalze und latentes Bild 78*.
Reinganum, Kirchhoffsche Gesetze 359.
Rowland, Wellenlängenmessungen, Hartmann 215.
Rubens, s. Hagen.
Ruhmer, Mikrophonstromkurven 114*.
Runge u. Precht, Radium 29*.

Sabattier, Solarisation, Photographie 114*.
Schaum, Photochemie 383. — u. Braun, Photochemie des Halogensilbers 377.
Scheffer, W., Mikrophotographie 18. 149.
Schmidt, G. C., Phosphor-Emanation 98*.
Schmidt, W., Ionisation d. Luft durch Radium 253*.
Schweidler, v., Radioaktivität 262*.
Seyewetz, Lumière u., Aceton im Entw. 283. — Metochinon 71*. — Trioxymethylen im Entw. 77*.
Solarisation, Photographie, Sabattier 114*.
Spektren, Flammen-, Lehmann 135.
Spektroskop, Lehmann 41.
Stereoskop. Wandtafel, Hering 111*.
Strahlungsgesetze, Pringsheim 361.
Strutt, Radioaktivität 252*.
Stufenphotometer, Eder 245*.
Sulfitentwickler, Valenta 35*.

Tartrazin, Absorption, Precht 202.
Teleobjektiv, Lehmann 41.
Thermoelektrizität, Nutting 246*.
Tozerd, Bandenspektrum, Lauwartz 160.
Trioxymethylen im Entw., Lumière u. Seyewetz 77*.
Turmalin zur Prüf. d. Kirchhoffschen Ges., Pflüger 8.

Ultrarote Flammenspektren, Lehmann 135.
Ultraviolett durchlässige Lichtfilter, Wood 301*.
Unofokal, Objektive 306.

Valenta, Sulfitentwickler 35*.
Verlangerung der Linienspektren, Lymann 211*.
Vogel, Farbenempfindlichkeit 174.

Wellenlängenmessungen, Rowland, Hartmann 215.
Wood, ultraviolett durchlässige Lichtfilter 301*.

Zugtheorie, Rose 102*. 102*. 103*. 103*.

Schleier, dichroit., Lumière u. Seyewetz 195. 277.
Schmidt, G.C., Emanation d. Phosphors 98*.
Schmuck, Negativumkehrung 250*.
Schnee, radioaktiver, Allan 253*.
v. Schweidler, Reten 252*.
Schwermetalle, Photochemie, Lüppo-Cramer 50.
Sehorgan, Erregung u. Ablauf ders., Hess 256*. 256*. - - Umstimmung, v. Kries 254*.
Selen, Reflexionsvermögen, Nutting 246*.
Sensibilisation, Cyanin, Valenta 249*. — Orthochrom, König 174. Isocyanine, Miethe 37.
Sensitometrie, Eder 119.
Seyewetz, s. Lumière u. Seyewetz.
Sigriste-Verschluß 116*.
Silberspiegel 248*.
Silicium, Spektrum, Eberhard 346.
Solarisation, Eder 35*. — Englisch 364. — Radke 249*. — Schmuck 250*.
Spektroskopie, u. Teleobjektiv, Lehmann 41.
Spektrum, v. Hg, Hagenbach u. Konen 342. Kohlenoxyd, Loos 151. — Radium, Runge u. Precht 29*. - - Si, Eberhard 346. — Tonerde, Lauwartz 160. — Funken, Konen 237. 280. — Ultrarote, Lehmann 135. — Absorption, Pflüger 140. — Linienverlängerung, Lymann 211*.
Stereoskopie, Grutzner 144*. — Hering 111*. Kothe 268. 305. Nagel 145*. - Pulfrich 109*. - - Scheffer 18 149. Storch 145*.
Spitzenausströmung der Teslaentladungen, v. Wesendonk 180*.
Strahlungsgesetze, Pflüger 8. Pringsheim 360. 391. — Richarz 5. 359. - und Zwang, Bose 102*. 102*. 103*. 103*.
Storch, raumliches Sehen 145*.
Straub, Refraktion d. Auges 523*.
Stromkurven v. Mikrophonen, Ruhmer 114*.
Strutt, Radioakt. v. Gasen aus Hg 252*
Sublimatverstärkung, Valenta 249*.

Tartrazin, Absorption, Precht 262.
Täuschungen, opt., Nagel 148*. — Zöllnersche, Benussi 146*. — Poggendorffsche Blix 148*.
Telephonmembrane, Kempf-Hartmann 38*.
Teleobjektiv, u. Spektroskopie, Lehmann 41.
Teslaentladungen, v. Wesendonk 180*.
Thor, radioakt., Hofmann u. Zerban 99*.
v. Traubenberg, elektr. Zerstreuung am Vesuv 143*.
Turmalin, Kirchhoffsches Gesetz, Pflüger 8.

Ultrarote Flammenspektra, Lehmann 135.
Ultraviolett, Absorption, Pfluger 140. Filter, Wood 30*. - - Reflexionsvermögen, Nutting 246*.
Unofokal 390*.
Urania, Donath 94.

Valenta, Pyroentwickler 35*. - Sensibilisation d. Cyanin 249*. - Sublimatverstärker 249*.
Verschluß, Sigriste 116*.

Wandbilder, stereoskop., Hering 111*.
Weiss, Akkommodation bei stereoskop. Sehen 106.*
Wellenlängen, Revision von Rowlands, Hartmann 215.
v. Wesendonk, Spitzenausströmungen d. Teslaentl. 180*.
Winkelmann, Handbuch d. Physik 213*.
Wölfl, s. Hofmann u. Wölfl.
Wood, ultraviolett durchlässige Filter 30*.

Zeisswerk, Auerbach 181*.
Zerban, s. Hofmann u. Zerban.
Zerstreuung, elektr., v. Traubenberg 143*.
Zöllnersche Tauschung, Benussi 146*.
Zugtheorie d. Licht- u. elektr. Wirkungen Bose 102*. 102*. 103*. 103*.

1904. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper; von W. Wien.*

I.

Von den bisher aufgestellten Differentialgleichungen, welche die Maxwellsche Theorie für den Fall der Bewegung verallgemeinern, hat sich die von H. A. Lorentz[1]) am besten bewährt. Die Theorie von H. Hertz[2]), wonach der Träger der elektromagnetischen Wirkungen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen soll, wie die Materie, wird durch den von Michelson und Morley[3]) wiederholten Fizeauschen Versuch widerlegt, der zeigt, daß ein Lichtstrahl von bewegtem Wasser nur in mit einem bestimmten Bruchteil der Geschwindigkeit mitgezogen wird. Da bisher alle Versuche eine Bewegung des Lichtäthers in dem von Materie freien Raum nachzuweisen gescheitert sind, liegt für die Theorie keine Veranlassung vor, sich mit der Komplikation einer derartigen Möglichkeit zu befassen.

Neuerdings ist von E. Cohn[4]) ein System von Gleichungen für bewegte Körper aufgestellt, das in der Tat zunächst geeignet erscheint, den beobachteten Tatsachen gerecht zu werden. So hat es vor dem Lorentzschen sogar den Vorzug, das negative Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches ohne Zuhilfenahme einer weiteren Hypothese zu erklären, während Lorentz die Annahme machen muß, daß die Dimensionen der festen Körper von der Geschwindigkeit abhängig sind.

Dagegen enthält die Theorie von Cohn wieder in anderer Hinsicht Schwierigkeiten.

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

2) H. Hertz, Wied. Ann. **41.** p. 369. 1890.

3) W. A. Michelson u. E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3) **31.** p. 377. 1886.

4) E. Cohn, Ann. d. Phys. **7.** p. 29. 1902.

Bezeichnen wir den elektrischen Vektor mit $\mathfrak{E}$, den magnetischen mit $\mathfrak{H}$, die Lichtgeschwindigkeit mit c, die Translationsgeschwindigkeit mit v, so lauten die Differentialgleichungen von Cohn in bekannten Vektorsymbolen für den freien Äther, bezogen auf relative Koordinaten

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H}\right], \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H}\right].$$

Bei stationärer Bewegung eines geladenen Körpers würden daher die Differentialgleichungen direkt in die eines ruhenden Körpers übergehen und nur eine magnetische Wirkung, dem Biot-Savartschen Gesetz entsprechend, übrig bleiben. Diese Folgerung steht mit der Heavisideschen Lösung der Feldgleichungen bewegter Ladungen im Widerspruch und da diese durch die Versuche von Kaufmann eine weitgehende Bestätigung erfahren hat, so scheint mir die Theorie von Cohn nicht mit den Tatsachen in Übereinstimmung zu stehen, wenn nicht eine Verschiedenheit der elektromagnetischen Energie, je nachdem die Erregung von bewegten oder von ruhenden Körpern ausgeht, angenommen wird. Dies würde wieder zu neuen prinzipiellen Schwierigkeiten führen.

Eine andere Schwierigkeit erwächst der Cohnschen Theorie aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines von einer bewegten Quelle ausgehenden Lichtstrahles.

Nehmen wir als Richtung des Strahles die x-Achse und den, in derselben Richtung sich bewegenden, leuchtenden Punkt unendlich entfernt, so daß wir nur ebene Wellen zu betrachten haben. Die y-Achse soll dem elektrischen Vektor parallel sein. Dann sind nur $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ von Null verschieden und wir haben die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}_z$ ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x \partial t} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2},$$

oder wenn wir $1 - v^2/c^2 = \varkappa^2$ setzen

$$\varkappa^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}.$$

Setzen wir einer ebenen Welle entsprechend

$$\mathfrak{E}_y = A e^{i(nt - bz)},$$

so wird

$$x^2 n^2 - 2 n b v = c^2 b^2,$$

woraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\frac{n}{b} = \frac{v + \sqrt{v^2 + c^2 x^2}}{x^2} = \frac{c + r}{x^2}$$

folgt.

Dies ist die auf relative Koordinaten bezogene Geschwindigkeit.

Bringt man den betrachteten Punkt durch Hinzufügen einer Geschwindigkeit $-v$ in absolute Ruhe, so ist die absolute Geschwindigkeit des Strahles

$$\frac{c+v}{x^2} - v = c\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^3}{c^3} + \ldots\right).$$

Es würde sich daher ein Lichtstrahl, der von einem bewegten leuchtenden Punkt kommt, schneller fortpflanzen als wenn er von einem ruhenden ausgegangen wäre und zwar in erster Näherung unabhängig von der Bewegungsrichtung des leuchtenden Punktes, ein Resultat, das die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und damit die Grundlagen der Maxwellschen Theorie angreifen würde.

Denn es muß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer einmal von der Strahlungsquelle losgelösten Strahlung gleichgültig sein, ob sich diese bewegt hat oder nicht.

Der größte Teil der Schwierigkeiten für die Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper rührt davon her, daß man einerseits die Bewegungsmöglichkeit des Äthers in die Theorie aufnehmen wollte, andererseits eine Trennung von Äther und Materie für nötig hielt. Stellt man sich dagegen auf den zuerst von Lorentz eingenommenen Standpunkt, daß alle Wechselwirkung zwischen Äther und Materie nur durch die Elementarladungen der Atome hervorgerufen werden, so fallen fast alle jene Schwierigkeiten von selbst fort und das Maxwellsche System für ruhende Körper genügt völlig, um auch die Elektrodynamik bewegter Körper ohne Zuhilfenahme irgend einer Hypothese zu umspannen. Da von der anderen Seite die

chemischen Eigenschaften der Körper notwendig fordern, die Kontinuität der Materie aufzugeben und die Materie als aus Elementarquanten in unstetiger Weise bestehend anzunehmen, so scheint mir um so mehr die Annahme dieses Systems geboten.

Hiernach ist ein Bewegungsvorgang für die Elektrodynamik die Bewegung einer Elementarladung durch den Raum. Es ist dies ein Vorgang, der noch vollständig in die Theorie ruhender Körper gehört. Denn daß sich ein Quantum Elektrizität bewege, und welche elektromagnetischen Wirkungen dadurch hervorgerufen werden, das vermag die Maxwellsche Theorie ohne weiteres zu behandeln. Solange es sich um geordnete Bewegungen handelt, d. h. die Komplikationen der Wärmelehre nicht mitspielen, ist es im allgemeinen vollständig ausreichend, die Bewegung einer einzigen Elementarladung zu verfolgen. Jedenfalls gehören die Erscheinungen, die auf der Wechselwirkung vieler Atome beruhen, zu denen, die eine genauere Behandlung vorläufig ausschließen.

Aus diesem Grunde ist auch das allgemeine Integral, das Lorentz[1]) als Lösung seiner Gleichungen für die Wirkung der Bewegung beliebig vieler Atome benutzt, zwar für prinzipielle Untersuchungen von großem Werte, für die Behandlung des Problems der Bewegung eines einzelnen Elementarquantums, eines „Elektrons" weniger geeignet, weil es für diesen Spezialfall zu kompliziert ist. Infolgedessen ist auch die Theorie bewegter Elektronen über den bereits von Heaviside erledigten Fall, der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, nicht erheblich hinausgekommen. Von Wichtigkeit ist die zuerst ebenfalls von Lorentz eingeführte, dann von Abraham[2]) auf Grund der Poincaréschen[3]) „elektromagnetischen Bewegungsgröße" abgeleiteten Unterscheidung zwischen „longitudinaler" und „transversaler" Masse, deren quantitative Messung indessen auf Anwendung der Maxwellschen ponderomotorischen Wirkungen und demnach auf einer sehr wahrscheinlichen, aber nicht ganz hypothesenfreien Grundlage beruht.

---

1) H. A. Lorentz, Théorie électrique de Maxwell et son application aux corps mouvants p. 119. Leiden 1892. Der erste Beweis dieses Satzes ist von Lorenz gegeben: Pogg. Ann. **131**. p. 243—263. 1867.

2) M. Abraham, Ann. d. Phys. **10**. p. 105. 1903.

3) H. Poincaré, Festschrift für H. A. Lorentz, p. 252. Leiden 1900.

Es soll im folgenden zunächst gezeigt werden, daß man zu einem mit dem Lorentzschen System der Elektrodynamik übereinstimmenden gelangt entweder wenn man ein Elektron als ruhend annimmt und den Äther mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit strömen läßt, wobei dann der Einfluß der Bewegung nach Analogie der Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen in der Weise einzuführen ist, daß man

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v_x \frac{\partial}{\partial x} - v_y \frac{\partial}{\partial y} - v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

setzt, oder indem man die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen benutzt und die Ladung mit ihrer Geschwindigkeit sich bewegen läßt. Wir werden damit gleichzeitig ein Integral erhalten, das die Verallgemeinerung eines für die Ruhe bekannten elektromagnetischen Vorganges für eine beliebige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit enthält.

1. Beziehung der Lorentzschen Gleichungen zu denen für ruhende Körper.

Wir legen die x-Achse in die augenblickliche Bewegungsrichtung und nehmen im übrigen an, daß die Geschwindigkeit eine beliebige kontinuierliche und differenzierbare Funktion der Zeit ist, und setzen

$$v_x = f(t) = v,$$

dann erhalten wir das Gleichungssystem für diese Bewegung, wenn wir in das für ruhende Körper anstatt

$$\frac{d}{dt} \quad \text{jetzt} \quad \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}$$

setzen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - v_x \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - v_x \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Elimination von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gibt die allgemeine Gleichung

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2f \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + (f^2 - c^2) \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \dfrac{df}{dt} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \qquad = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Wir führen nun zwei neue Variabele ξ und η anstatt t und x ein mit Hilfe der Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha t + \beta \varphi(t) + \gamma x \\ \eta = \alpha_1 t + \beta_1 \varphi(t) + \gamma_1 x \end{cases} \qquad \varphi(t) = \int f(t)\, dt.$$

Anstatt der Gleichung (2) erhalten wir dann die neue

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi} \left\{ \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - 2f \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + (f^2 - c^2) \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \right\} \\ + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \left\{ \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - 2f \dfrac{\partial \eta}{\partial t} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + (f^2 - c^2) \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) \right\} \\ + 2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\, \partial \eta} \left\{ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} - f \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial t} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right. \\ \qquad \left. + (f^2 - c^2) \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \right\} \\ + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \left\{ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \dfrac{df}{dt} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \right\} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \left\{ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \dfrac{df}{dt} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \right\} \\ \qquad = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Wir können diese Differentialgleichung auf die zurückführen, die aus (2) entsteht, wenn $v_x = 0$ gesetzt wird. Zu dem Zweck verlangen wir, daß die Faktoren von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

verschwinden sollen. Nun ist

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \beta \frac{df}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t} = \beta_1 \frac{df}{dt}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \gamma_1,$$

$$(5) \qquad \beta = \gamma, \quad \beta_1 = \gamma_1,$$

wenn die Faktoren von $\partial \varphi / \partial \xi$ und $\partial \varphi / \partial \eta$ verschwinden sollen. Der Faktor von $\partial^2 \varphi / \partial \xi\, \partial \eta$ verschwindet, wenn außerdem noch $\alpha \alpha_1 = c^2 \gamma \gamma_1$ ist. Wir behalten dann die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} (\alpha^2 - c^2 \gamma^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} (\alpha_1^2 - c^2 \gamma_1^2) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

die von derselben Form, wie die gewöhnliche

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi$$

ist, wenn wir in dieser anstatt x die Größe $\eta c/\sqrt{\alpha_1^2 - c^2\gamma_1^2}$ anstatt c die Größe $c/\sqrt{\alpha^2 - c^2\gamma^2}$ setzen. Das Integral $F(ct-r)/r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ der gewöhnlichen Gleichung geht daher für unsere in das

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2\gamma^2}}\,\xi - r\right), \quad r^2 = y^2 + z^2 - \frac{\eta^2 c^2}{\sqrt{(\alpha_1^2 - c^2\gamma_1^2)}}$$

über.

Bestimmt nun der Punkt $r = 0$ die Lage des Elektrons, so darf, da wir von der Vorstellung ausgegangen sind, daß das Elektron ruht und der Äther sich an ihm vorbeibewegt, r die Zeit nicht enthalten, d. h. η muß von der Zeit unabhängig sein. Wenn wir das erreichen wollen, müssen wir in (3) $\gamma_1 = \infty$ setzen. Aus (5) folgt aber $\beta_1 = \gamma_1 = \infty$, so daß wir die gewünschte Unabhängigkeit überhaupt nicht erreichen *können*. Vielmehr ist für $\gamma_1 = \infty$

$$\eta = \gamma_1 (\varphi(t) + x), \quad r^2 = y^2 + z^2 + \frac{\eta^2}{\gamma_1^2} = y^2 + z^2 + (\varphi(t) + x)^2.$$

Es ist daher r nicht unabhängig von der Zeit und der Punkt $r = 0$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $d\varphi/dt$ in der Richtung $-x$, d. h. er ruht in bezug auf den Äther. Setzen wir dann noch $\xi = t$, also $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, so haben wir das gewöhnliche Integral für einen ruhenden Punkt $r = 0$. Unsere Transformation ergibt im allgemeinen kein Integral, das sich auf einen gegenüber dem Äther bewegten Punkt bezieht, sondern nur die Einsicht, daß wir in den Gleichungen (1) $v_x = 0$ setzen und die Bewegung des Punktes $r = 0$ dadurch einführen können, daß wir r von der Zeit in der Weise abhängen lassen, daß die vorgeschriebene Bewegung dargestellt wird.

Nur in dem speziellen Fall, daß v_x konstant ist, führt die benutzte Transformation auch zur allgemeinen Integration. In diesem Fall ist nämlich $df/dt = 0$ und die Beziehungen (5) fallen infolgedessen fort. Die Konstanten α können ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen gleich 1 gesetzt werden. Setzen wir in diesem Fall

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = t + \dfrac{\beta}{\varkappa} x \\ \eta = t + \dfrac{\delta}{\varkappa} x \end{cases} \qquad v_x = v, \quad \varkappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2},$$

so geht (4) über in

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\left(1-\dfrac{2v\beta}{\varkappa}-c^2\beta^2\right)+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\left(1-\dfrac{2v\delta}{\varkappa}-c^2\delta^2\right) \\ \qquad +2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(1-\dfrac{v}{\varkappa}(\delta+\beta)-c^2\beta\delta\right) \\ \qquad =c^2\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \end{cases}$$

mit der einzigen Vorschrift, daß

$$(8)\qquad 1-\frac{v}{\varkappa}(\delta+\beta)-c^2\beta\delta=0$$

sein soll.

Hier ist das Integral

$$\frac{1}{r}F\left(\frac{c\xi}{\sqrt{1-\dfrac{2v}{\varkappa}-c^2\beta^2}}-r\right),$$

wo

$$r^2=y^2+z^2-\frac{c^2\eta^2}{1-\dfrac{2v\delta}{\varkappa}-c^2\delta^2}.$$

Es ist dies die Lösung, die für $v=0$ und $\xi=t$, $\eta=x$ auch hier der bekannten Funktion eines strahlenden Punktes

$$\frac{F(ct-r)}{r}$$

entspricht.

Unsere Lösung ist jedoch allgemeiner, als sie durch die Bewegung vorgeschrieben ist, weil eine der beiden Konstanten β oder δ willkürlich ist.

Soll sich der Punkt $r=0$ gegenüber dem Medium mit der Geschwindigkeit v verschieben und ist das Koordinatensystem fest mit ihm verbunden, so darf r die Zeit nicht enthalten, dann muß $\delta=\infty$ sein. Jetzt läßt sich dieser Vorschrift genügen.

Aus (8) ergibt sich nämlich

$$-\frac{v}{\varkappa}=c^2\beta,$$

$$r^2=y^2+z^2+\frac{x^2}{\varkappa^2}$$

und

$$1-\frac{2v\beta}{\varkappa}-c^2\beta^2=\frac{1}{\varkappa^2},$$

so daß unsere Lösung

$$\frac{1}{r}F\left(c\varkappa t-\frac{v}{c\varkappa}x-r\right)$$

wird.

Wir können zu dieser Lösung aber nach unseren obigen Ergebnissen auch gelangen, wenn wir $v = 0$ setzen, also von den Gleichungen für ruhende Körper ausgehen, dafür aber die Abhängigkeit von r von der Zeit so vorschreiben, daß der Wert $r=0$ mit einer Geschwindigkeit, die wir jetzt v_0 nennen wollen, sich im Raume verschiebt.

Wenn $v = 0$ ist, so ist $\varkappa = 1$.

Die Gleichung (8) ergibt

$$1 - c^2 \beta \delta = 0 .$$

Soll sich $r=0$ mit der Geschwindigkeit v_0 verschieben, so muß

$$t + \frac{\delta x}{\varkappa} = t + \delta x = t - \frac{x}{v_0}, \quad \text{d. h.} \quad \delta = -\frac{1}{v_0}$$

sein. Dann ist also

$$\beta = -\frac{v_0}{c^2},$$

$$1 - \frac{2 v \beta}{\varkappa} - c^2 \beta^2 = 1 - c^2 \beta^2 = 1 - \frac{v_0^2}{c^2} = \varkappa_0^2,$$

$$r^2 = y^2 + z^2 + \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} (v_0 t - x)^2 = y^2 + z^2 + \frac{1}{\varkappa_0^2} (v_0 t - x)^2$$

und die allgemeine Lösung

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{c t}{\varkappa_0} - \frac{v_0}{\varkappa_0 c} x - r\right).$$

Setzen wir nun $v_0 t - x = - x'$, so bezieht sich x' auf ein mit dem Punkt $r = 0$ fest verbundenes Koordinatensystem.

Dann haben wir

$$r^2 = y^2 + z^2 + \frac{x'^2}{\varkappa_0^2}$$

und

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{c}{\varkappa_0} t - \frac{v_0}{\varkappa_0 c} (v_0 t + x') - r\right)$$

$$= \frac{1}{r} F\left(c \varkappa_0 t - \frac{v_0}{\varkappa_0 c} x' - r\right).$$

Die beiden Lösungen stimmen also überein und wir haben das bemerkenswerte Resultat, daß wir für unsere Lösung die Form der Gleichungen für bewegte Körper gar nicht brauchen, sondern von den Gleichungen für ruhende Körper ausgehen können.

2. Geschwindigkeit der Ausbreitung der Störungen.

Aus der Lösung

$$\frac{1}{r} F\left(c\varkappa t - \frac{v}{c\varkappa} x - r\right),$$

für die wir auch setzen können

$$\frac{1}{r} F \frac{1}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c t - \frac{v}{c} x - r\right), \tag{9}$$

wo jetzt $r^2 = x^2 + \varkappa^2(y^2 + z^2)$ ist, folgt, daß gleiche Phasen der im Punkte $r = 0$ erregten Störungen mit der Geschwindigkeit

$$\frac{x}{t} = \frac{c\varkappa}{\frac{v}{c\varkappa} + \frac{1}{\varkappa}}$$

in der Richtung x laufen. Da diese Geschwindigkeit relativ zum Koordinatensystem ist, so muß in bezug auf einen ruhenden Punkt die Geschwindigkeit v addiert werden. Dann ergibt sich

$$v + \frac{x}{t} = \frac{c\varkappa}{\frac{v}{c\varkappa} + \frac{1}{\varkappa}} + v = \frac{c^2\varkappa^2}{v + c} + v = \frac{c^2\varkappa^2 + v^2 + vc}{v + c} = c.$$

Die absolute Ausbreitungsgeschwindigkeit ist demnach konstant. Für die senkrecht zur Bewegungsrichtung sich ausbreitende Strahlung ist

$$\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{t} = c\varkappa, \text{ oder in erster Näherung } = c\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist ebenfalls relativ. Denken wir uns von dem leuchtenden Punkt einen Strahl ausgehend, der von einem der Bewegungsrichtung parallelen Spiegel zum Ausgangspunkt zurückreflektiert wird, so würde dieser Strahl dem betrachteten entsprechen. In Wirklichkeit hat sich aber der Ausgangspunkt während des Hin- und Rückganges verschoben und es kehrt nicht der genau senkrecht vom strahlenden Punkte ausgehende Strahl zurück, sondern einer, der mit diesem den Winkel bildet, dessen Kosinus $1/\varkappa$ ist. Ein solcher Strahl legt daher einen längeren Weg zurück, wodurch die scheinbare Verkleinerung der Geschwindigkeit erklärt ist.[1])

1) Vgl. H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie etc. p. 121.

3. Einfluß der Bewegung auf die Strahlung.

Das Integral der Gleichung (2), das wir gewonnen haben, erlaubt uns die Theorie der Strahlung, soweit sie für ein ruhendes Strahlungszentrum bekannt ist, für den Fall der Bewegung zu verallgemeinern. So läßt sich die von Hertz[1]) gegebene Theorie der elektromagnetischen Strahlung eines schwingenden Dipols streng für den Fall der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ableiten. Zu den Grundlagen der Hertzschen Theorie gehört die Annahme, daß bei der Schwingung ein Alternieren der Ladungen des elektrischen Dipols stattfindet. Unter der Voraussetzung, daß die Amplitude eines einzelnen hin und her pendelnden Elektrons unendlich klein gegen die Wellenlänge der ausgesandten Wellen ist, kommt man zu denselben Ausdrücken, die Hertz für den schwingenden Dipol gefunden hat.[2]) Man hat also in dieser Theorie auch Beschleunigungen eines Elektrons. Ob aber die Voraussetzung, unter der die Wirkung der schwingenden Bewegung eines einzelnen Elektrons mit der der Schwingungen eines Dipols übereinstimmt, auch für den Fall gilt, daß die Schwingung sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, bedarf einer besonderen Untersuchung.

Wir betrachten die beiden Fälle, in denen das Elektron in derselben Richtung schwingt, in der die Bewegung stattfindet oder in einer dazu senkrechten.

Wir nennen ξ_x die Verschiebung der Ladung e des Elektrons aus der Ruhelage und setzen

$$\xi_x = a \cos n t,$$

$$v_x = \frac{d \xi_x}{d t} = - a n \sin n t.$$

Die Funktion $F(c t - r)/r$ ist in diesem Fall für eine ruhende Strahlungsquelle

$$\frac{a e}{r} \cos b (c t - r), \quad b c = n,$$

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 1. 1889.

2) Vgl. H. A. Lorentz, l. c. p. 54.

und für den Fall der Bewegung nach Gleichung (9)

$$\frac{e\,a}{r}\cos\frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c\,t-\frac{v\,x}{c}-r\right),$$

$$\xi_x = a\cos b\varkappa c\,t, \qquad r^2 = x^2+\varkappa^2(y^2+z^2),$$

$$v_x = -\,a\,b\varkappa c\sin b\varkappa c\,t.$$

Setzen wir die Translationsgeschwindigkeit gleich v_0, so kann man in der Gleichung für longitudinale Schwingung

$$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}+(v_0+v_x)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial x}=c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H},$$

und in den entsprechenden Gleichungen v_x gegen v_0 vernachlässigen, wenn $a\,b\varkappa c$ klein gegen v_0 ist. Dies ist nun zwar immer zulässig, wenn a genügend klein ist. Für die Theorie der Strahlung ist aber ein anderer Umstand zu berücksichtigen Wenn nämlich das Glied $v_0\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}$ auf der linken Seite allein vorhanden ist, so ergibt sich keine Energiestrahlung, vielmehr nur zyklische Energieströmung. Wenn es sich also um Berechnung ausgestrahlter Energie handelt, so muß $v_x\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial x}$ beibehalten werden, wenn es nicht gegen $\partial\mathfrak{E}/\partial t$ vernachlässigt werden kann. Dies ist nur der Fall, wenn

$$1 \text{ groß gegen } b\,a\left(\frac{v}{c}\frac{1}{\varkappa}+\frac{x}{r}\frac{1}{\varkappa}\right) \quad \text{und} \quad \frac{a\,x}{r^2}$$

ist. Nähert sich v_0 der Lichtgeschwindigkeit, so nähert sich $\varkappa$ dem Werte Null. Die Vernachlässigung ist also nur erlaubt, wenn $b\,a/\varkappa$ klein bleibt, also b mit $\varkappa$ verschwindet.

Für longitudinale Schwingungen eines Elektrons, deren Erregungsstelle sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die der Lichtgeschwindigkeit nahe kommt, ist daher unsere Lösung nicht mehr gültig.

Die Schwingungszahl ist für die bewegte Strahlungsquelle

$$n = b\varkappa c.$$

Soll n konstant sein, so muß

$$\frac{b\,a}{\varkappa}=\frac{n\,a}{c\varkappa^2} \text{ klein gegen } 1$$

sein, wenn unsere Lösung gelten soll.

Ist demnach n nicht zu groß, so kann man, da a sehr klein sein wird, sehr nahe an die Lichtgeschwindigkeit herangehen. Für die Lichtgeschwindigkeit selbst bleibt indessen die Lösung ungültig.

Ist die Schwingung transversal in der Richtung z, so muß

$$v_z \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \text{ gegen } \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

vernachlässigt werden dürfen, d. h. es muß

$$1 \text{ groß gegen } \frac{b a z x}{r} \text{ und } \frac{a x^2 z}{r^3}$$

sein. Dies wird selbst dann zutreffen, wenn $b x$ endlich bleibt, also b für $v = c$ unendlich groß wird.

Unter dieser Voraussetzung gilt für transversale Schwingungen unsere Lösung auch, wenn die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird.

Durch die Integration der Gleichung (2) ist indessen das Problem der Strahlung nicht erledigt, vielmehr müssen auch die Differentialgleichungen (1) durch die Werte der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ erfüllt werden.

Die Systeme dieser Werte sind verschieden, je nachdem man eine longitudinale oder transversale Schwingung betrachtet.

Für eine longitudinale Schwingung setzen wir

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right),$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right).$$

Dann ist $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ identisch erfüllt und die Gleichungen (1) sind zum Teil identisch, zum Teil dann erfüllt, wenn die Funktion φ der Gleichung (2) Genüge leistet.

Das letztere ist nach (9) der Fall, wenn wir

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{b}{x}\left(x c t - \frac{v x}{c} - v\right),$$

$$r^2 = x^2 + (y^2 + z^2) x^2, \quad A = a e$$

setzen.

In der Nähe des Punktes $r = 0$ ist

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos b \varkappa c t.$$

Hier genügt φ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

so daß

$$\mathfrak{E}_x = - \varkappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

$$\mathfrak{E}_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

$$\mathfrak{E}_z = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

ist. Für $v = 0$ entspricht die Lösung der Hertzschen für einen in der Richtung x schwingenden Dipol, für $b = 0$ entspricht sie der Heavisideschen Lösung einer bewegten Ladung mit dem Unterschied, daß anstatt φ hier $\partial \varphi / \partial x$ auftritt. Durch Superposition der Wirkung zweier im Abstand dx voneinander befindlichen entgegengesetzt gleicher Ladungen muß in der Tat anstatt φ die Größe $(\partial \varphi / \partial x)\, dx$ auftreten, so daß A das elektrische Moment des Dipols bezeichnet. Wir haben daher in unserer Lösung die Schwingungen eines longitudinal bewegten Dipols vor uns.

Von besonderem physikalischen Interesse ist nun nicht das Feld, das durch die Schwingung hervorgerufen wird, sondern die ausgestrahlte Energie. Diese erhält man am einfachsten, wenn man den Poyntingschen Vektor über eine in großer Entfernung befindliche geschlossene Fläche integriert. Als diese Fläche wählen wir am zweckmäßigsten ein Ellipsoid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\varkappa^2} + y^2 + z^2 = \frac{r^2}{\varkappa^2}$$

mit der Vorschrift, daß r gegen alle anderen in Betracht kommenden Längen unendlich groß ist. Es ist dies ein Rotationsellipsoid, das in der Richtung der Bewegung um so mehr abgeplattet ist, je schneller die Bewegung erfolgt.

Da nach der Voraussetzung r groß gegen $1/b$ ist, so braucht man nur nach den im Argument des Kosinus enthaltenen Variabeln zu differenzieren. Dann ergibt sich, wenn wir

$$\frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c\,t - \frac{r\,x}{c} - r\right) = \alpha, \quad \varrho^2 = y^2 + z^2$$

setzen,

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{A\,b^2\,\varrho^2\,\varkappa^2}{r^3}\cos\alpha,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{A\,v\,b^2}{c}\frac{y}{r^2}\cos\alpha + \frac{A\,b^2}{c}\frac{x\,y}{r^3}\cos\alpha,$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{A\,v\,b^2}{c}\,z\cos\alpha + \frac{A\,b^2}{c}\frac{x\,z}{r^3}\cos\alpha,$$

$$\mathfrak{H}_y = -A\,b^2\frac{z}{r^2}\left(1 + \frac{x}{r}\frac{v}{c}\right)\cos\alpha,$$

$$\mathfrak{H}_z = A\,b^2\frac{y}{r^2}\left(1 + \frac{x}{r}\frac{v}{c}\right)\cos\alpha.$$

Ferner, wenn wir mit $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Vektor bezeichnen

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{A^2 b^4 \varrho^2 \cos^2\alpha\, c}{r^4}\left\{\frac{x}{r}\frac{c^2+v^2}{c^2} + \frac{v}{c}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{S}_y = -\frac{A^2 b^4 \varrho^2 \cos^2\alpha\, y\,\varkappa^2\, c}{r^5}\left\{1 + \frac{x}{r}\frac{v}{c}\right\},$$

$$\mathfrak{S}_z = -\frac{A^2 b^4 \varrho^2 \cos^2\alpha\, z\,\varkappa^2\, c}{r^5}\left\{1 + \frac{x}{r}\frac{v}{c}\right\}.$$

Die mittlere ausgestrahlte Energie während einer Schwingung ist für die Zeiteinheit

$$S = \frac{b\varkappa c}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{b\varkappa c}} dt \int \mathfrak{S}\, d\omega,$$

da die Schwingungsdauer $2\pi/b\varkappa c$ ist.

Das Integral

$$\int \mathfrak{S}\, d\omega = \int d\omega\,(\mathfrak{S}_x \cos N_x + \mathfrak{S}_y \cos N_y + \mathfrak{S}_z \cos N_z)$$

ist über die Fläche des Ellipsoids zu erstrecken.

Das Flächenelement des Ellipsoids ist

$$d\omega = \varrho\, d\Theta\, ds,$$

wo Θ den Umdrehungswinkel der Ellipse

$$\frac{x}{\varkappa^2} + \varrho^2 = \frac{r^2}{\varkappa^2}$$

um die x-Achse, und ds das Linienelement dieser Ellipse ist.

Nun ist

$$\cos N_s = \frac{d\varrho}{ds}, \qquad y = \varrho \sin \Theta,$$

$$\cos N_y = -\frac{dx}{ds}, \qquad z = \varrho \cos \Theta.$$

Ferner

$$\cos N_y = \cos N_\varrho \sin \Theta,$$

$$\cos N_z = \cos N_\varrho \cos \Theta.$$

Setzen wir auf der Oberfläche des Ellipsoids, wo $r = \text{const.}$ ist

$$\varrho = \frac{r}{\varkappa} \sin \vartheta, \quad d\varrho = \frac{r}{\varkappa} \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

$$x = r \cos \vartheta, \quad dx = -r \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

so ist

$$\int \mathfrak{S} \, d\omega = \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{\pi} d\vartheta \left\{ \frac{r^2}{\varkappa^2} \cos \vartheta \sin \vartheta \, \mathfrak{S}_x + \frac{r^2}{\varkappa} \sin^2 \vartheta \sin \Theta \, \mathfrak{S}_y + \frac{r^2}{\varkappa} \sin^2 \vartheta \cos \Theta \, \mathfrak{S}_z \right\}.$$

Hieraus ergibt sich

$$S = -\frac{\pi b^4 A^2 c}{15 \varkappa^4} \left\{ 20 - 12 \frac{v^2}{c^2} \right\}.$$

Für $v = c$ wird also die ausgestrahlte Energie unendlich, wenn nicht b mindestens von der Ordnung $\varkappa$ unendlich klein wird.

Wir haben oben gesehen, daß für die Schwingungen eines Elektrons unsere Lösung nur gilt, wenn $b/\varkappa$ endlich bleibt. In diesem Fall bleibt daher die ausgestrahlte Energie endlich. Wir können daher keine Folgerung derart ziehen, daß die Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit, die ja bei einem bereits mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Elektron während der longitudinalen Schwingung erfolgen müßte, unmöglich wäre. Aber andererseits spricht auch nichts für diese Möglichkeit, denn da sowohl b als auch $\varkappa$ verschwinden sollen, so ist die Beschleunigung während der longitudinalen Schwingung unendlich klein von zweiter Ordnung.

Während die Lösung für eine longitudinale Schwingung für $b = 0$, d. h. unendlich langsame Schwingungen der Heavi-

sideschen Lösung für einen bewegten Dipol entspricht, ist dies bei der einfachsten Lösung einer transversalen Schwingung nicht der Fall. Das System, das die Heavisidesche Lösung ergeben würde, müßte nämlich lauten:

$$\mathfrak{E}_x = -\varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z},$$
$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$
$$\mathfrak{E}_z = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Denn dann hätten wir für $\varphi = \text{const.}/r$, da dann die Gleichung

$$\varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

erfüllt ist:

$$\mathfrak{E}_x = -\varkappa^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Dies würde einem Dipol entsprechen, dessen Achse in der z-Achse liegt, während die Bewegung in der x-Achse erfolgt.

Wenn aber φ von der Zeit abhängt, so lassen sich mit diesem System die allgemeinen Maxwellschen Gleichungen (1) nicht ohne Zusatzglieder erfüllen.

Dieses leistet dagegen das folgende System:

$$\mathfrak{E}_x = -\varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z},$$
$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$
$$\mathfrak{E}_z = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$
$$\mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right),$$
$$\mathfrak{H}_y = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right),$$
$$\mathfrak{H}_z = 0.$$

φ hat der Gleichung (2) zu genügen. Dann sind die Gleichungen (1) erfüllt. Wir nehmen wieder

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c t - x \frac{v}{c} - r\right).$$

Gegenüber dem ersten System haben wir hier noch ein zweites elektrisches Feld mit den Komponenten

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

$$\mathfrak{E}_y = 0.$$

Diese Kraftlinien sind sämtlich parallel der xz-Ebene. Sie werden durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const.}$$

dargestellt.

In der Nähe von $r = 0$ ist

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos b\,x\,c\,t.$$

Die Gleichung $\partial\varphi/\partial x = \text{const.}$ ist dort für $t = \text{const.}$

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2 + x^2\varrho^2})^3} = \text{const.} = C,$$

also

$$x^2 = C^2(x^2 + x^2\varrho^2)^3.$$

Die Linien gehen also sämtlich durch den Punkt $r = 0$.

Da die Gleichung nur x^2 und ϱ^2 enthält, so folgt, daß die Linien symmetrisch sowohl zur x-Achse wie zur z-Achse sind.

Schreiben wir die Gleichung

$$\sqrt{\frac{x^{2/3} - C^{2/3}x^2}{x^2\,C^{2/3}}} = \varrho,$$

so folgt zunächst, daß für $x = 0$ auch $\varrho = 0$ ist. Für einen anderen Wert von ϱ kann x nicht verschwinden.

Außerdem ist

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{{}^1/_3\,x^{-1/3} - C^{2/3}x}{x\sqrt{C^3}\sqrt{x^{2/3} - C^{2/3}x^2}}.$$

Für $x = 0$ wird demnach $d\varrho/dx = \infty$. Im Punkte $r = 0$ geht also die Linie senkrecht durch die x-Achse. Die ϱ-Achse wird demnach überhaupt nicht, die x-Achse im Punkte $\varrho = 0$ und im Punkte $x = 1/\sqrt{C}$ geschnitten und zwar, wie schon aus der Symmetrie folgt, senkrecht. In der Tat ist auch für $x = 1/\sqrt{C}$ der Wert von $d\varrho/dx$ unendlich. $d\varrho/dx$ verschwindet für $x = 1/\sqrt[4]{2\,C^2}$. Dies ist also der größe Wert von ϱ.

Für große C bleiben die Linien in der Nähe des Nullpunktes und entfernen sich mit abnehmendem C.

Wir haben es also mit einem System zyklischer elektrischer Kraftlinien zu tun, die nicht an den Ladungen des Dipols endigen.

Nehmen wir φ unabhängig von der Zeit an, so erhalten wir eine *neue Lösung* für die transversale Bewegung eines Dipols, nämlich das System

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{H}_x = \frac{v}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{v}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \mathfrak{H}_z = 0,$$

während nach Heaviside das System

$$\mathfrak{E}_x = -\varkappa^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{H}_z = -\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

gilt.

Die Eindeutigkeit der Lösung wird dadurch gewahrt, daß die Superposition eines transversal bewegten elektrischen Dipols und eines dazu senkrecht stehenden magnetischen Dipols, dessen Moment proportional $v/c\varkappa^2$ ist, die erste Lösung gibt, wenn man für jeden das Heavisidesche System einsetzt. Wir müssen daher auch bei unserer transversalen Schwingung das Mitwirken eines magnetischen Dipols annehmen. Auf die kompliziertere Lösung, bei der kein Magnet mitwirkt, gedenke ich in einer besonderen Untersuchung einzugehen.

Für unsere Lösung, im Fall eine Schwingung des Dipols vorhanden ist, erhalten wir

$$\mathfrak{E}_x = A b^2 \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right) \frac{z \cos\alpha}{r^2},$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{A b^2 x^2 y z \cos\alpha}{r^5},$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{A b^2}{r x^2} \left(\left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)^2 + \frac{y^2 x^4}{r^2}\right),$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{A b^2 y \cos\alpha}{r^3} \left\{1 + \frac{v}{c}\frac{x}{r}\right\},$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{A b^2 \cos\alpha}{r x^2} \left\{\frac{x^2}{r^2}\frac{v}{c} + \frac{v}{c} + \frac{x}{r}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\right\},$$

und

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{A^2 \cos^2\alpha\, c}{r^2 x^4} \left\{\left(\frac{x^4 y^2}{r^2} + \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)^2\right)\left(1 + \frac{v}{c}\frac{x}{r}\right)\left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{S}_y = -\frac{A^2 \cos^2\alpha\, y\, c}{r^3 x^2} \left\{\left(1 + \frac{v}{c}\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x^4 y^2}{r^2} + \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)^2\right)\right\},$$

$$\mathfrak{S}_z = -\frac{A^2 \cos^2\alpha\, z\, c}{r^3 x^2} \left\{\left(1 + \frac{v}{c}\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x^4 y^2}{r^2} + \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)^2\right)\right\},$$

woraus

$$S = -\frac{\pi b^4 A^2 c}{15 x^6}\left(20 + 56\frac{v^2}{c^2} - 12\frac{v^4}{c^4}\right)$$

folgt.

Hier wird die Ausstrahlung selbst dann unendlich, wenn b/x endlich bleibt.

Obwohl nun nach der Erledigung des Problems für den Fall einer Schwingung unter den gemachten Voraussetzungen auch alle anderen hierher gehörenden Fälle durch Zerlegung nach Fourierschen Reihen behandelt werden können, gebe ich doch einen anderen Wert der Funktion F, bei dem kein periodischer Vorgang eintritt. Ich setze

$$\varphi = \frac{A}{r} \operatorname{arctg} \varepsilon \left(x^2 c t - \frac{v x}{c} - r\right).$$

Die Betrachtungen, die wir für die Schwingung angestellt haben, lassen sich ohne weiteres auf diesen Fall übertragen.

Anstatt des periodischen Hin- und Hergehens haben wir hier nur einen einmaligen Wechsel von einem negativen zu einem positiven Wert. Ist ε sehr groß, so geht der Wechsel des arctg von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ in der Nähe des Nullwertes des Argumentes vor sich und verläuft für größere positive oder negative Werte asymptotisch.

Ist die Größe von ε an dieselben Bedingungen geknüpft, wie die von $b/\varkappa$, so können wir bei genügend kleiner Amplitude den Vorgang als einen einmaligen transversalen oder longitudinalen Impuls auffassen.

Nehmen wir dieselben Systeme für die $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wie bei der Schwingung und nehmen r als unendlich groß an, so ergibt sich, wenn wir

$$\varepsilon\left(\varkappa^2 c\,t - \frac{v}{c}x - r\right) = \varepsilon\beta$$

setzen, für den longitudinalen Impuls

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2\varkappa^4 c\varrho^2 A^2}{r^4(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\left(\frac{v}{c}+\frac{x}{r}\right)\left(1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right),$$

$$\mathfrak{S}_y = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2\varkappa^4 c\varrho^2 A^2}{r^4(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\cdot\frac{x^2 y}{r}\left(1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right),$$

$$\mathfrak{S}_z = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2\varkappa^4 c\varrho^2 A^2}{r^4(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\cdot\frac{x^2 z}{r}\left(1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right).$$

Bilden wir nun

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \mathfrak{S}\, d\omega,$$

so ergibt sich:

$$S = -\frac{2\pi^2 A^2\varepsilon^2}{15\varkappa^2}\left(5-\frac{3v^2}{c^2}\right).$$

Für den transversalen Impuls erhalten wir

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2 c A^2}{r^2(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\left\{\frac{\varkappa^4 y^2}{r^2}+\left(\frac{v}{c}+\frac{x}{r}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right\}\left\{\frac{v}{c}+\frac{x}{r}\right\},$$

$$\mathfrak{S}_y = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2 c\varkappa^2 y A^2}{r^3(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\left\{1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right\}\left\{\frac{\varkappa^4 y^2}{r^2}+\left(\frac{v}{c}+\frac{x}{r}\right)^2\right\},$$

$$\mathfrak{S}_z = -\frac{4\varepsilon^6\beta^2 c\varkappa^2 z A^2}{r^3(1+\varepsilon^2\beta^2)^4}\left\{1+\frac{v}{c}\frac{x}{r}\right\}\left\{\frac{\varkappa^4 y^2}{r^2}+\left(\frac{v}{c}+\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

und

$$S = -\frac{2\pi^2 A^2\varepsilon^2}{15\varkappa^4}\left\{5+14\frac{v^2}{c^2}-\frac{3v^4}{c^4}\right\}.$$

Hier wird S sowohl für den longitudinalen wie für den transversalen Impuls für $v=c$ unendlich, solange ε endlich bleibt.

Bei der Beurteilung dieses Ergebnisses für die Frage der Möglichkeit der Überlichtgeschwindigkeit muß berücksichtigt werden, daß wir die Strahlung über eine unendliche Zeit integriert haben.

Für die Gültigkeit der Lösung genügt es, daß εa sehr klein ist. Die Strahlung, die ausgegeben wird, um bei Lichtgeschwindigkeit noch eine sehr kleine Strecke a während sehr langer Zeit mehr zurückzulegen, als die Lichtgeschwindigkeit selbst zurücklegt, wird daher unendlich sein. Daraus würde hervorgehen, *daß bei Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit unendliche Arbeitsleistung verbraucht würde.*

Die große Ausstrahlung bei transversaler Bewegung des Elektrons würde zeigen, *daß in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit ein Elektron sich nicht mehr würde ablenken lassen.*

Die durch transversale Bewegung eines Elektrons allein hervorgerufene Strahlung gewinnen wir erst durch Benutzung der allgemeineren Lösung, bei der die Mitwirkung eines Magneten fortfällt. Ich gedenke dann auch auf die Vergleichung unserer Ergebnisse mit denen von Abraham [1]) näher einzugehen.

Obwohl nun die gewonnene Integration weit entfernt ist, eine vollständige Theorie des bewegten Elektrons zu ermöglichen, scheint sie mir einen großen Teil der wichtigeren Fragen beantworten zu können. Mit einer Integration für beliebige veränderliche Geschwindigkeiten ist insofern wenig gewonnen, als dann die augenblicklichen Vorgänge immer noch von allen vorausgegangenen Geschwindigkeiten abhängen. Das eigentliche Interesse wird sich daher zunächst vorzugsweise auf die Frage beschränken, was eintritt, wenn ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Elektron kleine Änderungen seines Weges erfährt.

Würzburg, Physikalisches Institut, November 1903.

1) M. Abraham, l. c.

(Eingegangen 30. November 1903.)

2. *Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper; von W. Wien.*

II.

In meiner letzten Untersuchung über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper hatte ich eine Methode angegeben, die ein allgemeines Integral für den Fall liefert, daß ein, beliebige elektromagnetische Störungen aussendendes Zentrum mit konstanter, aber beliebig großer Geschwindigkeit bewegt wird. Diese Integrationsmethode hatte ich auf die longitudinalen und transversalen Schwingungen eines elektrischen Dipols angewendet. Während die ersteren vollständige Erledigung gefunden hatten, war die Behandlung der transversalen Schwingung insofern unvollständig geblieben, als die genauere Diskussion des gewonnenen Lösungssystems zeigte, daß in ihr noch die Mitwirkung eines magnetischen Dipols vorausgesetzt werden muß, so daß eine Anwendung dieser Lösung auf die besonders wichtigen Probleme von Störungen, die nur durch Elektronen hervorgerufen werden, nicht ohne weiteres zulässig ist.

Es ist nun der Zweck dieser Untersuchung, die erwähnte Lücke auszufüllen, und diejenige Lösung für transversale Schwingungen zu behandeln, bei der keine Mitwirkung eines Magneten stattfindet.

Wir gelangen zu dieser Lösung durch die Erwägung, daß wir die Beteiligung des Magneten, die sich einfach superponiert, von der Lösung abzuziehen haben.

Die Übersicht über diese Verhältnisse erhält man am einfachsten, wenn man vorläufig Abhängigkeit von der Zeit ausschließt und die beiden bereits von mir angegebenen Lösungen für einen transversal bewegten Dipol vergleicht.

Diese beiden Systeme lauteten:

$$(\mathfrak{E}_I)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}, & \mathfrak{H}_x = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}, \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}, & \mathfrak{H}_y = -\frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, & \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{E}_{II})\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\varkappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}, & \mathfrak{H}_x = 0. \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}, & \mathfrak{H}_y = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, & \mathfrak{H}_z = -\frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}. \end{cases}$$

Das mit II bezeichnete erhält man aus der Heavisideschen Lösung für eine bewegte Einzelladung durch Superposition.

Wir bilden nun das II entsprechende System für einen magnetischen Dipol, dessen Achse der y-Achse parallel ist, und dessen Moment den Faktor v/c enthält. Hierfür gewinnen wir

$$\left(\frac{v}{c}\mathfrak{H}_{II}\right)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = 0, & \mathfrak{H}_x = \frac{v}{c}\varkappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \\ \mathfrak{E}_y = \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}, & \mathfrak{H}_y = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, & \mathfrak{H}_z = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}. \end{cases}$$

Addieren wir nun $(\mathfrak{E}_{II})$ und $\left(\mathfrak{H}_{II}\frac{v}{c}\right)$, so gewinnen wir $(\mathfrak{E}_I)$, das nur noch mit dem Faktor $\varkappa^2$ multipliziert erscheint.

Bezeichnen wir diese Relation durch die Gleichung

$$\mathfrak{E}_{II} + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_{II} = \varkappa^2\mathfrak{E}_I,$$

so können wir eine entsprechende herleiten

$$\frac{v}{c}\mathfrak{H}_{II} + \frac{v^2}{c^2}\mathfrak{E}_{II} = \frac{v}{c}\varkappa^2\mathfrak{H}_I,$$

woraus

$$\mathfrak{E}_{II}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \varkappa^2(\mathfrak{E}_I - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_I),$$

$$\mathfrak{E}_{II} = \mathfrak{E}_I - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_I$$

folgt.

Diese Beziehung können wir heuristisch verwerten, um für den allgemeinen Fall, wo φ von der Zeit abhängt, aus dem bekannten Lösungssystem I

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}, \qquad \mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t} - v\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}\right),$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}, \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} - v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right),$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \mathfrak{H}_z = 0$$

dasjenige zu ermitteln, bei dem die Mitwirkung eines Magneten fehlt. Wir müssen zunächst das entsprechende, mit dem Faktor v/c versehene System für den magnetischen Dipol aufstellen. Dieses lautet:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t} - v\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\right), \qquad \mathfrak{H}_x = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

$$\mathfrak{E}_y = 0, \qquad \mathfrak{H}_y = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\frac{v}{c},$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} - v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right), \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}.$$

Die Subtraktion beider Gleichungssysteme muß dann das gesuchte liefern und wir erhalten somit

$$\mathfrak{E}_x = -\varkappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}, \qquad \mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}, \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + \frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\mathfrak{E}_z = \varkappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}, \qquad \mathfrak{H}_z = -\frac{v}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}.$$

Dieses System leistet nun in der Tat alles verlangte. Es geht für $v=0$ in das Hertzsche Lösungssystem für einen schwingenden Dipol, für $\partial\varphi/\partial t = 0$ in das System über, das man aus der Heavisideschen Lösung einer bewegten Ladung für einen transversal bewegten elektrischen Dipol erhält.

Wir können diese Lösung benutzen, um die Strahlung eines transversal schwingenden Dipols zu berechnen.

Setzen wir wieder

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c\,t - \frac{v}{c}x - r\right),$$

$$r^2 = x^2 + (y^2+z^2)\varkappa^2, \quad \varkappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad \alpha = \frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c\,t - \frac{v}{c}x - r\right),$$

dann erhalten wir

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$= \frac{A}{r} b^2 \varkappa^2 \frac{x z}{r^2} \cos\alpha,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{A}{r} b^2 \varkappa^2 \frac{y z}{r^2} \cos\alpha,$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{A}{r} b^2 \cos\alpha \left(\left(\frac{x}{r} + \frac{v}{c}\right)\frac{x}{r} + \frac{\varkappa^2 y^2}{r^2}\right),$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{A}{r} b^2 \varkappa^2 \frac{y}{r} \cos\alpha,$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{A}{r} b^2 \cos\alpha \left(\left(\frac{x}{r} + \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c}\varkappa^2 \frac{z^2}{r^2}\right),$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{A}{r} b^2 \cos\alpha \, \varkappa^2 \frac{v}{c}\frac{y z}{r^2}.$$

Ferner ergibt sich

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{A^2 b^4 c}{r^2}\cos^2\alpha \left\{\left(\frac{\varkappa^2 y^2}{r^2} + \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r} + \frac{v}{c^4} - \frac{v}{c}\frac{\varkappa^2 z^2}{r^2}\right) + \varkappa^4 \frac{y^2 z^2}{r^4}\frac{v}{c}\right\}.$$

$$\mathfrak{S}_y = -\frac{A^2 b^4 c}{r^2}\cos^2\alpha \left\{-\frac{v}{c}\varkappa^4 \frac{z^2 x y}{r^4} + \frac{y \varkappa^2}{r}\left(\frac{\varkappa^2 y^2}{r^2} + \left(\frac{v}{c} + \frac{x}{r}\right)\frac{x}{r}\right)\right\}.$$

$$\mathfrak{S}_z = -\frac{A^2 b^4 c}{r^2}\cos^2\alpha \left\{\frac{\varkappa^4 y^2 z}{r^3} + \varkappa^2 \frac{z x}{r^2}\left(\frac{x}{r} + \frac{v}{c}\right) - \varkappa^4 \frac{v}{c}\frac{z^2 x}{r^4}\right\}$$

und

$$S = \frac{b \varkappa c}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{b \varkappa c}} dt \int \mathfrak{S}\, d\omega$$

über ein unendlich großes Ellipsoid integriert

$$= -\frac{\pi b^4 A^2 c}{15 \varkappa^2}\left\{20 - 4\frac{v^2}{c^2}\right\},$$

und für den Fall, daß wir anstatt

$$\cos\frac{b}{\varkappa}\left(\varkappa^2 c t - \frac{v}{c} x - r\right)$$

die Funktion

$$\operatorname{arctg} \varepsilon \left(\varkappa^2 c t - \frac{v}{c} x - r\right)$$

annehmen

$$S = -\frac{2\pi^2 A^2 \varepsilon^2}{15}\left(5 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Die Ausstrahlung ist also für endliche Werte von ε oder von $b/\varkappa$ auch für $v = c$ nicht unendlich. Sie wird aber unendlich, wenn $b\varkappa$ endlich bleibt für $v = c$.

Endliche Werte von $b\varkappa$ bedeuten endliche Werte der Schwingungszahl. Für diese ist die Ausstrahlung unendlich bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit. Elektronen in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit sind also nicht mehr ablenkbar.

Wenn wir unsere Ergebnisse

$$S_\varepsilon = -\frac{\pi b^4 A^2 c}{15 \varkappa^4}\left(20 - 12\frac{v^2}{c^2}\right)$$

und

$$S_t = -\frac{\pi b^4 A^2 c}{15 \varkappa^2}\left(20 - 4\frac{v^2}{c^2}\right)$$

mit den Ergebnissen von Abraham[1]) vergleichen, so zeigt sich in der Abhängigkeit von v/c ein Mangel an Übereinstimmung. Hr. Abraham findet für den von v/c abhängigen Faktor $1/\varkappa^2$ im einen, und 1 im anderen Falle. Für kleine Werte von v/c sind sie

$$1 + \frac{v^2}{c^2} \quad \text{und} \quad 1,$$

während sie sich aus unseren Werten

$$1 + \tfrac{1}{5}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{und} \quad 1 + \tfrac{4}{5}\frac{v^2}{c^2}$$

ergeben.

Da Hr. Abraham seine Rechnungen nicht mitgeteilt hat, so ist es nicht möglich, dem Grund dieser Verschiedenheit nachzuspüren.

Schließlich möchte ich noch auf den in diesen Untersuchungen hervorgetretenen Umstand besonders hinweisen, daß die Einführung magnetischer Pole notwendig war, um die Eindeutigkeit der Lösungen zu wahren. Obwohl nun in dem symmetrischen Bau der Maxwellschen Gleichungen die Existenz magnetischer Quanta ebenso wie die elektrischer ganz gleichberechtigt erscheint, so ist doch die Frage von besonderer Wichtigkeit, ob wirkliche magnetische Elementarquanten anzunehmen sind. In den bisherigen Theorien tritt die Neigung hervor, die Wechselwirkung zwischen Äther und Materie nur den elektrischen Elementarquanten zuzuschreiben und die

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. **10**. p. 105. 1903.

magnetischen Eigenschaften der Körper auf Bewegung dieser zurückzuführen.[1]) Magnetische Quanten sind hiernach nur Fiktionen nach Analogie der Ampèreschen magnetischen Doppelschicht auf einer von einem linearen Stromleiter umschlossenen Fläche. Unterstützt wird diese Auffassung durch die Tatsache, daß es isolierten positiven oder negativen Magnetismus nicht gibt.

Nun ist das magnetische Quantum der von uns eingeführten magnetischen Dipole ebenfalls Null und wir könnten die Behauptung aufstellen, daß diese Dipole ebenfalls nur fingiert sind, um eine besondere Anordnung magnetischer Kraftlinien, die von der Bewegung des elektrischen Dipols herrühren, darzustellen. Bedenklich ist hierbei aber die Willkür in der verschiedenen Auffassung des elektrischen und magnetischen Dipols, die in der Theorie ganz gleichberechtigt auftreten, ferner die Notwendigkeit, die Eindeutigkeit der Lösungen aufzugeben. Denn wenn wir die magnetischen Dipole nur als fingiert ansehen, dann sind die beiden betrachteten Lösungen für einen transversal bewegten elektrischen Dipol gleichberechtigt, was für die theoretische Behandlung äußerst mißlich sein dürfte. Nehmen wir dagegen die Möglichkeit der Existenz magnetischer Quanten, die ganz analog den elektrischen direkt auf den Äther einwirken, an, so sind die beiden Lösungen als verschieden anzusehen, weil es natürlich einen Unterschied machen muß, ob außer dem elektrischen Dipol noch ein wirklich existierender magnetischer mitwirkt oder nicht.

Würzburg, Physik. Institut, Januar 1904.

1) F. Richarz, Ber. d. Münchener Akad. 24. 1894.

(Eingegangen 7. Januar 1904.)

3. *Über positive Elektronen und die Existenz hoher Atomgewichte;* von W. Wien.

Durch meine Beobachtungen[1]) positiver Elektronen hatte sich ergeben, daß die Ablenkungen bei diesen nicht wie bei den negativen konstant, sondern kontinuierlich veränderlich sind. Hieraus hatte ich geschlossen, daß die spezifische Ladung veränderlich ist, daß wir also entweder die Bildung großer Molekülkomplexe oder die Möglichkeit einer weiteren Teilung des elektrischen Elementarquantums annehmen müssen.

Nun hat Hr. Stark[2]) auf eine dritte Möglichkeit hingewiesen, um meine Versuche zu erklären. Er macht die Annahme, daß es nur mit dem einen Elementarquantum geladene positive Elektronen und außerdem noch Moleküle gibt, die elektrisch neutral durch Aufnahme eines negativen Elektrons aus einem positiven Elektron entstehen können. Die kontinuierlich verschiedene Ablenkung würde sich dann dadurch erklären, daß die Neutralisation eines positiven Elektrons an verschiedenen Stellen der Bahn erfolgt. Da das Molekül im Augenblick der Neutralisation der Einwirkung der ablenkenden magnetischen oder elektrischen Kräfte entzogen wird, so werden diese Kräfte mit verschiedener Zeitdauer auf die fortbewegten Elektronen einwirken und demnach Ablenkungen verschiedener Größe hervorrufen.

Diese Hypothese würde, wenn sie sich mit allen beobachteten Tatsachen vereinigen ließe, unbedingt die einfachste sein und die Annahme einer veränderlichen spezifischen Ladung wäre ohne Bedenken zu ihren Gunsten aufzugeben.

---

1) W. Wien, Wied. Ann. **65**. p. 445. 1898; Ann. d. Phys. **5**. p. 421. 1901; **8**. p. 244. 1902; **9**. p. 660. 1902.

2) J. Stark, Physik. Zeitschr. **4**. p. 581. 1903. Ich möchte bemerken, daß dieselbe Hypothese bereits vor einem Jahr von Hrn. G. Mie in einem an mich gerichteten Brief ausgesprochen ist.

Nun läßt sich über die Zulässigkeit der Hypothese des Hrn. Stark direkt durch den Versuch entscheiden. Wenn es nur neutrale Moleküle und Elektronen mit konstanter spezifischer Ladung gibt, so entsprechen den letzteren bei meinen Versuchen die ablenkbarsten Strahlen, die bereits durch mäßige Werte der magnetischen Kraft abgelenkt werden.

Wenn ich demnach die Strahlen auf einer Elektrode auffange, so müssen durch magnetische Kräfte die geladenen vollständig abgelenkt werden und nur neutrale zurückbleiben. Die Elektrode darf dann keine positive Elektrizität mehr empfangen.

Ich hatte bereits in einer meiner früheren Arbeiten[1]) die von positiven Elektronen an einem Bolometerstreifen erzeugte Wärme und die gleichzeitig abgegebene positive Elektrizität beobachtet. Dabei hatte sich gezeigt, daß in magnetischen Feldern die auf den Streifen fallende Elektrizität keineswegs auf Null sank, sondern einen erheblichen Betrag beibehielt.

Nun gebe ich zu, daß diese Versuche zur definitiven Entscheidung der vorliegenden Frage, wofür auch die ganze Versuchsanordnung nicht eingerichtet war, unzureichend sind. Es ist die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß die im magnetischen Feld übrig bleibende Elektrizität nicht direkt durch die Strahlen, sondern durch Diffusion oder unter den eigenen abstoßenden Kräften der positiven Elektronen auf den Bolometerstreifen gelangen.

Bei der prinzipiellen Wichtigkeit der Frage habe ich mich nun bemüht, Anordnungen zu treffen, bei denen eine sichere Entscheidung getroffen werden kann, ob die Hypothese des Hrn. Stark zulässig ist oder nicht. Zuerst habe ich Kanalstrahlen, die durch die Eisenelektrode meiner früher beschriebenen, im Magnetfeld befindlichen[2]) Röhre drangen, auf ein Kupferteilchen von 3 mm Durchmesser fallen lassen, das von einem in die Röhre eingesetzten, zur Erde abgeleiteten Kupferblechkästchen von allen Seiten umgeben war. Die Kanalstrahlen fielen durch eine Öffnung in das Kästchen ein. Die

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 5. p. 433. 1901.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 262. 1902.

Zuleitung zur Auffangelektrode war durch eine zweite seitliche Öffnung des Kästchens isoliert eingeführt. Bei Erregung des Elektromagneten mit dem stärksten Strom ging die auf die Elektrode fallende Elektrizitätsmenge nur etwa auf ein Viertel herunter.

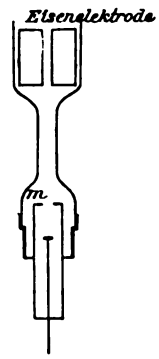


Fig. 1.

Es ergab sich also im wesentlichen eine Übereinstimmung mit meinen früheren Ergebnissen.

Diese Anordnung hat den Nachteil, daß in dem schützenden Metallkasten zwei Öffnungen angebracht werden mußten, durch die doch noch Diffusion positiver Elektronen ins Innere möglich wäre.

Besser war eine Anordnung, bei der ein Messingzylinder *m* in die Röhre eingekittet wurde (Fig. 1), in den wieder die Auffangelektrode eingekittet war. Das Ergebnis mit dieser Anordnung war das gleiche wie mit der zuerst beschriebenen.

Indessen genügten mir auch diese Versuche nicht.

Ich hielt es für notwendig nachzuweisen, daß eine geschützte Elektrode, die sich außerhalb des Strahlenbündels befindet, überhaupt keine Elektrizität erhält, während im Strahlenbündel Elektrizität auffällt, die auch durch starke magnetische Kräfte nicht vollständig abgelenkt wird. Ich benutzte daher die in Fig. 2 gezeichnete Röhre.

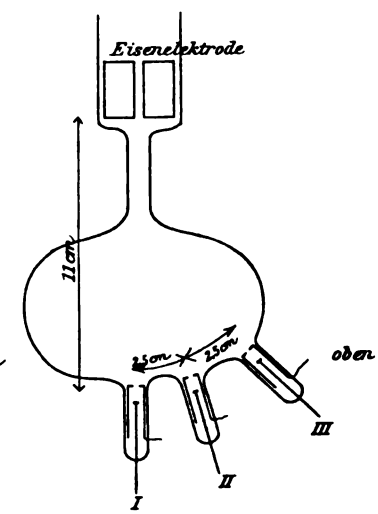


Fig. 2.

Das Ansatzröhrchen I liegt zentral und wird von den unabgelenkten Kanalstrahlen in der Mitte getroffen. Hier befindet sich die von einem zur Erde abgeleiteten Messingzylinder umgebene Auffangelektrode. Die Öffnung in dem

Zylinder ist mit einem Messingscheibchen vorn verschlossen, in das eine Öffnung von 1 mm Durchmesser gebohrt ist.

Das direkte Bündel Kanalstrahlen trifft daher nur I, während II und III nicht getroffen werden.

Es zeigte sich nun in der Tat, daß bei Anwendung eines empfindlichen d'Arsonvalgalvanometers sich nur bei I eine erhebliche Elektrizitätsmenge zeigte, während auf II und III bei Wasserstofffüllung niemals, bei Luft, Sauerstoff und Kohlensäure nur bei höheren Drucken ganz geringe Elektrizitätsmengen anlangten. Erst bei magnetischer Erregung des Feldes, das die Kanalstrahlen nach II und III hin ablenkte, erschienen auch hier stärkere Ströme. Aber auch hier war es nicht möglich, trotz der großen, von den Kanalstrahlen im Magnetfelde durchlaufenen Strecke selbst im stärksten Felde die Elektrizitätsmenge in I auf weniger als $^1/_5$ herunterzudrücken, während durch diffuse Ausbreitung bei II und III die Elektrizitätsmenge bei größerer Verdünnung oder Wasserstofffüllung erheblich unter einem Prozent der Stromstärke bei I blieb.

Im folgenden teile ich einen kleinen Teil der gemachten Beobachtungen mit: Den ohne Magnetfeld bei I aufgefangenen Strom, die Spannung, die prozentische Änderung der Stromstärke bei erregtem Magnetfelde H.

Luftfüllung. Spannung 15000 Volt.

Auffangelektrode I. Aufgefangener Strom ohne Magnetfeld 8.10^{-9} Amp.

Zurückgebliebener Strom in Prozenten	bei	Magneterregung H C.G.S.
44,3 %		1150
33		2500

Luftfüllung. Spannung 30000 Volt.

Elektrode I. Strom $2{,}8.10^{-8}$ Amp.			Elektrode I. Strom 2.10^{-8} Amp.		
Strom	bei	H	Strom	bei	H
25 %		2500	29 %		1150
29		1150	25		2500

Luftfüllung. Spannung 40000 Volt.

Elektrode I. Strom $9{,}2.10^{-9}$ Amp.

Strom	bei	H
35 %		1150
26		2500

Wasserstoff. Spannung 30000 Volt.
Elektrode I. Strom 4,64.10−8 Amp.

Strom	bei	H
61%		300
42		1150
35		1700
30		2000
18		2500

Spannung 20000 Volt.
Elektrode I. Strom 6,4.10−8 Amp.

Strom	bei	H
62%		300
43		1150
28		1700
18		2500

Wasserstoff. Spannung 20000 Volt.
Elektrode I. Strom 5,6.10−8 Amp.

Strom	bei	H
88%		50
80		80
60		150

Strom 6,8.10−8 Amp.

Strom	bei	H
85%		50
80		80
60		150

Sauerstoff. Strom 2.10−8 Amp.
Spannung 20000 Volt.

Strom	bei	H
54%		300
33		1150
30		1700
27		2300
25		2600

Sauerstoff. Strom 1,6.10−8 Amp.
Spannung 25000 Volt.

Strom	bei	H
55%		300
40		1150
37		1700
35		2000
25		2500

Sauerstoff. Strom 2,8.10−8 Amp. Spannung 30000 Volt.

Strom	bei	H
33%		300
23		1150
18		1700
17		2000
15		2500

Kohlensäure. Strom 2,8.10−8 Amp.
Spannung 30000 Volt.

Strom	bei	H
30%		300
22		1150
22		2500

Kohlensäure. Strom 2.10−8 Amp.
Spannung 25000 Volt.

Strom	bei	H
47%		300
34		1150
28		1700
23		2000

Man ersieht aus diesen Zahlen, daß die positiven Elektronen sowohl bei Wasserstoff als bei den anderen Gasen im Magnetfelde je nach der Stärke der ablenkenden Kraft in pro-

zentisch verschiedener Menge von der zentralen Auffangelektrode abgelenkt werden.

Doch zeigt sich keinesfalls ein Einfluß des Gases in der Weise, daß beim Wasserstoff eine geringere unabgelenkte Menge zurückbliebe. Die Zahlen ergeben eher das Gegenteil. Würden bei Wasserstoff nur neutrale Moleküle und mit dem Elementarquantum geladene Ionen vorhanden sein, so müßten diese bei einer Stärke des Magnetfeldes $H = 500$ bereits über 2 cm abgelenkt werden und bei diesem Felde bereits kein Strom mehr bei der Elektrode I erscheinen.

Daß etwa die Verunreinigungen mit schwereren Gasen weniger ablenkbare Teilchen hervorbringen sollten, dagegen spricht zunächst der ganz analoge Verlauf der Beobachtungen bei Wasserstoff und den anderen Gasen. Aber selbst bei Teilchen von 16fachem Atomgewicht würde das vierfache Feld dieselbe Ablenkung hervorbringen. Aber bei noch stärkeren Feldern sind erhebliche Bruchteile des ursprünglichen Stromes vorhanden.

Die Wasserstofffüllung unterscheidet sich von der mit anderen Gasen nur dadurch, daß mehr geladene Teilchen von einem schwachen magnetischen Felde nach den Elektroden II und III hingelenkt werden.

So fiel bei Wasserstofffüllung auf Elektrode II ohne magnetisches Feld kein Strom. Dagegen bei einem von 300 bis 2500 Einheiten wachsenden Felde ein ebenso gleichmäßig steigender Strom von 3—15 Proz. des Hauptstromes, der bei I ohne Magnetfeld aufgefangen wurde.

Bei Elektrode III war erst bei 2000 Einheiten ein Strom bemerkbar. Bei umgekehrter Richtung des magnetisierenden Stromes zeigte sich natürlich weder bei II noch bei III auch nur die geringste Spur eines Stromes.

Bei den anderen Gasen habe ich nur bei starken Feldern (über 2000) Ströme von höchstens 3 Proz. des Hauptstromes auf Elektrode II beobachten können.

Im Wasserstoff sind daher ablenkbarere Elektronen in größerer Menge als bei den anderen Gasen vorhanden, wie es dem geringeren Atomgewicht des Wasserstoffs entspricht.

Aus den angestellten Beobachtungen geht nun mit Sicherheit hervor, daß die von den Herren Mie und Stark ge-

machte Hypothese, daß in den Kanalstrahlen nur neutrale oder mit einem elektrischen Elementarquantum geladene Ionen vorhanden sind, mit den Tatsachen unvereinbar ist.

Es bleibt uns daher nur die von mir ausgesprochene Alternative, entweder die Teilbarkeit des Elementarquantums anzunehmen, oder die Bildung großer Molekülkomplexe, die mit einem Elementarquantum geladen sind, zuzulassen. Gegen die erstere sprechen, wie zuzugeben ist, eine Anzahl von Gründen.

Ich bin daher gegenwärtig mehr geneigt, die Bildung großer Moleküle [1]) als die vorläufig beste Erklärung anzunehmen, namentlich da wir die Hypothese der Herren Mie und Stark benutzen können, um den abenteuerlichen Zahlen zu entgehen, die wir für das Atomgewicht der mit dem Auge beobachtbaren, sicherlich in den stärksten magnetischen Feldern weniger als 0,1 mm abgelenkten Kanalstrahlen erhalten würden, wenn wir diesen die ganze Ladung eines Elementarquantums beilegen wollten. Wir würden dann zu Atomgewichten kommen, deren untere Grenze durch die Zahl 10000, bezogen auf Wasserstoff, gegeben wäre. Es würden das Moleküle sein, die bereits der Grenze der Sichtbarkeit sich nähern müßten.

Ob diese wenig ablenkbaren Strahlen aber eine Ladung besitzen, ist nicht nachweisbar und es steht nichts im Wege, sie als neutrale Moleküle anzusprechen. Mit dieser Hypothese sehr gut vereinbar sind auch die Beobachtungen der von den Kanalstrahlen erzeugten Fluoreszenz. Nach meinen Beobachtungen waren zwei verschiedene Arten der Fluoreszenz zu unterscheiden. Einmal die am Glase hervorgerufene, der von Kathodenstrahlen erzeugten, ähnliche, die sich magnetisch und elektrisch ablenkbar erwies. Dann die Fluoreszenz von gelbbrauner Farbe, die von einer am Glase haftenden Gasschicht herzurühren scheint, und nur sehr schwach ablenkbar ist.

Die letztere würden wir der Wirkung neutraler Moleküle zuzuschreiben haben.

Es bleibt nun noch übrig, zu untersuchen, welche untere Grenze wir für die spezifische Ladung der noch geladenen positiven Elektronen annehmen müssen, um mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bleiben.

---

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 485. 1903.

Um hierfür aus den Messungen der magnetischen Ablenkung der transportierten Elektrizität Schlüsse zu ziehen, muß man den Querschnitt des Kanalstrahlbündels kennen, in welchem positive Elektrizität fortgeführt wird. Denn es ist klar, daß bei der magnetischen Ablenkung andere Teile des Bündels auf die Auffangelektrode fallen und dort einen Strom hervorrufen. Erst wenn die Ablenkung so groß ist, daß man sicher den Rand des Strahlenbündels über die Elektrode hinweggeführt hat, darf dort keine Elektrizität mehr erscheinen.

Aus der beobachteten Tatsache, daß auf die Elektrode II bei Wasserstofffüllung keine Elektrizität ohne Magnetfeld fiel, kann man schließen, daß im Magnetfelde der Rest von Elektronen, der noch auf I fiel, weniger abgelenkt ist, als der Abstand beider Elektroden ausmacht, also weniger als 25 mm.

Ich habe indessen, um diese Grenze genauer festzustellen, noch folgende Versuche gemacht.

Unter die Erweiterung der Röhre, in welche die drei Elektroden eingeschmolzen waren, wurde ein Holzklotz gelegt, so daß er das Glas der Röhre gerade berührte. Von diesem Holzklotz wurde so viel fortgeschnitten, daß die Röhre, wenn sie nun mit ihm in Berührung kam, an ihrem Ende sich um 5 mm gesenkt hatte.

Ohne an der Stellung der Röhre etwas zu ändern, wurde die Röhre dicht hinter der Eisenelektrode mit der Gebläseflamme erwärmt, bis sie sich durch ihr eigenes Gewicht auf den Holzklotz senkte. Die drei Elektroden waren auf diese Weise um 5 mm gegen das zentrale Bündel Kanalstrahlen verschoben. Dieses fiel nun zwischen die Elektroden I und II.

Jetzt zeigte sich bei Wasserstofffüllung auch bei Elektrode II ein Strom, der den sechsten Teil des bei I auftretenden betrug. Durch die Biegung der Röhre war also die Elektrode II in den Bereich des Strahlenbündels gekommen. Wurde nun der Magnet so erregt, daß die Kanalstrahlen von II nach I hin abgelenkt wurden, so blieb bei schwächeren Feldern immer noch Strom bei II zurück. Erst bei einem Felde von 3000 Einheiten verschwand er vollständig.

Da nun in der früheren Lage die Elektrode II auch ohne Magnetfeld keinen Strom erhalten hatte, so konnte bei einem Felde von 3000 Einh. der letzte Rest positiver Elektronen nicht

mehr abgelenkt sein, als die Verschiebung der Elektrode betragen hatte.

Aus der Spannung von 10000 Volt und dieser Verschiebung um 5 mm berechnet sich

$$\frac{e}{m} = 15{,}5,$$

was einem Molekulargewicht von 650, bezogen auf Wasserstoff ($e/m = 10^4$), entsprechen würde.

Obwohl nun sehr wahrscheinlich ist, daß noch kleinere Werte der spezifischen Ladung vorkommen, so kann gegen die Möglichkeit der Existenz von solchen Molekülkomplexen wohl kaum etwas eingewendet werden, da sie sich doch nicht allzuweit von den wirklich chemisch beobachteten entfernen. Merkwürdig ist, daß sie sich im Wasserstoff bilden, obwohl natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß auch noch ganz andere chemische Elemente, die aus der Röhrenwand oder den Elektroden stammen, sich an der Bildung dieser Moleküle beteiligen.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß diese Gebilde, falls unsere Deutung richtig ist, sich in einem labilen Zustande befinden und nach dem Auftreffen auf die Wand wieder zerfallen.

Ich will schließlich noch auf eine Annahme hinweisen, die auch die vorliegenden Beobachtungen ohne die Hypothese hoher Atomgewichte darstellen würde. Wenn wir die Hypothese der Herren Stark und Mie umkehren und annehmen, daß die positiven Teilchen sich zunächst noch in der Nähe der Kathode sämtlich neutralisieren und nun sich einzeln an verschiedenen Stellen der Bahn wieder spalten, so müßte auch eine ungleichartige Ablenkung, gleichzeitig aber auch eine Ladung auftreten. Doch spricht hiergegen der Umstand, daß dann die Zahl der stark abgelenkten bei Vergrößerung des Weges zunehmen müßte, was ich nicht beobachtet habe.

Würzburg, Physik. Institut, Dezember 1903.

(Eingegangen 19. Dezember 1903.)

4. *Die Farbe der Seen;*
von Otto Frhr. v. u. z. Aufsess.

(Auszug aus der Münchener Inaugural-Dissertation, 1903.)

Die Untersuchungen über die Farbe natürlicher Gewässer scheinen damit begonnen zu haben, daß man sich fragte, ob auch reines, von allen fremden Bestandteilen befreites Wasser eine Farbe besitze. Schon Davy[1]) fand eine blaue Eigenfarbe für Wasser; später füllte Bunsen[2]) eine 2 m lange Röhre mit Wasser an, welche bei durchfallendem Lichte ebenfalls eine blaue Farbe erkennen ließ. Halleys[3]) Versuch in einer Taucherglocke, bei dem er die Oberfläche seiner Hand rötlich, die Unterfläche grün gefärbt sah, gab Arago[4]) zu der Behauptung Veranlassung, daß das Wasser zwei Farben habe, die des durchgelassenen Lichtes und die des reflektierten. Bei seinen eigenen Untersuchungen in der Natur beobachtete er die Wasserfarbe, indem er ein mit Luft gefülltes Hohlprisma aus Glas so unter Wasser brachte, daß das horizontal unter der Wasseroberfläche hinziehende diffuse Licht von der Hypotenusenflächet otal reflektiert wurde.

Durch Bunsens Versuche stand es fest, daß reines Wasser eine blaue Eigenfarbe habe. Es fragte sich nun, woher stammen die Abweichungen von Blau, das Grün, Gelb und Braun. Wittstein[5]) begründete zuerst eine Theorie der Wasserfarbe auf der Annahme, daß der chemische Gehalt allein für die Farbe ausschlaggebend sei. Seine Proben für die chemische Analyse entnahm er verschiedenen bayerischen

1) H. Davy, Edinburgh, Journ. **34.** p. 88.

2) R. Bunsen, Jahresber. über d. Fortschr. i. d. Chemie p. 1236. 1847—1848.

3) E, Beetz, Pogg. Ann. **115.** p. 137. 1862.

4) F. Arago, Pogg. Ann. **45.** p. 468. 1838.

5) G. C. Wittstein, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. p. 603. München 1860.

Gewässern. Dabei kam er zu dem Resultat, daß gelbes und braunes Wasser viel reicher an organischen Substanzen sei als blaues oder grünes. Auch sprach er direkt den Satz aus, daß die verschiedenen Farben von gelöster organischer Materie herrühren. Durch Bunsen, Wittstein und Beetz[1]) schien die Frage nach dem Grund und der Art der Wasserfarbe erledigt zu sein; da trat, verursacht durch die Versuche Tyndalls[2]), ein neuer Gesichtspunkt in die Forschung ein. Man fragte sich, ob nicht die Wasserfarbe als Farbe eines trüben Mediums aufgefaßt werden könnte, wodurch schon Leonardo da Vinci und später Newton und Goethe[3]) das Blau des Himmels zu erklären versucht hatten. Tyndall bemühte sich in der Tat zu zeigen, daß das Himmelsblau keine Eigenfarbe sei, sondern durch Diffusion an kleinsten farblosen Teilen entstehe, eine Theorie, die J. W. Strutt[4]) (der spätere Lord Rayleigh) dann tatsächlich mathematisch begründet hat. Tyndall schloß, daß ein Körper, der keine Spur eines fremden Körpers enthält, das Licht hindurchlasse, ohne daß dabei der Lichtstrahl sichtbar wird, d. h. daß er *„optisch leer"* sei. Die Größe der seitlichen Erhellung einer Flüssigkeit ist also ein Maß für seine Trübung. Sind nun die Fremdkörperchen sehr klein, sogar klein im Verhältnis zur Lichtwellenlänge, so hat eine mit solchen Teilchen vermischte an sich farblose Flüssigkeit die Eigenschaft, im seitlichen gebeugten Licht bläulich, im durchgelassenen Licht rötlich zu erscheinen. Das Licht, das aus einer solchen Flüssigkeit austritt, ist polarisiert, die brechbareren Strahlen werden hauptsächlich reflektiert und haben ihr Polarisationsmaximum senkrecht zum einfallenden Strahl. Soret[5]) kam nun, durch die blaue Farbe des Genfersees aufmerksam gemacht, auf die Idee, daß die Wasserfarbe auch teilweise durch Diffusion an solchen feinsten suspendierten Partikelchen bedingt sein könne. Besonders die von ihm gefundene Polarisation des aus dem

1) E. Beetz, l. c.

2) J. Tyndall, Arch. de sciences phys. et nat. **33.** 1868; **34.** p. 156. 1869.

3) J. W. v. Goethe, Farbenlehre, didakt. Teil, X, §§ 145—172.

4) J. W. Strutt, Phil. Mag. (4) 1. p. 274. 1871; (5) 47. p. 375. 1899.

5) Ch. Soret, Arch. de sciences phys. et nat. **35.** p. 54. 1869.

Wasser austretenden Lichtes senkrecht zum einfallenden Strahl bestärkte ihn in dieser Ansicht. Hagenbach[1]) bestätigte die Resultate Sorets am Vierwaldstättersee. Neuerdings wird die Ansicht von Soret besonders von Abegg[2]) vertreten.

Die von Soret begründete Diffraktionstheorie[3]) der Wasserfarbe stieß auf mancherlei Widerspruch von den verschiedensten Seiten. Spring[4]), der die einschlägigen Fragen in neuester Zeit einer besonders sorgfältigen Prüfung unterzog, kam wieder auf den Standpunkt der Beetzschen Auffassung zurück, indem er durch zahlreiche Versuche nachwies, daß das Blau des reinen Wassers eine Eigenfarbe sei. Die anderen Farben rühren nach ihm von fremden Bestandteilen her. Im Gegensatze zu Wittstein glaubt Spring allerdings hier nicht die im gelösten Zustande vorhandenen organischen Substanzen als einzigen Grund der Farbe annehmen zu dürfen, sondern will hier, aber nur bei den Abweichungen von Blau, die Rayleighsche Theorie mit zur Erklärung herbeigezogen wissen.

Ablehnend gegenüber der Diffraktionstheorie verhält sich Lallemand[5]) indem er nachwies, daß die Erhellung beleuchteter Flüssigkeiten durch polarisiertes Licht beinahe ausnahmslos in der Polarisationsebene stattfindet und nicht senkrecht dazu, wie dies nach der Diffraktionstheorie sein müßte.

Aus neuester Zeit sind zu erwähnen die Untersuchungen von Schwager[6]) und Reindl.[7]) Beide stehen ganz auf dem Standpunkt der chemischen Theorie.

---

1) A. Hagenbach, Arch. de sciences phys. et nat. 37. p. 176. 1870.

2) R. Abegg, Naturw. Rundschau 13. Nr. 14. 1894.

3) Ich unterscheide zwei Theorien zur Erklärung der Wasserfarbe: die „Diffraktionstheorie" und die „Chemische Theorie". Nach der ersteren soll die Wasserfarbe als die Farbe eines trüben Mediums aufgefaßt werden können, während die Vertreter der chemischen Theorie behaupten, daß die verschiedenen Farben ausschließlich durch die Farben der im Wasser gelösten Substanzen erklärt werden müssen.

4) W. Spring, Bull. Acad. Roy. Belg. 5. p. 55. 1883; 12. p. 814. 1886; 31. p. 94. 1896.

5) C. Lallemand, Compt. rend. 69. p. 189 u. 282. 1869.

6) A. Schwager, Geognostische Jahreshefte. 10. p. 50—80. 1897.

7) J. Reindl, Münchner geogr. Studien 10. p. 1. 1903.

Aus Vorstehendem ersieht man, daß die scheinbar so einfache Frage nach der Entstehungsursache der Farbe der Seen und Meere selbst heute noch in sehr verschiedener Weise beantwortet wird. Augenscheinlich ist es überhaupt nicht möglich, diese Frage endgültig zu entscheiden, wenn man sich nicht entschließt, eine wirkliche Analyse der in Rede stehenden Farbennuancen vorzunehmen, d. h. wenn man nicht *spektrophotometrisch* die prozentuale Zusammensetzung der „Wasserfarbe" aus den einzelnen Spektralelementen quantitativ feststellt. Wohl kennt man schon lange die spezifische Eigenschaft des Wassers, die roten Strahlen selektiv zu absorbieren. Der erste, welcher wirkliche *Messungen* über den von Wasser überhaupt absorbierten Lichtanteil anstellte, dürfte Bouguer[1]) gewesen sein.

Erst 100 Jahre später treffen wir wieder auf Angaben, die sich auf die relative Zusammensetzung des durch Wasser gegangenen Lichtes beziehen. Pater Secchi[2]) reichte der Pariser Akademie im Jahre 1867 eine Mitteilung ein, in der er zeigte, daß im Spektrum des Meerwassers schon in dünnen Schichten das Rot fehle, zum Teil auch das Gelb und Grün. Schönn[3]) konstatierte wohl als erster zwei Absorptionsstreifen im Spektrum des reinen Wassers, einen schwachen in der Nähe der Fraunhoferschen Linie *C*, zwischen 670 und 660 $\mu\mu$ gelegen, und ein deutliches breites Band im Orange zwischen 620 und 610 $\mu\mu$. J. L. Soret[4]) gibt an, daß Wasser für ultraviolette Strahlen sehr durchlässig sei. Im Jahre 1881 maß Boas[5]) durch Vergleichung des durch vorgeschaltete Gläser oder selektiv absorbierende Lösungen gefärbten Lichtes mit dem durch eine Wassersäule hindurchgegangenen einige Absorptionskoeffizienten.

Hüfner und Albrecht[6]) stellten die ersten genaueren Beobachtungen über die Größe der Absorption des Wassers

---

1) P. Bouguer, Optice. p. 30. Vienne 1762.

2) A. Secchi, Naturforscher p. 149. 1868.

3) J. L. Schönn, Pogg. Ann., Ergbd. VI, p. 670. 1878.

4) J. L. Soret, Fortschr. d. Phys., 33. p. 479. 1877.

5) H. Boas, Beiträge zur Erkenntnis der Farbe des Wassers. Kiel 1881.

6) G. Hüfner und E. Albrecht, Wied. Ann. 42. p. 1—17. 1891.

an. Sie füllten eine 2 m lange Glasröhre mit destilliertem Wasser und verglichen die Intensität des durchgelassenen Lichtes mit der des auffallenden für verschiedene Spektralbereiche. Da aber das durch eine Wassersäule von 2 m Länge hindurchgegangene Licht nur wenig gefärbt ist und da die Angaben der Absorptionskoeffizienten sich nur auf ausgedehntere Gruppen von Lichtwellenlängen beziehen, so kommen hier die charakteristischen Eigentümlichkeiten der Absorption des Wassers noch nicht deutlich zum Ausdruck. Ausführlichere bolometrische Messungen über die Absorption des Wassers hat auch Aschkinass[1]) angestellt.

Eine andere Methode, wenigstens einen ungefähren quantitativen Anhalt über die Wasserfarbe zu erhalten, ohne auf spektralanalytische Untersuchung zurückzugehen, beruht auf der Vergleichung der natürlichen Gewässerfarben mit sogenannten Farbenskalen. Durch Mischung verschieden gefärbter Lösungen sucht man hierbei die Farbe des betreffenden Sees nachzuahmen. Eine solche Skala ist zuerst von Forel angefertigt worden.[2]) Er benutzte Lösungen von ammoniakalischem Kupfersulfat und von Kaliumchromat. Durch verschiedene Mischungsverhältnisse dieser beiden Substanzen erhielt er elf Abstufungen vom reinsten Blau bis zum Gelbgrün.

Ule[3]) erweiterte die Skala, indem er den blauen und grünen Tönen noch braune hinzufügte mit Hilfe einer Lösung von stark ammoniakalischem Kobaltsulfat. Später hat Ule[4]) eine Skala nach einem anderen Prinzip angefertigt, wodurch er eine noch größere Mannigfaltigkeit der Farben, besonders auch ihrer Intensität nach, erzielte. Als Färbeflüssigkeiten verwendete er Methylenblau, Kaliumchromat und Kaliumdichromat in bestimmten Konzentrationen.

Die Farbe eines Sees oder Gewässers suchte man vielfach auch dadurch zu erklären, daß man sagte, die Farbe rühre überhaupt nicht allein vom Wasser her, sondern, was man sehe, sei die Färbung des Seegrundes[5]), der je nach der Tiefe des

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. **55.** p. 401. 1895.
2) F. A. Forel, Le Léman **2.** p. 462—487. 1895.
3) W. Ule, Petermanns Mitteilungen 1892.
4) W. Ule, Der Würmsee p. 160. 1901.
5) J. Wallmann, Jahrbuch des österr. Alpenvereins **4.** 1868.

Sees heller oder dunkler erscheine. Auch der Reflex vom Himmel[1]) oder von der nächsten Umgebung[2]) soll die Wasserfarbe beeinflussen; auch die Temperatur[3]) und damit die verschiedene Dichtigkeit des Wassers, die im See befindlichen Pflanzen[4]) etc. werden zur Erklärung mit herbeigezogen. Außerdem führt Spring[5]) noch als Grund der verschiedenen Färbung das Webersche psychophysische Grundgesetz an. Er bemerkt dazu, daß die Empfindung einer Farbe verlischt oder sich abschwächt, wenn das Auge durch die Wahrnehmung anderer Farben oder durch starke äußere Reize beansprucht ist. Daher wird die Farbe eines Sees bei vollem Sonnenschein weniger lebhaft sein als bei trübem Himmel. Dazu gesellt sich aber noch die Wirkung infolge größerer oder geringerer Durchsichtigkeit des Wassers. Die maximale Farbenempfindung ist also scharf gebunden an die Stärke der Beleuchtung und an die dabei auftretende Reizung der Augen.

Überblicken wir die im Vorstehenden angegebene Litteratur, so fällt es auf, daß Messungen, wenn überhaupt, so meist nur im Laboratorium ausgeführt worden sind. Wenn auch einige Forscher ihre Beobachtungen in der Natur auf einem See vorgenommen haben, so fehlen doch *quantitative* Untersuchungen über die Lichtabsorption des Wassers in der Natur selbst vollständig. Durch solche ist es aber allein möglich, sich darüber Rechenschaft zu geben, in welcher Weise die verschiedenen Faktoren, wie Beleuchtung, Trübung des Wassers, Temperaturveränderung voneinander abhängen und welchen Einfluß sie auf die Farbe ausüben.

Diese Lücken auszufüllen, ist der Zweck meiner Arbeit. Zwei Reihen von Untersuchungen mußten angestellt werden, um die Frage zu klären, nämlich solche im Laboratorium, und zweitens solche in der Natur selbst. Bei ersteren ging ich vom vollkommen reinen, optisch leeren Wasser aus und

1) A. Schwager, l. c.

2) J. Wallmann, l. c.

3) Ebenda und G. H. v. Boguslawsky, Handb. der Ozeonographie 1. 1884.

4) J. Brun, Jahresber. über d. Fortschr. d. Chem. p. 1512. 1880.

5) W. Spring, Bull. Acad. Roy. Belg. 12. p. 814. 1886.

dehnte dann meine Untersuchungen auf Mischungen des reinen Wassers mit chemischen Substanzen und auf künstlich getrübtes Wasser aus. Die Beobachtungen in der Natur erstrecken sich auf Messungen über die Lichtabsorption des Wassers verschiedener Seen. Hierbei wurde die Intensität des aus dem Wasser austretenden Lichtes verglichen mit der des direkten Himmelslichtes. Die Lichtquelle ist also für beide Lichtarten, nämlich für das Vergleichslicht und für das aus dem Wasser austretende Licht, die gleiche. Bei diesen Messungen zeigte es sich, daß auch Beobachtungen über die Durchsichtigkeit, die Temperatur und die Polarisationsverhältnisse des aus dem Wasser kommenden Lichtes notwendig waren.

Apparate.

1. Zur Bestimmung der spektralen Farbenzusammensetzung der verschiedenen Gewässer benutzte ich ein *Spektrophotometer*, eine nach Angabe von F. F. Martens[1]) angefertigte Neukonstruktion des von A. König[2]) erfundenen Photometers von der Firma Schmidt & Hänsch in Berlin. Das Photometer wurde von mir in dreierlei verschiedenen Ausrüstungsformen verwendet:

a) Mit der von der Firma mitgegebenen Spaltbeleuchtungsvorrichtung gebrauchte ich es zur Bestimmung der Absorption von Farblösungen, die zum Vergleich mit der Wasserfarbe gedient haben, ferner zur Feststellung der Nulllage und zur Eichung des Apparates.

b) Bei den Beobachtungen im Laboratorium kamen die Lichtstrahlen von der Seite, deshalb konnte ich hier die ebenfalls mitgegebene Fassung mit den beiden total reflektierenden Prismen benutzen.

c) Bei den Messungen auf den Seen kam das eine Licht (Wasserfarbe) von unten, das Vergleichslicht (Himmelslicht) von oben, daher wurden (Fig. 1) seitlich von den Prismen

---

1) F. F. Martens, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 1. p. 278 u. 280. 1899.

2) A. König, Wied. Ann. 53. p. 785. 1894.

R_1 und R_2 noch zwei total reflektierende Prismen P_1 und P_2 in geschwärztem Messinggehäuse angebracht, welche durch je einen Konus K das entsprechende Licht erhielten. Der zum See gerichtete Trichter K_1 mußte so lang sein, daß er eben ins Wasser eintauchte, um dadurch die Oberflächenspiegelung zu beseitigen. Der andere K_2 erhielt als oberen Abschluß eine Halbkugel aus Mattglas. Die von dieser in den Apparat gelangende Helligkeit stellte dann die Summe für alle einzelnen Partien am Himmelsgewölbe dar.

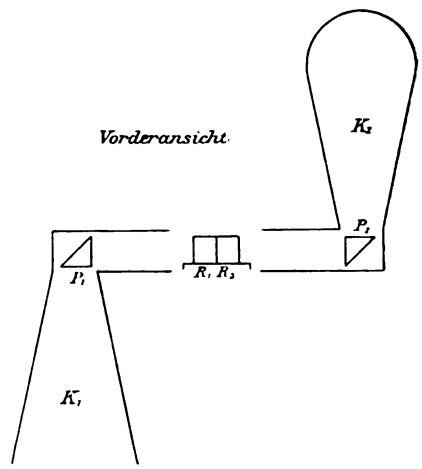


Fig. 1.

Werden die beiden Spalte des Photometers von zwei gleich starken Lichtquellen beleuchtet, so haben wir, um gleiche Helligkeit im Gesichtsfeld zu erhalten, das Nicol gegen die Nullstellung um einen gewissen Winkel φ (bei diesem Instrument $\varphi = 45^0$) zu drehen. Kommt Licht von verschiedener Helligkeit J_1 und J_2, so erhält die eine Hälfte des Okulargesichtsfeldes die Intensität $J_1 \sin^2 \alpha$, die andere $J_2 \cos^2 \alpha$. Stellt man durch Drehen des Nicols wieder auf gleiche Helligkeit ein, so wird $J_1 \sin^2 \alpha = J_2 \cos^2 \alpha$, oder $J_1 / J_2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Der Drehungswinkel sei α, von der Dunkelheitsstelle desjenigen Bildes aus gerechnet, welches das Licht von der Intensität J_1 erhält. Wird J_1 ferner noch durch ein vorgeschaltetes absorbierendes Mittel geändert, so kommt Licht von den Intensitäten $i = a J_1$ $(a < 1)$ und J_2 in den Apparat und es ist

$$\frac{a J_1}{J_2} = \operatorname{ctg}^2 \alpha',$$

wenn α' den neuen Winkel bedeutet. Dabei ist $\alpha' > \alpha$. Es ergibt sich also

$$a = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha'}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}. \tag{1}$$

Nun ist aber unter Einführung des Absorptionskoeffizienten A

$$i = a J = e^{-Ad} \times J,$$

also

(2) $$a = e^{-Ad}$$

und aus (1) und (2).

(3) $$A = -\frac{\log^e \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha'}}{d} = \frac{\log^e \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha'}}{d} = \frac{\log^{10} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha'}}{d \log^{10} e}.$$

Diese Formel wurde verwendet zur Berechnung der Absorptionskoeffizienten sämtlicher Gewässer. Bei der Anordnung, bei welcher die Martenssche Spaltbeleuchtungsvorrichtung gebraucht werden kann, also bei den Farbstoffen, vereinfacht sich die Formel etwas; da nämlich $\sphericalangle \alpha$ für alle Farben $= 45^0$ ist, so wird $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; verwendet man schließlich statt des $\sphericalangle \alpha$ den $\sphericalangle \beta$, so lautet die Formel

(4) $$A = \frac{1}{d} \frac{\log \operatorname{ctg}^2 \beta}{\log e}.$$

Der Absorptionskoeffizient A bedeutet hier den reziproken Wert derjenigen Schichtdicke d, bei welcher die Intensität des einfallenden Lichtes auf $1/e$ gesunken ist.

Der Absorptionskoeffizient konnte gemäß der Lichtstärke des Photometers auf den Seen innerhalb des Spektralbereiches von 650 und 470 $\mu\mu$ gemessen werden. Bei künstlicher Beleuchtung konnte man im Rot bis 660 $\mu\mu$ gelangen. Die erhaltenen Werte wurden graphisch aufgetragen in der Weise, daß die Abszissen die Lichtwellenlängen angeben, die Ordinaten die Größe von A. Aus einer solchen Kurve kann man also die Stärke der Absorption für jede Stelle des Spektrums ersehen.

Die Vorbedingungen, um auf dem See eine brauchbare Messungsreihe mit dem Photometer ausführen zu können, sind zahlreich. Vor allem muß man ein geräumiges stabiles Boot haben; am besten eignen sich hierzu die großen Kähne mit breitem Boden, wie sie an vielen unserer bayerischen Seen angetroffen werden. Kielschiffe sind gänzlich unbrauchbar. Die Beleuchtung muß während der Messung gleichmäßig sein, man braucht also entweder wolkenlosen oder ganz bedeckten

Himmel. Im letzterem Falle ist aber der Apparat meist zu lichtschwach. Teilweise wechselnde Bewölkung ist schädlich wegen der stets sich ändernden Menge an polarisiertem Himmelslicht. Ich mußte daher immer auf wolkenlose Tage warten. Das Boot ließ ich durch einen Gehilfen stets so einstellen, daß der Apparat direkt gegen die Sonne gerichtet war, dann war die Beleuchtung der Scheibe im Wasser am intensivsten und eine Beschattung durch das Schiff ausgeschlossen. Diese Stellung mußte der Gehilfe während der Messung genau einhalten. Eine weitere wesentliche Vorbedingung ist die, daß der See vollkommen glatt ist, weil schon durch die kleinsten Wellen ein Flimmern auf der Scheibe eintritt, wodurch eine genauere Messung unmöglich wird. Messungen im Schatten, auch bei wolkenlosem Himmel, sind zu vermeiden. Die Temperatur der benutzten Wasserschicht soll möglichst konstant sein, da sonst Schlieren auftreten können. Die geeignetsten Zeiten sind daher der Winter oder der Hochsommer.

2. Zur Bestimmung der Sichttiefe und zur Abgrenzung einer Wasserschicht von beliebiger Dicke d (vgl. Formel 3) versenkte ich eine *weiße kreisförmige Scheibe* in den See. Sie bestand aus dickem Zinkblech und war mit einem dreifachen stark glänzenden Anstrich von weißem Emaillack versehen. Ihr Durchmesser betrug 1 m; diese Größe war erforderlich, um bei den bedeutenderen Sichttiefen noch ein deutlich wahrnehmbares Objekt zu haben. Andererseits ist aber eine noch größere Scheibe nicht mehr handlich. In das Seil, an welchem sie befestigt war, waren von Meter zu Meter Marken eingeknüpft. Am Rand des Bootes war eine Rolle angebracht, über welche das Seil gleiten konnte. Was die Größe der Scheibe betrifft, so ist es ja zwar nicht ganz leicht, besonders in bedeutenden Tiefen, mit ihr zu operieren. Aber es wäre doch für weitere Sichttiefenmessungen sehr wünschenswert, wenn der Durchmesser von 1 m als Normalmaß beibehalten würde.

Die Messung der Sichttiefe konnte, wie später ausgeführt wird, bei jeder Witterung und Beleuchtung vorgenommen werden, doch durfte der See auch hier nicht sehr bewegt sein wegen des sonst unvermeidlichen Treibens des Schiffes. Bei einiger Übung sind Fehler von 0,5 m das Maximum.

3. Zu einer zuverlässigen Bestimmung der Sichttiefen und um die Eigenfarbe eines Sees unabhängig von den Einflüssen der Umgebung erkennen zu können, war es notwendig, den Reflex der Oberfläche zu eliminieren. Ich bediente mich hierzu eines *geschwärzten Rohres aus Zinkblech*, das in Form eines Sprachrohres nach vorn sich erweiterte. Die Länge betrug 1 m, die engere Öffnung hatte einen Durchmesser von 4 cm, die weite einen solchen von 25 cm.

4. Die Messung der Temperatur geschah mit einem *Minimumthermometer*, demselben, das schon Geistbeck[1]) benutzt hatte. Es stammt von der Firma Kappeller in Wien.

5. Um im Laboratorium Wasser auf seine Farbe zu untersuchen, kann man eine Röhre entweder vertikal oder horizontal

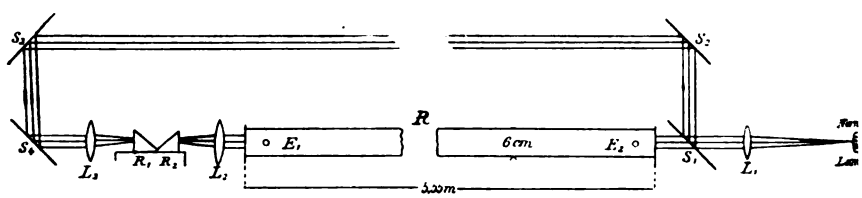


Fig. 2.

aufstellen. Das erstere würde den Verhältnissen in der Natur am meisten entsprechen. Ich habe zuerst eine vertikale Röhre von 2 m Höhe probiert. Am Boden war ein Spiegel angebracht, der, an Messingkettchen befestigt, in verschiedene Höhenlagen eingestellt werden konnte. Das Licht trat durch ein total reflektierendes Prisma in die Röhre ein und durch ein ebensolches wieder aus, von wo es dann in den Apparat gelangte. Eine solche Röhre muß einen ziemlich großen Durchmesser haben, damit das Licht, welches von der Oberfläche, und das, welches vom Spiegel reflektiert wird, getrennt werden kann. Aber da auch beim klarsten Wasser eine Trübung des Spiegels durch Sedimentationen zu befürchten ist, so entschied ich mich bei den definitiven Versuchen für die Anordnung in horizontaler Richtung, wie sie auch von Spring bei seinen Versuchen benutzt wurde. *Eine* $5\,^1/_2$ *m lange Röhre R* (vgl. Fig. 2) *aus Zinkblech* mit einem Durchmesser von 6 cm wurde

1) A. Geistbeck, Die Seen der deutschen Alpen p. 36. 1885.

horizontal auf sechs verstellbare eiserne Träger aufgelegt. Die Öffnungen an den Enden, die auf 5 cm Durchmesser abgeblendet waren, damit keine Reflexe an der Röhrenwand auftreten können, wurden verschlossen durch Platten aus Spiegelglas; oben waren zwei Röhrchen E_1 und E_2 angebracht zum Eingießen des Wassers. Die ganze Anordnung ist aus Fig. 2 ersichtlich. Das Licht wurde durch eine Linse L_1 mit einer Brennweite von 20 cm parallel gemacht, von wo es auf eine Spiegelglasplatte S_1 traf. Hier ging ein Teil durch, der andere wurde reflektiert. Der erste Teil ging durch die Röhre und die Linse L_2 (16 cm Brennweite) direkt zum Prisma R_2, der andere Teil (das Vergleichslicht) gelangte durch Reflexion an den Spiegeln S_2, S_3 und S_4 und durch die Linse L_3 (16 cm Brennweite) zum Prisma R_1.

Zur Beleuchtung ist wegen der Länge der absorbierenden Wassersäule eine ziemlich starke Lichtquelle nötig. Eine gewöhnliche Vakuumglühlampe genügt hier nicht. Ich versuchte es zuerst mit Bogenlicht, doch ist dieses wegen seiner Inkonstanz an Helligkeit und wegen des häufigen Umspringens des Lichtbogens (auch bei Benutzung einer Kugel aus Mattglas) unbrauchbar. Ganz vorzüglich geeignet dagegen ist das Licht der Nernstlampe mit ihrer sehr großen spezifischen Helligkeit. Diese brennt ruhig und hell, so daß ich fast alle Beobachtungen mit dieser ausführte. Die beim Übergang des Lichtes in ein anderes Medium auftretenden Spiegelungen hatten, wie ich mich überzeugen konnte, keinen meßbaren Einfluß auf die Einstellung, während Aschkinass[1]) mit Flußspatplatten einen Helligkeitsverlust von einigen Prozenten bemerkte.

6. In vielen Fällen hat mir ein geradsichtiges *Taschenspektroskop* nach H. W. Vogel von der Firma Schmidt und Hänsch in Berlin gute Dienste geleistet.

7. Zur Untersuchung der Polarisation des aus dem Wasser austretenden Lichtes verwendete ich eine *Haidingersche Lupe.*

Beobachtungen über die Farbe des Wassers.

Wie schon erwähnt, ging ich bei meinen Messungen über die Farbenzusammensetzung der Seen von ganz reinem, „optisch

1) E. Aschkinass, l. c.

Doppelt destilliertes Wasser.

(λ = Lichtwellenlänge, A = Absorptionskoeffizient pro Meter.)

λ	A	λ	A
658	0,320	602	0,178
643	0,291	590	0,089
622	0,289	579	0,049
617	0,244	558	0,038
612	0,233	522	0,002
607	0,200	494	0,002

Um nun dieses reine Wasser optisch leer zu machen, kann man auf verschiedene Weise verfahren. Hr. Prof. Spring hatte die Liebenswürdigkeit, mir einige von ihm selbst erprobte Methoden mitzuteilen. Hiernach kann man den Zweck erreichen entweder durch 12—15maliges Filtrieren durch Tierkohle oder durch Fällung der im Wasser suspendierten Staubteilchen mit einem farblosen Elektrolyten, z. B. Zinkchlorid. Da das Filtrieren einer so großen Wassermasse zu viel Zeit in Anspruch nahm und man dabei doch nicht sicher ist, daß wirklich kein Staub mehr im Wasser ist, so entschied ich mich für den Fällungsprozeß. Ich vermischte das reine Wasser mit einer Lösung von Zinkchlorid und füllte das Ganze in die oben erwähnte Röhre ein. Diese wurde, um den Inhalt vor Temperaturschwankungen möglichst zu schützen, mit Watte umwickelt und in einem gleichmäßig temperierten, vor Zug geschützten Kellerraum des Laboratoriums aufgestellt. Nachdem das Wasser einen Monat gestanden war, wurde die Farbe untersucht. Das Resultat ist folgendes:

Optisch leeres Wasser.

Kurve auf Fig. 4.

λ	A	λ	A
658	0,328	590	0,095
643	0,293	579	0,051
617	0,247	558	0,028
607	0,205	522	0,002
602	0,166		

Von λ = 522 an ist keine Absorption mehr zu beobachten.

Vergleicht man diese Werte mit den Werten, die beim reinen Wasser vor Behandlung mit Zinkchlorid gewonnen

worden waren, so sieht man, daß die Farbenzusammensetzung, aber auch die Durchsichtigkeit die gleiche geblieben ist, ein Zeichen, daß in dem doppelt destillierten Wasser die Staubteilchen schon so außerordentlich selten sind, daß sie in einer Wassersäule von $5^1/_2$ m Länge keine merkliche Trübung mehr erzeugen können. Blickte man durch die beleuchtete Röhre hindurch, so war das Wasser von einer wundervollen Klarheit, das gegenüberliegende Ende erschien etwas bläulich gefärbt. Nur an dieser Färbung erkannte man, daß überhaupt etwas anderes als Luft in der Röhre war. Sehen wir uns das Absorptionsspektrum des reinen Wassers etwas näher an, so

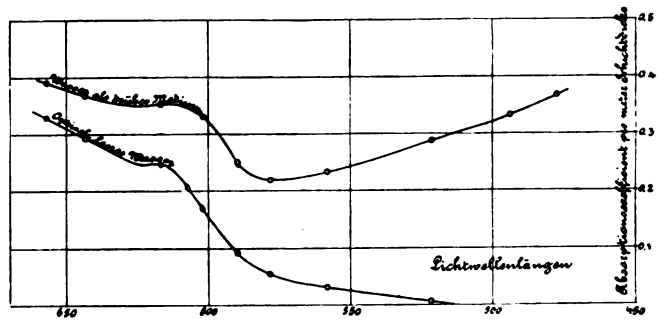


Fig. 4.

können wir aus den Kurven folgendes erkennen: Im Rot ist starke Absorption vorhanden bis herab zur Wellenlänge $\lambda = 620\ \mu\mu$. Zwischen 620 und 610 $\mu\mu$ tritt ein charakteristischer Absorptionsstreifen auf. Dann nimmt die Absorption rasch ab und verliert sich gegen das blaue Ende des Spektrums zu fast ganz. Wie schon in der Einleitung erwähnt, hat Soret nachgewiesen, daß auch im Ultraviolett große Lichtdurchlässigkeit herrscht. Was den Verlauf der Absorption im Rot betrifft, jenseits des Meßbereiches des Spektrophotometers, so nimmt dieselbe mit wachsenden Wellenlängen immer mehr zu. Der auch früher schon erwähnte Absorptionsstreifen in der Nähe der *C*-Linie ist mit einem lichtstarken Spektralapparat bei einer Wassersäule von $5^1/_2$ m eben noch sichtbar, dann aber folgt fast vollkommene Absorption. Nach Desains und Aymonnet[1])

1) P. Desains u. Aymonnet, Compt. rend. 81. p. 423. 1875.

sind im Infrarot auch noch einige Absorptionsstreifen vorhanden.

Alle Abweichungen vom Blau des reinen Wassers sind durch Anwesenheit von Fremdkörpern verursacht. Ob diese im Zustand der Lösung vorhanden sind, oder ob es ungelöste suspendierte Teilchen sind, soll jetzt noch nicht entschieden werden. Diese Abweichungen habe ich nun ihrer Größe nach an verschiedenen Seen des bayerischen Hochgebirges, des oberbayerischen Vorlandes und des bayerischen Waldes festgestellt. (Vgl. Fig. 3.)

Aus den Messungen im Kochelsee, zu welchen das Wasser ganz verschiedener Stellen und zu verschiedenen Jahreszeiten benutzt wurde, ergibt sich das wichtige Resultat, *daß die Farbenzusammensetzung eines Sees, vielleicht bis auf minimale Abweichungen, konstant bleibt*, daß also *auch eine Trübung, welche die Sichttiefe um mehrere Meter verändert, auf die Art der Farbe keinen Einfluß hat.* Es wechselt bloß ihre Intensität.

Die Farbenverteilung beim Achensee nähert sich, wie man aus dem Vergleich der entsprechenden Kurven ersieht, am meisten der des reinen Wassers, nur ist der See ziemlich trüb (Sichttiefe nur 12 m), daher die größeren Werte von *A*. Die Farbe ist, wenn man sie mit der des Himmels vergleicht, gleich dem helleren, schon etwas grünlicheren Blau am Horizont.

Kochelsee, Walchensee, Eibsee, Königsee, Obersee (südliche Fortsetzung des Königsees) und Würmsee haben grünes Wasser; die Absorption des blauen Teiles im Spektrum ist bedeutender als beim Achensee, aber noch nirgends sehr stark. Beim Staffelsee jedoch und beim Arbersee im Bayerischen Wald (einem sogenannten schwarzen See) ist Blau fast vollständig absorbiert, das sichtbare Spektrum ist daher nur mehr sehr kurz. Die Farbe des ersteren ist, durch das Sehrohr betrachtet, ein herrliches leuchtendes Braungrün, fast Gelb, die des letzteren ist ein dunkles Kastanienbraun.

Eine Diskussion der Absorptionskurven kann erst später erfolgen.

Vergleich der durch Farbenskalen bestimmten Wasserfarben mit der wirklichen Seefarbe.

Um mich von der Brauchbarkeit der anfangs erwähnten Farbenskalen zu unterrichten, habe ich die Absorptionskurven für die drei von Ule verwendeten Substanzen (Methylenblau, Kaliumchromat und Kaliumdichromat) in der angegebenen Konzentration spektrophotometrisch hergestellt.

Setzt man die Kurven der drei Substanzen entsprechend den Verschiebungen in der Uleschen Skala additiv zusammen

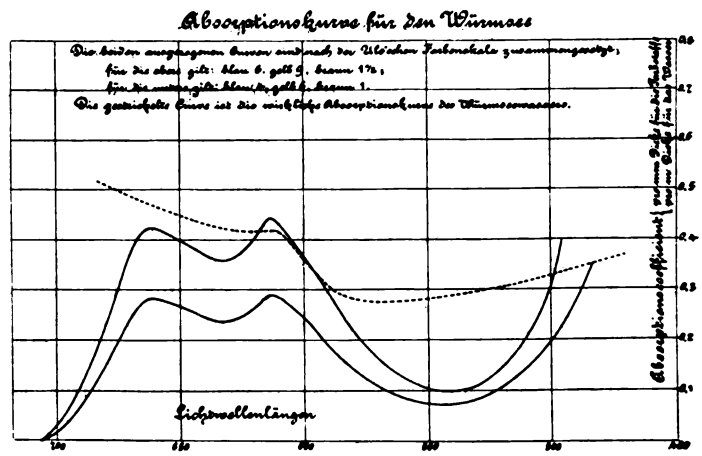


Fig. 5.

(Fig. 5), so sollte man eine Kurve erhalten, die die gesuchte Farbe des Wassers angibt. Ule hat z. B. auf p. 160 mitgeteilt, durch welche Einstellung seiner Skala die Farbe des Würmsees erhalten wird. Auf Fig. 5 ist die diesen Angaben entsprechende Addition der Kurven ausgeführt und dazu die wirkliche Absorptionskurve des Würmseewassers eingezeichnet worden. Man ersieht auf den ersten Blick den fundamentalen Unterschied: während nämlich jedes Wasser, vom reinsten bis zum trübsten, eine ganz ausgesprochene Absorption im Rot zeigt, die um so größer wird, je länger die Lichtwellen werden, so fällt hier die Kurve im Rot steil ab, so daß also die resul-

tierende Mischfarbe immer an Rot sehr viel reicher sein wird, als sie der Wasserfarbe entsprechend sein dürfte. Keinesfalls darf daher eine Lösung von Methylenblau als färbende Flüssigkeit verwendet werden. Man müßte einen anderen blauen Farbstoff ausfindig machen, der der Eigenschaft des Wassers, die roten Strahlen fast vollständig zu absorbieren, mehr Rechnung trüge. Auch die beiden anderen Substanzen, vor allem das Kaliumdichromat, sind nicht geeignet; denn kein Wasser, nicht einmal das an Blau ärmste, absorbiert die kurzen Wellenlängen in der Weise, wie es dieser Farbstoff tut. Auch die Forel-Ulesche Skala habe ich mir hergestellt und die Substanzen spektralanalytisch untersucht. Dabei treten ähnliche Unzuträglichkeiten auf. Die ammoniakalische Kupfersulfatlösung absorbiert Gelb sehr stark, aber je größer im Rot die Wellenlängen werden, um so durchlässiger ist sie für die Lichtstrahlen. Die Kobaltsulfatlösung würde sich von allen angegebenen Substanzen noch am meisten zur Darstellung von Wasserfarben eignen, da sie das Blau mäßig absorbiert, das rote Licht jedoch läßt sie immer noch zu stark durch, um wirklich zu dem angegebenen Zwecke branchbar zu sein.

Um nun auf andere Weise wenigstens eine ungefähre Schätzung (denn um eine solche allein handelt es sich ja auch bei den Skalen nur) von der Farbe eines Sees zu gewinnen, möchte ich einen anderen Vorschlag machen, der jedenfalls den Vorteil der Einfachheit hat. Wie ich am Schluß meiner Abhandlung zeigen werde, kann man sämtliche Gewässer bezüglich ihrer Farbe in vier Gruppen unterbringen.

1. Gruppe: blau wird nicht absorbiert,
2. „ „ „ schwach absorbiert,
3. „ „ „ stark absorbiert,
4. „ „ „ vollständig absorbiert.

Diese Unterschiede lassen sich aber mit Hilfe eines Taschenspektroskopes bei einiger Übung mit großer Genauigkeit konstatieren. Ein solches Instrument ist stets leicht in der Tasche mitzuführen, man braucht zur Ausführung der Bestimmung nur mehr ein kleines geschwärztes Rohr, um die Oberflächenreflexe abblenden zu können. Damit man vergleichbare Resultate bekommt, muß der Spalt des Spektroskopes immer eine

und dieselbe Breite haben. Dies läßt sich leicht dadurch erreichen, daß man an der Vorrichtung, durch die der Spalt reguliert wird, eine Marke anbringt. Die Angabe einer der erwähnten Typen genügt aber vollkommen, um den Charakter der Wasserfarbe eines Sees feststellen zu können, und man hat zudem den Vorteil, eine wirkliche physikalisch richtige Vorstellung von der Zusammensetzung des Wassers gewonnen zu haben.

Durchsichtigkeit des Wassers.

Die Durchsichtigkeit eines Gewässers hängt aufs engste zusammen mit der scheinbaren Farbe, in der uns dasselbe erscheint. Wir haben am Kochelsee gesehen, daß eine Trübung die relative Farbenzusammensetzung an sich zwar nicht zu ändern vermag, daß uns aber ein klarer See mit durchsichtigem Wasser viel dunkler erscheint, als ein solcher mit trübem Wasser.

Bevor ich meine Messungsresultate anführe, möchte ich einige Bedenken zerstreuen. Es ist vielfach geäußert worden, man müsse solche Messungen zu einer bestimmten Jahreszeit ausführen, wenn die Sonnenstrahlen unter einem gewissen Winkel in den See einfallen und man müsse überhaupt jedesmal dieselben äußeren Bedingungen haben. Ich kann aber auf Grund vieler Beobachtungen mit Sicherheit die Behauptung aufstellen, daß alle solche Vorsicht unnütz ist. Nach dem psychophysischen Grundgesetz von Weber und Fechner empfindet das menschliche Auge die Unterschiede zweier Reize nur dann, wenn das Verhältnis dieser Reizintensitäten ein nahezu konstantes Maß überschreitet. Helmholtz konnte dieses Verhältnis auf $^1/_{133}$ festsetzen. Wir nehmen aber auch hier bei dem Versenken der Scheibe nur Helligkeitsunterschiede wahr, die fast unabhängig sind von der Lichtstärke der Umgebung. Die Scheibe wird also dem Auge dann nicht mehr sichtbar sein, wenn der Unterschied der Helligkeit vom Wasser und der eingetauchten Scheibe das Verhältnis von $^1/_{133}$ erreicht hat. Dementsprechend fand ich auch die Sichttiefe an einem Tage bei vollem Sonnenschein und bei starker Bewölkung, ja selbst einmal im Sommer noch abends 9 Uhr nach Eintritt der Dunkelheit, als schon Sterne schienen, völlig kon-

ınt zu 6 m, wohl ein sicherer Beweis dafür, daß man sich ar nicht nach Sonnenstand oder Bewölkung zu richten habe.

Ich teile hier nur meine Beobachtungen über Sichttiefen ı Kochel- und Walchensee mit.

Kochelsee.

Datum	Sichttiefe in m	Temp. in C.° oben	unten	Wetter	Beschaffenheit des Wassers
nuar 1901	10,0	—	—	—	—
Mai 1902	8,0	8,0	—	etwas Sonne	—
„	7,5	8,0	6,5	bedeckt	ziemlich rein
„	6,0	8,0	8,0	Regen	trüb
„	6,0	8,5	8,5	bedeckt	ziemlich rein
„	7,0	10,0	8,5	sonnig	„ „
Juni	6,0	15,5	9,5	„	„ „
„	4,5	14,5	13,0	bewölkt	„ „
„	5,0	14,0	13,0	bedeckt	„ trüb
„	5,5	22,0	16,0	sonnig	trüb
Juli	4,5	19,2	17,8	„	sehr trüb
Aug.	6,0	17,4	17,4	wolkenlos	ziemlich rein
„	6,0	19,6	17,1	bedeckt	„ „
„	7,0	18,0	16,5	„	„ „
„	7,0	18,3	16,5	„	„ „
„	6,0	20,6	17,5	sonnig	trüb
„	5,0	—	—	„	„
Sept.	4,5	19,8	18,8	„	„
„	4,2	—	—	wolkenlos	„
„	4,3	20,3	19,4	„	„
„	5,2	15,3	15,2	sonnig	mäßig trüb
Nov.	6,0	9,6	9,8	neblig	ziemlich klar
Dez.	9,5	5,2	5,0	Nebel	sehr klar
Jan. 1903	9,5	3,4	3,4	trüb	„ „
Febr.[1])	8,0	3,0	3,4	sonnig	mäßig klar
März[2])	5,0	3,8	3,8	wolkenlos	trüb
März	6,0	3,8	3,8	„	„

1) Am 1. Februar 1903 war der See fest zugefroren. Zur Beobhtung wurde ein Loch in das Eis geschnitten.

2) Den Beobachtungen im März 1903 ging die Eis- und Schneehmelze vorher. Später konnten keine Messungen mehr vorgenommen erden, da der ganze See infolge der Loisachregulierungsarbeiten unıtürlich getrübt war; so betrug z. B. im Mai 1903 die Sichttiefe kaum 1 m.

Walchensee.

Datum	Sichttiefe in m	Temp. in C.° oben	unten	Wetter	Beschaffenheit des Wassers
19. Mai 1902	19,5	6,0	5,0	bedeckt	mäßig klar
24. „	17,0	7,0	6,0	etwas Sonne	ziemlich unrein
15. Juni	18,5	11,0	5,0	bewölkt	klar
16. „	19,5	11,3	5,0	bedeckt	sehr klar
29. „	16,0	13,5	6,4	sonnig	ziemlich unrein
19. Aug.	20,2	18,6	6,9	wolkenlos	sehr klar
27. „	20,5	17,4	7,0	sonnig	„ „
1. Sept.	21,0	17,8	6,5	neblig	„ „
3. „	20,5	18,4	7,6	wolkenlos	„ „
29. „	18,0	14,6	8,0	neblig	mäßig klar
8. Dez.	22,5	5,0	5,0	sonnig	sehr klar
5. Jan. 1903	24,0	4,0	—	sehr trüb	„ „
22. März	25,0	3,2	3,2	wolkenlos	„ „
16. Mai	18,0	7,8	5,1	sonnig	mäßig klar

Aus diesen beiden Tabellen kann man deutlich ersehen, wie die Trübung der Seen im Frühjahr, wohl unter dem Einfluß der den See umgebenden Vegetation zunimmt und dann zur Zeit der Hauptvegetationsperiode ihr Maximum erreicht. Im Herbst beginnt sich das Wasser wieder zu klären, bis es Ende des Winters seine größte Durchsichtigkeit erlangt hat.

Wie weit das Licht in ein Gewässer eindringt, hängt natürlich mit der Größe der Absorption für die einzelnen Farben aufs engste zusammen. Da nach der Definition der Absorptionskoeffizient der reziproke Wert derjenigen Schichtdicke ist, bei welcher die Intensität des einfallenden Lichtes auf $1/e$ gesunken ist, so kann man mit seiner Hilfe die Helligkeit für eine bestimmte Strahlengattung in beliebiger Tiefe angeben. Zahlenwerte hierfür haben schon Hüfner und Albrecht gerechnet.

Temperatur, Farbe und Durchsichtigkeit in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit.

Die Tatsache, daß alle Seen im Winter dunklere Farbe zeigen als im Sommer, legte die Vermutung nahe, daß die Temperatur auf die Wasserfarbe einen gewissen Einfluß haben könnte. Wallmann[1]) nennt die erwähnte Erscheinung direkt

1) J. Wallmann, l. c.

eine Änderung der Farbe, wenn er damit offenbar auch nur den Wechsel der Intensität meint. Wild[1]) prüfte die Frage experimentell, indem er die Intensität des aus einer mit Wasser gefüllten Röhre austretenden Lichtes verglich mit der Helligkeit der ursprünglichen Lichtquelle. Dabei fand er wirklich eine Zunahme der Absorption mit wachsender Temperatur. Jedoch sind die Variationen so gering, daß sie für das Auge nicht in Betracht kommen können. Zudem operierte Wild mit Temperaturdifferenzen (Wasser von 7° und von 50°), die in der Natur nie auftreten.

Man könnte auch vermuten, daß an der Sprungschicht, wo die Temperaturgradienten rasch aufeinander folgen, irgend welche Unregelmäßigkeiten in der Reflexion, Brechung oder Absorption auftreten könnten, die von Einfluß auf die Farbe sind. Da ferner der Brechungsexponent des Wassers sich mit der Temperatur ändert, so wäre es möglich, daß beim Auftreten von Schlieren ähnliche Erscheinungen vorkommen, wie sie erhalten werden, wenn man Glaspulver in eine Mischung von Benzol und Schwefelkohlenstoff bringt.[2]) Man kann nämlich aus den beiden Flüssigkeiten eine solche Mischung herstellen, daß ihr Brechungsverhältnis für eine beliebige Wellenlänge genau gleich dem des Glases ist. Licht von solcher Wellenlänge geht dann ohne Reflexion oder Brechung durch die Mischung von Flüssigkeit und Pulver hindurch, während die anderen Farben teils zurückgeworfen, teils gebrochen werden. Die ganze Masse erscheint also gefärbt. Unterscheidet sich aber das Brechungsverhältnis der Mischung nur um wenig von dem des Glases, so kann das Licht nicht ungehindert durch das Pulver hindurchgehen. Es treten vielfache Reflexionen und Brechungen ein und die Flüssigkeit wird getrübt sein. Daß solche Erscheinungen bei der Vermengung von Wasserschichten verschiedener Temperatur auch vorkommen können, ist sehr wahrscheinlich. Aber hier interessiert nur die Frage, ob sie auch von solcher *Intensität* sind, daß sie die Durchsichtigkeit eines Sees zu beeinflussen imstande sind. Sehen wir uns daher die Lage der Sprungschicht in den Seen etwas näher an.

1) H. Wild, Pogg. Ann. **134.** p. 582. 1868.
2) C. Christiansen, Wied. Ann. **23.** p. 300. 1884.

Bei trüben Seen, wie beim Kochelsee, wo die Sprungschicht bei 7—8 m beginnt, liegt sie schon unterhalb der Sichtbarkeitsgrenze der weißen Scheibe, kann also zu der Farbe des Wassers nichts mehr beitragen. In klaren Seen, wie beim Walchensee, wo sie etwa bei 10 m Tiefe beginnt, liegt sie ihrer ganzen Ausdehnung nach allerdings noch innerhalb des Sehbereiches. Direkte photometrische Messungen in dieser Tiefe vorzunehmen ist nicht gut möglich, da die Scheibe dann riesige Dimensionen haben müßte, um noch den ganzen Strahlenkegel im Photometer erfüllen zu können. Auch wäre dort unten die Lichtstärke für Messungen schon zu gering. Wohl aber verfolgte ich beim Versenken die Scheibe mit dem Auge, konnte aber beim Passieren der Sprungschicht nie auch nur den geringsten Unterschied in der Farbe gegen andere Tiefen wahrnehmen. Man könnte nun einwenden, daß durch die Bewegung der Scheibe die Sprungschicht überhaupt zerstört würde, doch konnte ich mit dem Thermometer konstatieren, daß eine Vermischung der verschiedenen Wärmezonen bei vorsichtigem Hinablassen nicht eintritt, ein Umstand, auf den auch Ule aufmerksam macht. Dies beweist nebenbei, daß der Zustand, der dort unten herrscht, sehr stabil sein muß, wodurch auch verständlich wird, daß sich derselbe viele Tage hindurch fast unverändert erhalten kann.

Wir können also sagen, daß bei den von mir untersuchten Seen ein Einfluß der Temperatur auf die Farbe nicht nachweisbar ist.

Umgekehrt hat aber die Farbe gar wohl einen Einfluß auf die Temperatur eines Sees insofern, als Wasser die roten Strahlen stärker absorbiert als die andern.

Daß auch die Sichttiefe die Temperaturverhältnisse in einem See beeinflußt, ist einleuchtend, denn klares Wasser läßt die Sonnenstrahlen tiefer eindringen als trübes; während also ein klarer Gebirgssee in seinen oberen Schichten sich nur langsam erwärmen wird, da die eindringende Wärmemenge sich auf einen größeren Bereich der Tiefe nach verteilt, werden die Oberflächenschichten in einem undurchsichtigeren See schneller erwärmt werden. In den tiefer gelegenen Regionen herrschen dann allerdings noch niedere Temperaturen vor.

Man wird also aus der Absorptions- und Sichttiefenkurve eines Sees direkt auf seine thermischen Verhältnisse schließen können.

Um schließlich noch den Einfluß der Temperatur auf die Durchsichtigkeit der Seen zu untersuchen, gehen wir aus von den Erscheinungen, die sich beim reinen Wasser darbieten. Maßgebend sind in dieser Beziehung die Untersuchungen von Spring[1]) über thermische Konvektionsströme im Wasser. Er brachte optisch leeres Wasser in eine Röhre von 52 m Länge. Dabei konnte man immer noch durch die Röhre hindurch die Öffnung an der entgegengesetzten Seite als kreisrund erkennen. Wurde aber das thermische Gleichgewicht an einer Stelle nur im geringsten gestört, so trat vollständige Dunkelheit auf, da das Licht infolge von Schlierenbildung nicht mehr ins Auge gelangen konnte. Für eine Röhre von 26 m Länge konnte Spring feststellen, daß ein Temperaturunterschied von 0,6° genügt, um vollständige Undurchsichtigkeit zu erzeugen.

Anders stehen die Verhältnisse bei nicht optisch leerem Wasser. Ich füllte in die schon mehrfach erwähnte $5\,^1/_2$ m lange Röhre gewöhnliches destilliertes Wasser. Die Helligkeit des durchgelassenen Lichtes wurde photometrisch mit der ursprünglichen Lichtquelle verglichen. An beiden Enden wurde je ein Thermometer eingetaucht. Eine Erwärmung der Röhre mit der Hand veränderte nichts an der Durchsichtigkeit. Erst bei Erwärmung einer Stelle des Rohres mit einer Gasflamme trat Undurchsichtigkeit ein, die aber nach Entfernung der Wärmequelle schnell wieder der früheren Helligkeit Platz machte, obwohl noch große Temperaturunterschiede an beiden Enden der Röhre bestanden. Man erkennt aus diesem Versuch, daß im gewöhnlichen Wasser, das nicht optisch leer ist, sehr wohl große Temperaturunterschiede nebeneinander bestehen können, ohne daß hierdurch die Durchsichtigkeit vermindert wird, wenn dieselben nur stationär sind, d. h. wenn keine Konvektionsströme auftreten.

Nun haben wir aber gesehen, daß in einem See während des Sommers die Schichten verschiedener Temperatur sehr ruhig übereinander liegen, weshalb keine oder nur sehr geringe

1) W. Spring, Bull. Acad. Roy. Belg. **31**. p. 94. 1896.

Konvektionsströme auftreten, so daß die Durchsichtigkeit dadurch nicht beeinträchtigt wird. Tatsächlich habe ich auch bei meinen zahlreichen Sichttiefenbestimmungen während des Sommers selbst bei Durchquerung einer sehr ausgeprägten Sprungschicht niemals eine plötzliche Trübung oder eine plötzliche Verminderung der Helligkeit der Scheibe wahrnehmen können.

Anders stehen die Verhältnisse bei der Abkühlung der Seen. Infolge Untersinkens des schwereren kalten Wassers treten lebhafte Zirkulationen der Temperatur auf. Wiederum werden hierdurch die Sichttiefen trüber Seen verhältnismäßig weniger beeinflußt werden als die klarer Seen. So konnte ich eine solche plötzliche Abnahme der Helligkeit der Scheibe im Walchensee in der Tiefe der Sprungschicht (bei 14—15 m) am 29. September 1902 feststellen, ein Umstand, der auch in der Sichttiefe zum Ausdruck kam.

Wenn es richtig wäre, daß durch Konvektionsströme im Sommer die Sichttiefe stark vermindert wird, so müßte dieselbe auch innerhalb eines Tages großen Schwankungen ausgesetzt sein. Nehmen wir an, an einem sonnigen heißen Tag sei der See stark erwärmt worden, so müßte infolge der eintretenden thermischen Bewegung seine Durchsichtigkeit sich sehr vermindert haben. Folgt nun eine warme Nacht darauf, in der der Himmel bedeckt ist, so daß die Ausstrahlung gering ist, so würden sich die Schichten verschiedener Temperaturen im See in einer gewissen Weise einstellen können und man hätte am Morgen eine bedeutend größere Sichttiefe zu erwarten, was aber den Beobachtungen nicht entspricht.

Wir können also sagen: die thermischen Störungen beeinflussen die Durchsichtigkeit in einem trüben See überhaupt so wenig, daß sie nicht in Betracht kommen, während sie in klaren Seen allerdings wenigstens im Herbst bei der Abkühlung einige Wirkung auf die Sichttiefe auszuüben vermögen.

Prüfung der Theorien der Wasserfarbe.

Wir haben schon in der Einleitung gesehen, daß es zwei Theorien gibt, welche die Wasserfarbe zu erklären suchen, eine physikalische (Diffraktionstheorie), welche behauptet, die

Wasserfarbe könne teilweise als Farbe trüber Medien aufgefaßt werden, und eine rein chemische, welche die Farbe als Eigenfarbe deutet.

Wir wollen uns zuerst mit der physikalischen Theorie beschäftigen.

1. Diffraktionstheorie.

Durch kleine Teilchen, die klein sind im Verhältnis zur Lichtwellenlänge, wird nach der Rayleighschen Theorie das auffallende Licht diffundiert. Es ist dann polarisiert und das Maximum der Polarisation tritt auf senkrecht zum einfallenden Strahl. Wie schon in der Einleitung erwähnt, fanden Soret und Hagenbach dieselben Polarisationsverhältnisse auch bei dem Licht, das aus dem Wasser austritt. Die Erscheinung ist nach ihrer Angabe und wie ich mich selbst überzeugt habe, allerdings nur schwach, etwa so „wie bei mäßig blauem Himmel". Damit man die Polarisation überhaupt wahrnehmen kann, müssen die Sonnenstrahlen direkt auf die Wasseroberfläche fallen. Auch muß die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser eben sein, damit die eindringenden Strahlen parallel bleiben. Taucht man nun das Soretsche Rohr, dessen „Objektiv" aus einer wasserdicht anliegenden Glasplatte, dessen „Okular" aus einem Nicolschen Prisma oder besser einer Haidingerschen Lupe besteht, schief ins Wasser ein, so sieht man, wenn das Wasser klar ist, eine schwache Polarisation, deren Ebene durch die Achse des Rohres und durch die Sonne geht. Ich konnte aber bei den von mir untersuchten Gewässern in der Richtung senkrecht zum einfallenden Strahl kein Maximum konstatieren, vielmehr fand ich die Polarisation auch in Richtung des einfallenden Strahles gleich groß. Beim Arbersee war sogar in letzterer Richtung ein Maximum, wobei das Licht seine Schwingung in der Einfallsebene ausführte. Die Verhältnisse scheinen also, nach Sorets und meinen Beobachtungen zu schließen, folgendermaßen zu liegen: in sehr klarem Wasser, wie dem des Genfersees, ist das austretende Licht fast ausschließlich infolge von Diffusion an den sehr kleinen suspendierten Teilchen polarisiert. Bei trüberen Gewässern kommt noch Polarisation durch Reflexion an größeren Teilchen hinzu, weshalb kein Maximum mehr in Richtung senkrecht zum ein-

fallenden Strahl zu konstatieren ist. In den schwarzen Seen scheint ausschließlich, oder wenigstens in sehr überwiegendem Maße, die Lallemandsche Erscheinung aufzutreten, daß nämlich das Licht in der Einfallsebene schwingt, wobei ein Maximum in Richtung des einfallenden Strahles vorhanden ist. Ich glaube auf Grund meiner Beobachtungen sagen zu dürfen, daß durch das Vorhandensein dieser schwachen Polarisationserscheinungen die Auffassung der Wasserfarbe als der eines trüben Mediums noch nicht genügend gerechtfertigt erscheint, zudem die Resultate meiner weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete das Gegenteil zeigen, denn

1. konnte ich durch photometrische Messungen konstatieren, daß destilliertes Wasser, das noch mit suspendierten Staubpartikelchen erfüllt ist, auch im durchgelassenen Licht eine vollkommen blaue Farbe hat (vgl. Kurve auf Fig. 3), daß hierbei kein merklicher Verlust an kurzwelligen Strahlen auftritt, wie es bei einem trüben Medium im durchgelassenen Licht sein müßte.

2. Ferner beweisen die Absorptionskurven des Kochelsees, die bei verschiedenen Sichttiefen aufgenommen wurden, daß mit einer Trübung keine Änderung der Farbenzusammensetzung verbunden ist.

3. Auch behandelte ich Kochelseewasser mit einer Lösung von Zinkchlorid, wodurch die suspendierten Teilchen zu Boden geschlagen werden. Nach einem Monate untersuchte ich dieses nunmehr optisch leere Wasser auf seine Farbe und fand dieselbe unverändert, während sie, wenn die kleinen Teilchen einen Einfluß gehabt hätten, im durchgelassenen Lichte ärmer an Rot und reicher an Blau hätten werden müssen.

4. Nach der Rayleighschen Theorie wird Licht zerstreut durch Teilchen, die sehr klein sind im Vergleich zu den Lichtwellenlängen. Das Amplitudenverhältnis der Schwingungen des zerstreuten Lichtes ändert sich umgekehrt mit dem Quadrat der Wellenlänge und das Verhältnis der Intensität der Strahlen selbst daher mit der vierten Potenz. Bedeutet J_0 die Intensität des einfallenden Lichtes, J_1 die des reflektierten, so erhält man

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{k}{\lambda^4},$$

wo k ein Faktor ist, der von der Größe und Anzahl der Teilchen abhängt; dringt das Licht eine Strecke x in das trübe Medium ein, so ist

$$J_1 = J_0 e^{-k\lambda^{-4}x}.$$

Danach würde z. B. das Rot von der Wellenlänge $\lambda_1 = 650\ \mu\mu$ gegenüber dem Blau der Wellenlänge $\lambda_2 = 450\ \mu\mu$ im Verhältnis

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 = 1{,}44^4 : 1 = 4{,}30 : 1$$

schwächer reflektiert werden. Im durchgelassenen Licht jedoch wird das Rot viel stärker vorhanden sein als das Blau.

Um dies experimentell zu untersuchen, stellte ich mir optisch leeres Wasser und dann ein trübes Medium her. Letzteres erhält man leicht durch eine alkoholische Mastixlösung, die dem zu untersuchenden Wasser beigemengt wird. Um die Teilchen recht klein zu erhalten, muß man nach Abney und Festing[1]) kleine Quantitäten der Lösung in große Mengen von Wasser einschütten und dabei fortwährend umrühren oder schütteln.

Ich brachte nun diese Mastixlösung in das optisch leere Wasser; so daß der Gehalt an gelöstem Mastixpulver etwa 5 mg in 12 Liter Wasser betrug. Dieses Gemisch ließ ich über Nacht stehen und bekam dann für die Farbe des durchgelassenen Lichtes folgende Werte:

Optisch leeres Wasser, das mit etwas Mastixlösung getrübt ist.
(Kurve vgl. Fig. 4.)

λ	A	λ	A
658	0,386	579	0,220
643	0,365	558	0,237
617	0,351	522	0,290
602	0,333	494	0,330
590	0,249	473	0,365

Der Zweck der ganzen Untersuchung ist nun der, zu prüfen, ob die Absorption eines künstlich getrübten Wassers mit der eines natürlichen Wassers übereinstimmt, ob also die Farbe des Wassers ganz oder teilweise als Farbe eines trüben Mediums aufgefaßt werden darf. Vergleichen wir daher die

1) W. Abney u. Festing, Beibl. 10. p. 622. 1886.

zuletzt gewonnene Kurve mit denen auf Fig. 3. Da bemerken wir vor allem, daß beim trüben Medium schon bei einem geringen Grad von Trübung (die sich durch die absolute Größe des Absorptionskoeffizienten ausdrückt) eine große Abschwächung der Absorption im Rot auftritt, während die im Blau sehr stark zunimmt, eine Erscheinung, die in dem Grade bei keinem Wasser in der Natur vorkommt; denn bei allen den Seen, bei denen eine mäßige Absorption im Blau vorhanden ist, ist doch die Absorption im Rot immer viel größer, sie wächst ungefähr proportional mit der Trübung. Erst bei den gelben Seen schwächt sie sich etwas ab. Da nun schon die Farbe des mit reinem Wasser hergestellten trüben Mediums mit keiner Wasserfarbe übereinstimmt, so würden sich noch viel größere Abweichungen ergeben, wenn das Wasser selbst noch Trübung aufweisen würde und sich außerdem noch eine grüne oder gelbe Eigenfarbe hinzugesellte, denn dann wird das Rot verhältnismäßig nur gering absorbiert, das Blau dagegen in einem solchen Maße, daß diese Kurven nimmermehr als Absorptionskurven des Wassers gedeutet werden könnten.

Wir müssen also zu dem Resultat gelangen, *daß die Wasserfarbe keinesfalls als die Farbe eines trüben Mediums aufgefaßt werden kann.*

2. Chemische Theorie.

Ich habe früher erwähnt, daß alle Abweichungen der Wasserfarbe vom Blau auf Fremdkörper zurückzuführen sind. Wir können dies nun genauer präzisieren, indem wir sagen: *es sind einzig und allein Lösungen verschiedener Substanzen, die, dem Wasser auf irgend einem Wege zugeführt, ihm seine spezifische Farbe verleihen.*

Welche Bestandteile sind es denn, die dem Wasser seine verschiedenen Farben zu erteilen imstande sind? Da liegt es nun sehr nahe, daß man als solche die am häufigsten und in größten Mengen vorkommenden Substanzen vermutet. Diese sind aber 1. *Kalk* in seinen verschiedenen Arten, als Dolomit, kohlensaurer und schwefelsaurer Kalk, und 2. *organische, humöse Stoffe.* Um diese Vermutungen auf ihre Richtigkeit zu prüfen, habe ich zwei Versuche angestellt. Einmal ver-

mischte ich reines Wasser[1]) mit Calciumhydroxyd, so daß etwa 1 g in 12 Liter Wasser (ca. 84 mg auf 100 g Wasser) gelöst war. Für die Farbe erhielt ich die in folgender Tabelle angegebenen Werte:

Kalk in Wasser gelöst.

A bedeuten die Werte für doppelt destilliertes Wasser.
A' bedeuten die Werte für das Kalkwasser.

λ	*A*	*A'*	λ	*A*	*A'*
658	0,320	0,390	579	0,049	0,131
643	0,291	0,353	558	0,038	0,126
622	0,239	0,322	522	0,002	0,112
617	0,244	0,327	494	0,002	0,108
602	0,173	0,266	473	—	0,098
590	0,089	0,176	458	—	0,103

Eine andere Wasserfarbe erhielt ich, indem ich Wasser über 250 g frischer Gartenerde filtrierte:

Organische Stoffe in Wasser gelöst.

A bedeuten die Werte für doppelt destilliertes Wasser.
A' bedeuten die Werte für die Lösung.

λ	*A*	*A'*	λ	*A*	*A'*
658	0,320	0,660	590	0,089	0,509
643	0,291	0,617	579	0,049	0,481
628	—	0,607	558	0,038	0,503
617	0,244	0,615	540	—	0,536
602	0,173	0,576	522	0,002	0,565

Die Kurven auf Fig. 6 lassen die Farbenzusammensetzung dieser beiden Lösungen erkennen. Beim Vergleich mit den Kurven auf Fig. 3 sieht man, daß es ausgesprochene Wasserfarbenkurven sind. Ferner kann man aus der Kurve für das Kalkwasser entnehmen, daß dieses eine grünliche Farbe hat, da schon etwas Absorption im Blau auftritt. Die andere Kurve zeigt, daß wir es hier mit einem gelblichen oder bräunlichen Wasser zu tun haben, dessen Farbe zwischen der des Staffelsees und Arbersees liegt.

1) Nachdem ich festgestellt hatte, daß sich das optisch leere Wasser vom doppelt destillierten nach Farbe und Durchsichtigkeit nicht merkbar unterscheidet, brauchte ich zu den weiteren Untersuchungen nicht mehr optisch leeres Wasser herzustellen, was natürlich eine große Zeitersparnis bedeutet.

Wir erhalten also daraus das Resultat, daß *großer* Kalkgehalt dem Wasser einen grünen Ton verleiht, während größere Mengen von gelösten organischen Bestandteilen die Farbe

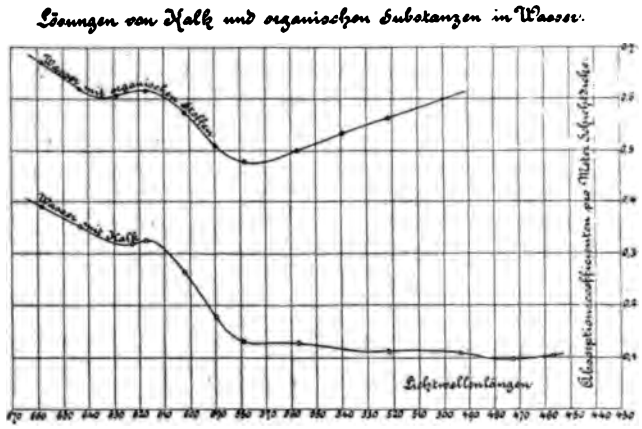


Fig. 6.

über Grün nach Gelb führen. Wir wollen nun an der Hand einiger chemischer Analysen untersuchen, ob dieses Resultat auf die von mir auf ihre Farbe unteruchten Seen Anwendung finden kann. Ich gebe zuerst in einer Tabelle den Gehalt an Kalk und an organischen Bestandteilen für einige Seen an.

In 1000 g Wasser sind in Milligramm enthalten:

Seen	CaO	Org.
Walchensee[1])	50,5	14,55
Kochelsee[1])	80,4	22,78
Würmsee[2])	49,8	28,86
Genfersee[3])	58,95	18,80

Wir ersehen zunächst hieraus, daß alle vier Seen einen großen Gehalt an Kalk besitzen. Ferner haben wir besonders bei Kochel- und Würmsee noch einen sehr großen Reichtum an organischen Substanzen. Die Kurven des Kochel- und Würmsees zeigen uns daher schon eine größere Absorption im Blau, die Farbe neigt sich also einem gelblichen Grün zu,

1) A. Schwager, l. c.

2) H. Gebbing, Hydrochem. Untersuch. des Würm-, Kochel- und Walchensees. München 1902.

3) F. A. Forel, Léman 2. p. 580. 1895. Analyse von R. Brandenburg.

während der Walchensee noch viel mehr Blau besitzt. In Ermangelung einer Analyse des Achensees habe ich eine solche des Genfersees hier beigefügt, der ja auch blaues Wasser hat. Dabei muß ich vorausschicken, daß die Wasserproben für die Analyse aus den ersten drei Seen zur Zeit ihrer größten Durchsichtigkeit im Februar und März geschöpft wurden, während die des Genfersees aus dem Monat Juli stammt, also aus der Zeit der größten Verunreinigung des Sees. Trotzdem fällt der sehr geringe Gehalt an organischen Bestandteilen auf. Man darf also annehmen, daß die blauen Gewässer auch am wenigsten gelöste Substanzen enthalten. Bezüglich der Analysen von gelbem und braunem Wasser nehme ich die Angabe Reindls[1]) zu Hilfe. Er behandelt in seiner Arbeit die schwarzen Gewässer Südamerikas, die in der Farbe unseren bayerischen Waldseen sehr nahe stehen. Immer wird von Reindl der überaus große Reichtum an organischen Bestandteilen hervorgehoben. Er betont auch, daß gerade dieser die schwarze Färbung verursacht. Betreffs der Löslichkeit der humussauren Stoffe bestehen Meinungsverschiedenheiten; man fragt sich nämlich, ob diese sich unter Einwirkung von kohlensauren Alkalien in Wasser lösen oder ob es eine einfache Lösung ist. Schwager behauptet letzteres, während Reindl die ältere Ansicht der vermittelten Lösung vertritt. Er beschreibt dabei auf p. 124 ff. einige Versuche, wodurch er seine Behauptung zu beweisen sucht. Eine auffallende Tatsache ist allerdings die, daß braunes Wasser beim Übertritt auf kalkreicheren Boden sich meist schnell entfärbt, d. h. das Calcium verdrängt dann die Alkalien und es entstehen schwer lösliche humussaure Calciumverbindungen. Schwager hingegen betont ausdrücklich, daß gerade in den Gewässern des bayerischen Waldes kein kohlensaures Alkali aufzufinden war. Wenn ich mir hierüber ein Urteil erlauben darf, so möchte ich die Ansicht aussprechen, daß zur Braunfärbung in dem Maße, wie sie die natürlichen Gewässer besitzen, wohl schon die freie Lösung ausreicht; denn bei der Herstellung meines oben erwähnten braunen Wassers löste sich ein Teil der Gartenerde in Wasser allein; durch Zusatz von kohlensaurem Alkali kann die

1) J Reindl, l. c.

Löslichkeit bedeutend vergrößert werden, so daß man auch schon in kleinen Quantitäten die „schwarze" Farbe deutlich wahrnehmen kann, wie aus den angegebenen Versuchen Reindls hervorgeht.

Außer den organischen Bestandteilen hat auch wohl das kohlensaure Eisenoxydul[1]) eine Wirkung auf die Färbung und Entfärbung mancher Gewässer.

Werfen wir noch kurz einen Blick auf die verschiedenen Seenkurven auf Fig. 3. Als besondere Eigentümlichkeit für das reine Wasser haben wir dreierlei erkannt: 1. die große Absorption im Rot, 2. den charakteristischen Absorptionsstreifen im Orange, 3. die große Lichtdurchlässigkeit für das Blau. Im ganzen treten dieselben Erscheinungen auch bei allen stark kalkhaltigen Gewässern mit mehr oder weniger großer Änderung im blauen Teil auf. Wir sehen dann, daß der Achensee genau die Farbenzusammensetzung des reinen Wassers zeigt, also jedenfalls nur sehr wenig gelöste Bestandteile enthält. Ferner erkennen wir, wie mit steigendem Gehalt an organischen Stoffen die Absorption im Blau wächst.

So kann man also in der Farbe deutlich den chemischen Gehalt des Wassers verfolgen, nachdem man nur erst einmal die Einwirkung der beiden wichtigsten Substanzen auf den Verlauf der Absorptionskurve erkannt hat.

Welche Substanz nun gerade ein See in überwiegendem Maße gelöst enthält, das entscheidet die geologische Beschaffenheit seines Beckens oder die seines Niederschlagsgebietes. Wir sehen, daß die tiefgrünen Gewässer hauptsächlich auf reinem Kalkboden vorkommen; viele Vorlandseen, wie Kochelsee, Würmsee, Ammersee, Chiemsee, liegen wohl auch noch im Kalkgebiete, grenzen aber doch großenteils an moosige Gegenden, oder haben Zuflüsse, die aus solchen kommen. Daher ist ihre Farbe ein gelbliches Grün; überhaupt enthalten sie auch infolge der Nähe von Mooren viel mehr trübende schwimmende Teilchen, die zum Teil mit bloßem Auge sichtbar sind. Daher ist in diesen Seen die Sichttiefe geringer als in den klaren Gebirgsseen. Die gelben oder braunen Gewässer endlich treffen wir in solchen Gegenden, wo große verwesende Pflanzenmassen vorkommen. Sie sind also entweder ausgesprochene Moor-

1) W. Spring, Bull. Acad. Roy. Belg. 36. 1898.

wässer (Staffelsee), oder aber ihre Umgebung und ihr Zuflußgebiet ist reich an Verwitterungsprodukten, so daß sich große Mengen von Humus bilden können, wie dies im Urgebirge (Bayerischer Wald, Fichtelgebirge, Schwarzwald) so auffallend zutage tritt.

Wir können also jetzt am Schluß unserer Betrachtung feststellen, daß *die Farbe eines jeden Sees und auch die jedes anderen Gewässers eine Eigenfarbe ist, die ihre Ursache hat zunächst in der Eigenfarbe des reinen Wassers, welche dann modifiziert wird, durch den chemischen Gehalt, der seinerseits wiederum abhängt von den geologischen Verhältnissen der nächsten und weiteren Umgebung.* Aber nicht nur die Farbe des Sees hängt von der geologischen Bodenbeschaffenheit ab, sondern in hohem Maße auch die Vegetation, die den See umgibt. Nun haben wir gesehen, daß gerade auch diese Vegetation wieder einen großen Einfluß hat auf die Durchsichtigkeitsverhältnisse des Wassers. Ferner sind aber Farbe und Durchsichtigkeit die beiden Faktoren, welche die Temperaturverhältnisse regeln; durch diese endlich ist das organische Leben im See, die Pflanzen- und Tierwelt, bedingt.

Auf Grund dieser Resultate ist es naheliegend, eine neue Einteilung der Seen zu treffen, bezüglich ihrer Farbe, und zwar nach dem Merkmal, das uns bei unseren Betrachtungen am meisten beschäftigt hat, nämlich nach der Größe der Absorption, welche das betreffende Wasser auf die *blauen* Strahlen ausübt. Wir können demnach vier Gruppen unterscheiden:

I. Gruppe: Blau wird nicht absorbiert, Farbe: blau. (Typus Achensee.)

II. Gruppe: Blau wird schwach absorbiert, Farbe: grün. (Typus Walchensee.)

III. Gruppe: Blau wird stark absorbiert, Farbe: gelblichgrün. (Typus Kochelsee.)

IV. Gruppe: Blau wird vollständig absorbiert, Farbe: gelb oder braun. (Typus Staffelsee.)

Wie auf p. 695 erwähnt, kann man diese Unterschiede entweder schon mit bloßem Auge, ganz sicher aber mit Hilfe eines Taschenspektroskopes feststellen.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule 1903.

(Eingegangen 5. November 1903.)

5. *Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen; von K. Schütt.*

(Auszug aus der Kieler Inaugural-Dissertation, der philosophischen Fakultät vorgelegt am 29. Mai 1903.)

In der achten Reihe seiner Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren einer flüssigen Masse ohne Schwere erklärt Plateau[1]) das Entstehen und Beharren flüssiger Lamellen durch das Vorhandensein einer oberflächlichen Schicht von besonderer Zähigkeit, die die Lamelle bekleidet, so daß sich dieselbe wie zwischen zwei schwer beweglichen Wänden befindet, welche das Herabfließen der Flüssigkeit und damit das Dünnerwerden der Lamelle verhindern. Dadurch, daß er die Zeit bestimmt, die eine um 85° aus der Nordsüdlage abgelenkte Magnetnadel, die sich einmal in der Oberfläche und zweitens ganz im Innern der Flüssigkeit befindet, nötig hat, um in ihre Ruhelage zurückzukehren, stellt er fest, daß ein Unterschied zwischen der Zähigkeit im Innern und in der Oberfläche besteht. Dabei zeigt es sich, daß bei Wasser, Glyzerin, Schwefelsäure, einer Reihe Salzlösungen, namentlich indessen bei den wässerigen Lösungen der verschiedenen Seifen, des Saponins, des Albumins und des essigsauren Eisenoxyds eine Oberfläche von beträchtlicher Zähigkeit vorhanden ist.

Im Jahre 1870 untersuchte Luvini[2]) diese von Plateau entdeckte Oberflächenzähigkeit der Flüssigkeiten, und zwar benutzte er eine Coulombsche Drehwage, deren Wagebalken er ersetzte durch Nadeln und Platten von verschiedener Form aus Messing, Eisen, Stahl, Glas, Holz und Knochen. Indem er ebenso wie Plateau die Zeit bestimmte, die diese Körper, die sich in der Oberfläche oder in mehr oder minder großer Entfernung unter derselben befinden, nötig haben, um aus ihrer

1) J. Plateau, Pogg. Ann. **141.** p. 44. 1870.
2) G. Luvini, Philosophical magazine (4) **40.** p. 190. 1870.

Gleichgewichtslage abgelenkt einen bestimmten Winkel zu durchlaufen, findet er Folgendes: Der Widerstand der Flüssigkeitsoberfläche ändert sich gar nicht oder nur wenig, wenn der Körper weiter oder ganz in dieselbe eintaucht. Der Widerstand ein und derselben Flüssigkeit hängt ab von der Form des festen Körpers, der sich in ihr bewegt.

Marangoni[1]) erklärt die von Plateau behauptete oberflächliche Zähigkeit auf folgende Weise: Wie schon Quincke[2]) festgestellt hat, bekleiden sich viele Flüssigkeiten mit einer Oberflächenhaut von geringerer Spannung als die reine Oberfläche. Um diese Haut zu entfernen, sei eine gewisse Kraft nötig, die um so grösser, je größer der Unterschied der Oberflächenspannung der reinen und unreinen Oberfläche sei. Diese Erscheinung nennt er „oberflächliche Elastizität" und versteht darunter die Kraft in Milligrammen, die nötig ist, um eine Länge von 1 mm parallel mit sich selbst zu verschieben. Er bestimmt ihre Größe durch eine empfindliche Wage (bilancia capillare).

Hiergegen ist einzuwenden, daß die Oberflächenspannung (denn als Differenz zweier Oberflächenspannungen ist die „oberflächliche Elastizität" definiert) gar nicht in Wirkung treten kann, wenn z. B. eine Scheibe in der Oberfläche drehende Schwingungen ausführt, da das Minimum der Oberfläche gewahrt bleibt; sie kann also nicht die größere Dämpfung der Scheibe in der Oberfläche erklären. Die „oberflächliche Elastizität" ist wesensverschieden von der Oberflächenzähigkeit; erstere ist eine statische, letztere eine dynamische Erscheinung.

Nach Veröffentlichung der Versuche von Marangoni unternahm es A. Oberbeck[3]), die Reibungswiderstände in freien Flüssigkeitsoberflächen zu untersuchen. Er ließ eine bifilar aufgehängte, vertikale, rechteckige Messingplatte in der Flüssigkeit schwingen, und zwar so, daß die Platte entweder ganz eingetaucht war, oder daß ihr oberer Rand sich in der Oberfläche befand oder dieselbe etwas überragte. Der Quo-

1) C. Marangoni, Nuovo Cimento. (2) 5—6. p. 239. 1872; (3) 3. p. 50, 97, 192. 1879.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 105. p. 1. 1858; 139. p. 1. 1870.

3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 11. p. 634. 1880.

tient aus dem logarithmischen Dekrement und der Schwingungsdauer gilt als Maß der Reibungswiderstände. Die Versuche ergaben eine Übereinstimmung mit den Plateauschen.

Nach den Ergebnissen von Luvini scheint diese Versuchsanordnung nicht einwandfrei. Schwingt eine solche vertikal stehende Platte im Innern der Flüssigkeit, so fließt die vor derselben befindliche Flüssigkeit oben, unten und seitlich um dieselbe herum. Liegt ihr oberer Rand in der Oberfläche, so wird die Flüssigkeit auch jetzt ein wenig nach oben ausweichen; die Oberfläche wird vergrößert und dadurch Arbeit gegen die Oberflächenspannung und die Schwere geleistet. Die hierzu erforderliche Energie wird der schwingenden Platte entzogen, der Reibungswiderstand erscheint zu groß.

Aus dieser Zusammenstellung erhellt, daß die Frage, ob es eine Oberflächenzähigkeit gibt, noch nicht entscheidend beantwortet ist. Die vorliegende Arbeit stellt sich nun die Aufgabe, womöglich Klarheit in diese Frage zu bringen. Die Flüssigkeitsoberfläche wurde mit einer horizontalen oszillierenden Kreisscheibe untersucht. Es ergab sich Folgendes: Eine Oberflächenzähigkeit im Sinne Plateaus wurde bei keiner Flüssigkeit gefunden. Es zeigte sich jedoch, daß eine Reihe von Flüssigkeiten sich mit einer festen Haut bekleidet, die Scherungsfestigkeit zeigt. Mit der Drehwage wurde die Größe des Torsionsmoduls und der Torsionsfestigkeit bestimmt und daraus ein Grenzwert für die Dicke der festen Schicht berechnet.

Das Vorhandensein einer festen Oberfläche konnte jedoch keine Erklärung für die Haltbarkeit einer Lamelle bilden, wie die besondere Untersuchung von Lamellen aus Glyzerinseifenlösung zeigte. Das Dünnerwerden einer solchen Lamelle geht nämlich in ganz anderer Weise vor sich, als man es sich gewöhnlich vorstellt: Die Flüssigkeit fließt nur am Rande der Lamelle nach unten, dadurch bilden sich dünnere Teile aus, die nun nach oben steigen und sich im oberen Teil der Lamelle sammeln. Im Laufe dieser Untersuchung ergab es sich, daß die Glyzerinseifenlösung keine homogene Flüssigkeit, sondern ein Gemisch aus drei Substanzen ist. Die eine derselben, die gallertartigen Teilchen, die sich begünstigt durch den Einfluß der atmosphärischen Luft in der Glyzerinseifenlösung ausbilden, ist außerordentlich zähe. Die zweite, die

sogenannte „schwarze Substanz", kam für sich allein immer nur als äußerst dünnes Häutchen vor, dessen einzelne Teile sehr beweglich waren.

Erster Teil.

Die Methode.

Zur Untersuchung der Oberfläche wurde die Coulombsche Methode angewandt, welche darin besteht, daß eine Kreisscheibe, die an einem elastischen Draht so aufgehängt ist, daß der Aufhängepunkt im Mittelpunkt der Scheibe liegt, durch Torsion des Aufhängedrahtes in drehende Schwingungen versetzt wird. Liegen die Oberfläche der Flüssigkeit und die obere Fläche der Scheibe in einer Ebene, so bleibt bei der Schwingung das Minimum der Oberfläche gewahrt, und ein störender Einfluß der Oberflächenspannung ist ausgeschlossen.

Schwingt eine Scheibe vom Trägheitsmoment M in einem dämpfenden Mittel, so läßt sich der Einfluß desselben auf die Bewegung der Scheibe darstellen als eine Vermehrung des Trägheitsmomentes und als eine Vergrößerung der Schwingungsdauer. Es ergibt sich für das logarithmische Dekrement der Schwingungen in natürlichen Logarithmen der Ausdruck:

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{M + K} \cdot T_1 \cdot \tag{1}$$

Hier ist p das Dämpfungsmoment; K stellt denjenigen Teil des Trägheitsmomentes der mitschwingenden Flüssigkeit dar, der durch die Reibung gleichsam auf die Scheibe übertragen wird. T_1 ist die Schwingungsdauer im dämpfenden Mittel, während sie T_0 im leeren Raum war.

Nach dem Vorgang von O. E. Meyer[1]) kann man sich die Flüssigkeit in zwei Teile zerlegt denken: in einen Zylinder, der die Grundfläche der Scheibe als Grundfläche hat und sich nach beiden Seiten über und unter dieselbe erstreckt. Den Einfluß dieses Zylinders, dessen Horizontalschichten sich aneinander reiben, berechnet O. E. Meyer. W. König[2]) fügt

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113.** p. 55. 1861; Crelles Journ. **59.** 1861.

2) W. König, Wied. Ann. **32.** p. 215. 1887.

der Meyerschen Formel ein Korrektionsglied hinzu, indem er den außerhalb des Zylinders gelegenen Teil in Rechnung zieht.

Ist D die Direktionskraft des Aufhängedrahtes, so ist die Schwingungsdauer im reibenden Mittel nach O. E. Meyer und König

$$T_1 = \Pi \sqrt{\frac{M[1 + 2k(1 + 2l)]}{D}}.$$

Dem gegenüber ist die Schwingungsdauer im leeren Raum oder was dem sehr nahe gleich kommt, in Luft:

$$T_0 = \Pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}.$$

Das Trägheitsmoment hat also in der Flüssigkeit einen Zuwachs von

$$K = 2M.k(1 + 2l)$$

erhalten. Hier stellt $2M.k$ denjenigen Teil des oben erwähnten Flüssigkeitszylinders dar, der durch die Reibung gewissermaßen auf die Scheibe übertragen wird, während der zweite Teil des obigen Ausdruckes denjenigen Teil der außerhalb dieses Zylinders liegenden Flüssigkeit darstellt, der sich durch Reibung der Scheibe mitteilt. In dem obigen Ausdruck ist:

$$k = \frac{R_1^4 + 2R_1^3\delta}{4M} \sqrt{2 . \Pi . \eta \mu T_0}$$

und

$$1 = \frac{1}{R_1} \cdot \sqrt{\frac{2 . \eta}{\Pi . \mu}} \cdot T_1,$$

wo die einzelnen Buchstaben folgende Bedeutung haben: R_1 ist der Radius der Scheibe, δ ihre Dicke, M das Trägheitsmoment des schwingenden Systems; η ist die Konstante der inneren Reibung und μ die Dichte der Flüssigkeit.

Hiernach nimmt Formel (1) folgende Gestalt an:

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p}{M + 2M.k(1 + 2l)} \cdot T_1.$$

Dies gilt für den Fall, daß die Scheibe sich in der Mitte der Flüssigkeit befindet.

Wird sie aber bis in die Oberfläche gehoben, so wird auf die Scheibe nur die Hälfte der Flüssigkeit dämpfend wirken, so daß das Dekrement in der Oberfläche gegeben ist durch

$$\Delta_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{{}^1/_2 p}{M + \frac{k}{2}} \cdot T_2 ,$$

wo T_2 die Schwingungsdauer in der Oberfläche bedeutet.

Hat die Oberfläche eine eigene Zähigkeit, so wird diese auf die Scheibe eine besondere dämpfende Kraft O ausüben, so daß der Ausdruck für Δ_2 folgende Gestalt annimmt

$$\Delta_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{{}^1/_2 \cdot p + O}{M + \frac{K}{2}} \cdot T_2 . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$O = \frac{2\,\Delta_2 \left(M + \frac{K}{2}\right)}{T_2} - \frac{\Delta_1 \cdot (M + K)}{T_1} .$$

Der Apparat.

Der Apparat bestand im wesentlichen aus folgenden Teilen: An einer Kugel aus Gußeisen wurde an zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten je ein Messingzapfen befestigt. Der untere kürzere derselben trug die Scheibe, während an dem oberen der Aufhängedraht angelötet wurde. Das obere Ende desselben wurde mittels einer einfachen Vorrichtung am Torsionskopf befestigt. Die schwingenden Scheiben bestanden meistens aus Glas; sie wurden mit Siegellack am Zapfen befestigt. Zur Aufnahme der Flüssigkeit dienten zylindrische Glasschalen.

Die genaue Einstellung der Scheibe in die Oberfläche geschah auf folgende Weise: Unter den die Flüssigkeit enthaltenden Glaszylinder wurde ein Bogen liniertes Papier gelegt. Es wurde jetzt so lange Flüssigkeit hinzugegossen, bis die Linien, durch Glasscheibe und Flüssigkeit betrachtet, an der Grenze von beiden nicht mehr verzerrt erschienen. War die Flüssigkeit undurchsichtig, so wurde das Spiegelbild einer über die Schale gelegten Stricknadel beobachtet.

Das schwingende System befand sich in einer Hülle aus Blech, deren vordere Wand durch Spiegelglas ersetzt war. Der Messingdraht, der zum Aufhängen diente, wurde vor der Benutzung geglüht, dann belastet und stark tordiert.

Da das schwingende System aus Körpern von einfacher geometrischer Gestalt bestand, wurde das Trägheitsmoment aus den Dimensionen und dem Gewicht der einzelnen Teile berechnet.

Zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements und der Schwingungsdauer wurde die Poggendorffsche Spiegelablesung angewandt. Das so beobachtete Dekrement enthält Teile, die von dem inneren Widerstand des Aufhängedrahtes und der Reibung der Luft an den außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Teilen des schwingenden Systems herrühren. Bestimmt man zunächst das Dekrement d der ohne die Scheibe in Luft schwingenden Kugel und subtrahiert dieses von λ, so erhält man den Teil Δ_1 des Dekrements, der allein durch die Reibung der Flüssigkeit bedingt ist. Befindet sich die Scheibe in der Oberfläche der Flüssigkeit, so wirkt außerdem noch die Luftreibung an der oberen Fläche der Scheibe. Ist λ_0 das Dekrement in Luft mit Scheibe, so ist $(\lambda_0 - d)$ das der Scheibe allein, und $\frac{1}{2}(\lambda_0 - d)$ das der oberen Scheibenfläche. Um Δ_2 zu erhalten, ist demnach zu bilden:

$$\lambda_2 - \left(d + \frac{\lambda_0 - d}{2}\right).$$

Beobachtungen.

Wasser, Kochsalzlösung, Alkohol etc.

Durch eine Reihe von Vorversuchen wurde zunächst festgestellt, daß eine ungenaue Einstellung der Scheibe in die Oberfläche von wesentlichem Einfluß auf die Größe des Dekrements ist, ferner, daß die Anwendung von Zinkscheiben nicht zulässig war, da sie die Oberfläche verunreinigten. Daher wurden zu allen Versuchen Glasscheiben genommen.

Tabelle I.

	Dichte	Δ_1	T_1	η	t	Δ_2	T_2	0
1. Kochsalzlösung .	1,1267	0,04798	25,649″	0,01638	20,3°	0,02509	25,281″	−0,7
2. Leitungswasser .	0,9992	0,03828	25,418	0,01204	16,1	0,02077	25,124	1,4
3. Dest. Wasser . .	0,9990	0,03824	25,391	0,01212	15,6	0,02195	25,049	4,8
4. Glyzerin-Wasser .	1,0840	0,03624	9,700	0,02646	22,3	0,02009	9,588	0,3
5. Alkohol-Wasser .	0,9230	0,02876	7,668	0,02933	20,0	0,01517	7,559	0,9
6. Petroleum . . .	0,7979	0,02241	7,551	0,02214	19,8	0,01182	7,501	0,7

Die Dimensionen der angewandten Scheiben etc. waren folgende: Für 1., 2., 3. und 4. $R_1 = 5{,}025$ cm $M = 9739{,}7$ cm³ g, für 5. und 6. $R_1 = 3{,}30$ cm $M = 2113{,}7$ cm³ g. O. E. Meyer[1] findet nach der Königschen Formel für destilliertes Wasser $\eta = 0{,}0117$ bei 15,5°; Helmholtz und Piotrowsky[2]) finden aus der Dämpfung einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel für Brunnenwasser von 24,5° $\eta = 0{,}011858$.

Die Werte von O sind klein; ihre Abweichungen von Null fallen für die erste und die drei letzten Beobachtungen in die Grenze der Beobachtungsfehler (z. B. betrug der mittlere Fehler für Reihe $5 \pm 0{,}98$).

Bei Wasser zeigte sich eine Abhängigkeit des Dekrements von dem Alter der Oberfläche: dasselbe stieg im Laufe von 22 Stunden von 0,02286 auf 0,02496. Wurde jetzt die Scheibe in Schwingungen mit sehr großer Amplitude versetzt, so ergab sich ein kleineres, nämlich dasselbe Dekrement wie bei der frischen Oberfläche. Dies ist wohl dadurch zu erklären, daß sich auf dem Wasser durch Verunreinigung aus der Luft eine Schicht ausbildet, die fest ist (vgl. Teil II). Durch die starke Bewegung der Scheibe wird dieselbe zerstört, so daß jetzt die Dämpfung wieder nahezu dieselbe ist, wie bei einer nicht verunreinigten Oberfläche.

Bei allen erwähnten Flüssigkeiten ist das von der Oberfläche auf die Scheibe ausgeübte Dämpfungsmoment klein. Dagegen haben, wie schon oben erwähnt ist, Plateau und nach ihm Oberbeck gefunden, daß zwischen Alkohol und Wasser ein Unterschied besteht: die Oberfläche des letzteren hat größeren Widerstand als das Innere, während es beim Alkohol umgekehrt ist. Dieser Widerspruch kann auf folgende Weise erklärt werden: Nach Quincke[3]) ändert sich die Oberflächenspannung von Wasser und von mit Wasser verdünntem Alkohol in verschiedener Weise mit der Zeit. Die Oberflächenspannung des letzteren bleibt konstant oder sie zeigt eine geringe Zunahme, während die des Wassers abnimmt. Wird die alte Wasseroberfläche irgendwie zerstört,

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. **32.** p. 658. 1887.

2) H. v. Helmholtz u. Piotrowsky, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **50.** p. 107. 1860.

3) G. Quincke, Pogg. Ann. **160.** p. 583. 1877.

so wird sich an dieser Stelle eine frische Oberfläche bilden, die sich vermöge ihrer größeren Spannung zusammenzieht, so daß sich das in der alten Oberfläche ausgebildete Loch sofort wieder schließt. Es ist demnach schwierig, Teilchen aus einer alten Oberfläche in das Innere zu bringen. Beim Alkohol-Wassergemisch ist diese Schwierigkeit nicht vorhanden. Dies wird bestätigt durch Versuche von Lenard.[1])

Wie ein Versuch zeigte, bewegen sich beim Alkohol die Teilchen vor einem in der Oberfläche gedrehten Stab aus der Oberfläche vor demselben unter den Stab hindurch, während sie beim Wasser den bei weitem längeren Weg in der Oberfläche um die Stabenden herum durchlaufen. In dem letzteren Fall wird daher dem Stab mehr Energie entzogen als im ersteren.

Quecksilber.[2])

Das Quecksilber wurde nach der von Röntgen[3]) angegebenen Methode filtriert und dann in einem Zylinder aus Eisenblech mit einer eisernen Scheibe untersucht. Für η ergab sich 0,01564 bei 16,9°, ein Wert, der gut mit dem von Warburg[4]) übereinstimmt: $\eta = 0{,}01571$ für 17°. Eine Untersuchung der Oberfläche zeigte, daß das Dämpfungsmoment der Oberfläche allerdings nicht Null wird. Andererseits war die untersuchte Oberfläche nicht vollkommen frisch und rein, da sich Wasser nicht mehr auf ihr ausbreitete. Ferner ergab sich (vgl. Teil II), daß die Quecksilberoberfläche unter dem Einfluß der Luft starr wird. Diese feste Schicht wird von der schwingenden Scheibe zerstört und die Reibung der Bruchstücke aneinander verursacht das von Null verschiedene Dämpfungsmoment der Oberfläche. Eine ganz frische Oberfläche zeigt weder Zähigkeit noch Festigkeit.

Schwefelsäure.[2])

Auch für die Schwefelsäure ergab sich, daß keine oberflächliche Zähigkeit vorhanden war. Die Änderungen, die das

1) P. Lenard, Wied. Ann. **30.** p. 231. 1887.
2) Die Einzelheiten vgl. Diss.
3) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **46.** p. 152. 1892.
4) E. Warburg, Pogg. Ann. **140.** p. 367. 1870.

Dekrement der in der Oberfläche befindlichen Scheibe im Laufe der Zeit erfährt, lassen sich dadurch erklären, daß die Schwefelsäure an ihrer Oberfläche Wasser aus der Luft aufnimmt.

Dadurch wird die obere Schicht weniger zähe und demgemäß wird das Dekrement kleiner. Setzt sich die Aufnahme von Wasserdampf aber fort, so steigt die Flüssigkeit im Gefäß und es bildet sich am Rande der Scheibe ein nach oben konvexer Meniskus. Infolgedessen wird eine größere Flüssigkeitsmasse als vorher durch die Scheibe in Bewegung gesetzt: dadurch wird das Dekrement vergrößert. Es kommt schließlich so weit, daß der zweite Einfluß den ersten überwiegt.

Daß die Oberfläche der Schwefelsäure keine Festigkeit zeigte, ergaben die Versuche mit der Drehwage.

Glyzerinseifenlösung.

Dieselbe wurde nach folgendem Rezept hergestellt[1]): 1 Gewichtsteil trockener venetianischer Seife wurde unter Schütteln und schwachem Erwärmen in 40 Gewichtsteilen destillierten Wassers gelöst. Nach 24 Stunden wurde zu drei Volumenteilen derselben 1 Volumenteil reinen Glyzerins hinzugesetzt und durch starkes und wiederholtes Schütteln eine innige Mischung erzielt. Nachdem diese 24 Stunden im ungeheizten Zimmer gestanden hatte, hatte sich am Boden des Gefäßes ein gallertartiger Niederschlag gebildet, von dem die darüber stehende Flüssigkeit mittels eines Hebers abgehoben wurde. Außerdem ergab es sich als zweckmäßig, wenn die Flüssigkeit unter Eis filtriert wurde. Das Filtrat wurde in Flaschen gefüllt und bei konstanter Temperatur im Keller aufbewahrt. Trotz dieser Vorsichtsmaßregeln gelang es nicht, die Seifenlösung unverändert zu erhalten.

Die so erhaltene Flüssigkeit war in ausgezeichneter Weise geeignet, ausgedehnte und dauerhafte Lamellen zu bilden. Aus der Mündung einer Tonpfeife konnten Blasen bis zu 18 cm Durchmesser erhalten werden. Eine horizontale ebene Lamelle in einem Drahtring hielt sich unter einer Glasglocke 36 Stunden. Betrachtet man eine solche Lamelle, die sich in freier Luft befindet, so sieht man, daß die einzelnen Teilchen in lebhafter

1) C. V. Boys, Soap bubbles p. 143. London 1890.

Bewegung sind, sie wirbeln lebhaft durcheinander. Diese große Beweglichkeit spricht gegen die Plateausche Ansicht einer starken Oberflächenzähigkeit.

Lamellen aus Glyzerinseifenlösung.

Um vor Störung durch Luftströmungen sicher zu sein, geschahen die Beobachtungen an der Lamelle in einem würfelförmigen Blechkasten, dessen eine Wand durch Spiegelglas ersetzt war, während die anderen innen geschwärzt waren. Durch eine Stopfbüchse war es möglich, ohne den Kasten zu öffnen, in einem Glasrechteck ($57 \times 39{,}2\,\mathrm{mm}^2$) Lamellen zu erhalten, die dann im reflektierten, nahezu senkrecht einfallenden Tages- oder Auer-Licht mit einem vierzigfach vergrößernden Mikroskop beobachtet wurden.

Zunächst ergab sich, daß es auf die Lamelle keinen Einfluß hat, wenn dieselbe in Wasserstoff, Sauerstoff oder kohlensäurefreier Luft ist. Die Beobachtungen werden daher immer in letzterem Gas angestellt. Die Kohlensäure wurde entfernt, weil die Glyzerinseifenlösung in ihrer Gegenwart wahrscheinlich leichter verdarb.

Eine zweite Tatsache ist die, daß die oben erwähnten wirbelnden Bewegungen bei einer Lamelle im Innern des Gehäuses nicht vorkamen. Dieselben werden also durch Luftströmungen verursacht.

Wurde ein schwacher Luftstrom durch den Kasten geblasen oder die Glasplatte der Lamelle gegenüber ein wenig mit dem Finger erwärmt, so traten die Bewegungen sofort von neuem auf. Daß so kleine Kräfte eine lebhafte Bewegung in der Lamelle hervorbringen können, macht das Vorhandensein einer Oberflächenzähigkeit äußerst zweifelhaft.

α) Das Dünnerwerden der Lamellen.

Die nächste Frage war nun die: wie wird eine Lamelle dünner? Die Beobachtung geschah in der Weise, daß das Mikroskop auf eine bestimmte Stelle eingestellt, und daß nun beobachtet wurde, was hier geschah. Im ersten Augenblick nach dem Entstehen ist die Lamelle farblos. Die farblose Periode dauert indessen nur sehr kurze Zeit; bald wird die Lamelle dünner, indem dünnere (gefärbte) Teile am vertikalen

Rande nach oben fließen. Die Bahnen sind anfangs gradlinig; man sieht dicht am Rande mehrere schmale, parallele, gefärbte Streifen, deren Dicke nach dem Rande hin abnimmt. Dieselben bewegen sich mit bedeutender Geschwindigkeit nach oben, und zwar ist die Geschwindigkeit dicht am Rande, wo sich Farben niedrigerer Ordnung befinden, am größten; etwa 5 mm vom Rande entfernt ist keine Bewegung nach oben mehr vorhanden. Die Ordnung der in den Streifen liegenden Farben nimmt mit dem Alter der Lamelle schnell ab. Dieselbe wird also am Rande am ersten dünn, und diese dünnen Teile fließen mit großer Geschwindigkeit nach oben. Nach

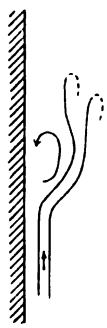


Fig. 1.

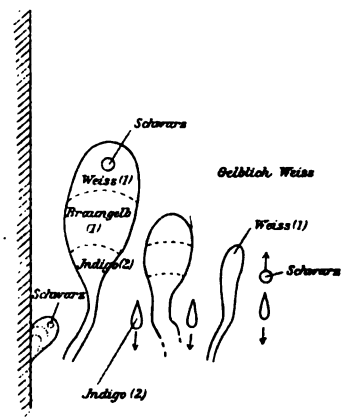


Fig. 2.

kurzer Zeit hören die Bahnen auf geradlinig zu sein, gleichzeitig wird die Bewegung langsamer. Wie es in Fig. 1 angedeutet ist, weichen die Bahnen plötzlich vom Rande ab und werden krummlinig. In dem durch die Ausbiegung verursachten Teil scheint eine äußerst lebhafte Rotation im Sinne des Pfeiles stattzufinden. Sobald die Bahn einmal krummlinig geworden ist, hört sie auch auf, parallel zu sein, d. h. es bilden sich aus den parallelen Streifen tränenförmige Teile, die sich nach oben schlängeln. Dieselben haben in ihrer Gestalt Ähnlichkeit mit den am Portwein beobachteten Tränen. Diese Gebilde haben die in Fig. 2 angegebene Form; die Anordnung der Farben ist auch angedeutet; die Zahl bedeutet die Ordnung der Farbe. Dicht an der Spitze des Tropfens

befindet sich gewöhnlich ein schwarzer, kreisförmiger Fleck. Inzwischen hat sich auch der mittlere Teil der Lamelle gefärbt (wie, wird später erwähnt). Fig. 2 ist im Gelblich-Weiß (1) beobachtet worden; die oberen Teile der tränenförmigen Gebilde sind also dünner als das Milieu, in dem sie sich befinden, während die unteren dicker sind. Infolgedessen löst sich, wie auch in der Figur angedeutet ist, das Indigo (2) und sinkt nach unten, und zwar so tief, bis es sich im Indigo befindet, also an einer Stelle von gleicher Dicke. Der von dem dickeren Teil befreite Tropfen steigt mit erhöhter Geschwindigkeit nach oben, als wenn er von einer Last befreit wäre. Es ergibt sich als allgemeine Regel, daß die Geschwindigkeit des Heraufsteigens um so größer ist, je größer der Dickenunterschied zwischen dem heraufsteigenden Teil und dem Milieu ist. In derselben Region, in der Fig. 2 beobachtet ist, kann jetzt, wo die Bewegung verhältnismäßig langsam ist, auch die Entstehung der tränenförmigen Teile beobachtet werden. Im Gelblich-Weiss (1) bilden sich am Rande weiße (1), also dünnere Teile, deren sukzessive Gestalt aus Fig. 2 links unten ersichtlich ist. Sie schnüren sich schließlich ab und steigen als Träne nach oben, bis sie in eine Region von gleicher Dicke kommen, wo sie sich mit dem Milieu vermischen und wegen der gleichen Farbe sich nicht mehr abheben. Der schwarze Teil, den sie am Kopf tragen, steigt bis ins Schwarze, das sich jetzt im oberen Teil der Lamelle befindet. Die beschriebenen Vorgänge wiederholen sich, und zwar treten sie der Zeit nach später auf, wenn man in der Lamelle von oben nach unten geht.

Die dünneren Teile, die sich auf diese verschiedene Weise nach oben bewegen, sammeln sich in dem oberen Teil der Lamelle. Die anfangs vollkommen farblose Lamelle zeigt kurze Zeit nach ihrer Entstehung im oberen Teil Farben, wie sie in Fig. 3 *a* und *b* wiedergegeben sind. Die Ordnung der oben befindlichen Farben nimmt anfangs rasch, nachher langsamer ab (gemäß der Geschwindigkeit des Aufsteigens). Nach nicht allzu langer Zeit befindet sich oben das Schwarz erster Ordnung; die schwarze Zone wird immer breiter. Aus dem Ge-

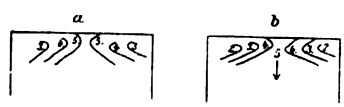


Fig. 3.

sagten folgt, daß namentlich im Anfangsstadium in den mittleren Teilen der Lamelle eine Bewegung der dickeren Teile nach unten stattfindet. Von einem eigentlichen Herabfließen der Flüssigkeit wurde nichts bemerkt. Doch ist wohl nicht zweifelhaft, daß die Lamelle auch auf diese Weise dünner wird, wenn auch nur in geringem Maße. Eine auf der Flüssigkeitsoberfläche aufgetriebene Kuppe wird nämlich auch dünner; da dieses jedoch nur durch Herabfließen der Flüssigkeit geschehen kann, geht es äußerst langsam.

Auch am unteren horizontalen Rande bilden sich dünnere Teile aus, jedoch verhältnismäßig lange Zeit nach der Entstehung, da der untere Teil am längsten farblos bleibt.

Aus dem Gesagten geht zunächst mit Sicherheit hervor, daß das Dünnerwerden seine Ursache am Rande hat. Daraus folgt, daß bei einer schmalen Lamelle eine bestimmte Farbe schneller nach unten vorrücken muß als bei einer breiteren von gleicher Länge. Dies wurde durch den Versuch bestätigt. Es wurde an zwei Lamellen, deren Länge nahezu gleich (58 bez. 57 mm) war und deren Breite 15,3 bez. 39,2 mm betrug, die Zeit bestimmt, die von der Entstehung der Lamelle bis zu dem Augenblick verstrich, wo das Indigo (2) eine 10 mm vom oberen Rande entfernte Marke passierte. Es ergab sich im Mittel für die erste Lamelle 28,8″, für die zweite 80,2″.

Den Prozeß des Dünnerwerdens am Rande hat man sich folgendermaßen vorzustellen: Der Glasstab, aus dem das Rechteck gebildet ist, ist von einer dünnen Flüssigkeitsschicht umgeben, wie sich aus seinem Aussehen im reflektierten Licht ergibt; dieselbe umspannt das Glas, um sich dann in den beiden Oberflächen der Lamelle fortzusetzen, wie dies in Fig. 4 angedeutet ist. Da sich die Ebene der Lamelle nicht in einem scharfen Winkel an die Zylinderfläche ansetzt, so wird sich an dieser Stelle (*A*) ein weiterer Raum bilden; in dieser Röhre fließt die Flüssigkeit hinab.

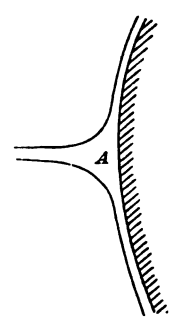


Fig. 4.

Wurde in einem Trinkglase eine Lamelle ausgespannt und durch ein über die Öffnung gelegtes Glas vor Luftströmungen geschützt, so zeigten sich dieselben Vorgänge wie an dem Rechteck.

Eine aus Eiweißlösung (Hühnereiweiß) gebildete Lamelle, die sich indessen immer nur sehr kurze Zeit hielt, wurde auch vom Rande aus dünner: am oberen Rande bildet sich ein schmaler gefärbter Streifen, der sich allmählich an den seitlichen Rändern nach unten hin fortschiebt. In der Mitte bleibt die Lamelle farblos. Dieselbe ist vollkommen unbeweglich, da sie, wie sich in Teil II ergeben wird, mit einer festen Haut bedeckt ist. Ein Hinaufsteigen dünnerer Teile am Rande findet nicht statt.

β) Die schwarzen Teile der Lamelle.

Besonderes Interesse erregen die schwarzen Flecken, die sich, wie schon erwähnt, am Rande ausbilden, um dann am Kopfe eines der tränenförmigen Gebilde nach oben zu steigen. Hier sammeln sich dieselben und füllen allmählich den oberen Teil der Lamelle. Auffallend ist der plötzliche Übergang vom Schwarzen in die daneben liegende Farbe. Dieselbe ist gewöhnlich das klare Grau (1) oder auch das vollkommene Weiß (1), welches einer größeren Dicke entspricht. Es ist niemals beobachtet worden, daß das Schwarz an eine andere Farbe grenzt; selbst wenn ausnahmsweise einmal ein schwarzer Fleck sich in Regionen von Farbe dritter oder vierter Ordnung befand, grenzte dasselbe zunächst an einen weißen schmalen Streifen, der dann kontinuierlich in die dickere Umgebung überging. Andererseits ist in keinem Fall ein Übergang zwischen dem Schwarz und dem klaren Grau beobachtet worden, selbst nicht bei Anwendung stark vergrößernder Mikroskope. Es scheint also hier in der Tat ein Sprung in der Dicke stattzufinden. Die Quinckesche[1]) Tabelle gibt für die Dicke einer Luftschicht, die dasselbe klare Grau zeigt, $109 . 10^{-6}$ mm an, während das reine Weiß die Dicke $129 . 10^{-6}$ mm hat. Nimmt

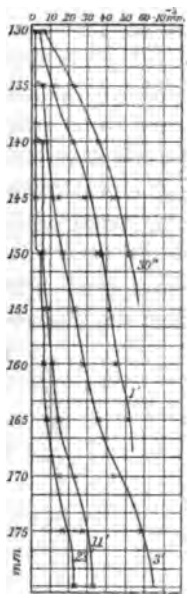


Fig. 5.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **159.** p. 180. 1866.

man mit Drude[1]) als Dicke für die schwarzen Teile 23.10^{-6} mm an, so sieht man, daß die Dicke plötzlich auf das fünf- bis sechsfache steigen muß. Daß ein solcher plötzlicher Sprung in der Tat stattfindet, zeigt sich an der Kurvenschar von Fig. 5. Die Kurven wurden auf folgende Weise erhalten. Vor der Glaswand des Kastens wurde in Höhe der Lamelle vertikal eine auf Glas geätzte Millimeterskala befestigt. Der obere Rand der Lamelle lag bei Skalenteil 130, der untere etwas tiefer als 180. Nun wurde zu gemessenen Zeiten t nach dem Herstellen der Lamelle beobachtet, welche Farbe sich vor 130, 135, 140 etc. befand. Zu Beginn der Zeit t begann die Beobachtung am oberen Teil und schritt nach unten weiter. Zu den Farben wurden die zugehörigen Dicken aus der Quinckeschen Tabelle aufgesucht. Tab. II stellt die Beob-

Tabelle II.

	Zeit 30″	1′	3′	5′	7′	9′	11′	13′	15′	19′	23′
130	153	109	23	23	23	23	23	23	23	23	23
135	455	215	109	109	109	109	23	23	23	23	23
140	713	455	166	129	109	109	109	109	109	23	23
145	855	575	282	215	109	109	109	109	109	109	23
150	1024	713	332	252	140	109	109	109	109	109	109
155	sehr dick	810	455	294	275	153	140	133	109	109	109
160	„ „	905	550	421	333	275	215	166	133	109	109
165	„ „	1024	713	499	455	364	294	294	282	252	153
170	„ „	sehr dick	872	747	629	550	455	421	364	332	294
175	„ „	„ „	1169	872	713	688	575	474	455	421	374
180	„ „	„ „	sehr dick	1024	855	810	667	629	575	550	474

achtung dar. Die erste Horizontalreihe enthält die Zeit, zu der die Beobachtung begann, die erste Vertikalreihe die Höhen in Millimetern, in denen beobachtet wurde. Die Zahlen geben die Dicke in 10^{-6} mm an, und zwar die Dicke einer äquivalenten Lamelle aus Luft. Um die Dicke der Seifenlamelle zu erhalten, wären die Zahlen durch den Brechungsexponenten der Seifenlösung ($n = 1{,}36$) zu dividieren. Aus der Tabelle ist die Kurvenschar in folgender Weise erhalten: Die Zeichen-

1) P. Drude, Wied. Ann. 46. p. 158. 1891.

ebene stellt einen vertikalen, zur Ebene der Lamelle senkrecht stehenden Schnitt durch dieselbe dar, die der Ordinatenachse parallele Linie Null eine Vertikale durch die Mitte dieses Schnittes, zu der also die Lamelle auf beiden Seiten symmetrisch liegt. Die Hälfte der in Tab. II enthaltenen Dicken ist nach rechts hin in der entsprechenden Höhe abgetragen, und zwar ist die Einheit 10.10^{-6} mm. Die von rechts nach links aufeinander folgenden Kurven stellen das Bild der Lamelle zur Zeit 30″, 1′, 3′ etc. nach dem Augenblick der Herstellung dar. In Übereinstimmung mit dem früher Gesagten geht auch aus den Kurven hervor, daß, je älter die Lamelle wird, desto langsamer Veränderungen in bezug auf ihre Dicke in ihr vorgehen. Ferner zeigt es sich, daß ein kontinuierlicher Übergang zwischen dem Schwarz und der nächsten Farbe nicht stattfindet, die Kurven haben an dieser Stelle immer eine Knickung. Da indessen in der Ordinatenachse eine Einheit des Kurvenpapiers gleich $^1/_5$ mm ist, während sie in der Abszissenachse gleich 10.10^{-6} mm ist, so müßten, damit die Lamelle in richtigen Größenverhältnissen dargestellt würde, die Dimensionen der Ordinaten $1{,}666\ldots \times 10^4$ mal vergrößert werden. In den Kurven stellt sich daher der Sprung als viel zu beträchtlich dar.

Diese Beobachtung bestätigt sich durch die Beobachtung der Grenze mit einem 156fach vergrößernden Mikroskop. Es war kein Übergang zu sehen, die scharfe Grenze blieb. Da es möglich war, $^1/_{10}$ Skt. des Okularmikrometers deutlich zu sehen, so findet der Übergang auf einer Strecke statt, die kleiner ist als $1/_{1560}$ mm.

Drude[1]) hat festgestellt, daß die Konstante der Oberflächenspannung des schwarzen Teiles ein wenig kleiner ist als die des gefärbten, ferner daß der Brechungsexponent des Schwarzen um 0,01 kleiner ist als der des Gefärbten. Daß das Schwarze sehr leicht beweglich ist, wurde durch folgenden Versuch erwiesen. Durch eine seitlich angesetzte Röhre wurde eine in eine feine Spitze ausgezogene Glasröhre in den Kasten eingeführt, so daß sich die feine Öffnung dicht hinter der Lamelle befand. Das andere Ende der Glasröhre war durch einen Gummischlauch mit einer zweiten Glasröhre verbunden.

1) P. Drude, Wied. Ann. **48.** p. 158. 1891.

Wurde das offene Ende desselben in eine Gasflamme gehalten, so wirkte es als Schornstein; es wurde Luft hindurchgesaugt und die Luft hinter der Lamelle in Bewegung gesetzt. Durch den geringsten Luftstrom wurde der schwarze Teil in lebhafte Bewegungen versetzt; dieselben wurden beobachtet an feinen weißen Punkten, die sich im Schwarz verteilt fanden. Es war nicht möglich, durch denselben Luftstrom eine Bewegung des Weiß oder einer anderen Farbe der Lamelle zu erzielen. Erst wenn eine sehr weite Röhre als Schornstein genommen und die Spitze ganz dicht an die Lamelle gebracht wurde, gelang es, eine Bewegung hervorzurufen.

γ) Die gallertartigen Fäden.

Wenn die Lamelle ein gewisses Alter erreicht hat, bilden sich am vertikalen Rande häufig unbewegliche Gebilde von der in Fig. 6 wiedergegebenen Form aus. Die Grundfarbe ist schwarz, durch dasselbe ziehen sich weiße, netzartige Fäden hindurch, die in den Punkten, wo sie zusammenstoßen, meistens einen mehr oder minder großen kreisförmigen Tropfen von größerer Dicke tragen. Derselbe ist von Schwarz umgeben und die nach seinem Mittelpunkt zu dicht nebeneinanderliegenden Newtonschen Ringe zeigen, daß seine Dicke schnell zunimmt, er hat die Form einer Bikonvexlinse. Das Eigentümliche dieser Stellen ist, daß sie vollkommen unbeweglich sind. Die nach oben strebenden tränenförmigen Gebilde, die sich dicht am Rande bewegen, biegen aus, wenn sie in die Nähe einer solchen Stelle kommen; und gleiten dicht am Rande derselben entlang, ohne daß dadurch in dem Netzwerk irgend eine Veränderung hervorgerufen wird. Die Größe der Stellen, die sich fast immer am Rande ausbilden, betrug etwa 3—4 qmm. Je älter die Lamelle wurde, desto größer wurde ihre Zahl, und zwar traten sie jetzt besonders am unteren Rande auf und in den Ecken, wo der gefärbte gegen den schwarzen Teil grenzt. Hier ist die Gelegenheit am günstigsten, die Entstehung derselben zu beobachten. Ist die Lamelle bis zu einem beträcht-

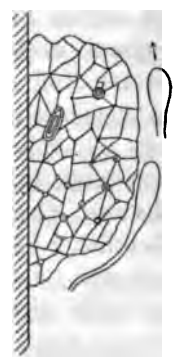


Fig. 6.

lichen Teil schwarz geworden, so kommt es vor, daß sich ein nach oben steigender schwarzer Fleck nicht mit der vorhandenen Masse vereinigt, sondern von ihr durch einen dünnen weißen Faden getrennt bleibt. Dadurch daß sich mehrere solcher durch einen Faden abgegrenzte Teile bilden, kommt eine mit Netzwerk durchzogene Ecke zu stande. Es kommt vor, daß sich auch in den mittleren Teilen der Lamelle Netzwerk ausbilde.

Aus der Art, wie das Netzwerk sich bildet, muß man schließen, daß das Weiß der Lamelle von Fäden von derselben Dicke durchzogen ist, die regellos gelagert sind. Kommt nun ein schwarzer Fleck nach oben und trifft zufällig einen Faden, der quer zu seiner Bewegungsrichtung an der Grenze zwischen Schwarz und Weiß liegt, so wird er denselben aufbauschen und ihn zwingen, die oben geschilderte Gestalt anzunehmen.

Bei einer genügend alten Lamelle bildet sich auch am unteren Rande Netzwerk aus. Es kommt nun vor, daß sich ein größerer oder kleinerer schwarzer Komplex, der häufig von weißen Fäden durchzogen ist, unten abschnürt und äußerst langsam nach oben steigt. Man sieht, daß er mit seinem unteren Teil an einem Faden hängt, der etwas dicker ist als die gleichförmig gefärbte Umgebung. Der Faden dehnt sich ganz allmählich und läßt deshalb nur eine äußerst langsame Bewegung zu. Manchmal zerreißt er und dann steigt der schwarze Fleck wie von einer Fessel befreit mit ziemlich beträchtlicher Geschwindigkeit nach oben. Es kommt indessen auch vor, daß er nicht zerreißt; dann zieht sich der Faden als weiße dickere Linie durch das klare Grau (1) hindurch. Kommt nun zufällig etwa ein kleiner schwarzer Fleck, der durch keinen Faden gehalten wird, mit beträchtlicher Geschwindigkeit nach oben steigend, an den Faden, so kann er denselben nicht durchdringen, sondern er bewegt sich an ihm entlang oder er wird festgehalten.

δ) Konstitution der Glyzerinseifenlösung.

Sucht man sich aus dem Gesagten eine Vorstellung von der Konstitution der Glyzerinseifenlösnng zu machen, so kommt man etwa zu folgendem: Dieselbe besteht im wesent-

lichen aus drei Bestandteilen: 1. der „schwarzen Substanz", 2. einer zweiten Flüssigkeit und 3. den Fäden.

1. Die „schwarze Substanz" ist äußerst leicht beweglich; ihre Oberflächenspannung und ihr Brechungsexponent sind kleiner als die entsprechenden Konstanten der beiden anderen Bestandteile. Auffällig ist, daß sie isoliert von den anderen immer nur als äußerst dünnes Häutchen vorkommt. Auf welcher Eigenschaft dies beruht, läßt sich vorderhand nicht feststellen. Auch sie ist noch Veränderungen unterworfen. Es bildeten sich allmählich im Schwarzen eine große Anzahl weißer Punkte aus, die allmählich größer wurden und dann in der Mitte einen blauen (2) Punkt zeigten. Jedoch war ihr Durchmesser nie größer als $^1/_{40}$ mm. Dieselben waren in lebhafter Bewegung, meistens in elliptischen Bahnen. Die Ursache der Bewegung konnte nicht festgestellt werden.

2. Die Fäden, welche — wenigstens in der Lamelle — eine Dicke haben, die dem Weiß erster Ordnung entspricht, haben eine beträchtliche Zähigkeit; sie scheinen aus einer gallertartigen Masse zu bestehen; die Länge eines solchen, an dem vom tiefsten Teil aus ein schwarzer Fleck emporstieg, betrug in einzelnen Fällen bis zu 2 cm.

3. Daß noch eine zweite Flüssigkeit vorhanden sein muß, beweist vor allen Dingen der Unterschied, der sich bei einer nicht zu alten Lamelle in der Beweglichkeit zwischen dem Schwarz und dem Weiß zeigt, ferner der Unterschied der Oberflächenspannungen.

Nach diesem hat man sich das Entstehen und das Dünnerwerden einer Lamelle folgendermaßen zu denken: Wird das Glasrechteck aus der Glyzerinseifenlösung herausgehoben, so besteht die entstandene Lamelle aus einem gleichmäßigen Gemisch der drei Bestandteile. Gleich nach dem Entstehen geht das Entmischen vor sich: Die zweite Flüssigkeit fließt nach unten, und zwar vorzugsweise am Rande; es bildet sich eine immer konzentriertere „Lösung" der „schwarzen Substanz", die vermöge ihrer geringeren Dicke gegenüber der Umgebung nach oben steigt. In jedem System tritt nämlich immer die Bewegung ein, die mit einer Senkung des Schwerpunktes verbunden ist. Aus der Tatsache, daß die „schwarze Substanz" nach oben steigt und die „zweite Flüssigkeit" nach unten sinkt,

können keine Folgerungen in bezug auf die Dichten der beiden Flüssigkeiten gezogen werden. Dadurch daß in den mittleren Teilen die Flüssigkeit nach unten geschoben wird, sammeln sich die anfangs über die ganze Lamelle gleichmäßig verteilten Fäden in den unteren Teilen, die dadurch, was mit der Beobachtung übereinstimmt, sehr schwer beweglich werden. Einige der Fäden haften zufällig am Rande, um hier den Grundstock für die unbeweglichen Stellen zu bilden. Es vollzieht sich jetzt in jedem von Fäden umschlossenen Raum im Kleinen, was sich vorher an der ganzen Lamelle im Großen vollzogen hatte.

Auf die Frage, wie sich diese drei Bestandteile in der Glyzerinseifenlösung bilden, ist es nicht möglich zu antworten.

Es kann hierzu nur gesagt werden, daß die Seifenlösung sich im Laufe der Zeit immer verändert, wie sich schon aus ihrem Aussehen und dann aus ihrem Reibungskoeffizienten ergibt, und zwar geht die Veränderung sowohl bei Abschluß der Luft als auch besonders bei Gegenwart derselben meistens dahin, die gallertartigen Bestandteile zu vermehren.

Da die Seifenlösung im reflektierten Licht bläulich erscheint, während sie im durchfallenden die komplementäre, eine gelbliche Farbe zeigt, so ist dadurch das Vorhandensein von in der Flüssigkeit suspendierten, das Licht reflektierenden Teilchen erwiesen, deren Dimensionen klein sind gegenüber den Wellenlängen des Lichtes. Dies spricht dafür, daß entweder die „schwarze Substanz" in der anderen Flüssigkeit suspendiert ist oder umgekehrt, daß also die Seifenlösung eine Emulsion ist.

Der Versuch, aus dem von der Flüssigkeit abgeschöpften Schaum eine konzentriertere „Lösung" der „schwarzen Substanz" zu gewinnen, mißglückte.

Aus den Beobachtungen an der Lamelle geht mit Sicherheit hervor, daß eine Oberflächenzähigkeit im Sinne Plateaus nicht vorhanden ist. Bewahrheitet es sich indessen, daß das Dekrement in der Oberfläche tatsächlich größer ist als es der Rechnung nach sein sollte, so muß man nach dem, was sich über die Konstitution der Flüssigkeit ergeben hat, annehmen, daß sich infolge chemischer Veränderungen unter dem Einfluß der Luft die Seifenlösung bis zu einer gewissen Tiefe ver-

ändert und daß diese Schicht eine größere innere Reibung besitzt. Dies wird in der Tat durch die Versuche bestätigt.

Schwingungsversuche im Innern der Glyzerinseifenlösung.

Eine frisch hergestellte unfiltrierte Glyzerinseifenlösung (Dichte 1,0525) wurde zu verschiedenen Zeiten nach ihrer Herstellung mit einer oszillierenden Scheibe untersucht. In der Zwischenzeit wurde die Flüssigkeit in einer verschlossenen Flasche aufbewahrt. Es ergab sich folgendes:

Tabelle III.

3 Wochen nach der Herstellung	$\eta = 0{,}07264$	17,3°
5 „ „ „ „	$\eta = 0{,}07914$	16,8

η nimmt mit dem Alter der Flüssigkeit zu. Eine Lösung, die ca. ein Jahr lang im Keller gestanden hatte und sich als von gallertartigen Fäden und Klumpen durchsetzt erwies, war so zähe, daß die Dämpfung einer schwingenden Scheibe, deren Dekrement in einem Glyzerinwassergemisch ($\eta = 0{,}02646$) 0,03624 betrug, aperiodisch wurde. Bei einer Lösung, die drei Wochen vor Staub geschützt an der Luft gestanden hatte und deren Dichte infolge der Verdunstung des Wassers auf 1,0587 gestiegen war, nahm das Dekrement nach Ablauf dieser Frist innerhalb von zwei Tagen von 0,07623 auf 0,09455 zu. Eine bei 0° filtrierte Flüssigkeit zeigte ebenfalls eine Zunahme der inneren Zähigkeit mit der Zeit. Alle diese Flüssigkeiten waren trotz dieser Veränderungen in gleicher Weise geeignet, ausgedehnte und dauerhafte Lamellen zu bilden.

Eine seltsame Tatsache wurde ferner ausnahmslos bei jeder Glyzerinseifenlösung beobachtet: das logarithmische Dekrement nahm mit abnehmender Amplitude zu (vgl. Tab. IV). Die Amplitude ist in Millimetern einer 2,5 m vom schwingenden System entfernten Skala angegeben. Wegen dieser Zunahme sind alle im Vorhergehenden angegebenen Reibungskoeffizienten für kleine Amplituden (zwischen 100 und 200 Skt.) berechnet. Solche

Tabelle IV.

Amplitude	Dekrement
252	0,06691
	6972
	6932
	7109
	7172
	7287
	7393
	7474
119	7545

Abhängigkeit des Dekrementes von der Amplitude ist bisher für keine andere Flüssigkeit beobachtet worden. Die Ursache liegt vermutlich in der Konstitution der Glyzerinseifenlösung. Es ist zweifelhaft, ob die Meyer-Königschen Formeln für eine solche Flüssigkeit gelten. Ein in Milch, die ja ebenfalls eine Emulsion ist, angestellter Schwingungsversuch ergab eine Unabhängigkeit des Dekrementes von der Amplitude.[1])

Schwingungen in der Oberfläche der Glyzerinseifenlösung.

Auch in der Oberfläche nahm das Dekrement mit abnehmender Amplitude ganz regelmäßig zu. Berechnet man die prozentuelle Zunahme des Dekrementes für 10 Skt. Amplitude sowohl für das Innere als auch für die Oberfläche, so zeigt es sich, daß die Zunahme in der Oberfläche größer ist: hier bilden sich unter dem Einfluß der atmosphärischen Luft die gallertartigen Fäden zuerst und am stärksten aus.

Dies wird bestätigt durch die Zunahme des Dekrementes mit dem Alter T der Oberfläche. An der frisch hergestellten Lösung wurde folgendes beobachtet:

Tabelle V.

T = 2,5′	7′	16′	31,5′	2′
0,05011	0,05725	0,06469	0,06874	0,05000

Die letzte Beobachtung wurde angestellt, nachdem nach Entfernung der Scheibe die Flüssigkeit stark umgerührt war. Im ersten Augenblick ist die frisch hergestellte Oberfläche voll-

1) Nach Abschluß der Arbeit kam mir eine Heidelberger Dissertation von Henry Garett, Über die Viskosität und den Zusammenhang einiger Kolloidlösungen (Heidelberg 1903) zu Gesicht. Der Verfasser findet, daß bei einer 2 proz., acht Tage alten Leimlösung das logarithmische Dekrement ebenfalls mit abnehmender Amplitude zunimmt. Er erklärt diese Erscheinung durch das Vorhandensein von Schaumzellen in der Flüssigkeit, von denen sich um so mehr an die Scheibe ansetzen, desto kleiner die Geschwindigkeit derselben ist, wodurch das Dekrement größer wird. Wurde nun die Scheibe in Schwingungen mit sehr großer Amplitude versetzt, so löste sich ein Teil der Schaumwände von der Scheibe und das Dekrement wurde kleiner. Ein solches Kleinerwerden nach großen Schwingungen wurde bei der Glyzerinseifenlösung nicht beobachtet.

kommen gleichartig mit dem Innern, doch schon nach Bruchteilen einer Sekunde verändert sie sich unter dem Einfluß der Atmosphäre; die Oberflächenspannung nimmt ab (Lord Rayleigh)[1]) und die Zähigkeit durch Ausbildung gallertartiger Teilchen zu. Diese verbreiten sich allmählich durch die ganze Flüssigkeit, so daß nach geraumer Zeit auch eine Zunahme der inneren Zähigkeit stattfindet, was die Beobachtung bestätigt.

Tab. VI enthält eine Zusammenstellung der an der drei und fünf Wochen alten Flüssigkeit gewonnenen Resultate. Da die Dimensionen der Scheiben verschieden sind (bei 1: $R_1 = 4{,}00$ cm, $M = 3467{,}9$ cm² g; bei 2: $R_1 = 5{,}03$ cm, $M = 3724{,}5$ cm² g), so sind die Dekremente und Schwingungsdauern nicht vergleichbar. p_1 ist das von der Flüssigkeit auf die in ihrem Innern schwingende Scheibe ausgeübte Dämpfungsmoment.

Tabelle VI.

	Δ_1	T_1	η	Δ_2	T_2	p_1	O
1.	0,07454	8,940″	0,07264	0,05696	8,853″	148,5	34,4
2.	0,16213	9,843	0,07914	0,11895	9,587	356,7	60,6

Nach dem Verhalten der Lamellen gibt es keine Oberflächenzähigkeit. Was hier als solche erscheint, erklärt sich durch den größeren und stets zunehmenden Gehalt der Oberfläche an gallertartigen Fäden. Ist dies wirklich so, so müssen sich auch die Teilchen in der Oberfläche nach demselben Gesetz bewegen wie die Teilchen im Innern der Flüssigkeit.

Bewegt sich im Innern einer Flüssigkeit ein Zylinder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse, so ist die Geschwindigkeit ψ im Abstande r von der Drehungsachse gleich c/r^3.[2]) Nimmt man nun an, daß für die Dauer einer Schwingung die beschleunigte Bewegung der Scheibe ersetzt werde durch eine gleichförmige, deren Geschwindigkeit gleich ist dem Mittel aus der Anfangsgeschwindigkeit, die gleich Null ist, und der größten Geschwindigkeit, so wird es namentlich bei

1) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 47. p. 281. 1890.

2) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathemat. Physik. 26. Vorlesung.

großer Schwingungsdauer erlaubt sein, auf diese Bewegung das obige Gesetz anzuwenden. Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen wurde durch mit Fuchsin gefärbtes Wasser sichtbar gemacht. In Fig. 7, *a*, *b* und *c* sind die bei verschiedenen Amplituden beobachteten Kurven enthalten, während Fig. 8 eine nach dem Gesetz $\varphi = c/r^3$ konstruierte Kurve gibt. Man sieht, daß dieselben übereinstimmen. Bei Fig. 7, *a* dehnt sich die Bewegung bis zum Gefäßrand aus. Der am Scheibenrand von *b* und *c*

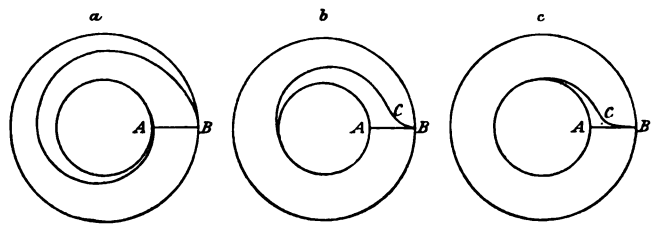


Fig. 7.

gelegene Teil stimmt mit *a* überein. Weiter nach dem Gefäßrand zu ist der Verlauf ein anderer. Denkt man sich die Flüssigkeit durch Horizontalebenen in eine große Anzahl dünner Scheiben zerlegt, so wird die Geschwindigkeit in den verschiedenen Scheiben verschieden sein. Legt man außerdem durch den Rand der Scheibe eine Zylinderfläche, so ist in jeder innerhalb dieses Zylinders gelegenen Scheibe die Winkelgeschwindigkeit dieselbe; sie nimmt ab mit zunehmendem vertikalen Abstand von der Glasscheibe. In dem außerhalb des Zylinders gelegenen Teil ist die Winkelgeschwindigkeit am größten in dem in derselben Horizontalebene wie die Glasscheibe liegenden Teil, da sie hier unmittelbar durch die Scheibe auf die Flüssigkeit übertragen wird. Hier also, in der Oberfläche, wird sich daher die Bewegung radial am weitesten ausdehnen, und zwar um so weiter, je größer die Zähigkeit ist. In den tiefer gelegenen Teilen ist die Geschwindigkeit sehr viel kleiner, da eine Übertragung von Geschwindigkeit hier nicht unmittelbar durch die Scheibe, sondern mittelbar durch den vom Scheibenrand begrenzten Flüssigkeitszylinder erfolgt. Die

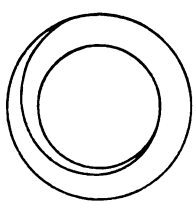


Fig. 8.

Bewegung erstreckt sich also hier nur wenig über den oben erwähnten Zylinder hinaus, und zwar um so weniger, je geringer die Zähigkeit ist. Das Resultat ist das, daß in einer gewissen Entfernung vom Scheibenrand die Teilchen der zäheren Oberfläche in Bewegung sind, während dicht darunter die Flüssigkeit in Ruhe oder doch in sehr viel langsamerer Bewegung ist. In diesem Punkte wird daher die Bewegung in der Oberfläche durch die darunter liegende Flüssigkeit gestört. In den Figg. 7, *b* und *c* liegt dieser Punkt etwa in *C*.

Schwingungsversuche in einer Lamelle ergaben äußerst unregelmäßige Resultate. Das Dekrement in ein und derselben Lamelle schwankte so sehr, daß das größte oft dreimal so groß war wie das kleinste. Die Schwankungen waren vollkommen unregelmäßig. Daß sich die Teilchen der Lamelle wie die Teilchen der Oberfläche oder des Innern der Glyzerin-Seifenlösung bewegen, wurde durch aufgestreute Korkpfeile gezeigt.

Zweiter Teil.

Apparat und Theorie.

Wie schon im ersten Teil der Arbeit erwähnt wurde, zeigte die Oberfläche einiger Flüssigkeiten ein abnormes Verhalten; auf diese Eigenschaft soll in diesem Teil näher eingegangen werden.

Das Charakteristikum des tropfbar flüssigen Zustandes ist, daß die einzelnen Teilchen der Flüssigkeit ihre relative Lage mit einer Kraft, die gleich Null ist, festhalten, während bei jedem festen Körper diese Kraft einen endlichen Wert hat. Dies gilt jedoch nur für das Innere der Flüssigkeit; in der Oberfläche wird es insofern anders, als sich dieselbe wie eine gespannte Membran verhält, die das Bestreben hat, möglichst klein zu werden. Die Spannung in der Oberfläche ist das Resultat ausschließlich von Kräften, die senkrecht zur Oberfläche stehen. Hieraus geht hervor, daß auch in der Oberfläche keine Kraft nötig ist, um die Teilchen gegeneinander in der Oberfläche zu verschieben. Bei den unten erwähnten Flüssigkeiten zeigt es sich nun, daß die Oberflächenteilchen gegenüber einer in Richtung der Oberfläche, also tangential wirkenden Kraft, durch die also das von der Oberflächen-

spannung erstrebte Minimum der Oberfläche nicht gestört wird, ihre Lage mit einer bestimmten Kraft festhalten, mit anderen Worten, daß sich die Oberfläche wie ein fester Körper verhält.

Da bei den Versuchen das Minimum der Oberfläche gewahrt bleiben mußte, konnte es sich bei der Untersuchung auf Festigkeit natürlich nur um Kräfte handeln, die in Richtung der Oberfläche wirkten, also sogenannte Scherkräfte. Als günstigster Fall erschien der, daß die Oberfläche durch eine Kreisscheibe, die zentrisch und horizontal an einem elastischen Draht aufgehängt war, tordiert wurde. Oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche und mit der ersten Scheibe durch einen Stahlzapfen verbunden, befand sich eine Aluminiumscheibe; dieselbe trug an ihrem Umfang eine Millimeterskala, auf der mittels eines Mikroskopes die Drehung abgelesen wurde (auf $^1/_{25}{}^0$ genau). Das obere Ende des Aufhängedrahtes war am Torsionskopf befestigt, an dem eine Drehung um $^1/_{10}{}^0$ noch mit Sicherheit abgelesen werden konnte.

Die Beobachtung geschah in folgender Weise: Nach Einstellung der Scheibe in die Oberfläche wurde der obere Querschnitt des Aufhängedrahtes um ψ Grade gedreht, der untere folgte um φ Grade nach. $\psi - \varphi = \Phi$ ist ein Maß für das auf die Oberfläche ausgeübte Drehungsmoment, φ ein Maß für die Verschiebung der einzelnen Teile der Oberfläche gegeneinander. Die Größe des bei Zerreißen der Oberflächenschicht angewandten Drehungsmomentes war ein Maß für die Scherungsfestigkeit der Oberfläche.

Ist der obere Querschnitt des Aufhängedrahtes gegen den unteren um Φ Grade tordiert, so ist das ausgeübte Drehungsmoment:

$$P = \frac{\Pi}{2} \frac{\Phi}{57{,}296} \cdot \frac{r^4}{l} \cdot F \quad \text{oder} \quad \Phi \frac{1}{g} \cdot \frac{\Pi^2 \cdot K}{57{,}296 \cdot T_0^2},$$

wo r den Radius des Drahtes, l seine Länge und F den Torsionsmodul des Materiales in kg-Gewicht/mm^2 bedeutet. K ist das Trägheitsmoment der Scheiben und des Zapfens und T_0 die Schwingungsdauer des Systems. Die am Umfang der Scheibe vom Radius R_1 von P ausgeübte Kraft ist P/R_1. Dieser Kraft muß das Gleichgewicht gehalten werden durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete, die von der festen Oberfläche ausgeübt wird. Durch die Torsion um den

Winkel φ ist ein Radius BC der Scheibe (Fig. 9) in die Lage CB' gebracht worden; eine Gerade AB auf der Oberfläche ist dadurch in die Lage AB' gekommen, die mit der früheren

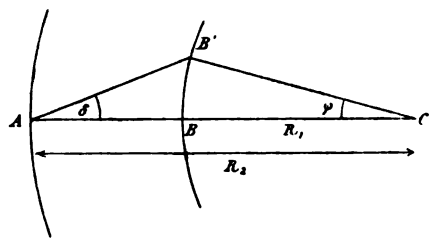


Fig. 9.

Richtung den Winkel δ bildet. Nimmt man d für die Dicke der festen Oberflächenschicht an, so ist

$$k = 2R_1 \,.\, \Pi \,.\, d \,.\, F_1 \cdot \frac{\delta}{57{,}296}$$

nach der Definition des Torsionsmoduls die von der Oberfläche auf den Scheibenrand ausgeübte Kraft. Für kleine Werte von φ ist

$$\delta = \frac{R_1 \varphi}{R_2 - R_1}.$$

Daraus ergibt sich:

$$F_1 = \frac{P(R_2 - R_1)}{2 \,.\, R_1^2 \,.\, \Pi \,.\, d \cdot \frac{\varphi}{57{,}296}} \left(\dim \frac{m}{l \,.\, t^2}\right).$$

Unter Scherungsfestigkeit versteht man die Anzahl Kilogramm, die, wenn sie in Richtung einer Fläche von 1 mm² über die ganze Fläche gleichmäßig verteilt wirken, gerade ein Zerreißen hervorbringen. Das Drehungsmoment, für welches dies eintritt, sei P_1. Dann wirkt, über die Fläche $2R_1 \,.\, \Pi \,.\, d$ verteilt, die Kraft P_1 / R_1. Mithin ist die Scherungsfestigkeit

$$H = \frac{P_1}{2 \,.\, R_1 \,.\, \Pi \,.\, d}.$$

Da indessen über die Dicke der Oberflächenschicht nichts bekannt war, so wurden immer die Produkte $F \,.\, d$ und $H \,.\, d$ berechnet. Die Festigkeit der Oberfläche mußte in der Größenordnung der Festigkeit fester Körper liegen; dadurch war es möglich, die Größenordnung der Dicke zu bestimmen.

Quecksilber.

Es ist schon lange bekannt, daß die Oberfläche des Quecksilbers sehr empfindlich gegen Verunreinigungen jeder Art ist, und daß sie, wenn sie verunreinigt ist, ihre Beweglichkeit verliert. Dies wird z. B. sehr augenfällig bei der elektromagnetischen Rotation des Quecksilbers, wo diese Erscheinung von Poggendorff[1]) untersucht wurde. Zur Untersuchung wurde eine Eisenscheibe von 50,41 mm Radius verwandt. Aufhängedraht $2r = 0{,}130$ und $l = 630{,}3$ mm. $T_0 = 25{,}100''$, $K = 205{,}34$ kg . mm^2.

Die Oberfläche von soeben nach der Röntgenschen Methode filtrierten Quecksilbers zeigte keine Festigkeit.

Nach 15′ ergab dieselbe Oberfläche für $H.d$ (Festigkeit × Dicke) $0{,}54 . 10^{-9}$. Nimmt man als untere Grenze für die Dicke der Schicht den Durchmesser eines Moleküls 10^{-7}, so erhält man für die Schubfestigkeit: $5{,}5 . 10^{-3}$ kg-Gew./mm^2. Dieser Wert ist der Größenordnung nach etwa $3{,}6 . 10^3$ mal kleiner als die Scherungsfestigkeit des Stahles und $1{,}2 . 10^2$ mal so klein als die Schubfestigkeit des Kalksteins, die nach Bauschinger[2]) 0,5—1,0 kg-Gew./mm^2 beträgt. Nach 48 Stunden hatte die Festigkeit ganz bedeutend zugenommen, leider wurde es versäumt, die Verdrehung des unteren Querschnittes mit dem Mikroskop zu beobachten, es wurde nur durch Anvisieren einer an der Scheibe angebrachten Marke festgestellt, um wie viel der obere Querschnitt verdreht werden mußte, damit Zerreißen erfolgte. Es war daher nicht möglich, den Torsionsmodul zu bestimmen. Es ergaben sich folgende Werte für Φ.

Tabelle VII.

Oberfläche 48 Stunden alt.

865°	90°
142	75
122	65

Nach der ersten Beobachtung wurde die Scheibe für einen Augenblick aus der Oberfläche entfernt und dann die zweite ge-

1) J. Poggendorff, Pogg. Ann. 79. p. 1. 1849.

2) Bauschinger, Mitteilung aus dem mechan.-techn. Laboratorium zu München, Heft 3. 1874.

macht. Für $\Phi = 865^0$ ergibt sich für die Festigkeit: 65 kg-Gew./mm², wenn man für die Dicke wieder 10^{-7} mm annimmt. Nimmt man als zweite Grenze ganz willkürlich den Quinckeschen Radius der molekularen Wirkungssphäre: $50 . 10^{-6}$, so erhält man für die Festigkeit 0,13 kg-Gew./mm², ein Wert, welcher ungefähr dieselbe Größenordnung wie die Festigkeit des Sandsteins hat. Da es unwahrscheinlich ist, daß die Festigkeit des Metalloxydes (aus diesem wird die Oberflächenschicht wahrscheinlich bestehen) dieselbe Größenordnung hat wie die der Metalle, so gibt der Wert $50 . 10^{-6}$ mm wohl einen richtigen Wert für die Dicke an. — Durch die erste Beobachtung ist die oberflächliche Schicht zerrissen; dieselbe schließt sich indessen schnell wieder zusammen. Dies geht daraus hervor, daß die folgenden Beobachtungen alle von Null verschiedene Werte für Φ ergaben. Da indessen durch jeden Versuch die Zerstörung vergrößert und dadurch der Zusammenschluß erschwert wird, nehmen die Werte für Φ ab.

Damit auch die Festigkeit der 15′ alten Oberfläche die Größenordnung der Festigkeit des Sandsteins erreicht, müßte die Dicke beträchtlich geringer sein. Daß dieselbe indessen kleiner wird als 10^{-7}, als der Durchmesser eines Moleküles, ist nicht möglich. Man muß daher annehmen, daß sich zunächst nur an einigen Stellen eine Oberflächenschicht ausbildet, deren Dicke dann mindestens gleich dem Molekulardurchmesser sein muß. Die Schicht entsteht vielleicht auf dieselbe Weise, wie sich auf der Oberfläche von gekochter Milch eine Haut bildet: Es entsteht zunächst an einem Punkte, wahrscheinlich unter Einwirkung des Sauerstoffs der Luft, ein festes Teilchen, das allmählich größer wird und sich später mit anderen auf dieselbe Weise entstandenen zu einer zusammenhängenden Schicht zusammenschließt.

Zinkamalgame.

Durch Auflösen von geeigneten Mengen Zinkblechs in Quecksilber wurden folgende Amalgame hergestellt: 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1 und 1 proz. Der Aufhängedraht war ein 499,0 mm langer und 0,500 mm dicker geglühter Messingdraht. Die Schwingungsdauer betrug 1,841″.

Die frische Oberfläche des 0,0001 proz. Amalgams zeigte keine Festigkeit. Nach 24 Stunden konnte oben um 1° tordiert

werden, ohne daß unten Bewegung eintrat. Bei größerer Torsion trat Zerreißen ein. Die Oberfläche war indessen nicht homogen; bei jeder Bewegung derselben sah man, daß ein großer Teil der Oberfläche sich wie jede andere Quecksilberoberfläche bewegte, dazwischen jedoch befanden sich Scheibchen von unregelmäßiger Gestalt, die fest waren. Da, wie später gezeigt werden wird, bei Abschluß der Luft die Oberfläche eines Amalgams beweglich blieb, so ist das Vorhandensein dieser Scheibchen ein Beweis für die oben angegebene Entstehungsart der festen Oberfläche.

Für die anderen Amalgame ergab sich eine beträchtliche, und zwar nahezu dieselbe Festigkeit.

Tabelle VIII.

	Φ
0,001 Proz.	257°
0,01 „	325
0,1 „	284
1 „	437

Jede dieser Zahlen ist das Mittel aus etwa zehn Einzelbeobachtungen, die manchmal beträchtlich voneinander abwichen. Die Beobachtungen wurden so angestellt, daß jedesmal die Scheibe aus der Oberfläche entfernt und für die nächste Beobachtung wieder neu eingestellt wurde. Dadurch wird natürlich die Schicht jedesmal zerstört; Störungen treten außerdem durch jede Bewegung des darunter liegenden Quecksilbers ein, so daß die Inkonstanz der gefundenen Werte nicht verwundern darf. Aus dem größten und dem kleinsten Wert, 437° und 257°, wurde $H.d$ berechnet; es ergab sich $0{,}29.10^{-4}$ bez. $0{,}17.10^{-4}$. Nimmt man als Dicke der Schicht wieder den Quinckeschen Radius der molekularen Wirkungssphäre, so erhält man für H 14,5 bez. 8,5 kg-Gew./mm², Zahlen, die etwa 3—4 mal so klein sind als die Werte für die Schubfestigkeit des Bessemerstahles (nach Bauschinger 34—59).

Bei sämtlichen Amalgamen wurde festgestellt, daß, wenn der Drehungswinkel um 5° von dem differierte, für den Zerreißen eintrat, nicht die geringste Bewegung der Scheibe stattfand, so daß bis zu dieser Grenze die Schicht als vollkommen starr angesehen werden konnte. Berechnet man hiernach den Torsionsmodul, so ergibt sich $F.d$ größer als $0{,}96.10^{-4}$

und F für den oben angeführten Wert von d größer als 48 kg-Gew./mm², eine Zahl, die etwa um das Hundertfache in der Größenordnung hinter den Werten der Torsionsmoduln der Metalle zurückbleibt.

Ein Körper, der bei den kleinsten Deformationen schon seinen Zusammenhang aufgibt, heißt spröde; demnach wäre die Oberflächenschicht spröde zu nennen. Ein Stückchen Zinkblech, das einige Augenblicke in Quecksilber gelegen hat und in welches das Quecksilber hineindiffundiert ist, bekommt dieselbe Eigenschaft: es bricht sofort, wenn man es zu biegen versucht.

Fragt man sich nach dem Ursprung der Festigkeit, so ist es sicher, daß die atmosphärische Luft eine wichtige Rolle bei der Ausbildung der Oberflächenschicht bildet. Das Zink, das sich in feiner Verteilung in der ganzen Quecksilbermasse findet, ändert den flüssigen Charakter des Innern nicht. Sobald es jedoch an die Oberfläche und damit an die Luft kommt, oxydiert es sich, wozu es wegen seiner feinen Verteilung besonders Neigung hat. Das gebildete Zinkoxyd, das mit Quecksilberoxyd vermischt ist, bildet wahrscheinlich die feste Oberfläche.

Daß die Anwesenheit der Luft für die Ausbildung der festen Oberfläche erforderlich ist, wurde durch folgenden Versuch erwiesen: Nachdem die Scheibe in die Oberfläche einer frisch gereinigten Quecksilbermenge eingestellt war, wurde über dieselbe bis zu etwa 1 cm Höhe reines Glyzerin geschüttet. Nach Verlauf von $^1/_4$ Stunde zeigte die Oberfläche keine Festigkeit. Jetzt wurde ein Stückchen Zinkblech ins Quecksilber gebracht und durch Umrühren aufgelöst, das erhaltene Amalgam war etwa 0,01 prozentig. Es zeigte sich auch jetzt keine Festigkeit. Wurde statt Glyzerin Petroleum genommen, so erteilte dieses der Oberfläche eine beträchtliche Festigkeit, die einem Winkel von 63° im Mittel entsprach. Wenn es tatsächlich die Luft ist, die die Festigkeit verursacht, so muß das Petroleum sehr viel Luft absorbiert enthalten, während das Glyzerin von Luft nahezu frei sein muß. Daß dies in der Tat so ist, wurde durch folgenden kleinen Versuch erwiesen. In einem Reagenzglas wurden etwa 3 ccm Petroleum vorsichtig über eine ebenso große Menge Glyzerin geschichtet. Dann wurde zwischen beide etwa 5 ccm einer

wässerigen Pyrogallussäure gebracht. Die drei Flüssigkeiten blieben scharf voneinander getrennt. Wurden nun zur Pyrogallussäure einige Tropfen Natronlauge hinzugefüllt, so bräunte sich schon nach wenigen Minuten der obere, an das Petroleum grenzende Teil der alkalischen Pyrogallussäurelösung, während der untere Teil noch nach mehreren Stunden unverändert war.

Ein weiterer Beweis für die Bedeutung der Luft wurde durch folgendes erbracht: Wurde durch das oben erwähnte Amalgam, welches durch Glyzerin vor der Luft geschützt war, ein Luftstrom geblasen, so zeigte sich eine um so größere Festigkeit, je größer die Dauer des Luftstroms war.

Albumin, Eisenacetat, Saponin.

Alle drei Substanzen wurden von der Firma Merck in Darmstadt bezogen. Ihre wässerigen Lösungen sind nach Plateau wohl geeignet, ausgedehnte Lamellen zu bilden. Es wurden Lösungen von verschiedenen Konzentrationen untersucht. Es zeigte sich, daß die Oberfläche fest war, und daß die Größenordnung der Festigkeit für alle Lösungen dieselbe war: Tab. IX, X, XI. Bei einem bestimmten kleinen Wert der Konzentration ging die Festigkeit plötzlich auf einen geringen Wert herab. Mit dem Alter der Oberfläche nahm die Festigkeit derselben zu (Tab. X); die Temperatur hatte keinen Einfluß auf die Größe derselben. Es gelang nicht, die Ursache für die Ausbildung der Oberflächenschicht festzustellen, doch liegt die Vermutung nahe, daß auch hier die Luft eine wesentliche Rolle spielt. Durch das auf die Oberfläche wirkende Drehmoment wurde dieselbe deformiert, doch bestand nie eine Proportionalität zwischen dem wirkenden Drehungsmoment und der erzeugten Deformation; schon bei Anwendung des geringsten Drehmomentes zeigte sich die Elastizitätsgrenze überschritten. Bestätigt wurde dies durch folgende Beobachtung: Wurde das obere Drahtende um einen bestimmten Winkel ψ tordiert, so folgte der untere um einen kleineren Winkel φ nach; wurde nun der obere Querschnitt um den Winkel $\psi - \varphi = \Phi$ zurückgedreht, so wirkte kein Drehmoment auf die Oberfläche. Die untere Scheibe drehte sich indessen nicht in ihre ursprüngliche Lage zurück. Es war also durch die erste Verdrehung eine

dauernde Deformation bewirkt. Wurde eine sorgfältig gereinigte Korkplatte auf die Oberfläche gelegt, um einen kleinen Winkel tordiert und dann sofort losgelassen, so trat auch hier keine Rückdrehung ein, obgleich die Dauer der Einwirkung äußerst kurz war. Nach diesem muß man sagen, daß sich die Oberfläche wie ein dehnbarer fester Körper verhält, etwa wie Blei oder Pech.

Die Lamellen dieser Flüssigkeiten zeigen also eine Konstitution, wie Plateau angegeben hat: zwischen festen Wänden befindet sich die Flüssigkeit, die nur äußerst langsam herunterfließt. Das Dünnerwerden geht vom Rande aus vor sich. Auffallend ist es, daß Lösungen von geringerer Konzentration nicht geeignet waren, Lamellen von der gleichen Größe und Haltbarkeit wie konzentriertere Lösungen zu bilden, obgleich die Festigkeit der Oberfläche nahezu dieselbe war. Die Festigkeit ist also keine wesentliche Bedingung für die Fähigkeit, Lamellen zu bilden. Dies durch eine Abnahme der inneren Reibung, die ein schnelleres Herunterfließen der Flüssigkeit erlaubt hätte, zu erklären, war nicht zulässig, da die Konstante der inneren Reibung, wie durch Schwingungsversuche festgestellt wurde, sich äußerst wenig mit der Konzentration änderte.

Tabelle IX.

Gehalt	Φ	$F.d$	$H.d$	H
2 %	48°	$0{,}26.10^{-7}$	$0{,}91.10^{-7}$	0,91
0,2	101	—	—	—
0,02	200	$0{,}20.10^{-6}$	$0{,}38.10^{-6}$	3,8
0,002	121	—	—	—
0,0002	kleiner als 2°	kleiner als $0{,}38.10^{-8}$		

Tabelle X.

Lösung von essigsaurem Eisenoxyd.

Gehalt	Φ		
4 %	186°	ca. 240° (12^h alt)	
0,4	14,6°	39,2° (3^h alt)	355° (14^h alt)
0,04	kleiner als 1°	33,5° (4^h alt)	

Tabelle XI.

Lösung von Saponin.

Gehalt	Φ
1 %	149°
0,1	139
0,01	89,5
0,001	kleiner als 2°

Vorstehende Untersuchungen wurden im physikalischen Institut der Universität Kiel ausgeführt. Dem Direktor desselben, Hrn. Professor Lenard, spreche ich für die freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit meinen herzlichsten Dank aus.

Kiel, Physikalisches Institut, im Oktober 1903.

(Eingegangen 27. Oktober 1903.)

Nachschrift. Nachdem der vorstehende Auszug meiner am 29. Mai 1903 der Fakultät vorgelegten Dissertation dem Druck übergeben war, erfuhr ich von einer Arbeit von W. Ramsden: Separation of Solids in the Surface-layers of Solutions. and Suspensions, die am 18. Juni der Royal Society in London vorgelegt ist. Der Gegenstand derselben ist der gleiche, wie der des zweiten Teils meiner Dissertation, doch trägt die Arbeit den Charakter einer vorläufigen Mitteilung und es ist nicht zu ersehen, welche Versuche angestellt wurden; immerhin scheinen die Resultate teilweise im Widerspruch zu den meinigen zu stehen. So sagt z. B. der Verfasser, daß es für die Fähigkeit einer Flüssigkeit, ausgedehnte und dauerhafte Lamellen zu bilden, wesentlich sei, daß in ihrer Oberfläche feste oder sehr zähe Teilchen vorhanden seien, wogegen im Vorstehenden in den Lamellen der Glyzerinseifenlösung, die die beständigsten sind, die man kennt, eine besondere Oberflächenzähigkeit oder gar Festigkeit nicht gefunden werden konnte.

6. *Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium;* *von G. N. St. Schmidt.*

(Auszug aus der Bonner Inaugural-Dissertation.)

Den Anstoß zur vorliegenden Arbeit gaben die Veröffentlichungen des Hrn. Prof. Winkelmann[1]) über die Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium und Platin. Der Hauptzweck meiner Arbeit war die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium. Da aber jeder Diffusion Absorption vorausgeht und die Kenntnis dieses Vorganges nicht unwesentlich ist für die Beurteilung der Diffusionserscheinungen, stellte ich zuerst Versuche über Absorption an.

a) Absorption.

1. Einrichtung des Absorptiometers.

Bei der Ausführung der experimentellen Untersuchungen diente folgender Apparat als Absorptiometer (Fig. 1):

A war ein außen und innen glasiertes Porzellanrohr, welches auf der einen Seite geschlossen und mit der offenen auf das Glasrohr *B* aufgekittet war. Dieses hatte zwei Hähne, *C* und *D*, zwischen welchen das Rohr *E* abzweigte. Letzteres war an der Stelle *F* etwas erweitert und trug unterhalb der Erweiterung die Marke *G*. Durch einen dickwandigen Gummischlauch *J* stand es mit dem

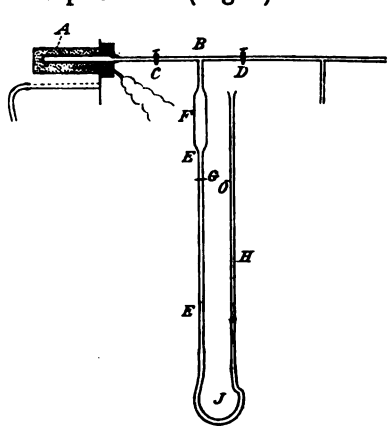


Fig. 1.

1) Vgl. A. Winkelmann, Ann. d. Phys. **6.** p. 104. 1901; **8.** p. 388. 1902.

Rohr *H* in Verbindung. Dieses ließ sich auf einer senkrechten Skala verschieben, deren Nullpunkt sich auf gleicher Höhe mit *G* befand. Der untere Teil von *E* und *H* sowie der Schlauch *J* waren mit Quecksilber gefüllt. Bei *K* zweigten zwei Röhren ab, von denen die eine zur Luftpumpe, die andere zum Gasometer führte. Das Volumen von *A* bis zum Hahn *C* nebst dessen Durchbohrung, sowie das Volumen zwischen der Marke *G* und den Hähnen *C* und *D* ausschließlich deren Durchbohrungen waren genau bekannt.

Das werwendete Palladium hatte die Gestalt eines an einer Seite geschlossenen Röhrchens. Es war 10,34 cm lang und hatte einen inneren Durchmesser von 0,26 cm und eine Wandstärke von 0,04 cm. Seine innere Oberfläche betrug 8,446 qcm, sein Gewicht im Vakuum 5,460 g und sein Volumen 0,48 ccm.

Das bei den Versuchen gebrauchte Wasserstoffgas wurde elektrolytisch aus destilliertem, mit Phosphorsäure angesäuertem Wasser gewonnen. Aus dem Entwickelungsapparat kam es in einen kleinen, vorher evakuierten Gasometer, wo es 24 Stunden lang über Phosphorpentoxyd getrocknet wurde, bevor es in Gebrauch kam.

2. Versuchsanordnung.

Das sorgfältig gereinigte Palladiumröhrchen wurde in das Porzellanrohr *A* gebracht und nach Öffnung der Hähne *C* und *D* der ganze Apparat evakuiert. Bei Zimmertemperatur zeigte das Palladium keine Veränderung, und mit Wasserstoff in Berührung gebracht nahm es nichts auf. Erst wenn beim Evakuieren gleichzeitig erhitzt wurde, ließ sich an der Druckvermehrung in der Luftpumpe eine Gasabgabe feststellen. Das frei gewordene Gas wurde abgepumpt, und dem Palladium mehrere Stunden Zeit zum Abkühlen gelassen. Alsdann wieder mit Wasserstoff in Berührung gebracht, trat abermals keine Absorption ein. Der Versuch wurde mehrere Male wiederholt und stets mit demselben Resultat. Ließ man aber kurz nach dem Glühen, solange das Palladiumrohr noch warm war, Wasserstoff ein, so absorbierte das Palladium. Die Temperatur schien demnach für die Einleitung des Prozesses von Belang zu sein. Um dies zu konstatieren, machte ich folgen-

den Versuch: Nach dem Ausglühen im Vakuum wurde der Apparat drei Stunden stehen gelassen, dann Wasserstoff eingeleitet, bis Atmosphärendruck herrschte, und der Hahn *C* geschlossen. Nach zweistündigem Stehen war noch keine Veränderung eingetreten. Nach kurzem Erwärmen aber stieg das Quecksilber mit großer Geschwindigkeit. Diese Bewegung dauerte mehrere Stunden und wurde immer langsamer, bis nach 23 Stunden keine Druckveränderung mehr zu bemerken war. Ich erwärmte abermals. Das Quecksilber ging schnell zurück, und bald, nachdem ich mit Erwärmen aufgehört hatte, trat wieder Steigen ein.

Die Beobachtungen ergeben, daß die Absorption des Wasserstoffs durch Palladium erst bei einer gewissen Temperatur beginnt, und sich durch Erwärmen die absorbierten Mengen ändern.

Für diese Erscheinungen wurde zuerst durch eine Reihe von Experimenten Bestätigung gesucht. Um die Temperatur genau messen zu können, wurde nach dem Ausglühen, Evakuieren und Wiederabkühlen das Porzellanrohr mit einem Sandbad umgeben, welches sich durch Gasflämmchen erwärmen ließ. Die Temperaturmessung geschah mit Hilfe eines Thermoelementes. Die Versuche wurden folgendermaßen angestellt: Nachdem der Hahn *C* geschlossen war, wurde so lange Gas eingelassen, bis das Quecksilber auf *G* und *O* stand. Dann wurde *D* geschlossen und *C* geöffnet. Es trat dadurch in *C D G* eine der Raumvergrößerung entsprechende Druckerniedrigung ein. Das Quecksilber stieg in *E* plötzlich und mußte durch Senken von *H* wieder auf die Marke *G* gebracht werden. Hierauf wurde der Brenner unter dem Sandbad angezündet und demselben eine bestimmte Flammenstärke gegeben. Die Temperatur des Bades begann zu steigen, bis die der betreffenden Flamme entsprechende Wärmezufuhr gleich der Wärmeabgabe des Bades war. Dann blieb die Temperatur konstant. Es waren selbst bei hohen Temperaturen und in mehrstündigen Zeitintervallen kaum Schwankungen zu beobachten, die 1^0 C. erreichten. Bereits während des Steigens der Temperatur trat Absorption ein.

Nachdem Konstanz der Temperatur erreicht war, wurde gewartet, bis auch der Quecksilbermeniskus zur Ruhe kam.

Dieser wurde dann auf G eingestellt und wieder gewartet, bis die durch die erfolgte Druckänderung bedingte Änderung der absorbierten Gasmenge sich ausgeglichen hatte. Die Absorption war alsdann beendigt. Die Zeit zwischen Beginn und Beendigung der Absorption war sehr verschieden. Bei niedrigen Temperaturen war sie größer wie bei hohen.

Aus der Differenz des Luftdruckes und des Druckes im Apparat nach Beendigung der Absorption läßt sich die absorbierte Menge gemäß folgender Erwägung bestimmen: Vor dem Öffnen des Hahnes C stand das Volumen CDG unter Atmosphärendruck. Nach dem Öffnen desselben herrschte dann nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz in dem ganzen Volumen ADG der Druck

$$d = \frac{V}{v} D, \tag{1}$$

wenn man das Volumen ADG mit V, das von CDG mit v und den Tagesdruck mit D bezeichnet. V und v wurden durch Kalibrieren mit Quecksilber gefunden. Aus Gleichung (1) kann d leicht berechnet werden.

Der Druck d würde herrschen, wenn keine Absorption einträte. Wenn diese aber eintritt, so muß der Druck geringer sein. Nennen wir den Schlußdruck nach Beendigung der Absorption X und die Höhen der Quecksilbersäulen in E und H entsprechend H_e und h_e, so ist

$$X = D - (H_e - h_e). \tag{2}$$

Die durch Absorption eingetretene Druckänderung ist dann $d - X$. Die vor der Absorption vorhandene Gasmenge ist Vd und die nachher vorhandene VX; die durch Absorption verschwundene $V(d - X)$. Auf denselben, am Schlusse der Absorption nur noch zu beobachtenden Druck E gebracht, müssen sich die Volumina verhalten wie die Drucke bei dem vorher gleichen Volumen V. Wir erhalten die Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d - X}{d} = \dfrac{y}{V}, \\ \\ y = V \dfrac{d - X}{\quad} \end{array} \right. \tag{3}$$

wo y das absorbierte Volumen unter dem Enddruck X ist. Auf 760 mm reduziert ergibt sich die absorbierte Menge

$$M = y \frac{X}{760}. \tag{4}$$

Die Versuche wurden bei einer Temperatur von ungefähr 300° C. begonnen. Sobald die Absorption beendigt war, wurden die Ablesungen gemacht, dann die Temperatur heruntergesetzt, sobald Gleichgewicht eingetreten war, wieder abgelesen etc.

3. Resultate.

Das im vorstehenden beschriebene Verfahren ließ sich fortsetzen bis ca. 140° C. Von da an abwärts traten Unregelmäßigkeiten ein.

Es fand sich:

Tabellen I—III.

Temp. d. Pd	Absorb. Menge	Luftdruck
255° C.	5,808 ccm	752,5 mm
215	6,196	
160	6,717	
120	6,584	
240° C.	5,809 ccm	750 mm
207	6,320	
153	6,934	
80	5,508	
13	4,073	
300° C.	5,598 ccm	752 mm
218	6,404	
170	6,909	
137	6,937	

Die absorbierten Gasmengen sind auf 760 mm Druck bezogen.

In Tab. I—III wurden die Versuche bei Tagesdruck begonnen; in den folgenden mit einem von diesem verschiedenen Druck. Die Enddrucke lagen dann auch entsprechend höher oder tiefer.

Tabellen IV—VI.

Bei Luftdruck + 278 mm.

Temp. d. Pd	Absorb. Menge	Luftdruck
240° C.	7,48 ccm	739 mm
205	8,22	
155	9,05	
120	9,45	

Bei Luftdruck + 270 mm.

265° C.	7,84 ccm	764 mm
190	9,195	
108	9,483	
63	9,46	

Bei Luftdruck + 297 mm.

270° C.	6,199 ccm	751 mm
202	8,145	
175	8,782	
135	9,567	
65	9,574	

Tabellen VII—VIII.

Bei Luftdruck − 267 mm.

Temp. d. Pd	Absorb. Menge	Luftdruck
255° C.	3,807 ccm	755 mm
200	4,309	
140	4,449	

Bei Luftdruck − 267 mm.

262° C.	3,745 ccm	759 mm
212	4,237	
170	4,464	

Aus diesen Angaben resultiert, daß die absorbierten Mengen mit abnehmender Temperatur zunehmen bis ungefähr 140° C. Bei dieser Temperatur ist die absorbierte Menge am größten. Nach Tab. II scheint sie unterhalb dieser Grenze abzunehmen. Auch in den anderen Tabellen lassen die End-

glieder hierauf schließen. Ein strikter Nachweis dieser Tatsache gelang nicht. Bei sämtlichen Versuchen wurde probiert, auch bei tieferen Temperaturen Resultate zu erzielen. Es zeigten sich aber, mit Ausnahme von Tab. II, weiter unten keine Veränderungen mehr, und wenn welche eintraten, so waren die Resultate unregelmäßig und in die vorliegenden Tabellen nicht einzureihen.

Es ergab sich zum Beispiel:

Tabelle IX.

Bei Luftdruck + 259 mm.

Temp. d. Pd	Absorb. Menge	Luftdruck
135° C.	9,217 ccm	
133	9,211	
90	9,319	756,5 mm
56	9,321	
12	9,281	

Diese Anomalie ist bereits von Graham beobachtet. Er fand zwischen 97 und 245° ein Maximum der Absorption. Winkelmann gibt es bei 100° C. an, Mond, Ramsay und Shields[1]) fanden, daß die kohärenteren Formen des Palladiums überhaupt erst von 100—140° an aufwärts absorbieren. Dies scheint meine Beobachtungen am meisten zu bestätigen. Es fragt sich nun, was die Ursache dieser Erscheinung ist. Ramsay behauptet, daß Quecksilberdämpfe die Oberfläche undurchlässig machen. Berliner findet den Grund in einer Fettschicht, die vom Hahnfett herrührt. Er sucht dies auch zu beweisen, indem er zeigt, daß frisch ausgeglühtes Palladium, welches absorbiert, sich auch mit Wasser benetzen läßt, während Palladium, welches längere Zeit im Apparat gewesen ist und nicht absorbiert, sich auch nicht benetzen läßt. Andere sprechen von einer Oxydschicht, die sich bei niedriger Temperatur an der Luft bildet und bei höherer wieder verschwindet[2]), Graham glaubt nicht, daß diese die Durchlässigkeit beeinträchtige.[3]) Was nun auch der Grund sein mag, physikalisch ist die Erscheinung kaum zu erklären.

1) L. Mond, W. Ramsay u. J. Shields, Zeitschr. f. phys. Chem. **26.** p. 109. 1898.

2) Richter-Klinger, Lehrb. d. anorg. Chemie p. 494. 1897.

3) E. Graham, Pogg. Ann. **36.** p. 323. 1869.

Wenn wir die im vorstehenden aufgeführten Tabellen unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten und diejenigen miteinander vergleichen, deren Angaben für verschiedene Drucke gelten, so finden wir, daß die Mengen sich auch mit dem Druck ändern und zwar mit diesem wachsen. Dies wird noch besser ersichtlich, wenn wir die Resultate, die ungefähr bei gleicher Temperatur, aber verschiedenen Drucken gefunden sind, zusammenstellen.

Tabellen X—XIII.

Temp. d. Pd	Enddruck	Absorb. Menge
240° C.	595,3 mm	7,48 ccm
240	427,4	5,809
255	277,0	3,807
102° C.	521,7 mm	8,979 ccm
207	396,0	6,320
212	243,0	4,237
155° C.	484,4 mm	9,05 ccm
153	322,0	6,934
140	204,0	4,449
180° C.	399 mm	9,483 ccm
120	252	6,584
110	161,4	3,133

Tab. XIII, welche die Resultate unter 140° C. enthält, zeigt die schon beobachtete Unregelmäßigkeit. Der zweite und dritte Wert ist kleiner wie die entsprechenden in Tab. XII, während sie nach Analogie von Tab. X, XI und XII größer sein müßten.

Außerdem wurden noch zur genaueren Untersuchung der Absorption unter 140° C. besondere Versuche bei verschiedenen Drucken und Zimmertemperatur gemacht. Diese mußten sämtlich durch Erwärmen eingeleitet werden. Sobald die Absorption begann, wurde die Wärmequelle entfernt und der Apparat 24 Stunden stehen gelassen. Nach Entfernung der Wärmequelle hätte eigentlich Stillstand eintreten müssen. Dies geschah aber nicht, sondern die Absorption ging weiter, wenn auch immer langsamer und langsamer. Dies erklärt sich folgendermaßen: Graham hat bereits beobachtet, daß sowohl

Platin wie Palladium sich bei der Absorption von Wasserstoff stark erhitzen. Diese Temperaturerhöhung wird der Grund der weiteren Absorption sein.

Stellen wir die bei der Absorption über 140° C. gefundenen Resultate graphisch dar, so ergeben sich die in Fig. 2 ge-

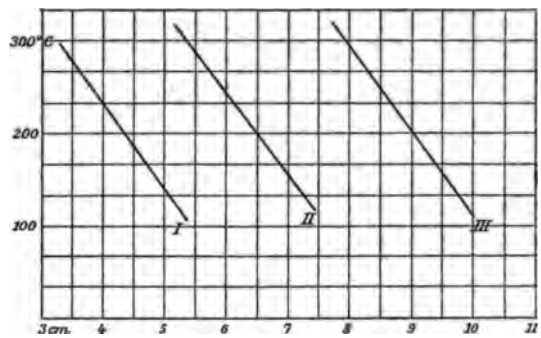


Fig. 2.

zeichneten Linien. Auf der X-Achse sind die absorbierten Gasmengen in Kubikzentimetern aufgetragen, auf der y-Achse die Temperaturen. Linie I bezeichnet den Verlauf bei Tagesdruck — 267 mm, Linie II und III bei Tagesdruck + 270 mm.

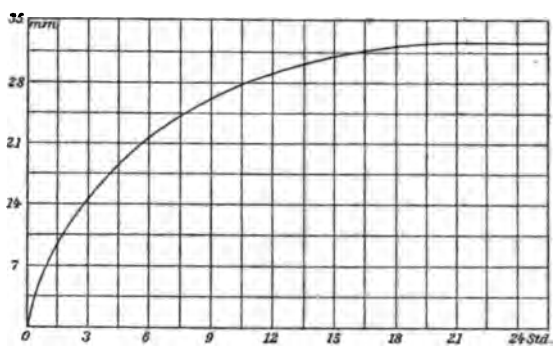


Fig. 3.

Ob der Verlauf absolut linear ist, kann nicht mit Sicherheit behauptet werden, da das Temperaturintervall zur genauen Bestimmung der Kurve zu klein ist. Größere Temperaturdifferenzen ließen sich aber mit dem benutzten Apparat nicht erreichen.

Es ist vielleicht von Interesse, noch zu erfahren, in welcher Weise während der einzelnen Versuche die Absorption verlief.

Die Kurve in Fig. 3 gibt ein klares Bild. Auf der X-Achse ist die Zeit, vom Beginn der Absorption an gerechnet, und auf der y-Achse sind die durch Absorption bewirkten Druckdifferenzen aufgetragen. Die Kurve ist im Anfang sehr steil, flacht sich allmählich ab, um nach 23 Stunden ganz asymptotisch zur y-Achse zu werden.

Die Reduktion der angegebenen Resultate auf eine bestimmte Temperatur — etwa 0° C. — habe ich unterlassen, weil dieselben dadurch nicht verbessert werden. Die Unregelmäßigkeiten sowohl bei der Absorption wie auch bei der im zweiten Teil behandelten Diffusion sind an sich schon größer als die Differenzen, welche durch die geringen Temperaturschwankungen eintreten.

b) Diffusion.

1. Beschreibung des benutzten Apparates.

Bei den Versuchen über Diffusion bediente ich mich folgenden Apparates (Fig. 4). Ein Glasrohr A trug zwei Hähne B und C und konnte einerseits mit der Luftpumpe, andererseits mit dem Gasometer in Verbindung gebracht werden. Zwischen den Hähnen B und C zweigte ein fein kalibriertes Glasrohr D ab, welches pro Zentimeter 0,4005 ccm faßte. Durch den dickwandigen Gummischlauch E stand es mit dem Rohr F in Verbindung. Der Schlauch E und die unteren Teile von D und F waren mit Quecksilber gefüllt. F ließ sich an einer Skala verschieben, welche genau mit der an D angebrachten übereinstimmte. An der Stelle G war auf das Glasrohr A ein Messingrohr H gekittet, welches an seinem freien Ende das Palladiumröhrchen K trug. An dem offenen Ende war dies mit dem Messingrohr durch Hartlot verbunden.

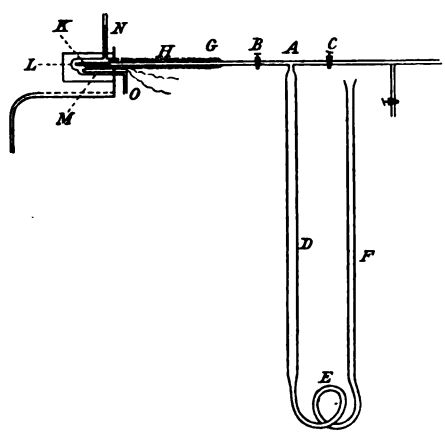


Fig. 4.

Das Palladiumröhrchen wurde nebst dem zur Temperaturbestimmung dienenden Thermoelement in das Glasrohr L eingekittet und durch dieses ein H-Strom geleitet. Diese Vorrichtung gestattete die Diffusion von Wasserstoff in eine Wasserstoffatmosphäre unter Druckdifferenz. Ein Versuch, Wasserstoff in die atmosphärische Luft diffundieren zu lassen, hatte keine konstanten Werte geliefert. Das Glasrohr L wurde mit einem Luftbad umgeben. Da der Hoffmannsche Apparat nicht genügend Gas für einen permanenten Strom liefern konnte, wurde der Wasserstoff in einem Kippschen Apparat aus chemisch reinem Zink und verdünnter Schwefelsäure entwickelt, in Natronlauge gewaschen und mit konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet. Die eudiometrische Untersuchung des so behandelten Wasserstoffs gab als Maximum der Verunreinigung 0,814 Proz. Der Feuchtigkeitsgehalt desselben war gleich Null, da nach vierzehntägigem Fließen des Wasserstoffstromes das Phosphorpentoxyd noch nicht die geringste Veränderung zeigte. Der Wasserstoff wurde aus den Entwickel- und Trockenvorrichtungen vermittelst eines Glasrohres von rechts in das Luftbad eingeleitet, erhitzte sich in dem Rohr M und trat dann links unten in den Glaszylinder L ein. Dann strich es über das Palladiumrohr, dasselbe allseitig umgebend, und trat durch den Schornstein N aus, an dessen Spitze es verbrannt wurde.

2. Versuchsanordnung.

Die Versuche wurden folgendermaßen angestellt: Nachdem der Wasserstoffstrom in Gang gesetzt war, wurde evakuiert. Die Verdünnung ließ sich leicht bis 0,02 mm steigern. Dann wurde der Apparat mit Wasserstoff gefüllt, C geschlossen und das Luftbad erhitzt. Sobald Druckdifferenz hergestellt und eine genügend hohe Temperatur eingetreten war, begann die Diffusion. Durch Verschieben von F wurde das Gas im Apparat stets auf demselben Druck gehalten.

3. Resultate.

Aus den beschriebenen Versuchen ergaben sich folgende Resultate. Die mit a), b) und c) bezeichneten Versuche sind unter denselben äußeren Bedingungen gemacht, mit Ausnahme der Temperatur des Palladiums.

Tabelle XIV.

1. Druckdifferenz	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
300 mm	16° C.	759,5 mm

4. a) Temp. d. Pd 170° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
46—45 cm	— Min. 45 Sek.	45 Sekunden
45—44 „	— „ 45 „	
44—43 „	— „ 45 „	

b) Temp. d. Pd 166° C.

50—48 cm	1 Min. 20 Sek.	40 Sekunden
46—44 „	1 „ 20 „	
44—42 „	1 „ 20 „	

c) Temp. d. Pd 140° C.

50—49 cm	1 Min. 15 Sek.	75 Sekunden
49—48 „	1 „ 15 „	
48—47 „	1 „ 15 „	

Tabelle XV.

1. Druckdifferenz	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
300 mm	17° C.	764 mm

4. a) Temp. d. Pd 300° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	— Min. 57 Sek.	11,4 Sekunden
45—40 „	— „ 57 „	
40—35 „	— „ 57 „	

b) Temp. d. Pd 225° C.

44—39 cm	1 Min. 40 Sek.	20 Sekunden
39—34 „	1 „ 40 „	
50—45 „	1 „ 40 „	
40—35 „	1 „ 40 „	

c) Temp. d. Pd 149° C.

45—43 cm	2 Min. 20 Sek.	70 Sekunden
43—41 „	2 „ 20 „	

Tabelle XVI.

1. Druckdifferenz 300 mm | 2. Zimmertemperatur 19° C. | 3. Luftdruck 761,4 mm

4. a) Temp. d. Pd 282° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	— Min. 55 Sek.	11 Sekunden
45—40 „	— „ 55 „	
40—35 „	— „ 55 „	
	b) Temp. d. Pd 226° C.	
50—48 cm	— Min. 42 Sek.	21 Sekunden
44—42 „	— „ 42 „	
42—40 „	— „ 42 „	
	c) Temp. d. Pd 160° C.	
50—48 cm	1 Min. 40 Sek.	50 Sekunden
48—46 „	1 „ 40 „	
46—44 „	1 „ 40 „	

Tabelle XVII.

1. Druckdifferenz 300 mm | 2. Zimmertemperatur 19° C. | 3. Luftdruck 761 mm

4. a) Temp. d. Pd 280° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	— Min. 50 Sek.	10 Sekunden
45—40 „	— „ 50 „	
	b) Temp. d. Pd 222° C.	
50—48 cm	— Min. 41 Sek.	20,5 Sekunden
48—46 „	— „ 41 „	
46—44 „	— „ 41 „	
	c) Temp. d. Pd 160° C.	
41—40 cm	— Min. 50 Sek.	50 Sekunden
40—39 „	— „ 50 „	
39—38 „	— „ 50 „	

Tabelle XVIII.

1. Druckdifferenz 200 mm	2. Zimmertemperatur 16° C.	3. Luftdruck 751,7 mm
	4. a) Temp. d. Pd 300° C.	
5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
35—30 cm	1 Min. 45 Sek.	21 Sekunden
30—25 „	1 „ 45 „	
25—20 „	1 „ 45 „	
	b) Temp. d. Pd 240° C.	
50—45 cm	2 Min. 55 Sek.	35 Sekunden
45—40 „	2 „ 55 „	
40—35 „	2 „ 55 „	
	c) Temp. d. Pd 180° C.	
48—47 cm	1 Min. 10 Sek.	70 Sekunden
47—46 „	1 „ 10 „	
46—45 „	1 „ 10 „	

Tabelle XIX.

1. Druckdifferenz 200 mm	2. Zimmertemperatur 19° C.	3. Luftdruck 761,4 mm
	4. a) Temp. d. Pd 280° C.	
5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
40—38 cm	— Min. 40 Sek.	20 Sekunden
38—36 „	— „ 40 „	
36—34 „	— „ 40 „	
	b) Temp. d. Pd 226° C.	
40—38 cm	1 Min. 18 Sek.	38,75 Sekunden
38—36 „	1 „ 17 „	
36—34 „	1 „ 18 „	
34—32 „	1 „ 17 „	

c) Temp. d. Pd
158° C.

39—38 cm	1 Min. 52 Sek.	112,8 Sekunden
38—37 „	1 „ 53 „	
37—36 „	1 „ 52 „	

Tabelle XX.

1. Druckdifferenz 200 mm
2. Zimmertemperatur 19° C.
3. Luftdruck 761 mm
4. a) Temp. d. Pd 280° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
45—40 cm	1 Min. 35 Sek.	19 Sekunden
40—35 „	1 „ 35 „	
35—30 „	1 „ 35 „	

b) Temp. d. Pd
225° C.

45—43 cm	1 Min. 15 Sek.	37,5 Sekunden
43—41 „	1 „ 15 „	
41—39 „	1 „ 15 „	

c) Temp. d. Pd
158° C.

28—27 cm	1 Min. 48 Sek.	108 Sekunden
27—26 „	1 „ 48 „	
26—25 „	1 „ 48 „	

Tabelle XXI.

1. Druckdifferenz 200 mm
2. Zimmertemperatur 13° C.
3. Luftdruck 759,8 mm
4. a) Temp. d. Pd 310° C.

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	1 Min. 45 Sek.	21 Sekunden
45—40 „	1 „ 45 „	
40—35 „	1 „ 45 „	
35—30 „	1 „ 45 „	
	Nach halbstündiger Pause	
45—40 cm	1 Min. 45 Sek.	21 Sekunden
40—35 „	1 „ 45 „	

b) Temp. d. Pd 198° C.

50—49 cm	1 Min. 5 Sek.	65 Sekunden
48—47 „	1 „ 5 „	

c) Temp. d. Pd 148° C.

37—36 cm	2 Min. 40 Sek.	160 Sekunden
36—35 „	2 „ 40 „	
35—34 „	2 „ 40 „	

Vergleichen wir die unter derselben Druckdifferenz von 300 mm gemachten Versuche in Tab. XIV, XV, XVI und XVII, so finden wir, daß die in der dritten Kolumne stehenden Durchgangszeiten pro Zentimeter mit wachsender Temperatur kleiner werden, d. h. die diffundierten Gasmengen wachsen mit der Temperatur. Die einzigen Ausnahmen sind die unter XIV b) stehenden Werte, die jedoch nicht in Betracht kommen, da alle übrigen Beobachtungen ihnen widersprechen. Dieselbe Abhängigkeit der diffundierten Mengen zeigen die Beobachtungen in Tab. XVIII—XXI, die bei einer Druckdifferenz von 200 mm angestellt sind. Zugleich sieht man aber auch, daß die Durchgangszeiten in den letzten Tabellen durchweg größer sind. Die diffundierten Mengen sind demnach auch vom Druck abhängig, und zwar wachsen sie mit demselben. Dies zeigt sich noch deutlicher, wenn wir die bei ungefähr gleichen Temperaturen, aber verschiedenen Drucken erhaltenen Resultate zusammenstellen. Die mit a), b), c) und d) bezeichneten Versuche sind unter denselben äußeren Bedingungen mit Ausnahme der Druckdifferenz unter 4. gemacht.

Tabelle XXII.

1. Temp. d. Pd	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
300° C.	18° C.	747,4 mm
	4. a) Druckdifferenz 300 mm	
5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
39—38 cm	1 Min. — Sek.	10 Sekunden
38—27 „	1 „ — „	

b) Druckdifferenz
250 mm

50—40 cm	2 Min. 25 Sek.	14,2 Sekunden
40—30 „	2 „ 20 „	
30—24 „	1 „ 25 „	

c) Druckdifferenz
200 mm

44—42 cm	— Min. 40 Sek.	20 Sekunden
42—40 „	— „ 40 „	
40—38 „	— „ 40 „	
38—36 „	— „ 40 „	

d) Druckdifferenz
150 mm

36—34 cm	1 Min. — Sek.	30 Sekunden
32—30 „	1 „ — „	
30—28 „	1 „ — „	

Tabelle XXIII.

1. Temp. d. Pd 300° C.
2. Zimmertemperatur 15° C.
3. Luftdruck 762 mm
4. a) Druckdifferenz 300 mm

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—40 cm	1 Min. 41 Sek.	10,1 Sekunden
40—30 „	1 „ 42 „	
30—20 „	1 „ 40 „	

b) Druckdifferenz
250 mm

45—40 cm	1 Min. 5 Sek.	13 Sekunden
35—30 „	1 „ 5 „	
30—25 „	1 „ 5 „	

c) Druckdifferenz
200 mm

45—40 cm	1 Min. 35 Sek.	19 Sekunden
35—30 „	1 „ 35 „	
25—20 „	1 „ 35 „	

d) Druckdifferenz
150 mm

45—40 cm	2 Min. 10 Sek.	26 Sekunden
40—35 „	2 „ 10 „	
35—30 „	2 „ 10 „	

Tabelle XXIV.

1. Temp. d. Pd	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
290° C.	18° C.	764 mm

4. a) Druckdifferenz
300 mm

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	— Min. 56 Sek.	11,1 Sekunden
45—40 „	— „ 56 „	
40—35 „	— „ 56 „	

b) Druckdifferenz
250 mm

45—40 cm	1 Min. 15 Sek.	14,8 Sekunden
40—35 „	1 „ 15 „	
35—30 „	1 „ 15 „	

c) Druckdifferenz
200 mm

50—45 cm	1 Min. 38 Sek.	20,6 Sekunden
45—40 „	1 „ 40 „	
40—38 „	— „ 40 „	
38—35 „	1 „ 5 „	

d) Druckdifferenz
150 mm

45—42 cm	1 Min. 25 Sek.	29 Sekunden
42—39 „	1 „ 30 „	
39—36 „	1 „ 28 „	

Tabelle XXV.

1. Temp. d. Pd	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
222° C.	17° C.	742,3 mm

4. a) Druckdifferenz 300 mm

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	1 Min. 25 Sek.	18 Sekunden
45—40 „	1 „ 35 „	
40—30 „	3 „ — „	

b) Druckdifferenz 250 mm

35—30 cm	2 Min. 5 Sek.	25 Sekunden
30—25 „	2 „ 5 „	
25—22 „	1 „ 15 „	

c) Druckdifferenz 200 mm

50—48 cm	1 Min. 8 Sek.	33 Sekunden
48—46 „	1 „ 5 „	
46—44 „	1 „ 5 „	

d) Druckdifferenz 150 mm

45—43 cm	1 Min. 45 Sek.	52,5 Sekunden
41—39 „	1 „ 45 „	
39—27 „	1 „ 45 „	

Tabelle XXVI.

1. Temp. d. Pd	2. Zimmertemperatur	3. Luftdruck
218° C.	15° C.	762 mm

4. a) Druckdifferenz 300 mm

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—45 cm	1 Min. 40 Sek.	20 Sekunden
45—40 „	1 „ 40 „	
40—35 „	1 „ 40 „	

b) Druckdifferenz 250 mm

30—28 cm	— Min. 55 Sek.	27 Sekunden
28—25 „	1 „ 20 „	
25—22 „	1 „ 20 „	

c) Druckdifferenz
200 mm

36—34 cm	1 Min. 15 Sek.	37,5 Sekunden
48—46 „	1 „ 15 „	
46—44 „	1 „ 15 „	
44—42 „	1 „ 15 „	

d) Druckdifferenz
150 mm

50—48 cm	1 Min. 45 Sek.	52,5 Sekunden
34—32 „	1 „ 45 „	
32—30 „	1 „ 45 „	

Tabelle XXVII.

1. Temp d. Pd 215° C. | 2. Zimmertemperatur 17° C. | 3. Luftdruck 764,6 mm

4. a) Druckdifferenz
300 mm

5. Teilstriche	6. Zeit	7. Mittelwert
50—47 cm	1 Min. 2 Sek.	20,6 Sekunden
47—44 „	1 „ 2 „	
44—41 „	1 „ 2 „	

b) Druckdifferenz
250 mm

50—48 cm	1 Min. 3 Sek.	31 Sekunden
48—46 „	1 „ 2 „	
46—44 „	1 „ 3 „	

c) Druckdifferenz
200 mm

43—41 cm	1 Min. 15 Sek.	37,5 Sekunden
41—39 „	1 „ 15 „	
39—37 „	1 „ 15 „	

d) Druckdifferenz
150 mm

45—43 cm	2 Min. 10 Sek.	65 Sekunden
43—41 „	2 „ 10 „	
41—39 „	2 „ 10 „	

Stellen wir uns die Resultate graphisch dar, so erhalten wir folgende Kurven:

1. Für die Abhängigkeit von der Temperatur Fig. 5. Auf der X-Achse sind die Temperaturen aufgetragen, auf der y-Achse die zur Diffusion von 0,4005 ccm nötige Zeit. Kurve I ist bei einer Druckdifferenz von 300 mm, Kurve II bei einer solchen von 200 mm beobachtet. Die Kurven sind zweiten Grades. Ob sich die absorbierten Mengen genau mit dem

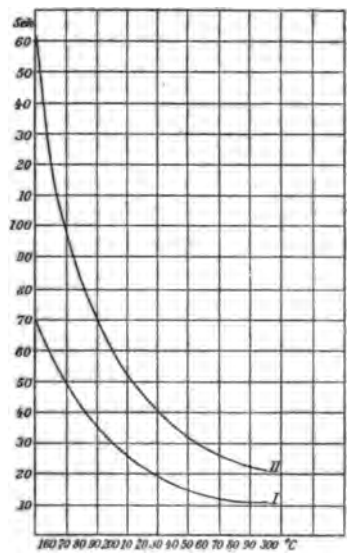


Fig. 5.

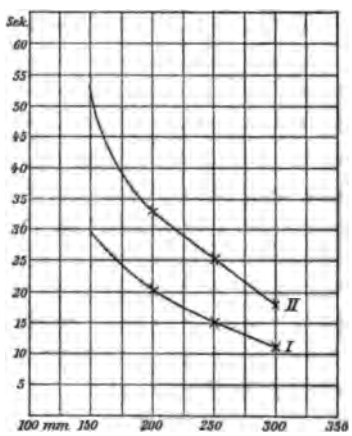


Fig. 6.

Quadrate der absoluten Temperatur ändern, läßt sich nicht genau entscheiden.

2. Für die Abhängigkeit vom Druck Fig. 6. Auf der x-Achse sind die verschiedenen Drucke, auf der y-Achse wieder die zur Diffusion von 0,4005 ccm nötige Zeit aufgetragen. Kurve I ist bei 300° C. und Kurve II bei 230° C. gefunden. Sie scheinen auch zweiten Grades zu sein. Betrachtet man aber nur die bei den drei höchsten Drucken gefundenen Werte, so sieht man, daß diese ziemlich linear verlaufen. Die vierten, bei den niedrigsten Drucken gefundenen, weichen bedeutend ab. Nun stellen sich aber bei der Diffusion ebenso wie bei der Absorption von 140° C. an abwärts Unregelmäßigkeiten

ein, oder vielmehr unter 140° C. erfolgt überhaupt keine Diffusion mehr und schon bei den nächst höheren Temperaturen treten Verlangsamungen ein, die Diffusionsgeschwindigkeiten verringern sich. Die maßgebenden Resultate sind demnach die drei ersten, und diese sprechen für eine lineare Änderung der diffundierten Mengen mit dem Druck. Genau stimmt dies nicht. Dies hat schon seinen Grund in gewissen Veränderungen, die das Palladium durch Erhitzen erfährt. Wurde dasselbe z. B. mehrere Stunden lang auf 300° C. gehalten, so war am Schlusse des Versuches die Diffusionsgeschwindigkeit etwas größer wie beim Anfang, obgleich sonst dieselben Bedingungen obwalteten. So wurde bei einem Versuch, der bei 210° C. und 300 mm Druckdifferenz angestellt wurde, zur Diffusion von 0,4005 ccm im Anfang 11 Sek., nach ungefähr 5 Stunden 10 Sek. gebraucht. Bei einem anderen, der bei derselben Temperatur und 200 mm Druckdifferenz gemacht wurde, diffundierten 0,4005 ccm im Anfang in 20 Sek. und nach 5 Stunden in 19 Sek. Das Palladium scheint also mit der Zeit durchlässiger zu werden. Es zeigte auch äußerlich Veränderungen. Während es vor den Versuchen ein metallisch glänzendes Aussehen und eine glattpolierte Oberfläche hatte, sah es nachher matt aus und war rauh geworden. Auch kleine Verbiegungen und ähnliche Deformationen ließen sich konstatieren.

4. Gesamtresultate.

Die Gesamtresultate der vorliegenden Arbeit sind demnach folgende: Die Absorption des Wasserstoffgases durch Palladium verläuft über 140° C. analog den meisten anderen Absorptionserscheinungen, d. h. sie nimmt mit dem Drucke zu und mit der Temperatur ab. Die Diffusion nimmt mit der Temperatur und dem Drucke zu und zwar mit der ersteren höchstwahrscheinlich quadratisch, mit dem letzteren linear.

Unter 140° C. gilt dies nicht. Hier treten Unregelmäßigkeiten ein. Da man sich den Verlauf der Diffusion eines Gases durch einen festen Körper so zu denken hat, daß, wie schon vielfach erwähnt, zuerst Adsorption stattfindet, dann Absorption und schließlich Diffusion folgt, so kann überhaupt Diffusion nur dann stattfinden, wenn das Gas von dem festen

Körper vorher adsorbiert worden ist; dies tritt nur ein, wenn zwischen beiden eine gewisse Affinität besteht. Es ist daher anzunehmen, daß unter 140° C. zwischen Palladium und Wasserstoff keine derartige Affinität besteht. Diese tritt erst bei höherer Temperatur auf und mit ihr Adsorption. Analoga hierfür finden wir in der Chemie; so z. B. lagern Kohlenstoff und Stickstoff bei gewöhnlicher Temperatur ruhig nebeneinander, ohne sich gegenseitig merklich zu beeinflussen, während sie sich bei höherer Temperatur zu CN vereinigen.

Hr. Winkelmann hat in seinen beiden Arbeiten über die Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium und Platin[1]) gefunden, daß die diffundierten Gasmengen nicht proportional dem Druck sind, sondern mit abnehmendem Druck relativ größer werden. Er erklärt dies durch die Annahme, daß bei der Diffusion eine Dissoziation des Wasserstoffmoleküles eintritt und daß nur die Wasserstoffatome diffundieren, was eine Verringerung des wirksamen Druckes bedinge. Der treibende Druck ist nun aber von der Differenz der auf beiden Seiten des durchlässigen Körpers adsorbierten Gasmengen abhängig.[2]) Die diffundierenden Mengen sind dieser Differenz proportional. Da aber überhaupt noch nicht nachgewiesen ist, daß diese Differenz dem Drucke genau proportional ist, sondern alle Beobachtungen dafür sprechen, daß sie mehr oder weniger abweicht, so ergibt sich notwendig, daß die diffundierten Mengen auch dem Drucke nicht genau proportional sind. Es scheint demnach die Annahme, daß durch Dissoziation des Wasserstoffmoleküles der treibende Druck sich verändere, zur Erklärung der erwähnten Unregelmäßigkeiten nicht nötig.

1) A. Winkelmann, Ann. d. Phys. **6.** p. 104. 1901; **8.** p. 338. 1902.
2) H. Kayser, Wied. Ann. **43.** p. 544. 1892.

(Eingegangen 6. Oktober 1903.)

7. *Über das innere Feld der Elektronen; von Emil Kohl.*

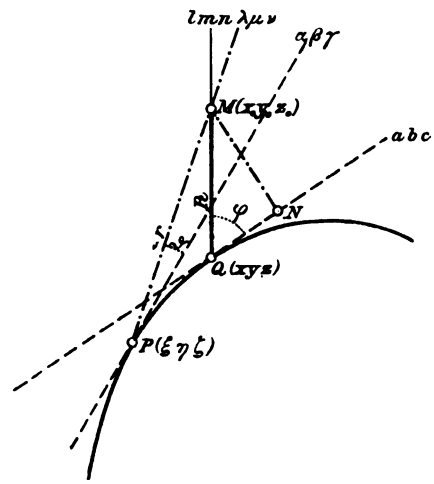
Die Untersuchungen über das elektromagnetische Feld der Elektronen beschränkte sich größtenteils auf solche Bewegungen, bei welchen das Elektron mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig fortschreitet. Seit den Errungenschaften, welche diese Theorie J. J. Thomson sowie Wiechert und Kaufmann verdankt, denen die Bestimmung absoluter Werte für die Masse und die Geschwindigkeit der Elektronen gelang, drängte sich aber immer mehr die Notwendigkeit auf, auch Bewegungen ins Auge zu fassen, welche mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit stattfinden. Grundlegend sind in dieser Beziehung die beiden Arbeiten von Abraham über die Dynamik des Elektrons[1]), in denen diese Frage von ganz allgemeinen Gesichtspunkten aus behandelt wurde. Eine weitere Behandlung erfuhr sie durch Schwarzschild[2]), welcher gleichfalls ein in beliebiger Bewegung begriffenes Elektron zugrunde legte. Die nachfolgenden Betrachtungen bezwecken nun, die Gleichungen für das innere Feld und die sich hieran knüpfenden Folgerungen zu entwickeln; es wird sich zeigen, daß man mit Hilfe des von Wiechert gefundenen Elementargesetzes für die Wirkung bewegter elektrischer Teilchen und unter Zugrundelegung der von Abraham entwickelten Vorstellung über die Beschaffenheit des Elektrons verhältnismäßig sehr einfache Ausdrücke für diese Feldgleichungen ableiten kann, wenn man gewisse, für die meisten Bewegungen wohl zulässige Vereinfachungen vornimmt.

Es mögen die Komponenten der dielektrischen Verschiebungskraft mit P, Q, R, jene der magnetischen Kraft mit

1) M. Abraham, Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 20—41. 1902; Ann. d. Phys. **10**. p. 105—179. 1903.

2) K. Schwarzschild, Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 126—131, p. 132—141, p. 245—278. 1903.

α, β, γ bezeichnet werden, ferner soll sich im Äther ein elektrisches Teilchen mit der Dichte σ und den Geschwindigkeitskomponenten $c_x(t)$, $c_y(t)$, $c_z(t)$ bewegen, dessen Koordinaten zur Zeit t x, y, z seien. Zu jedem Punkte M (x_0, y_0, z_0) des Raumes gibt es einen zweiten Punkt P mit den Koordinaten $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ im Abstande r, von dem aus die elektromagnetische Bewegung in derselben Zeit nach M wie das Teilchen von ihm nach Q gelangt (vgl. Figur). Wenn weiter die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Äther gleich $\mathfrak{V}$, ferner $c_\nu(t)/\mathfrak{V} = k_\nu(t)$, $\omega = t - r/\mathfrak{V}$ gesetzt wird, so besteht folgendes System von Fernwirkungsgleichungen:



$$(1)\qquad \begin{cases} P = -\dfrac{\partial U}{\partial x_0} - \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial F}{\partial t}, \quad Q = -\dfrac{\partial U}{\partial y_0} - \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial G}{\partial t}, \\ R = -\dfrac{\partial U}{\partial z_0} - \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial H}{\partial t}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \alpha = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \beta = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x},$$

und folgendes System von Nahewirkungsgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial P}{\partial t} + 4\pi\sigma k_x = \dfrac{\partial \beta}{\partial z_0} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial y_0}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial Q}{\partial t} + 4\pi\sigma k_y = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_0} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial z_0}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial R}{\partial t} + 4\pi\sigma k_z = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_0} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x_0}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \dfrac{\partial R}{\partial y_0} - \dfrac{\partial Q}{\partial z_0}, \quad \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial \beta}{\partial t} = \dfrac{\partial P}{\partial z_0} - \dfrac{\partial R}{\partial x_0}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{V}}\dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial x_0} - \dfrac{\partial P}{\partial y_0}, \end{cases}$$

wobei in leicht verständlicher Abkürzung

$$(5)\quad (U.\,F,\,G,\,H) = \int \left(\sigma,\, \sigma\, k_x(\omega),\, \sigma\, k_y(\omega),\, \sigma\, k_z(\omega)\right) \frac{d\tau}{r\,(1 - k_\sigma(\omega)\cos\vartheta)},$$

$$(6a)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(U,F,G,H) - \dfrac{1}{\mathfrak{B}^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(U,F,G,H) \\ \qquad\qquad = -\,4\pi\left(\sigma,\, \sigma\, k_x(t),\, \sigma\, k_y(t),\, \sigma\, k_z(t)\right), \end{array} \right.$$

$$(6b)\quad \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial G}{\partial y_0} + \frac{\partial H}{\partial z_0} = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{\partial U}{\partial t},$$

ist. Das Zeichen $\partial/\partial t$ wurde gewählt um anzudeuten, daß sich die Differentiation nach t bloß auf die Koordinaten ξ, η, ζ bezieht. Eine Ableitung dieser Gleichungen aus den gewöhnlichen Maxwell-Boltzmannschen hat der Verfasser l. c. gegeben.[1]) Die Gesamtenergie hat die bekannte Gestalt:

$$(7)\quad E(t) = \frac{1}{2.4\pi}\left[\int (P^2 + Q^2 + R^2)\,d\tau + \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\tau\right],$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Differenziert man nach t, führt statt der Ableitungen von P, Q, R ihre Werte aus (3) ein und integriert partiell unter Berücksichtigung des Kontinuitätsprinzipes[2]), so ergibt sich, da sich die Abgeleiteten von α, β, γ aufheben,

$$(8a)\quad \frac{dE}{dt} = -\int \sigma\left(P\,c_x(t) + Q\,c_y(t) + R\,c_z(t)\right)d\tau,$$

$$(8b)\quad E(t) - E(o) = -\int_0^t dt \int \sigma\left(P\,c_x(t) + Q\,c_y(t) + R\,c_z(t)\right)d\tau.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Zunahme der elektromagnetischen Energie gleich der negativen elektrodynamischen Stromarbeit der Konvektionsströme ist.

Die Ausdrücke (5) enthalten zunächst die Funktionen ξ, η, ζ der Größe ω; sie sollen der Kürze wegen mit $\Psi_\nu(\omega)$ bezeichnet werden. Es werde nunmehr vorausgesetzt, daß die betrachteten elektrischen Teilchen ein kugelförmiges Elektron mit der unveränderlichen Massendichte σ bilden, in welchem diese Teilchen starr miteinander verknüpft sind; ferner sei der Halbmesser a dieser Kugel außerordentlich klein (nach Abraham beträgt

1) E. Kohl, Boltzmann-Festschrift, p. 679—687. 1904.

2) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, II. Teil, p. 8. Leipzig 1893.

er höchstens 10^{-12} cm). Die zweite Annahme Abrahams, daß das Elektron eine gleichförmig geladene Hohlkugel oder Kugelschale bilde, welche schon Windt[1]) seinen Untersuchungen zugrunde legte, führt nur bezüglich der Konstanten auf andere Werte, soll also nicht näher betrachtet werden. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich leicht eine Eigenschaft der Funktion $\Psi_\nu(\omega)$ für innere Punkte im Elektron ableiten. Entwickelt man nach der Taylorschen Reihe, so ergibt sich

$$\Psi_\nu(\omega) = \Psi_\nu\left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}}\right) = \Psi_\nu(t) - \left(\frac{1}{1!}\right)\frac{\partial\,\Psi_\nu(t)}{\partial\,t}\cdot\left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right) + \left(\frac{1}{2!}\right)\frac{\partial^2\,\Psi_\nu(t)}{\partial\,t^2}\left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^2 + \cdots$$

Man ersieht nun ohne weiteres aus der Figur, daß der Punkt P desto näher zu Q rückt, je näher M an Q liegt und je kleiner die Geschwindigkeit des Punktes P ist. Der Betrag von r ist offenbar kleiner, als wenn die Bewegung von P nach Q geradlinig mit der auf der Strecke PQ auftretenden Maximalgeschwindigkeit c_m vor sich ginge und die Punkte Q und M als Endpunkte des in diese angenommene Richtung fallenden Halbmessers gewählt würden. Man erhält so durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}}\,\frac{a}{1-k_m} > \frac{r}{\mathfrak{B}}.$$

Es sollen nun die in Betracht kommenden Bewegungen durch die Annahme eingeschränkt werden, daß alle Glieder von der Form

$$\frac{1}{\varkappa!}\,\frac{\partial^\varkappa\,\Psi_\nu(t)}{\partial\,t^\varkappa}\left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^\varkappa (\varkappa = 2, 3\ldots) \quad \text{gegen} \quad \frac{\partial\,\Psi_\nu(t)}{\partial\,t}\,\frac{r}{\mathfrak{B}}$$

vernachlässigt werden können. Hierzu ist nötig, daß die Geschwindigkeitsänderung des Teilchens nicht über alle Maßen rasch vor sich geht, ferner, daß die Geschwindigkeit an keiner Stelle der Bahn dem Werte $\mathfrak{B}$ außerordentlich nahe kommt, Einschränkungen, welche wohl für die weitaus meisten Elektronenbewegungen zulässig sein dürften, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{a}{\mathfrak{B}} < \tfrac{1}{3}\,10^{-22}$$

1) C. H. Windt, Archives Néerlandaises (2). 5. p. 609–635. 1900.

ist. Dann ergibt sich, da nur das innere Feld des Elektrons und somit nur Punkte innerhalb der Kugel mit dem Halbmesser a betrachtet werden,

$$\Psi_\nu(\omega) = \Psi_\nu(t) - \frac{\partial \Psi_\nu(t)}{\partial t}\frac{r}{\mathfrak{B}}, \tag{9}$$

und unter Anwendung dieser Formel auf die in (5) auftretenden Funktionen zunächst:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_x(t)\,dt = x - c_x(t)\frac{r}{\mathfrak{B}}, \quad \eta = \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_y(t)\,dt = y - c_y(t)\frac{r}{\mathfrak{B}}, \\ \zeta &= \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_z(t)\,dt = z - c_z(t)\frac{r}{\mathfrak{B}}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} r^2 &= (x_0 - x + k_x(t)r)^2 + (y_0 - y + k_y(t)r)^2 + (z_0 - z + k_z(t)r)^2 \\ &= R^2 + k_\sigma^2(t)r^2 + 2Rr\left[\frac{x_0 - x}{R}k_x(t) + \frac{y_0 - y}{R}k_y(t) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{z_0 - z}{R}k_z(t)\right], \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und hieraus:

$$r = \frac{R\,k_\sigma(t)\cos\varphi + \sqrt{R^2(1 - k_\sigma^2(t)\sin^2\varphi)}}{1 - k_\sigma^2(t)}. \tag{12}$$

Um den Ausdruck

$$k_\sigma(\omega)\cos\vartheta = k_x(\omega)\frac{x_0 - \xi}{r} + k_y(\omega)\frac{y_0 - \eta}{r} + k_z(\omega)\frac{z_0 - \zeta}{r}$$

zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, daß in (10) alle Glieder

$$\frac{1}{\varkappa + 1!}\frac{\partial^\varkappa c_\nu(t)}{\partial t^\varkappa}\left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots) \quad \text{gegen} \quad c_\nu(t)$$

vernachlässigt werden konnten; es ist also

$$c_\nu\left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}}\right) = c_\nu(t), \quad k_\nu(\omega) = k_\nu(t)$$

zu setzen, woraus man erhält:

$$\left\{\begin{aligned} r\,k_\sigma(\omega)\cos\vartheta &= k_x(t)(x_0 - x + k_x(t)r) + k_y(t)(y_0 - y + k_y(t)r) \\ &\qquad + k_z(t)(z_0 - z + k_z(t)r) \\ &= R\,k_\sigma(t)\cos\varphi + r\,k_\sigma^2(t) \end{aligned}\right. \tag{13}$$

und daher

$$(14)\quad \begin{cases} r\left(1 - k_\sigma(\omega)\cos\vartheta\right) = r\left(1 - k_\sigma^2(t)\right) - R\,k_\sigma(t)\cos\varphi \\ \qquad\qquad = \sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t)\sin^2\varphi}\,, \\ \dfrac{1}{r\left(1 - k_\sigma(\omega)\cos\vartheta\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t)\sin^2\varphi}}\,. \end{cases}$$

Denkt man sich für einen Augenblick das Koordinatensystem so gewählt, daß die Z-Achse mit der Tangentenrichtung an die Bahnkurve im Punkte Q zusammenfällt, so kann der letzte Ausdruck in der Form

$$(14')\quad \frac{1}{r\left(1 - k_\sigma(\omega)\cos\vartheta\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - k_\sigma^2(t)\right)\left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\right] + (z_0 - z)^2}}$$

geschrieben werden. Das ist aber derselbe Ausdruck, wie für die Wirkungsfunktion eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitenden Teilchens, nur daß sowohl $k_\sigma(t)$ als auch die Koordinaten der beiden Punkte Q und M Funktionen der Zeit sind. Zusammenfassend kann man also sagen:

Für jede Bewegung des Elektrons, bei welcher alle Ausdrücke

$$\frac{1}{\varkappa + 1!}\,\frac{\partial^\varkappa c_\nu(t)}{\partial t^\varkappa}\left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^\varkappa \text{ gegen } c_\nu(t)$$

vernachlässigt werden können, hat die Wirkungsfunktion jedes einzelnen Massenteilchens des Elektrons innerhalb desselben den Wert (14).

Diese Voraussetzung stellt gleichzeitig die Bedingung dar, unter welcher die Bedingung des Elektrons als *quasistationär* aufgefaßt werden kann.

Die Formeln (5) gehen somit in die folgenden über:

$$(15)\qquad (U, F, G, H) = \int \frac{(\sigma,\ \sigma k_x(t),\ \sigma k_y(t),\ \sigma k_z(t))}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t)\sin^2\varphi}}\,d\tau\,.$$

Für die ferneren Betrachtungen ist es nötig, die Kraftkomponenten P, Q, R nicht mehr für die festen Punkte des Raumes, sondern für die zeitlich veränderlichen Punkte des Elektrons aufzustellen, indem man in (1) auch die Koordinaten von M als Funktionen der Zeit einführt. Man bekommt so:

$$(16)\quad \begin{cases} P = -\frac{\partial U}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial y_0}k_{y_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial z_0}k_{z_0}(t)\right], \\ Q = -\frac{\partial U}{\partial y_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{dG}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}}\left[\frac{\partial G}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial y_0}k_{y_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial z_0}k_{z_0}(t)\right], \\ R = -\frac{\partial U}{\partial z_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{dH}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}}\left[\frac{\partial H}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial y_0}k_{y_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial z_0}k_{z_0}(t)\right]. \end{cases}$$

Die Komponenten der auf das Elektron wirkenden inneren Gesamtkraft der dielektrischen Verschiebung erhält man durch Summierung über den ganzen Kugelraum in der Gestalt:

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \int \sigma P d\tau_0 = -\int \sigma \frac{\partial U}{\partial x_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\int \sigma F d\tau_0 \\ \qquad + \frac{1}{\mathfrak{B}}\int \sigma\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial y_0}k_{y_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial y_0}k_{z_0}(t)\right] d\tau_0, \\ \mathfrak{Q} = \int \sigma Q d\tau_0 = -\int \sigma \frac{\partial U}{\partial y_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\int \sigma G d\tau_0 \\ \qquad + \frac{1}{\mathfrak{B}}\int \sigma\left[\frac{\partial G}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial y_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial z_0}k_{z_0}(t)\right] d\tau_0, \\ \mathfrak{R} = \int \sigma R d\tau_0 = -\int \sigma \frac{\partial U}{\partial z_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\int \sigma H d\tau_0 \\ \qquad + \frac{1}{\mathfrak{B}}\int \sigma\left[\frac{\partial H}{\partial x_0}k_{x_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial y_0}k_{y_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial z_0}k_{z_0}(t)\right] d\tau_0. \end{cases}$$

Während die bisherigen Betrachtungen allgemeinerer Art waren, soll nunmehr eine speziellere Voraussetzung eingeführt werden, um für gewisse Gruppen von Elektronenbewegungen übersichtliche Ergebnisse zu erhalten. Sie besteht darin, daß die Elektronen bloß eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung besitzen sollen, bez. daß die Geschwindigkeit der letzteren gegenüber jener der ersteren vernachlässigt werden könne. Es wäre zu erwähnen, daß auch Abraham[1]) bemerkt, daß für die meisten Elektronenbewegungen, falls sie nicht nahezu mit Lichtgeschwindigkeit vor sich gehen, die fortschreitende Bewegung allein maßgebend ist. Eine Begründung dieser Auffassung wird am Schlusse dieses Aufsatzes kurz angedeutet werden. Unter dieser Voraussetzung sind dann die Größen $k_\nu(t)$ für alle Punkte des Elektrons gleich, und die Gleichungen für das innere Feld nehmen eine besonders ein-

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 173—174. 1903.

fache Form an. Man berücksichtige, daß wegen der starren Verbindung der Massenteilchen untereinander

$$\frac{\partial R}{\partial x_0} = -\frac{\partial R}{\partial x} \text{ etc.}$$

ist und daß die Grenzen der Integrale wegen der unveränderlichen Gestalt der Oberfläche keine Funktionen der Zeit sind. Betrachtet man daher die einzelnen, aus der Wirkungsfunktion (14) gebildeten Summanden innerhalb der Integrale (16), so bemerkt man, daß sich zu jedem Punkte M des Elektrons ein symmetrisch liegender M' so finden läßt, daß die ersten und dritten Integrale entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, während die zweiten gleich groß und gleich bezeichnet sind; diese Eigenschaft ergibt sich aus der Form von (14), in welcher die Koordinaten nur in der Verbindung $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$ auftreten, sowie in Hinblick auf die allseitige Symmetrie des Elektrons. Die Folge davon ist, daß in den Gleichungen (17) die ersten und dritten Integrale gänzlich verschwinden und nur die zweiten übrig bleiben.

Was die magnetischen Kraftkomponenten betrifft, so lassen sie sich leicht dadurch bestimmen, daß man für die betrachtete Zeit die Z-Achse mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen läßt. Man erkennt dann sofort, daß die magnetischen Kraftlinien Kreise bilden, deren Ebene auf der eben herrschenden Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen und deren Mittelpunkte in jener Geraden liegen, welche durch das Zentrum des Elektrons parallel zur Fortpflanzungsrichtung gezogen wird. Die Radien dieser Kreise geben dann die Richtung der auf die Konvektionsströme des Elektrons wirkenden ablenkenden Kräfte an.

Man übersieht ferner leicht, daß in einem ursprünglich in rein fortschreitender Bewegung begriffenen Elektron infolge der inneren Kräfte niemals Kräftepaare auftreten, während solche entstehen, wenn eine Drehung vorhanden ist, worauf bereits Abraham hingewiesen hat; ein in reiner Fortschreitung begriffenes Elektron kann also nur durch die Wirkung äußerer Kräfte eine Drehung erlangen. Doch werden solche Drehungen nur dann von Belang sein, wenn die Differentialquotienten dieser äußeren Kraftkomponenten nach den Achsen beträcht-

liche Werte erreichen, also das äußere Feld in höherem Grade inhomogen ist, da ja die Drehmomente von der Größenordnung des Produktes dieser Differentialquotienten und dem Quadrate des Halbmessers a sind.

Man erhält demnach die vereinfachten Gleichungen:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\iint \sigma F\, d\tau\, d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\left[k_x(t)\, V(k_\sigma(t))\right], \\ \mathfrak{Q} = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\iint \sigma G\, d\tau\, d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\left[k_y(t)\, V(k_\sigma(t))\right], \\ \mathfrak{R} = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\iint \sigma H d\tau\, d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d}{dt}\left[k_z(t)\, V(k_\sigma(t))\right], \end{cases}$$

wozu noch die Gleichungen für die Komponenten der inneren Gesamtkraft der magnetischen Verschiebung kommen:

$$(19)\quad \mathfrak{a} = \int \sigma\alpha\, d\tau_0 = 0, \quad \mathfrak{b} = \int \sigma\beta\, d\tau_0 = 0, \quad \mathfrak{c} = \int \sigma\gamma\, d\tau_0 = 0;$$

hier ist

$$(20)\qquad V(k_\sigma(t)) = \iint \frac{\sigma^2\, d\tau\, d\tau_0}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t)\sin^2\varphi}}.$$

Für die von der Bewegung des Elektrons herrührende Energie, welche zugleich als innere Feldenergie des Elektrons bezeichnet werden kann, erhält man gemäß (8b) die einfache Beziehung:

$$(21)\quad E(t) - E(o) = k_\sigma^2(t)\, V(k_\sigma(t)) - \int_0^t k_\sigma(t)\, V(k_\sigma(t))\, d\, k_\sigma(t).$$

Der Ausdruck (20) kann bekanntlich durch Verlegung der Z-Achse in die Bewegungsrichtung (vgl. Gleichung (14')) und Transformation der Variablen

$$\sqrt{1 - k_\sigma^2(t)}(x, y), z = x', y', z'; \qquad \sqrt{1 - k_\sigma^2(t)}(x_0, y_0), z_0 = x_0', y_0', z_0'$$

auf die Form

$$(20')\quad V(k_\sigma(t)) = \frac{1}{(1 - k_\sigma^2(t))^2}\iint \frac{\sigma^2\, d\tau'\, d\tau_0'}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}$$

gebracht werden, wobei sich die Grenzen jetzt über den Raum eines Rotationsellipsoides von der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{1 - k_\sigma^2(t)} + z^2 = a^2$$

erstrecken. Wendet man die Gleichungen für das Potential eines homothetischen Rotationsellipsoides mit der größeren

Achse als Rotationsachse hierauf an[1]), so erhält man nach einigen einfachen Rechnungen:

$$V(k_\sigma(t)) = \frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\frac{1}{k_\sigma(t)}\log\frac{1+k_\sigma(t)}{1-k_\sigma(t)}. \tag{22}$$

Es sollen nunmehr die Bewegungsgleichungen des Elektrons aufgestellt werden. Man beachte, daß auf das Elektron sowohl innere wie auch äußere Bewegungskräfte mit den Komponenten $X_{i,a}$, $Y_{i,a}$, $Z_{i,a}$ wirken, welche in der bekannten Art

$$X = e[P - \beta k_z(t) + \gamma k_y(t)] \text{ etc.}$$

aus den Komponenten des Feldes zusammengesetzt sind. Es werde nun angenommen, daß für den hier behandelten Fall das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gilt, so daß demnach die Summe der Komponenten aus allen auf das Elektron wirkenden Kräften nach jeder Richtung hin verschwindet, eine Voraussetzung, deren Folgerungen bei allgemeiner Geltung von Poincaré eingehend untersucht worden sind.[2]) Dann folgt hieraus, daß die Summen

$$\int\sigma[X_i + X_a]\,d\tau = \int\sigma[Y_i + Y_a]\,d\tau = \int\sigma[Z_i + Z_a]\,d\tau = 0$$

sind. Aus den früheren Betrachtungen ergibt sich aber gemäß der Gleichungen (18) und (19), daß

$$\int\sigma X_i\,d\tau = -\mathfrak{P}, \quad \int\sigma Y_i\,d\tau = \mathfrak{Q}, \quad \int\sigma Z_i\,d\tau = \mathfrak{R}$$

ist; nimmt man weiter an, daß man bei der Kleinheit des Elektrons von einer Verschiedenheit der äußeren Kräfte innerhalb desselben absehen kann, also

$$\int\sigma P_a\,d\tau = P_a\int\sigma\,d\tau = eP_a \text{ etc.}$$

ist, so bekommt man die Bewegungsgleichungen

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d}{dt}\left[k_x(t)V(k_\sigma(t))\right] - e\left[P_a - \beta_a k_z(t) + \gamma_a k_y(t)\right] = 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d}{dt}\left[k_y(t)V(k_\sigma(t))\right] - e\left[Q_a - \gamma_a k_x(t) + \alpha_a k_z(t)\right] = 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d}{dt}\left[k_z(t)V(k_\sigma(t))\right] - e\left[R_a - \alpha_a k_y(t) + \beta_a k_x(t)\right] = 0. \end{cases} \tag{23}$$

1) E. Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie, deutsche Übersetzung von W. F. Meyer, p. 85. Stuttgart 1885. (In der Gleichung für V ist darin ein störender Druckfehler unterlaufen, indem das Glied mit x^2+y^2 dort mit negativem, statt mit positivem Zeichen versehen erscheint.)

2) H. Poincaré, Archives Néerlandaises 5. p. 252—278. 1900.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $c_x(t)$, $c_y(t)$, $c_z(t)$ und bildet das Integral der Summe zwischen den Grenzen $t = 0$ bis t, so erhält man durch eine einfache Rechnung, wenn die Arbeit der äußeren Kräfte mit A bezeichnet wird:

$$(24)\quad A = k_\sigma^2(t)\,V\left(k_\sigma(t)\right) - \int_0^t k_\sigma(t)\,V\left(k_\sigma(t)\right)\,d\,k_\sigma(t) = \frac{3}{10}\,\frac{e^2}{a}\log\frac{1}{1-k_\sigma^2(t)}.$$

Der zweite Ausdruck rechts ist aber nach (21) die Zunahme der inneren Feldenergie des Elektrons. Es ergibt sich somit der Satz:

Die Vermehrung der inneren Feldenergie des Elektrons, berechnet aus den inneren Feldkräften desselben, ist gleich der Arbeit der äußeren auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Man hätte auch umgekehrt diesen Satz zuerst aufstellen und aus ihm die obigen Bewegungsgleichungen durch die Voraussetzung ableiten können, daß die Zunahme der inneren Feldenergie des Elektrons bei der Bewegung nach einer bestimmten Richtung durch die entsprechende Arbeit der äußeren Kräfte gegeben wird.

Führt man elektromagnetische Maßeinheiten ein und nimmt der Allgemeinheit wegen noch an, daß das Elektron möglicherweise einen materiellen Träger mit der Masse M besitzt, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{3}{10}\,\frac{\varepsilon^2}{a}\,\frac{1}{k_\sigma(t)}\log\frac{1+k_\sigma(t)}{1-k_\sigma(t)} + M = \mu$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\mu\,c_x(t)\right) = \varepsilon\left(P_a - \beta_a\,c_z(t) + \gamma_a\,c_y(t)\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\mu\,c_y(t)\right) = \varepsilon\left(Q_a - \gamma_a\,c_x(t) + \alpha_a\,c_z(t)\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\mu\,c_z(t)\right) = \varepsilon\left(R_a - \alpha_a\,c_y(t) + \beta_a\,c_x(t)\right). \end{cases}$$

Wenn in diesen Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k_\sigma^{2\nu}(t)}{2\nu+1} \text{ gegen } 1$$

vernachlässigt wird, so nehmen sie, da dann

$$\mu = \mu_0 = \frac{3}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{a} + M$$

geschrieben werden kann, die gewöhnlich verwendete Form der Bewegungsgleichungen des Elektrons an, und die Energiegleichung (24) erscheint in der leicht zu deutenden Gestalt:

$$E(t) - E(o) = \frac{\mu_0}{2} c_\sigma^2(t). \tag{26}$$

Diese vereinfachten Gleichungen wurden in größerer Allgemeinheit von Riecke[1]) eingehender studiert. Was die Integration der exakten Gleichungen betrifft, so gestaltet sie sich schon für die einfachsten Fälle sehr schwierig, selbst dann, wenn man sich bloß auf das Glied mit $k_\sigma^2(t)$ beschränkt. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß ein homogenes konstantes magnetisches Feld mit der Feldstärke γ, dessen Kraftlinien senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen, vorhanden ist. Dann beschreibt das Elektron mit gleichbleibender Tangentialgeschwindigkeit $c_\sigma(t)$ einen Kreis mit dem Halbmesser

$$R = \frac{\mu}{\gamma\, \varepsilon} c_\sigma(t).$$

Dagegen bietet schon die zweite einfachste Annahme, daß ein homogenes, konstantes elektrisches Feld mit der Feldstärke Q wirkt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Bewegungsrichtung liegen, bedeutende mathematische Schwierigkeiten. Wenn man hierbei voraussetzt, daß das Elektron bloß eine elektromagnetische Masse besitzt, also $M = 0$ setzt, läßt sich eine allerdings sehr verwickelte Beziehung aufstellen. Es werde angenommen, daß die Bewegungsrichtung zur Zeit $t = 0$ senkrecht auf den Kraftlinien stehe; die Lage des Elektrons zu dieser Zeit werde als Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems betrachtet, dessen X-Achse mit dieser Bewegungsrichtung zusammenfällt, ferner bezeichne φ den Winkel, welchen die Tangentenrichtung in einem bestimmten Punkte der Bahnkurve mit der X-Achse einschließt; dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$y = \frac{1}{Q}\,\frac{3}{10}\,\frac{e}{a}\,\frac{1}{k_\sigma(o)} \log \frac{1 + k_\sigma(o)}{1 - k_\sigma(o)} \left[2 \log \frac{1 - k_\sigma(o)}{1 + k_\sigma(o)} \log \left(e^{\log \frac{1 + k_\sigma(o)}{1 - k_\sigma(o)} \sec \varphi} + 1 \right) - \sec \varphi - 1 \right],$$

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 4. p. 378—387. 1900.

welche ein Bild von der komplizierten Natur der auftretenden Funktionen liefert. Vernachlässigt man wieder alle Glieder mit $k_\sigma(t)$ in μ, so erhält man unmittelbar aus (25) als Bahn eine Parabel mit dem Parameter

$$p = \frac{\mu}{\varepsilon Q} c_\sigma^2(o),$$

doch darf bei dieser Versuchseinrichtung die Kathode keine Feldwirkung mehr auf das Elektron ausüben. Aus p und R kann dann bekanntlich μ/ε und $c_\sigma(o)$ berechnet werden.

Es ist bemerkenswert, daß die Formeln (25) und (26) für den vereinfachten Fall keinen Aufschluß darüber geben, ob die Masse des Elektrons eine rein elektromagnetische ist, oder ob auch die materielle Masse eines Trägers der negativen Elektrizität darin enthalten ist. Wäre die Masse rein elektromagnetisch, wie Abraham von vornherein annimmt, so würden die bekannten Folgerungen, welche man an den Wert von ε/μ_0 bezüglich der Zersplitterung der Atome in noch kleinere Korpuskeln geknüpft hat, ihre Zulässigkeit verlieren. Andererseits deuten aber doch einige Erscheinungen, wie die gasartige Natur mancher Emanationen, wenigstens bei gewissen Formen der Becquerelstrahlung auf einen materiellen Träger, z. B. die Korpuskel eines besonderen Gases, hin. Man wird eben zu berücksichtigen haben, daß mit dem Namen *radioaktiver* oder *Becquerelstrahlung* kein einheitlicher Vorgang, sondern eine Summe von untereinander wesensverschiedener Strahlungsformen mit gewissen gemeinsamen Eigenschaften bezeichnet wird. Die experimentelle Entscheidung dieser Frage dürfte aus doppelten Gründen schwierig sein, einerseits wegen der Kompliziertheit der Rechnungen, sobald man die Glieder mit $k_\sigma(t)$ nicht mehr vernachlässigt, andererseits wegen der Eigenschaft der Funktion

$$\frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)},$$

nur wenig empfindlich gegenüber dem Argumente $k_\sigma(t)$ zu sein.

Es möge hier auf eine eigentümliche, diese Frage betreffende Folgerung aus der vereinfachten Gleichung

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{5}\frac{\varepsilon^2}{a} + M} = \varkappa \tag{27}$$

igewiesen werden, wobei $\varkappa$ die bekannte, nach den Messungen
ı Simon[1]) und Seitz[2]) mit $1{,}865 \cdot 10^7$ bestimmte Größe
leutet; diese Zahl bezieht sich hierbei auf Elektronen, bei
lchen sich $k_\sigma(t)$ noch innerhalb solcher Grenzen hält, daß

$$\frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)}$$

t großer Annäherung gleich 2, also $\mu = \mu_0$ gesetzt werden
ın, also auf Kathodenstrahlen und die durchlässige Gruppe
· langsamen ablenkbaren Becquerelstrahlen. Die erste und
heliegendste Annahme besteht darin, daß sich das Atom
ı der Masse m eines bestimmten Körpers in n Korpuskel
ıltet, an welchen die negative Elektrizität des Elektrons
ftet. Dann muß man wohl auch annehmen, daß sich die
ktrische Ladung ε_0 des Ions, hier des Atoms, gleichmäßig
f jedes Korpuskel verteilt, so daß dessen Ladung $\varepsilon = \varepsilon_0/n$
. Man erhält dann

$$\frac{\frac{\varepsilon_0}{n}}{\frac{3}{5}\frac{\varepsilon_0^2}{n^2 a} + \frac{m}{n}} = \varkappa.$$

ıltipliziert man Zähler und Nenner mit Nn, der Anzahl der
rpuskel in 1 Grammatom, so ergibt sich

$$a = \frac{\frac{3}{5}\varkappa(N\varepsilon_0)}{(N\varepsilon_0 - \varkappa N m)} \frac{\varepsilon_0}{n}.$$

$_0$ ist jetzt die durch 1 Grammatom Ionen in der Zeiteinheit
ergeführte Elektrizitätsmenge im elektromagnetischen Maße,
n die Masse von 1 Grammatom in absoluten Einheiten. Setzt
ın voraus, daß der als Träger auftretende Körper q-wertig
und das Atomgewicht m besitzt, so wird obige Gleichung

$$a = \frac{\frac{3}{5}\varkappa(qN\bar{\varepsilon})}{\left(qN\bar{\varepsilon} - \varkappa\frac{m}{\gamma}\right)} \frac{q\bar{\varepsilon}}{n},$$

bei $\bar{\varepsilon}$ die Ladung eines einwertigen Ions, also $N\bar{\varepsilon}$ gleich 9654[3])
solute Einheiten, m das Atomgewicht des Körpers und γ die
schleunigung der Schwere bedeutet. Man sieht, daß über-
upt nur bei solchen Emanationen der Wert von a positiv

1) S. Simon, Wied. Ann. **69**. p. 611. 1899.
2) W. Seitz, Ann. d. Phys. **8**. p. 248. 1902.
3) G. Mie, Die neueren Forschungen über Ionen und Elektronen.
18. Stuttgart 1908.

herauskommt, also eine materielle Masse als Träger angenommen werden kann, wo der Nenner positiv, daher

$$q \cdot 9654 - \frac{1{,}865}{981} \cdot 10^7 \, \mathrm{m} > 0$$

ist; für Wasserstoff wäre dies nicht mehr der Fall, ebensowenig für einen anderen Körper, bei welchem m größer als annähernd $q/2$ ist. Einigermaßen unsicher ist hierbei die Größe $\varkappa$; so findet Wiechert Werte zwischen $1{,}01 \cdot 10^7$ und $1{,}55 \cdot 10^7$, Kaufmann $1{,}84 \cdot 10^7$, W. Wien $2 \cdot 10^7$, Starke rund $1{,}85 \cdot 10^7$, Lenard rund $0{,}64 \cdot 10^7$, Thomson $0{,}5 \cdot 10^7$, endlich Wiechert einen kleinsten, von ihm als möglich, aber unwahrscheinlich bezeichneten Wert $0{,}87 \cdot 10^7$; die drei letzteren Bestimmungen würden allerdings bei Wasserstoff auf positive Werte von a führen.

Es sei hierbei bemerkt, daß die etwa bei den schnellsten Becquerelstrahlen sich ergebenden Bestimmungen für $\varkappa$ nicht herbeigezogen werden dürfen, da $\varkappa$ bei Einführung des exakten Wertes von μ in (27) mit wachsendem $k_\sigma(t)$ abnimmt, sondern daß nach der obigen Bemerkung die Messungen bei Kathodenstrahlen zugrunde zu legen sind. Auch ist zu berücksichtigen, daß sich die Betrachtungen nur auf solche Strahlungsvorgänge beziehen, bei welchen theoretisch das Auftreten freier Elektronen vorausgesetzt wird, also auf die Kathodenstrahlen und die durchlässige Gruppe der ablenkbaren Becquerelstrahlen. Es sind daher jene Strahlungen, welche nicht auf Elektronen hindeuten, wie die stark absorbierbare Gruppe der letzteren, welche vielleicht den Kanalstrahlen an die Seite zu stellen sind, ferner die Strahlung von der Art der Thoriumemanation, endlich die den Charakter der Röntgenstrahlung tragende Gruppe der nicht ablenkbaren Becquerelstrahlen auszuschließen; die beiden ersteren dieser Gruppen sind eher mit der Bewegung von Ionen vergleichbar, weshalb das Vorhandensein eines materiellen Trägers bei ihnen von vornherein wahrscheinlich ist, während die letztere als eine reine Ätherbewegung, hervorgerufen durch die plötzliche Vernichtung der Geschwindigkeit der Elektronen bei ihrem Anpralle an körperliche Massen, aufzufassen sein dürfte.

Es gibt einen einzigen Stoff, welcher dieser Beziehung zufolge als Träger der Elektronen bei den genannten Strahlungsformen aufgefaßt werden könnte, nämlich das *Helium*. Gerade

das Helium spielt aber gemäß den jüngsten Entdeckungen Ramsays eine so merkwürdige Rolle bei der Becquerelstrahlung, daß dieses Ergebnis eine gewisse Beachtung verdient; auf die Folgerungen, welche man zur Erklärung dieser Entdeckungen bei Zulassung des Heliums als Träger der Strahlung ziehen könnte, soll aber wegen ihrer dermalen noch hypothetischen Natur hier nicht näher eingegangen werden. Wenn man nämlich annehmen würde, daß das Atomgewicht des Heliums gleich 2 ist, wie dies kürzlich Wilde[1]) getan hat, und wenn man ferner zulassen würde, daß die Wertigkeit des Heliums wenigstens in der Gestalt der hier betrachteten Ionen gleich 5 wäre, so ließe sich ein positiver Wert von a berechnen, das Helium wäre also als Träger der Elektronen möglich; die Berechnung von a selbst ist mangels der Kenntnis von n nicht durchführbar, doch würde man bei nicht zu großem n Werte erhalten, welche zwar kleiner als die von Abraham berechneten wären, aber immerhin dieselbe Größenordnung besäßen. Der Begriff Wertigkeit ist hier im Sinne der elektrolytischen Wertigkeit verstanden, wonach das Atom eine gewisse Anzahl von Elementarquanten $\bar{e}$ zu tragen vermag. Wenn man dann einen materiellen Träger auch für die Kathodenstrahlen zugeben würde, so wäre der Gedanke, die Kathodenstrahlung gleichwie gewisse Gattungen der Becquerelstrahlung vielleicht ebenfalls zu kondensieren, nur naheliegend.

Eine andere Auffassung wäre die, den Elektronen unter Voraussetzung eines körperlichen Trägers unmittelbar das Elementarquantum zuzuschreiben, also die Atome selbst als Träger anzunehmen. Doch sind die Bedenken, welche man gegen die Annahme unzersplitterter Atome mit Rücksicht auf die Erscheinungen der Absorption nach den jüngsten Ausführungen Lenards[2]) einwenden kann, so schwerwiegend, daß diese Auffassung als ausgeschlossen abgewiesen werden muß, zumal sie, da hier $n = 1$ zu setzen wäre, auch theoretisch nichts wesentlich Neues ergäbe.

---

1) H. Wilde, Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, Session 1903—1904. 48. part I. p. 1—12.

Man vergleiche hiermit auch die Bemerkungen von B. Braunor über Gase mit dem Verhältnisse 1,66 der beiden spezifischen Wärmen in Ber. d. Deutschen chem. Gesellsch. 32. p. 708—712. 1899.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714—744. 1903.

Die dritte mögliche Annahme ist die in der Elektronentheorie, wie es scheint, gebräuchlichste, wonach sich wohl das Atom in n Korpuskel spaltet, aber jedes Korpuskel das Elementarquantum des Ions trägt. Hier würde sich, wie man durch entsprechende Umformung der Gleichung (28) erkennt, eine weit größere Möglichkeit für materielle Träger ergeben. Diese Annahme scheint dem Verfasser jedoch aus dem Grunde wenig befriedigend, da es schwer einzusehen ist, warum die n Korpuskel mit ihren n Elementarquanten als Ion vereinigt nur ein freies Elementarquantum tragen sollten.

Zum Schlusse soll noch das Ergebnis eines von dem Verfasser in dem oben erwähnten Aufsatze abgeleiteten Ausdruckes für die Kraftkomponenten P, Q, R besprochen werden.

Man bilde aus (3) durch Differentiation nach t

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{\partial P}{\partial t}+4\pi\sigma k_x(t)\right]=4\pi\frac{\partial i_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right),$$

worin i_x die Komponente der Gesamtströmung nach der X-Achse bedeutet und sodann die ähnlichen Beziehungen für Q und R. Führt man für $\partial\beta/\partial t$ und $\partial\gamma/\partial t$ ihre Werte aus (2) ein, so ergibt sich mit Hilfe von (6b) und (6a)

$$4\pi\frac{\partial i_x}{\partial t}=\Delta\left[-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{\partial F}{\partial t}\right]-4\pi\frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

woraus man, da der Ausdruck in der Klammer gleich P ist, unter Anwendung des Kontinuitätsprinzipes auf die Integration des zweiten Gliedes rechts die umgeformten Gleichungen

$$(29)\qquad \begin{cases} P=-\dfrac{\partial}{\partial x_0}\displaystyle\int\frac{\sigma}{R}\,d\tau-\int\frac{\frac{\partial i_x}{\partial t}}{R}\,d\tau, \\ Q=-\dfrac{\partial}{\partial y_0}\displaystyle\int\frac{\sigma}{R}\,d\tau-\int\frac{\frac{\partial i_y}{\partial t}}{R}\,d\tau, \\ R=-\dfrac{\partial}{\partial z_0}\displaystyle\int\frac{\sigma}{R}\,d\tau-\int\frac{\frac{\partial i_z}{\partial t}}{R}\,d\tau \end{cases}$$

erhält.

Hierin wurde i_x elektromagnetisch gemessen, und R bedeutet jetzt die Entfernung eines bewegten elektrischen Teilchens zur Zeit t von den einzelnen Punkten $M(x_0, y_0, z_0)$ des Raumes. Das zweite Integral kann dadurch umgeformt werden, daß man d/dt vor das Integralzeichen setzt und dann mit R_0 die

Entfernungen der einzelnen, als fest anzunehmenden Punkte des Raumes, mit σ und i_x aber die an den verschiedenen Stellen jeweilig herrschenden Werte bezeichnet. Es kann somit (29) auch in der Gestalt

$$(29') \quad \begin{cases} P = -\frac{\partial U_0}{\partial x_0} - \frac{d}{dt}\int \frac{i_x}{R_0}\, d\tau, \quad Q = -\frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{d}{dt}\int \frac{i_y}{R_0}\, d\tau, \\ R = -\frac{\partial U_0}{\partial z_0} - \frac{d}{dt}\int \frac{i_z}{R_0}\, d\tau \end{cases}$$

dargestellt werden, wobei U_0 das gewöhnliche elektrostatische Potential aller vorhandenen Massenteilchen bezüglich des Punktes $M(x_0, y_0, z_0)$ darstellt.

Diese Gleichungen für die Kraftkomponenten sind nun ganz dieselben, wie die in früheren Arbeiten des Verfassers als Stefansche Gleichungen bezeichneten Beziehungen, aus welchen sich die Maxwellschen Gleichungen ganz ungezwungen ableiten lassen. Es können daher die Gleichungen für die Wirkung bewegter elektrischer Massen aus jenen für ruhende gewonnen werden. Das Charakteristische dieser Formeln besteht darin, daß in ihnen die Größe $\mathfrak{B}$ nicht mehr unmittelbar vorkommt, sondern sich als Integrationsfolgerung aus denselben ergibt. Die Gesamtwirkung eines bewegten Teilchens setzt sich also aus zwei Einzelwirkungen zusammen, aus der Fernwirkung des Teilchens, welche wie in der Ruhe durch das elektrostatische Potential bestimmt ist, und aus der Induktionswirkung der erzeugten Verschiebungsströme und der vorhandenen Konvektionsströme.

Es werde nun das Arbeitsintegral

$$-\int (P c_x(t) + Q c_y(t) + R c_z(t))\, \sigma\, d\tau_0$$

gebildet, welches die Änderung der Feldenergie in der Form (8b) liefert. Setzt man die Werte aus (29') und beachtet, daß wegen der Beziehung $d\sigma/dt = 0$

$$(30) \quad \begin{cases} \int \sigma \left[\frac{\partial U_0}{\partial x_0} c_{x_0}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial y_0} c_{y_0}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial z_0} c_{z_0}(t)\right] d\tau_0 \\ \qquad = \int \sigma \frac{d U_0}{dt}\, d\tau_0 = \frac{d}{dt}\int \sigma U_0\, d\tau_0 \end{cases}$$

ist, so erhält man

$$(31) \quad \begin{cases} E(t) - E(o) = \int \sigma U_0\, d\tau_0 \Big|_0^t + \int_0^t dt \int \sigma \left[c_{x_0}(t) \frac{d}{dt}\int \frac{i_x}{R_0}\, d\tau \right. \\ \qquad \left. + c_{y_0}(t) \frac{d}{dt}\int \frac{i_y}{R_0}\, d\tau + c_{z_0}(t) \int \frac{i_z}{R_0}\, d\tau\right] d\tau_0 . \end{cases}$$

Wenn keine äußere Arbeitsleistung vorhanden ist, muß $E(t) = E(o)$ sein, da sich bloß die Form der elektromagnetischen Energie, nicht aber ihre Größe geändert hat. Dann sagt diese Gleichung, *daß die Änderung des elektrostatischen Potentiales aller vorhandenen elektrischen Massenteilchen aufeinander gleich der Induktionsarbeit aller vorhandenen Gesamtströme auf die Konvektionsströme ist.*

Dieser Satz soll angewendet werden, um die Ladung zu berechnen, welche ein Körper besitzen muß, um einem Elektron eine bestimmte Geschwindigkeit $c_o(t)$ zu erteilen, da in diesem Falle der Betrag beider Integrale leicht ermittelt werden kann.

Es werde die einfachste Vorstellung zugrunde gelegt, nämlich die, daß das Elektron zuerst als ruhend gedacht wird und an einer im Vergleich zu ihm außerordentlich großen, negativ elektrischen und dauernd in Ruhe befindlichen Kugel bis zur Berührung nahe anliegt. Ferner werde vorausgesetzt, daß die gleichförmige Verteilung der Elektrizität auf der Kugel durch die Nähe des Elektrons wegen dessen Kleinheit nicht beeinflußt wird; vom Elektron selbst wurde schon früher angenommen, daß in ihm eine Verschiebung der Elektrizität nicht stattfindet. Um eine bestimmte physikalische Vorstellung damit zu verbinden, kann man sich etwa denken, daß die betrachtete Kugel ein Leiter sei, auf welche von einer äußeren Quelle her, z. B. durch einen Leitungsdraht, fortwährend Elektronen angehäuft werden, oder daß materielle Träger aus dem Innern der Kugel, bez. aus dem umgebenden Gasraume, an deren Oberfläche treten und dort eine negative Ladung annehmen. Auf jedes Elektron wirkt dann eine abstoßende Kraft, welche es von der Kugel wegzutreiben sucht; es entsteht dann die Frage, in welcher Beziehung die Ladung der Kugel und die erteilte Geschwindigkeit des Elektrons steht.

Die gesamte Feldenergie $E(o)$ des Systems ist zu Beginn der Zeit durch

$$E(o) = \frac{\mathfrak{M}}{2 r_0} + \frac{3 e^2}{5 a} + \frac{\mathfrak{M} e}{r_0 + a} \tag{32}$$

gegeben, worin $\mathfrak{M}$ die Masse der Elektrizität auf der Kugel und r_0 den Halbmesser derselben bedeutet. Zu einer späteren Zeit hat sich der Zustand des Systems geändert, indem das Elektron eine bestimmte Geschwindigkeit $c_o(t)$ erhalten, das Selbstpotential der Massen aufeinander aber abgenommen hat.

Was die Energievergrößerung des Elektrons infolge der erteilten Bewegung betrifft, so ist sie gemäß (24) durch

$$\frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\log\frac{1}{1-k_\sigma^2(t)}+\frac{M}{2}c_\sigma^2(t)$$

dargestellt, da dieser Ausdruck nach (23) die Leistung der äußeren Kräfte und somit die Vermehrung der inneren Feldenergie des Elektrons angibt. Es werde jetzt die Bewegung des Elektrons plötzlich gehemmt und die Energie $E(t_0)$ in der neuen Ruhelage berechnet, indem man berücksichtigt, daß der Betrag

$$\frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\log\frac{1}{1-k_\sigma^2(t_0)}+\frac{M}{2}c_\sigma^2(t_0)$$

in anderer Form, z. B. als Wärme, aus dem Felde gewonnen werden kann.[1]) Man hat dann für dieselbe

$$E(t_0)=\frac{\mathfrak{M}}{2r_0}+\frac{3}{5}\frac{e^2}{a}+\frac{\mathfrak{M}}{r'+a}; \tag{32'}$$

r' ist die Entfernung der Mittelpunkte der Kugel und des Elektrons in der neuen Ruhelage. Die Differenz zwischen (32) und (32') muß gleich der aus dem Elektron zu gewinnenden Energie sein, welche sich also entsprechend dem früher abgeleiteten Satze in andere Energieart umsetzen läßt. Man erhält daher

$$\left\{\begin{aligned} E(o)-E(t_0)&=\mathfrak{M}\,e\left[\frac{1}{r_0+a}-\frac{1}{r'+a}\right]\\ &=\frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\log\frac{1}{1-k_\sigma^2(t_0)}+\frac{M}{2}c_\sigma^2(t_0).\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse, wenn r' gegen r_0 so groß ist, daß in der Klammer das zweite Glied gegen das erste vernachlässigt werden kann; man bekommt dann, da auch a gegen r_0 verschwindend klein ist,

$$\frac{\mathfrak{M}}{r_0}e=\frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\log\frac{1}{1-k_\sigma^2(t_0)}+\frac{M}{2}c_\sigma^2(t_0), \tag{33'}$$

oder, wenn man bloß Glieder mit $k_\sigma^2(t_0)$ berücksichtigt und beachtet, daß $\mathfrak{M}/r_0$ das Potential Π auf der Kugel ist,

$$\Pi.e=\frac{3}{10}\frac{e^2}{a}k_\sigma^2(t_0)+\frac{M}{2}c_\sigma^2(t_0)=\frac{\mu_0}{2}c_\sigma^2(t_0). \tag{34}$$

Diese Formel drückt die Grundvoraussetzung der Elektronentheorie aus, daß die dem Elektron erteilte und aus ihm beim Übergange in die Ruhe zu gewinnende Energie

1) G. Mie, l. c. p. 35, erste Gleichung, wenn bloß Glieder mit $c_\sigma^2(t)$ berücksichtigt werden.

gleich dem an der Kathode herrschenden Potential mal der Masse des Elektrons ist. Sie entspricht dem Grenzfalle, daß sich das Elektron durch die Abstoßung der Kathode ins Unendliche entfernt hat, so daß das gegenseitige Potential von Kathode und Elektron sich ganz in Bewegungsenergie des letzteren verwandelt hat. Geht man zum elektromagnetischen Maßsystem über, so folgt daraus die bekannte Beziehung

$$c_\sigma(t_0) = \sqrt{2\varkappa\Pi}. \tag{35}$$

Diese Betrachtungen gelten, wie eine einfache Überlegung zeigt, für jede beliebige Form der Kathode.

Dieses Ergebnis bedarf möglicherweise einer Korrektur in dem Sinne, als vielleicht ein gewisser molekularer Widerstand zu überwinden ist, um überhaupt das Abschleudern des Elektrons von der Kathode zu ermöglichen, wenn materielle Träger der Elektronen angenommen werden; ferner wäre in diesem Falle auch die zur Zersplitterung der Atome nötige Arbeit zu berücksichtigen. Man erkennt hieraus, daß obige Gleichung in aller Strenge nur bei Annahme einer rein elektromagnetischen Masse der Elektronen gültig ist. Da sie sich erfahrungsmäßig gut bewährt hat, so würde dies allerdings für die Richtigkeit dieser Annahme sprechen.

Diese Betrachtungen lassen gleichzeitig den Grund erkennen, warum die Bewegung der Elektronen, soweit sie durch die Versuche verfolgbar ist, als rein fortschreitend angenommen werden kann. Bei der Kleinheit der Elektronen im Vergleich zu dem sie aussendenden Körper wird zunächst das von letzterem herrührende Feld in der ganzen Ausdehnung des Elektrons als homogen betrachtet werden können, so daß dieses beim Abschleudern keine Drehung besitzt. Der Einfluß der äußeren Kräfte während der überhaupt beim Versuche zu beobachtenden Zeit währt aber so kurz, daß die Wirkung der die rein fortschreitende Bewegung bestimmenden Komponenten $P_a \ldots$, unvergleichlich größer als jene der eine Drehung verursachenden Kräftepaare von der Größenordnung $\frac{\partial P_a}{\partial y} a^2 \ldots$ ist.

Wien, im Dezember 1903.

(Eingegangen 17. Dezember 1903.)

8. *Über erzwungene Schwingungen von Stäben; von Wilhelm Elsässer.*

Die erzwungenen Schwingungen von Stäben sind bis jetzt nur wenig zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht worden. Der erste, der sie, wenn auch nicht unter diesem Namen, erwähnt, ist Savart[1]), dessen vielseitige Versuche über die Übertragung von schwingenden Bewegungen sich auch auf Stäbe erstrecken und der auch die durch longitudinale Erschütterungen hervorgerufenen Transversalschwingungen zuerst beobachtet hat. Indessen sind seine Versuche doch mehr allgemeiner Art; eine Angabe des gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen Tonhöhe und Schwingungsform sowie der Zahl und Lage der auftretenden Knotenlinien findet sich bei ihm nicht. Später haben dann im Anschluß an die von Melde experimentell verfolgten erzwungenen Schwingungen von Fäden Lippich[2]), Valerius[3]) und Gripon[4]) in teils theoretischen, teils experimentellen Arbeiten die Schwingungen von dünnen Fäden oder Stäben aus Glas oder Metall behandelt, die an dem einen Ende frei und mit dem anderen Ende an eine Stimmgabel oder eine schwingende Platte befestigt waren. Gripon lieferte hierbei eine richtige Theorie dieser Schwingungen für den Fall, daß ein Ende frei ist und außerdem hohe Töne benutzt werden. Für die folgende Untersuchung soll die hierin liegende Beschränkung aufgehoben und zunächst gezeigt werden, daß das Savartsche Gesetz, dessen Richtigkeit Elsas für Membranen und Platten nachgewiesen hatte, auch für Stäbe Gültigkeit hat, daß also ein Stab gezwungen werden kann, mit jeder Periode im Einklang zu schwingen — und zwar sowohl bei freiem wie auch bei festem Ende.

1) F. Savart, Ann. de chim. et phys. **65**. p. 337. 1837.

2) F. Lippich, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **2**. p. 397. 1865.

3) H. Valerius, Mémoires de l'Académie royale de Belgique **17**; Pogg. Ann. **129**. p. 308. 1865.

4) E. Gripon, Annales de l'école normale (2) **2**. p. 357. 1873.

Unter sonst gleichen Verhältnissen ist die Zahl der hierbei auftretenden Knotenlinien lediglich von der Tonhöhe des beeinflußenden Körpers abhängig und ihre Lage ändert sich stetig mit der Periode. Sodann zeigt sich, daß bei geeigneter Art der Erregung Stäbe auch gezwungen werden können, longitudinale Schwingungen von beliebiger Periode auszuführen; hierbei treten Erscheinungen auf, welche denen ähnlich sind, die man bei den longitudinalen Eigenschwingungen der Stäbe beobachtet. Für alle erörterten Fälle erweisen sich die Schwingungen, wenn man von den Dämpfungswirkungen absieht, der theoretischen Behandlung leicht zugänglich, auch stimmen die experimentell gewonnenen Resultate mit den Ergebnissen der Rechnung im wesentlichen gut überein.

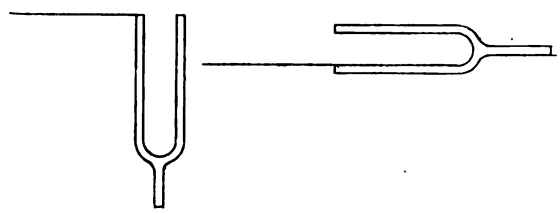


Fig. 1.

Die Versuchsanordnung ist einfach. Um die Stäbe in erzwungene Transversalschwingungen zu versetzen, wird eine Stimmgabel in horizontaler Lage so eingeklemmt, daß ihre Schwingungsebene vertikal steht. Dann befestigt man den Stab vorn an der Stimmgabel derart, daß er die Verlängerung der einen Zinke bildet (vgl. Fig. 1). Sollen longitudinale Schwingungen erregt werden, so wird die Gabel vertikal gestellt und der Stab auf der Stirnfläche der Gabelzinke horizontal befestigt. Zur Anstellung der Versuche, die einen beträchtlichen Umfang der Tonhöhen erforderten, stand mir eine Serie von zwölf kräftigen Gabeln zu Gebote, deren Schwingungszahlen zwischen 256 und 4096 lagen und die in den unteren Oktaven noch durch eine Reihe anderer Gabeln ergänzt wurde. Laufgewichte auf beiden Seiten gestatteten die Töne erheblich zu vertiefen, so daß ein großer Spielraum in bezug auf die Schwingungszahl vorhanden war und es möglich wurde, eine allmähliche und gleichmäßige Steigerung der Tonhöhe vorzunehmen. Für

die Bestimmung der einzelnen Schwingungszahlen dienten die auf den Gabeln angegebenen Zahlen als Anhaltspunkt, die genauere Feststellung erfolgte mit Hilfe eines Appunnschen Sonometers, das mit 32 Zungen eine Reihe von Tönen lieferte, die um je vier Schwingungen auseinander lagen.

Die bei der longitudinalen Erregung erforderlichen hohen Töne wurden zum Teil durch Verwendung des ersten Obertones der tieferen und mittleren Stimmgabeln hervorgerufen, zum Teil dadurch, daß verschiedene Stahlstäbe von 5, 7 und 9 cm Länge, $^1/_2$—1 cm Dicke und etwa 1 cm Breite in einen massiven schweren Schraubstock eingespannt wurden. Indem man den schwingenden Teil dieser Stäbe durch passendes Einklemmen verkürzt, erhöhen sich die Schwingungszahlen sehr schnell und man erhält auf diese Weise eine große Reihe von Tönen, besonders wenn man auch hier die bei größeren Stablängen noch leicht zu erzeugenden ersten Obertöne benutzt. Wie in diesen Fällen die Schwingungszahl festgestellt wird, wird weiter unten erörtert werden.

Zur Erregung der Gabel bedient man sich bei den niederen Schwingungszahlen am besten eines auf die Breitseite aufgesetzten Streichstäbchens aus Glas, die Obertöne der Gabeln und die hohen Töne der eingeklemmten Stäbe erhält man dagegen besser nach dem Antolikschen Verfahren, das auch von Melde empfohlen wird. Ein kleines Korkstück wird auf die Gabel oder den Stab aufgekittet und durch einen nassen Glasstab gestrichen; die sonst nur schwer erregbaren Töne werden auf diese Weise leicht erhalten und bilden sich rein aus.

Die zu den Versuchen zu benutzenden Stäbe können, besonders wenn es sich um Transversalschwingungen handelt, aus verschiedenartigstem Material gewählt werden, nur muß ihr Gewicht im Vergleich zu dem der schwingenden Körper gering sein. Dünne und nicht zu lange Stäbe aus Metall, Glas oder Karton eignen sich am besten zu diesem Zwecke. Werden die letzteren verwandt, so ist darauf zu achten, daß die Oberfläche vollkommen eben ist, anderenfalls verbiegen sich die Knotenlinien, und Verzerrungen aller Art treten auf. Die Länge der benutzten Stäbe variierte von 5—30 cm, die Breite entsprach der Breite der Gabelzinken bez. der schwin-

genden Stabes. Zu den Transversal- und Longitudinalschwingungen gleichgut geeignet erwiesen sich Glasstäbe, die aus gleichmäßigen Deckglasplatten geschnitten waren[1]) und die eine Dicke von $^3/_{10}$—$^5/_{10}$ mm hatten. Befestigt man sie mit dem einen Ende an eine Stimmgabel, so wird bei den längeren Stäben das freie Ende ziemlich beträchtlich heruntergebogen; man kann dies vermeiden, indem man an passender Stelle einen schwach gespannten Faden als Stütze unterschiebt; hierdurch werden die Schwingungsverhältnisse und die Bildung der Knotenlinien in keiner Weise beeinflußt. Kartonstäbe von 1—2 mm Dicke eignen sich gut zu den erzwungenen Longitudinalschwingungen, allerdings nur unter der Voraussetzung, daß sie vollkommen gleichmäßige Struktur haben.

Für alle Arten von Schwingungen hat sich zur Sichtbarmachung der Knotenlinien als bestes Mittel gut geschlämmter, gleichmäßig feinkörniger Quarzsand erwiesen, unter Umständen ist auch nicht zu feiner Smirgel wohlgeeignet.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Lage der Knotenlinien über.

A. Erzwungene Transversalschwingungen, Stab an einem Ende frei.

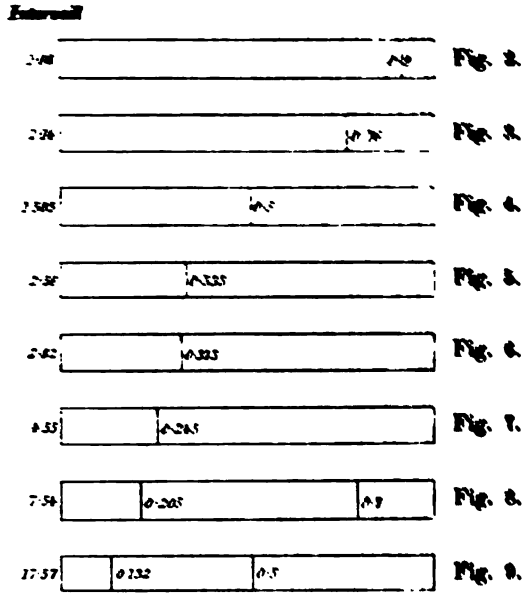
In den Figg. 2—9, welche die Lage der Knotenlinien darstellen sollen, ist die Länge des Stabes als Einheit genommen; die bei den Knotenlinien zugefügten Zahlen geben die in diesen Einheiten gemessenen Entfernungen vom freien Ende an. Ferner sind die Tonhöhen bezogen auf den tiefsten Eigenton, den der Stab bei einem festen und einem freien Ende gibt.

Solange man mit dem Gabelton unter diesem Stab = eigenton bleibt, schwingt der Stab als Ganzes, der Sand wird an allen Stellen heftig von der Staboberfläche heruntergeschleudert. Nähert man sich dem Eigenton, so wird die Bewegung des Stabes am Gabelende schwächer, während sie am freien Ende zunimmt. Ist der Grundton erreicht, so bleibt der Sand am Gabelende liegen, während die Schwingungsamplitude nach dem freien Ende hin zunimmt. Es ist in diesem Falle recht schwer, die erzwungene Schwingung zu er-

1) Bezogen von R. König, Berlin.

halten, weil meist eine unvermittelte und oft nicht unerhebliche Vertiefung des Tones eintritt, die schon von Gripon bei dünnen Glasfäden beobachtet wurde. Dieselbe Erscheinung tritt auch bei den Obertönen auf, doch macht sich der Übelstand bei den höheren Eigentönen nicht so störend bemerkbar wie bei den tieferen. Hier wie in allen übrigen Fällen ist ein möglichst schwaches Anstreichen der Gabel zu empfehlen.

Geht die Schwingungszahl über den Grundton hinaus, so bemerkt man, wie die quer gegen die Stabrichtung verlaufende Knotenlinie sich allmählich nach dem freien Ende zu verschiebt. Diese Verschiebung erfolgt anfangs schnell, dann langsamer. Bei Fig. 2 (Schwingungsintervall 1,08) ist der Knotenpunkt bis auf die Entfernung 0,9 vorgeschritten. Figg. 3 und 4 zeigen das gleichmäßige Vorwärtsgehen der Knotenlinien nach dem freien Ende. Bei dem Intervall 1,505 ist die Knotenlinie bis zur Mitte des Stabes gerückt. Es ist indessen nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß hier keine zur Mitte symmetrische Schwingung vorliegt; man überzeugt sich leicht hiervon, wenn man in gleichen Abständen von der Mitte gleichzeitig die Schwingungen eines markierten Stabpunktes durch ein seitlich und senkrecht gegen die Stabrichtung eingestelltes Mikroskop beobachtet; der nach dem freien Ende liegende Punkt hat dann die größere Amplitude. Eine weitere Tonerhöhung zeigt Fig. 5, wo der Knotenpunkt bis auf $^1/_3$ der Stablänge nach dem freien Ende zu vorgeschritten ist. Zu-



gleich nähert sich jetzt die Schwingung dem ersten Oberton des Stabes, Amplitude und Schwingungsenergie wachsen im allgemeinen, während sich in der Nähe des Gabelendes eine Stelle minimaler Bewegung ausbildet. Ist das Schwingungsintervall $6^1/_4$ geworden, so setzt mit großer Energie der Eigenton des Stabes ein, die Erregung der Gabel wird schwer, oft ganz unmöglich. Die Messung des Knotenabstandes entspricht genau der Lage, welche die Theorie für einen im ersten Oberton schwingenden Stab mit einem festen und einem freien Ende angiebt. Wird der Gabelton etwas erhöht, so ist sofort eine beträchtliche Abnahme der Amplitude und Schwingungsenergie zu bemerken. Zugleich schieben sich beide Knoten nach dem festen Ende zu vor, der erste Knoten sehr langsam, der zweite verhältnismäßig schnell. Von besonderem Interesse ist die bei dem Intervall 7,54 auftretende Fig. 8. Die Knoten sind von beiden Enden des Stabes gleichweit entfernt und man könnte daher versucht sein, hierin den Schwingungstypus zu erblicken, der dem tiefsten Eigenton eines an beiden Enden freien transversal schwingenden Stabes entspricht, zumal da auch der Knotenabstand hiermit in Übereinstimmung zu stehen scheint. Eine genaue Messung der Knotenlage zeigt indessen, daß ein keineswegs unbeträchtlicher Unterschied besteht zwischen der erzwungenen und der eben erwähnten freien Schwingung. Im letzteren Falle beträgt nämlich der Abstand der Knoten von dem nächsten Ende des Stabes 0,2242 der Stablänge, während bei der erzwungenen Schwingung dieser Abstand 0,2 ist. Nimmt man die Stablänge zu 10 cm an, so ergibt dies einen Unterschied von über 2 mm. In Fig. 9 ist, dem Intervall 17,57 entsprechend, der erste Knoten bis auf die Entfernung 0,132 vom freien Ende vorgeschritten, während der zweite Knoten in die Mitte des Stabes gerückt ist. Dieser Typus entspricht der freien Schwingung des zweiten Obertones eines an einem Ende festen Stabes, das Gabelende entspricht einem Punkt minimaler Schwingung. Nach Erhöhung des Intervalls tritt unmittelbar am Gabelende eine neue Knotenlinie auf, die sich wie früher bei weiterer Tonerhöhung allmählich nach dem freien Ende zu verschiebt.

Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß, wenn die Periode der erzwungenen Schwingung mit einer der natürlichen

Perioden übereinstimmt, die Amplitude einen Maximalwert erreicht, während die Knoten dieselbe Lage haben, wie bei den entsprechenden freien Schwingungen eines an einem Ende festen Stabes.

Zur Erkennung des gesetzmäßigen Zusammenhanges reichen die erörterten Schwingungstypen vollkommen aus; für die höheren Töne findet sich insofern eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den freien Schwingungen, als auch hier für das Gebiet der Stabmitte die Entfernungen zweier benachbarter Knotenpunkte gleich ausfallen, ein Resultat, das schon von Gripon auf theoretischem Wege abgeleitet und durch mehrere Versuche bestätigt wurde.

Die von Gripon[1]) angegebene theoretische Bestimmung der Knotenlage (nach dem Lissajousschen Verfahren) gibt eine gute Annäherung, wenn es sich um hohe Töne handelt, ist indessen bei niederen Erregungstönen nicht wohl verwendbar. Es ist in diesem Falle vielmehr erforderlich, den Wert der Normalfunktion für mehrere Werte von α zu berechnen und aus dem Wechsel des Vorzeichens die Knotenlage zu bestimmen.

Die Bewegungsgleichung für einen Stab, der harmonische Schwingungen von der Form

$$y = u \cdot \cos\left(\frac{x \cdot b}{l^2} m^2 t\right)$$

ausführt, ist

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} \cdot u^2),$$

l bedeutet die Länge des Stabes und m eine Konstante, welche auf die Schwingungszahl einen bestimmenden Einfluß ausübt. Die Lösung dieser Gleichung wird gegeben durch

$$u = A \cdot \cos\frac{mx}{l} + B \cdot \sin\frac{mx}{l} + C \cdot e^{\frac{mx}{l}} + D \cdot e^{-\frac{mx}{l}},$$

worin A, B, C, D Konstanten sind, deren Wert durch an den beiden Enden zu erfüllende Bedingungen bestimmt werden. Der Lösung kann auch die Form gegeben werden:

---

1) E. Gripon, l. c.

2) Lord Rayleigh, Theorie des Schalles, Deutsch von Neesen. p. 279. 1880.

$$u = A\left(\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right) + B\left(\cos\frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right)$$
$$+ C\left(\sin\frac{mx}{l} + \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right) + D\left(\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right),$$

wo $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Sin}$ die Zeichen für die hyperbolischen Cosinus und Sinus sind.

Sind die Schwingungen erzwungen und zwar durch die Einwirkung einer an dem einen Ende angreifenden periodischen Kraft, so kann die Bewegung an diesem Ende dargestellt werden durch die Gleichung

$$y = \alpha \,.\, \cos 2\pi \frac{t}{\tau},$$

wo τ die Periode der Kraft bedeutet. Sollen die Schwingungen des Stabes synchron mit denen der erregenden Tonquelle erfolgen, so ist es zweckmäßig

$$y = u \,.\, \cos\left(\frac{\varkappa b}{l^2} m^2 t\right)$$

für die ganze Länge des Stabes zu setzen. $\varkappa$, b und l sind hier Konstanten: $\varkappa$ ist der Gyrationsradius, $b = \sqrt{q/\varrho}$, wo q den Elastizitätsmodul, ϱ die Dichtigkeit angibt; l ist die Länge des Stabes. m ändert sich mit der einwirkenden Periode und kann hieraus berechnet werden. Ist der Stab, wie bei unseren Versuchen, mit dem einen Ende an eine Stimmgabel befestigt, während das andere Ende frei schwingt, so können die Konstanten A, B, C, D bestimmt werden aus den Bedingungen, daß an dem freien Ende, für welches wir $x = 0$ setzen, d^3u/dx^3 und d^2u/dx^2 verschwinden, während an dem Befestigungsende

$$u = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} = 0$$

wird. Dadurch wird $B = 0$ und $D = 0$, und die Bedingungsgleichungen am Befestigungsende werden:

$$A(\sin m + \mathfrak{Sin}\, m) + C(\cos m + \mathfrak{Cof}\, m) = 0$$

$$A(\cos m + \mathfrak{Cof}\, m) + C(\sin m + \mathfrak{Sin}\, m) = \alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen wird A und C bestimmt. Vermittelst der Beziehung $\mathfrak{Cof}^2 - \mathfrak{Sin}^2 = 1$ findet man

$$C = \frac{\alpha(\sin m - \mathfrak{Sin}\, m)}{2(1 + \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)}; \quad A = \frac{\alpha(\cos m + \mathfrak{Cof}\, m)}{2(1 + \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)}$$

und

$$u = \frac{\alpha}{2(1 + \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)} \Big\{ (\cos m + \mathfrak{Cof}\, m)\left(\cos \frac{m x}{l} + \mathfrak{Cof} \frac{m x}{l}\right) + (\sin m - \mathfrak{Sin}\, m)\left(\sin \frac{m x}{l} + \mathfrak{Sin} \frac{m x}{l}\right)\Big\}.$$

Die Gleichung zeigt zunächst, daß am Befestigungsende stets $u = \alpha$, und daß am freien Ende die Amplitude variabel, aber nie Null ist. Ferner ist $u = \infty$, wenn $1 + \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m = 0$, dies ist aber die Bestimmungsgleichung für die Werte von m, welche den freien Schwingungen eines an einem Ende festen, am anderen Ende freien Stabes zukommen. Sobald also die Periode der einwirkenden Kraft übereinstimmt mit der Periode einer natürlichen Schwingung, wird die Amplitude unendlich. Dieses Resultat hat eine wesentlich theoretische Bedeutung insofern, als bei der Ableitung von allen zerstreuenden Kräften abgesehen wurde. Berücksichtigt man diese Faktoren, so würde sich für u zwar ein maximaler, aber kein unendlich großer Wert ergeben. Dies wird durch den Versuch durchaus bestätigt. Sobald der Gabelton sich dem Eigenton des Stabes nähert, steigt die Amplitude außerordentlich schnell, um bei der vollkommenen Koinzidenz der beiden Töne einen größten Wert zu erreichen. Ebenso schnell sinkt die Amplitude wieder, wenn der Eigenton nach der anderen Richtung hin überschritten wird.

Setzt man den für eine bestimmte Periode konstanten Faktor

$$\frac{\alpha}{2(1 + \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)} = c,$$

so wird die Amplitude u bestimmt durch den Ausdruck

$$\frac{u}{c} = (\cos m + \mathfrak{Cof}\, m)\left(\cos \frac{m x}{l} + \mathfrak{Cof} \frac{m x}{l}\right) + (\sin m - \mathfrak{Sin}\, m)\left(\sin \frac{m x}{l} + \mathfrak{Sin} \frac{m x}{l}\right).$$

Da die Eigenschwingungen des Stabes durch den gleichen Ausdruck unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß m eine

Wurzel der Gleichung $\cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m + 1 = 0$ ist, so müssen, sobald eine Übereinstimmung einer natürlichen Periode mit der Gabelperiode vorliegt, die Knoten dieselbe Lage haben, wie bei den entsprechenden freien Schwingungen des Stabes.

Bei Berechnung der übrigen Knotenlagen ist es zweckmäßig, von einem Wert von m auszugehen, der einer natürlichen Schwingung entspricht. Ist $m = 1{,}875$, so liegt der Grundton der freien Schwingungen vor. Unterhalb dieses Wertes liefert die erzwungene Schwingung keinen Knotenpunkt. Bestimmt man für den Grundton durch den Versuch die zugehörige Schwingungszahl n, so ergeben sich die den übrigen Schwingungszahlen entsprechenden Werte von m durch die Beziehung

$$\frac{m_1^2}{m^2} = \frac{n_1^2}{n^2}.$$

Für Werte von m, die über 5 liegen, kann zur Bestimmung des ersten Knotens der Lissajoussche Näherungswert

$$x = \frac{0{,}3804 \,.\, \pi}{m}$$

ohne weiteres benutzt werden; er gilt für den dem freien Ende zunächst liegenden Knoten. Die Lage der übrigen Knoten ist bestimmt durch

$$m\,x = \frac{5\,\pi}{4}, \quad \frac{9\,\pi}{4}, \quad \frac{11\,\pi}{4} \ldots$$

Diese Näherungswerte können in allen Fällen mit Vorteil verwandt werden, um einen Anhaltspnnkt für die ungefähre Lage der Knoten zu gewinnen. So erhält man für $m = 3$ den Näherungswert $x = 0{,}3456$. Berechnet man nun für $m = 3$ und die Abszissen 0,3 und 0,333 die zugehörigen Funktionswerte von u/c, so findet man

$$\left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}333} = -\,0{,}96\,, \quad \left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}3} = +\,0{,}68\,.$$

Der Knoten liegt also zwischen 0,3 und 0,333. Ein genauerer Wert ist 0,313. Der Versuch ergibt diese Knotenlage bei dem Wert $m = 3{,}15$.

Eine bessere Übereinstimmung findet sich für $m = 5{,}1$. Der Näherungswert liefert in diesem Falle für den dem freien

Knote zunächst liegenden Knoten $x = 0{,}204$. Berechnet man u/c für $x = 0{,}20$ und $x = 0{,}21$, so findet man

$$\left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}20} = +1{,}05 \quad \text{und} \quad \left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}21} = -0{,}57.$$

Der Knoten liegt also zwischen 0,20 und 0,21; ein genauerer Wert ist 0,204. Ebenso findet man

$$\left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}79} = -1{,}7; \quad \left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}80} = +3,$$

der zweite Knoten liegt daher zwischen 0,79 und 0,8; ein genauerer Wert ist 0,795. Die experimentelle Prüfung ergibt diese in Fig. 3 dargestellte Knotenlage in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Bei einem durch den Versuch ermittelten Wert von 5,15 für m zeigten sich zwei Knoten, deren Entfernung von den Enden je 0,205 der Stahllänge betrug.

Für $m = 7$ liegt der erste Knoten bei $x_1 = 0{,}148$. Zur Berechnung des zweiten Knotens benutzt man den Näherungswert $5\,\pi$ 4, der in diesem Falle ziemlich genau ist, weil die Entfernung des Knotens vom Gabelende hinreichend groß ist. Man erhält $x_2 = 0{,}56$. Durch Berechnung von u/c erhält man für $x = 0{,}56$:

$$\left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}56} = +33, \quad \left(\frac{u}{c}\right)_{0{,}55} = -17.$$

Als genaueren Wert findet man 0,554.

$m = 8$ liefert drei Knoten, wovon der erste bei 0,13, der zweite bei 0,491 und der dritte bei 0,92 liegt.

Die gewählten Beispiele genügen, um zu zeigen, wie bei gegebenem m die Entfernungen der Knoten berechnet werden können. Die experimentelle Prüfung ergibt in bezug auf die Knotenlage eine vollkommene Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen, die Abweichungen, die sich bei den zugehörigen Werten von m zeigen, sind zurückzuführen auf die Störungen, welche bei den den natürlichen Schwingungen entsprechenden Perioden auftreten.

Die erzwungenen Schwingungen von einseitig freien Stäben können mit Vorteil verwandt werden, um die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Dicke und Länge zu zeigen. Ein Glasstab

von 96 mm Länge, 1 cm Breite und 0,2 mm Dicke wurde an eine Stimmgabel von der Schwingungszahl $n = 121{,}5$ befestigt. Ein zweiter ebenso langer und breiter Glasstab, der die Dicke 0,4 mm hat, wird an einer Gabel von der doppelten Schwingungszahl $n = 243$ befestigt. Beide Stäbe liefern bei Erregung der Gabel den gleichen Schwingungstypus, nämlich ein System von zwei Knoten, deren erster vom freien Ende den Abstand 20 mm, der zweite von demselben Ende den Abstand 77 mm hat. Der Stab von der doppelten Dicke erfordert also, um denselben Schwingungstypus aufzuweisen, eine doppelte Schwingungszahl. Ferner wurden, um die Abhängigkeit von der Länge zu prüfen, zwei Stäbe von 96 mm und 48 mm Länge und der gleichen Dicke verglichen. Sie liefern bei den Gabeltönen $n = 243$ und $n = 972$ dieselbe Schwingungsform, nämlich wiederum das System von zwei Knoten, die vom freien Ende den Abstand 0,2 und 0,8 haben. Bei der gleichen Schwingungsform verhalten sich daher die Schwingungszahlen umgekehrt wie die Quadrate der Längen.

B. Erzwungene Transversalschwingungen; Stab an einem Ende fest.

Gripon und Valerius[1]) haben bei ihren teils theoretischen, teils experimentellen Untersuchungen nur den Fall berücksichtigt, daß ein Ende des Stabes frei ist. Indessen ist der andere Fall, wo dieses Ende fest ist, der mathematischen Behandlung wie auch dem Versuch gleich gut zugänglich. Die Bedingung für ein festes Ende lautet $y = 0$ und $dy/dx = 0$. Das andere Ende ist der Einwirkung einer periodischen Kraft unterworfen; seine Bewegung kann wie in Fall A dargestellt werden durch

$$y = \alpha \cdot \cos\left(\frac{x \cdot b}{l^2} m^2 t\right),$$

wo x, b, l die gleiche Bedeutung haben wie vorher und

$$\frac{x b \cdot m^2}{l^2} = 2\pi n.$$

1) H. Valerius, l. c.

Für das an der Gabel befestigte Ende muß außerdem $dy/dx = 0$ und $y = \alpha$ sein. Nach diesen Bedingungen sind in der Bewegungsgleichung

$$u = A\left(\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right) + B\left(\cos\frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right)$$
$$+ C\left(\sin\frac{mx}{l} + \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right) + D\left(\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right)$$

die Konstanten A, B, C, D zu bestimmen.

Nimmt man das feste Ende als Anfangspunkt der X-Achse, so wird für $x = 0$: $A = 0$ und $C = 0$. Für das Gabelende erhält man

$$-B(\sin m + \mathfrak{Sin}\, m) + D(\cos m - \mathfrak{Cof}\, m) = 0$$
$$B(\cos m - \mathfrak{Cof}\, m) + D(\sin m - \mathfrak{Sin}\, m) = \alpha,$$

woraus

$$B = \frac{\alpha(\cos m - \mathfrak{Cof}\, m)}{2(1 - \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)}$$
$$D = \frac{\alpha(\sin m + \mathfrak{Sin}\, m)}{2(1 - \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)}.$$

Hierdurch wird

$$u = \frac{\alpha}{2(1 - \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m)}\left\{(\cos m - \mathfrak{Cof}\, m)\left(\cos\frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right)\right.$$
$$\left. + (\sin m + \mathfrak{Sin}\, m)\left(\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right)\right\}.$$

Zunächst erkennt man hieraus, daß für das Ende $x = 0$ u immer Null ist, während für das Gabelende ($x = l$) u stets den Wert α erhält. Für die Werte von m, welche der Gleichung $1 - \cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m = 0$ genügen, d. h. für die natürlichen Perioden eines mit zwei festen Enden schwingenden Stabes wird $u = \infty$; in bezug hierauf gilt dieselbe Bemerkung wie beim ersten Fall, wo ein Ende des Stabes frei ist. Die Lage der Knoten wird bestimmt durch die Gleichung

$$(\cos m - \mathfrak{Cof}\, m)\left(\cos\frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right)$$
$$+ (\sin m + \mathfrak{Sin}\, m)\left(\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right) = 0.$$

Ist m eine Wurzel der Gleichung $\cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m = 1$, so stimmt diese Gleichung überein mit der die Knoten bei den Eigentönen bestimmenden Gleichung. Sobald also die Gabel-

periode gleich der einer Eigenschwingung des mit zwei festen Enden schwingenden Stabes ist, stimmt die Knotenlage der erzwungenen Schwingung überein mit der der Eigenschwingung des Stabes. Solange m unter 4,73, d. h. der ersten Wurzel der Gleichung $\cos m \,.\, \mathfrak{Cof}\, m = 1$ liegt, wird u/c auf der ganzen Länge des Stabes positiv, ein Knoten ist daher nicht vorhanden, ein solcher tritt erst am Gabelende auf, wenn $m = 4{,}73$ wird. Wächst m, so verschiebt sich der Knoten nach dem festen Ende zu. Die Lage der Knoten wird wie im vorhergehenden Falle bestimmt durch Berechnung der Funktionswerte u/c; ein Wechsel des Vorzeichens gibt die Knotenstelle genau an. Die Näherungswerte $5\pi/4m$, $9\pi/4m$ ... können hierbei als Ausgangspunkt für die Berechnung verwertet werden. Für einige Werte von m sind hiernach in der folgenden Tabelle die für die Knotenlagen in Betracht kommenden Größen von u/c berechnet worden; die Entfernung der Knoten zählt vom festen Ende $x = 0$.

1. $m = 5$. Ein Knoten. Näherungswert 0,785.

x	u/c
0,83	+ 0,01
0,832	− 1

Knotenlage 0,83.

2. $m = 7$. Ein Knoten. Näherungswert 0,561.

x	u/c
0,555	+ 10
0,56	− 25

Knotenlage 0,556.

3. $m = 9$. Zwei Knoten. Näherungswerte 0,436; 0,785.

x	u/c
0,434	+160
0,4378	− 6
0,789	−100
0,791	+ 0,2

Knotenlage 0,4377; 0,791.

4. $m = 10$. Zwei Knoten. Näherungswerte 0,3927; 0,707.

x	u/c
0,394	+ 60
0,395	− 70
0,70	− 300
0,707	+1000

Knotenlage 0,3945; 0,702.

Für $m = 12$ ergeben sich die Knotenlagen 0,329; 0,589 und 0,850. Um die Ergebnisse der Rechnung zu prüfen, wurden die vorher benutzten dünnen Glasstäbe an den Rand

einer gut geebneten dicken quadratischen Glasplatte festgekittet. Die Platte hat 25 cm Seitenlänge, ist 2 cm dick und ruht auf einem Eisendreieck, das durch drei Stellschrauben in vertikaler Richtung beweglich ist und eine wagerechte Einstellung der Platte ermöglicht. Der Stab wird rechtwinklig gegen die Plattenkante aufgekittet und der auf der Platte aufliegende Teil bis genau an den Rand mit einer Gipsschicht überdeckt. Das andere Ende des Stabes wird nicht direkt an der Gabel befestigt, weil in diesem Falle leicht Torsionsschwingungen auftreten, welche die Knotenlinien verzerren und eine Messung ganz unmöglich machen. Vielmehr wird an diesem Ende zunächst ein dünnes rundes Holzstäbchen (2 mm dick) quer gegen die Länge des Stabes aufgekittet und sodann eine Gabel in einem Abstand von etwa 4 cm über dem Stabende horizontal aufgestellt. Von der Gabelzinke reicht ein anderes Holzstäbchen vertikal herunter bis zur Mitte des erwähnten Querstückes am Stabende, wo es durch etwas Wachskitt befestigt wird. Damit ist eine starre Verbindung zwischen Gabel und Glasstab hergestellt. Die Knotenlinien bilden sich nun bei Erregung der Gabel gut aus und ihr Abstand von den Enden kann genau gemessen werden.

Es ergibt sich bei den Versuchen, daß die Lage der Knoten vollkommen übereinstimmt mit den theoretisch gewonnenen Resultaten; jeder Steigerung der Tonhöhe entspricht ein Vorwärtsschreiten der Knotenlinien nach dem festen Ende, so daß einer bestimmten Periode eine nur dieser Periode zukommende bestimmte Knotenfigur zukommt. In der folgenden Tabelle sind die Resultate mehrerer Versuche angegeben, die mit einem Stab von 230 mm Länge und 0,35 mm Dicke angestellt wurden. An dem einen Ende war der Stab an der Glasplatte befestigt, während das andere Ende auf die angegebene Weise mit der Stimmgabel in Verbindung stand. Der Grundton des an beiden Enden befestigten Stabes hat die Schwingungszahl 31,9, die Knoten zählen von der Glasplatte an. Die Bestimmung des Grundtones erfolgte auf graphischem Wege, indem man beide Enden des Stabes auf je einer dicken Glasplatte befestigte und an dem Stabe eine feine und leichte Schreibspitze anbrachte. Die Spitze schleift zugleich mit der einer Normalgabel ($n = 435$) auf einer vorher mit wenig Öl

befeuchteten und dann mit einer dünnen Lykopodium-Staubschicht versehenen, beweglichen Glasplatte. Die beiden Wellenkurven, die man auf der unter den Spitzen vorgezogenen Glasplatte erhält, lassen das Verhältnis der Schwingungszahlen erkennen. Auf 10 volle Wellen des Glasstabes kamen 136 Wellen der Gabel, daher ist die Schwingungszahl des Stabes

$$\frac{435}{13{,}6} = 3{,}19.$$

Folgende Knotenentfernungen ergaben sich, wenn das eine Ende des Stabes durch die Gabel erregt wurde:

Gabelton n	m	Knotenentfernung	Gabelton n	m	Knotenentfernung
140	9,91	90 168	292	14,81	64 115 166 218
256	18,4	67 122 175			
272	18,8	66 119 171	985	26,29	35 63,5 91 118,5 146 174 201

C. Erzwungene Longitudinalschwingungen.

Befestigt man dünne Stäbe von den erwähnten Dimensionen auf der Stirnfläche einer Gabelzinke derart, daß die Schwingungen der Gabel in der Richtung der Stablänge erfolgen, so werden durch die einwirkende periodische Kraft Longitudinalschwingungen in den Stäben erzwungen. Es ist indessen sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, reine Longitudinalschwingungen auf diese Weise herzustellen. Es treten hier dieselben Schwierigkeiten auf wie bei der Erzeugung der longitudinalen Eigentöne. In bezug auf diese hatte schon Savart[1]) bemerkt, daß sie begleitet werden von synchronen

1) F. Savart, Ann. d. chim. et phys. 32. p. 384. 1826.

Transversalschwingungen, welche in der Hauptsache die Lage der Knoten bestimmen, die man auf den schwingenden Stäben beobachten kann. Seine Beobachtungen waren zwar durchaus zutreffend, doch entbehrte seine Erklärung der hierbei auftretenden Erscheinungen der Einfachheit. Auf eine Bemerkung Seebecks hin unternahm es Terquem[1]), in einer ausgedehnten Untersuchung den Nachweis zu führen, daß zur Erklärung die Annahme der Koexistenz voller longitudinaler und transversaler Schwingungen vollkommen ausreiche.

Dasselbe gilt von den *erzwungenen* Longitudinalschwingungen, die meines Wissens bisher nicht beschrieben sind. Bringt man den Stab auf die angegebene Weise in solche Schwingungen, so zeigen sich ähnliche Erscheinungen, wie bei den Eigenschwingungen. Der aufgestreute Sand nimmt eine ganz andere Bewegung an, wie bei den Transversalschwingungen. Er wird nicht emporgeworfen und hüpft nicht, sondern gleitet auf der Oberfläche des Stabes entlang und sammelt sich in Knotenlinien an, welche die Länge des Stabes quer durchsetzen. Man erkennt leicht, daß der Sand sich von beiden Seiten nach diesen Linien hinschiebt, während andere Stellen auf dem Stabe auftreten, von denen der Sand sich nach entgegengesetzten Seiten hin fortbewegt.

Um die Verhältnisse genauer zu verfolgen, wird ein dünner Glasstab auf die beschriebene Weise an einer Gabel befestigt, deren Schwingungszahl unter dem niedrigsten Transversaleigenton des Stabes liegt. Das nicht an die Gabel anstoßende Ende des Stabes ist frei. Streut man jetzt feinkörnigen Sand auf die Stabfläche und erregt die Gabel, so wird mit großer Energie aller Sand von der Gabel nach dem freien Ende geschoben und fliegt über den Rand des Stabes hinaus. Kehrt man die Gabel mit dem Stabe um, so wandert der Sand nach dem Gabelende und verläßt auch hier, wenn kein Hindernis vorhanden ist, den Stab. Die eigentümlich schiebende Bewegung des Sandes läßt sofort erkennen, daß hier eine mit einer Transversalschwingung kombinierte Longitudinalbewegung des Stabes vorliegt. Beide Schwingungen gehören zur Klasse der erzwungenen. Wählt man nun eine

1) A. Terquem, Ann. de chim. et phys. 57. p. 129. 1859.

höhere Gabel, so bleiben die Verhältnisse so lange ungeändert, als der transversale Grundton des Stabes noch nicht erreicht ist. Sobald dieser Ton von der Gabel überschritten wird und infolgedessen in der Nähe des Gabelendes sich ein transversaler Knoten bildet, bemerkt man, wie der Sand von diesen Knotenstellen nach beiden Seiten bis zu den Stabenden fortgeschoben wird. Kehrt man den Stab um, so bewegt sich der Sand von beiden Enden nach der Knotenstelle hin, um hier liegen zu bleiben. Auf der Oberseite hat sich hiernach ein unbedeckter, auf der Unterseite ein bedeckter Knoten gebildet. Bei weiterer Erhöhung des Gabeltones verschiebt sich dieser Knoten, wie schon im ersten Teil gezeigt, nach dem freien Ende, immer auf der Oberseite durch eine unbedeckte, auf der Unterseite durch eine bedeckte Linie markiert. Die Bedeckung der Knoten ändert sich, sobald am Gabelende ein zweiter Transversalknoten auftritt, d. h. wenn der folgende Eigenton des Stabes erreicht ist. Auf der Oberseite wird der früher unbedeckte Knoten jetzt plötzlich ein bedeckter, während der neu auftretende Knoten unbedeckt ist. Auf der Unterseite sind die Verhältnisse umgekehrt. Es ist nicht schwer, für diese Erscheinungen die Erklärung zu finden. Nehmen wir an, daß am Gabelende in der ersten Hälfte der Schwingungsperiode der transversale Impuls nach unten gerichtet ist, während gleichzeitig die longitudinale Bewegung nach dem freien Ende zu geht. Die Schwingungsstrecke vom Gabelende bis zum nächsten Knoten werde positiv gerechnet, die folgende Strecke negativ. Da eine Bewegung des Sandes nur beim Aufwärtsschwingen der betreffenden Strecke erfolgt, so entsteht durch das gleichzeitige Auftreten von longitudinaler und transversaler Bewegung auf der Oberseite ein unbedeckter, auf der Unterseite ein bedeckter Knoten. Tritt nun ein zweiter Transversalknoten auf, so wird der Stab in drei Schwingungsstrecken geteilt, von denen die am Gabelende liegende wieder positiv, die mittlere negativ und die am freien Ende liegende positiv zu rechnen ist. Kombiniert man hiermit die Longitudinalbewegung, so wird auf der Oberseite der am Gabelende liegende Knoten unbedeckt, während der andere bedeckt wird. Auf der Unterseite kehren sich die Verhältnisse um. Es ist leicht zu erkennen, daß, da die am Gabelende liegende Schwin-

gungsstrecke immer positiv zu rechnen ist, der auf der Oberfläche diesem Ende zunächst liegende Knoten immer ein unbedeckter sein muß, die übrigen Knoten sind abwechselnd bedeckt und unbedeckt.

Diese Darstellung enthält insofern etwas Willkürliches, als über die Art der Kombination der beiden Bewegungen von vornherein nichts Sicheres ausgesagt werden kann. In der Tat könnte ebensowohl am Gabelende ein Transversalimpuls nach oben sich mit einer gleichzeitigen Longitudinalbewegung nach dem freien Ende verbinden. Dann würde am Gabelende immer ein bedeckter Knoten erscheinen. Welche von beiden Bildungen tatsächlich bei einem Stabe auftritt, das hängt im wesentlichen in noch nicht genau bestimmter Weise von der Struktur, den elastischen Kräften, sowie dem Anfangszustand ab, jedenfalls bleibt bei demselben Stabe die Art der Kombination für alle Töne konstant. Keineswegs selten kommt es auch vor, daß sich auf beiden Seiten des Stabes die gleiche Knotenkonfiguration zeigt, besonders wenn dünne und lange Stäbe gewählt werden, die sich leicht nach unten durchbiegen.

Ohne weiteres ist zu übersehen, wie die Verhältnisse sich gestalten werden, wenn die Tonhöhe weiter gesteigert wird. Immer wird, die erste Annahme vorausgesetzt, der am Gabelende liegende Knoten ein unbedeckter, im übrigen wechseln auf beiden Seiten bedeckte mit unbedeckten Knoten ab. Eine Änderung wird man erst erwarten können, wenn die Schwingungszahl der Gabel die der tiefsten Longitudinaleigenschwingung des Stabes erreicht oder übersteigt. Diese liegen im allgemeinen sehr hoch, daher wurden zu den Versuchen Gabeln benutzt, deren Schwingungszahl über 3000 lag, meist aber dienten zur Erregung der Schwingungen, wie eingangs erwähnt, prismatische Stahlstücke, die in einem schweren Schraubstock eingeklemmt wurden; die Stäbe wurden in diesem Falle horizontal auf die Stirnfläche aufgekittet.

Bevor die Schwingungsfiguren untersucht werden, welche bei so hohen Tönen auftreten, mögen einige Bemerkungen über die theoretische Behandlung des Problems voraufgeschickt werden.

Die X-Achse falle mit der Längsdimension des Stabes zusammen. Es sei dann x der Abstand eines Stabquer-

schnittes von dem einen Ende, der als Anfangspunkt gewählt wird. u sei die Verschiebung dieses Schnittes in der Richtung der Achse und T die durch diese Verschiebung auftretende, senkrecht zum Querschnitt auf die Flächeneinheit wirkende Kraft. Dann ist

$$T = E \cdot \frac{du}{dx},$$

da du/dx die Änderung der Längeneinheit in der Richtung der X-Achse darstellt. Gleichzeitig wird durch du/dx die Dichtigkeitsänderung in dem betreffenden Punkte angegeben. Wird die Querschnittsfläche mit q bezeichnet, so ist die gesamte auf die Fläche wirkende Kraft

$$E \cdot q \cdot \frac{du}{dx};$$

auf die benachbarte Schicht (Abstand $x + \delta x$) wirkt in entgegengesetzter Richtung die Kraft

$$E \cdot q \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \delta x \right),$$

daher ist die Kraft, welche auf die Stabscheibe wirkt, welche zwischen x und $x + \delta x$ liegt:

$$E \cdot q \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \delta x.$$

Da andererseits die Kraft gleich

$$\delta x \cdot \varrho \cdot q \cdot \frac{d^2u}{dt^2}$$

ist, wo ϱ die Dichtigkeit bedeutet, so erhält man als Bewegungsgleichung

$$\varrho \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = E \cdot \frac{d^2u}{dx^2},$$

oder wenn $E/\varrho = a^2$ gesetzt wird:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Hierzu kommen die Bedingungen an den beiden Enden des Stabes. An einem freien Ende ist keine Dichtigkeitsänderung vorhanden, also ist hier $du/dx = 0$. An dem anderen Ende wirkt eine periodische Kraft, der zufolge dieses Ende

eine Bewegung annimmt, deren Form durch $u = \alpha . \cos n a t$ dargestellt werden kann. Die Periode ist bestimmt durch

$$\tau = \frac{2\pi}{n . a},$$

wo a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Stabe bedeutet. Unter der Voraussetzung, daß der Stab synchron mit der erregenden Periode schwingt, kann $u = \xi . \cos n a t$ gesetzt werden; ξ ist die mit x veränderliche Amplitude. Die Bewegungsgleichung wird dann

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + n^2 . \xi = 0.$$

Als Anfangspunkt der X-Achse werde das freie Ende gewählt. Das allgemeine Integral der Gleichung lautet dann:

$$\xi = A . \cos n x + B . \sin n x.$$

Für $x = 0$ wird $d\xi/dx = 0$, daher $B = 0$.

Für $x = l$ wird $\xi = \alpha$, man erhält also $\alpha = A . \cos n l$, woraus

$$A = \frac{\alpha}{\cos n l}.$$

daher

$$\xi = \frac{\alpha}{\cos n l} \cdot \cos n x \quad \text{und} \quad u = \xi . \cos n a t.$$

Die Gleichung zeigt, daß für $x = l$ immer $\xi = \alpha$ ist, während für $x = 0$

$$\xi = \frac{\alpha}{\cos n l}$$

ist. Wenn $\cos n l = 0$, so wird ξ unendlich. Dieser Fall tritt ein, wenn $n . l$ ein Vielfaches von π ist, also

$$n = \frac{\varkappa . \pi}{2 l},$$

wo $\varkappa$ eine ungerade ganze Zahl ist. Die hieraus sich ergebenden Werte von n entsprechen aber den longitudinalen Eigentönen eines Stabes, der an dem einen Ende fest ist. Tatsächlich wird dann die Schwingungsamplitude, wenn auch nicht unendlich, so doch relativ groß.

Die Knoten werden bestimmt durch die Gleichung $\cos n x = 0$; hieraus folgt

$$n x = \frac{\varkappa \pi}{2}, \quad x = \frac{\varkappa \pi}{2 n},$$

wo wiederum $\varkappa$ eine ungerade ganze Zahl ist.

Man kann der Gleichung für ξ noch eine andere Form geben, wenn man die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, der Wellenlänge und der Schwingungszahl

$$N \cdot \lambda = a$$

benutzt. Nach dem oben Gesagten ist

$$n a = 2 \pi N; \quad n = \frac{2 \pi N}{a} = \frac{2 \pi}{\lambda},$$

daher

$$\xi = \frac{\alpha}{\cos \frac{2 \pi l}{\lambda}} \cdot \cos 2 \pi \frac{x}{\lambda} \cdot$$

Die Knoten liegen daher an den Stellen

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{3 \lambda}{4}, \quad \frac{5 \lambda}{4} \ldots$$

Ein Knoten kann aber nur auftreten, wenn λ den Wert $4 l$ nicht übersteigt, weil sonst der Abstand der Knoten vom freien Ende größer als l werden würde. Dieser Grenzwert entspricht dem longitudinalen Grundton des Stabes. Solange N tiefer ist als die Schwingungszahl dieses Eigentones, d. h. λ größer als $4 l$, entsteht kein Knoten. Wird dagegen N größer, so nimmt λ ab, und es treten Knoten auf, die bei Erhöhung des Tones gleichmäßig nach dem freien Ende des Stabes vorschreiten. Ist $\lambda = 2 l$, so liegt der Knoten bei $x = l/2$, d. h. in der Mitte des Stabes. Die Schwingung ist dann symmetrisch zur Stabmitte, am freien Ende $x = 0$ wird $\xi = - \alpha$, der Stab schwingt also wie ein frei-freier Stab im longitudinalen Grundton. Ein zweiter Knoten findet sich erst, wenn $\lambda \gtrless 4 l/3$. Für den Grenzwert $\lambda = 4 l/3$ liegt der erste Knoten bei $x = l/3$; dieser Fall entspricht dem ersten longitudinalen Oberton des frei-festen Stabes. Bei weiterer Tonerhöhung schieben sich beide Knoten nach dem freien Ende zu vor und nehmen für $\lambda = l$ eine Lage ein, wie sie dem zweiten Oberton eines frei-freien Stabes entspricht; ihre Entfernungen vom freien Ende sind nämlich in diesem Falle $l/4$ und $3 l/4$. In der Tat ist die Schwingung dann vollkommen symmetrisch, für $x = 0$ ist die Amplitude $\xi = \alpha$, also gleich der am befestigten Ende. Es ist nicht nötig, die Erörterungen über die Knotenlagen im einzelnen weiter zu führen. Die theoretischen Betrachtungen

ergeben, daß immer bei Tonerhöhung die Knoten sich nach dem freien Ende verschieben, und daß in der Reihe der erzwungenen Schwingungsformen sowohl diejenigen enthalten sind, welche den Eigentönen eines frei-freien Stabes als auch die, welche den Tönen des fest-freien Stabes entsprechen. Indessen besteht zwischen den Schwingungen in diesen beiden Fällen ein bemerkenswerter Unterschied. Wenn die Periode gleich der der Eigenschwingungen eines fest-freien Stabes ist, erhält die Amplitude einen maximalen Wert, während bei den den Eigenschwingungen eines frei-freien Stabes entsprechenden Perioden, wo

$$\cos \frac{2\pi l}{\lambda} = \pm 1 ,$$

die Amplitude auf der ganzen Stablänge, den Wert α nicht übersteigen kann.

Die Ergebnisse der Rechnung werden durch die Versuche bestätigt. Es ist eingangs schon auf die Schwierigkeiten hingewiesen worden, die bei den longitudinalen Eigentönen auftretenden Knoten sichtbar zu machen. Aber gerade das nicht zu vermeidende Auftreten von synchronen Transversalschwingungen gibt ein ausgezeichnetes Mittel ab, die longitudinalen Knoten zu erkennen. Wenn man nämlich bei der früher angegebenen Versuchsanordnung die Tonhöhe so weit steigert, daß dabei der Longitudinalgrundton des Stabes überschritten wird, so zeigen sich die durch Mitwirkung der Transversalschwingungen entstehenden eigentümlichen Knotenfiguren, welche Savart und Terquem bei den Eigentönen der Stäbe beobachtet und beschrieben haben. Während vor der Erreichung des Grundtones auf den beiden Seiten des Stabes abwechselnd bedeckte und unbedeckte Knoten auftreten, zeigt sich, daß nach Überschreitung des Grundtones auf der Oberseite die beiden dem Longitudinalknoten zunächst liegenden Transversalknoten bedeckt werden. Von diesen beiden Knoten folgen nach beiden Seiten hin die übrigen in der Weise, wie früher bereits beschrieben, d. h. bedeckte und unbedeckte Knoten wechseln regelmäßig ab. Auf der Unterseite bleiben beide dem Longitudinalknoten zunächst liegende Transversalknoten aus und für die übrigen Knoten ergibt sich dieselbe Reihenfolge wie vorher. Auch die umgekehrte Verteilung der

Knoten auf Ober- und Unterseite kann vorkommen. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

Ein dünner prismatischer Glasstab von 1 cm Breite, 0,4 mm Dicke und 240 mm Länge wird horizontal auf die Stirnfläche eines kurzen, dicken Stahlstückes gekittet, der vertikal fest in einen Schraubstock eingeklemmt wird. An der Seitenfläche des Stahlstückes wird ein keilförmig eingeschnittenes Korkstück, das etwas über den oberen Rand des Stahles hinausragt, aufgeklebt. Streicht man dieses Korkstück mit einem nassen Glasstab an, so lassen sich auf der Oberfläche des befestigten Stabes 29 Knoten unterscheiden. Die Entfernung zweier benachbarter Knoten in den mittleren Teilen des Stabes gibt zunächst ein Mittel an die Hand, die Schwingungszahl des Tones zu bestimmen. Nach dem Lissajousschen Näherungsverfahren, das Gripon zur Berechnung der Knotenlagen hoher Töne bei den erzwungenen Schwingungen einseitig-freier Stäbe angewandt hat, ergibt sich, wenn mit D die Größe eines solchen Internodiums bezeichnet wird,

$$m = \frac{\pi \cdot l}{D},$$

wo l die Stablänge ist und der Größe m dieselbe Bedeutung zukommt, wie früher. Die Schwingungszahl ist dann bestimmt durch

$$N = \frac{m^2 \varkappa \cdot b}{2 \pi l^2}.$$

In unserem Falle wird die Größe eines mittleren Internodiums gemessen zu 8,5 mm, daher $m = 88{,}7$. Wird ein Stab von derselben Dicke und Länge $l_1 = 96$ mm durch eine Stimmgabel von der Schwingungszahl $N = 243$ in erzwungene Transversalschwingungen versetzt, so war schon früher gezeigt, daß zwei Knoten auftraten, aus deren Lage $m_1 = 5{,}11$ sich ergab. Hiernach ist

$$N_1 = \frac{m_1^2 \varkappa \cdot l}{2 \pi l_1^2}$$

und

$$\frac{N}{N_1} = \frac{m^2 l_1^2}{m_1^2 \cdot l^2}$$

$$N = \frac{243 \cdot 88{,}7^2 \cdot 96^2}{5{,}11^2 \cdot 249^2} = 10500.$$

Bei dieser Schwingungszahl zeigte sich folgende Knotenlage auf der Oberfläche des Stabes.

Reihenfolge der Knoten	Entfernung vom freien Ende	Reihenfolge der Knoten	Entfernung vom freien Ende
2	10	17	137
4	27	19	154
6	43,5	21	171
8	60,5	23	188
10	77,5	25	205
12	94,5	27	222
14	111	29	238

Die angegebenen Knoten sind bedeckt, zwischen ihnen liegen die unbedeckten Knoten. Zwischen 111 und 137 liegen zwei aufeinanderfolgende unbedeckte Knoten, während auf der Unterseite diese beiden Knoten bedeckt sind. Die Störung der regelmäßigen Aufeinanderfolge von bedeckten und unbedeckten Knoten an dieser Stelle zeigt an, daß hier ein Longitudinalknoten sich befindet, dessen Lage zwar nicht genau, aber doch angenähert durch zwei ihn einschließende Transversalknoten angegeben werden kann. In diesem Falle ist dies der 15. und 16. Transversalknoten. Die Entfernung der Longitudinalknoten vom freien Ende liegt hiernach zwischen 120 und 128 mm, entspricht somit annähernd dem oben angegebenen Werte $\lambda = 2\,l$.

Erniedrigt man jetzt die Schwingungszahl des Erregers, indem man den Stahlstab etwas weiter aus dem Schraubstock herauszieht, so zeigt sich eine Schwingungsfigur von 28 Knoten, deren Lage in folgender Tabelle zusammengestellt ist:

Bedeckte Knoten auf der Oberfläche	Entfernung vom freien Ende	Bedeckte Knoten auf der Oberfläche	Entfernung vom freien Ende
1	8	16	134
3	19	18	151,5
5	36,5	20	169
7	54	22	186,5
9	72,5	24	204
11	90	26	221,5
13	107,5	28	238,5
15	125		

Die dieser Knotenfigur entsprechende Schwingungszahl berechnet man auf dieselbe Weise wie vorher zu $N = 9993$. Die Zahl der Transversalknoten hat sich um 1 vermindert, indem alle Knoten nach dem festen Ende zu sich verschoben haben und der letzte Knoten verschwunden ist. Dadurch haben sich aber, wie oben gezeigt, die Vorzeichen der einzelnen Schwingungsstrecken umgekehrt und es treten deshalb jetzt zwei aufeinanderfolgende bedeckte Transversalknoten auf der Oberfläche auf, außerdem werden in der Reihenfolge der Knoten diejenigen bedeckt, die vorher unbedeckt waren. Der Longitudinalknoten liegt in diesem Falle zwischen dem 15. und 16. Transversalknoten, in einer Entfernung von 125—134 mm vom freien Ende.

Erniedrigt man den Ton noch weiter, so treten bei einer bestimmten Schwingungszahl 26 Knoten auf, von denen auf der Oberfläche folgende bedeckt sind:

Knoten	Entfernung vom freien Ende	Knoten	Entfernung vom freien Ende
2	11,4	16	140,4
4	29,8	17	149,6
6	48,3	18	158,8
8	66,8	19	168
10	85,2	21	186,4
12	103,6	23	204,8
14	122	25	223

Hier finden sich vier aufeinanderfolgende bedeckte Knoten auf der Oberfläche, welche die regelmäßige Abwechselung von bedeckten und unbedeckten Knoten unterbrechen; während anfangs die geraden Knoten bedeckt sind, sind es später die ungeraden. Der Longitudinalknoten liegt in diesem Falle zwischen dem 17. und 18. Transversalknoten, also in einer Entfernung von 149—158 mm vom freien Ende. Die nach der angegebenen Methode berechnete Schwingungszahl ist 8960. Legt man als Knotenentfernung etwa 153 mm zugrunde, vergleicht hiermit den im ersten Falle auftretenden Ton, für den man als Knotenentfernung 126 mm annimmt, so müssen sich

die Schwingungszahlen umgekehrt verhalten wie die Abstände der Knoten vom freien Ende. Man erhält dann

$$N_1 = \frac{10500 \cdot 126}{153} = 8860.$$

Die drei angeführten Beispiele lassen das Fortschreiten des Longitudinalknotens nach dem festen Ende deutlich erkennen, und es ist leicht, bei weiterer Tonerniedrigung die Schwingungsverhältnisse bis zu dem Punkte zu verfolgen, wo der Longitudinalknoten bis zum Gabelende vorgerückt ist. Ebensowohl gelingen die Versuche, wenn höhere Töne benutzt werden; man kann in diesem Falle das Vorschreiten des Knotens nach dem freien Ende noch bis zum Überschreiten des zweiten Longitudinalobertones, wo also zwei Knoten auftreten, gut beobachten. Dagegen begegnet man einigen Schwierigkeiten, wenn die Schwingungszahl noch weiter gesteigert wird; die Knoten bilden sich nicht mehr so gut aus und die Beobachtung wird daher weniger sicher.

Für diese hohen Töne empfiehlt sich außer den Glasstäben auch die Verwendung von Kartonstäben, falls diese eine gleichmäßige Struktur haben. Oft genug tritt aber gerade bei diesen die störende Nebenwirkung von Torsionsschwingungen auf, welche eine Ablesung unmöglich machen. Die Bildung von mehr als zwei Longitudinalknoten ist auch hier nur schwer zu erreichen.

Für die vorliegende Untersuchung bemerkenswert ist eine Beobachtung Terquems[1]) über die longitudinalen Eigenschwingungen. Er hebt ausdrücklich hervor, daß eine gleichmäßig andauernde Bewegung des Stabes nicht möglich ist, wenn die Perioden der longitudinalen und transversalen Schwingung völlig übereinstimmen. Eine solche kommt vielmehr erst zustande, wenn die beiden Töne einen wenn auch geringen, so doch merklichen Unterschied aufweisen. Nach dem oben Gesagten wird man die eine Schwingung als eine erzwungene ansehen müssen, die mit der anderen natürlichen synchron verläuft. Dies wird auch bestätigt durch die weitere Bemerkung Terquems, daß, wenn durch passende Wahl und allmähliche Änderung der Stablänge der Longitudinalton, der

1) l. c.

fangs unter einem bestimmten Transversalton lag, über[illegible]r
esen hinausgeht, beim Überschreiten des Einklanges dann au[illegible]f
er einen Fläche die Knotenlinien erscheinen, die früher de[illegible]r
anderen angehörten und umgekehrt. Das deckt sich mit de[illegible]n
Erscheinungen, die wir oben beschrieben haben.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind folgende:

1. Jeder Stab läßt sich bei genügender Stärke der ei[illegible]-
wirkenden periodischen Kraft in erzwungene Transversal-
schwingungen versetzen, sowohl wenn das eine Ende fest, als
auch wenn es frei ist.

2. Die bei diesen Transversalschwingungen auftretenden
Knoten schreiten bei Erhöhung des Tones vom Gabelende fort.

3. Jeder Periode entspricht nur *eine* bestimmte Lage und
Zahl der Knoten. Zwischen den einzelnen Konfigurationen,
in deren Reihe auch die den Eigentönen des Stabes ent-
sprechenden Knotenfiguren enthalten sind, findet bei stetiger
Veränderung der Periode ein ebenfalls stetiger Übergang statt.

4. Stäbe können auch gezwungen werden, longitudinal
Schwingungen beliebiger Periode auszuführen, doch werden
diese immer von synchronen Transversalschwingungen
gleitet, welche im wesentlichen die auf der Oberfläche
tretenden Knoten bestimmen. Die Knoten sind abwech
bedeckt und unbedeckt.

5. Die durch die Störung der regelmäßigen Fol
bedeckten und unbedeckten Knoten sich bemerkbar mac
Longitudinalknoten verschieben sich bei Erhöhung
regungstones nach dem freien Ende und nehmen da
die Lagen ein, welche den longitudinalen Eigenschw
sowohl frei-freier als auch fest-freier Stäbe entsprec

Charlottenburg, Januar 1904.

(Eingegangen 17. Januar 1904.)

9. *Objektive Darstellung von Stromkurven mit der Braunschen Röhre;* von J. Zenneck.

In Band 12 dieser Annalen p. 373 und 803 veröffentlicht Hr. F. Wittmann unter anderem Stromkurven der Eigenschwingungen von Kondensatorkreisen, die er mit Hilfe eines Oszillographen photographiert hat. Die Wechselzahl der Schwingungen bewegt sich zwischen ca. 400 und 800/sec. In der Einleitung zu seiner Abhandlung behauptet Hr. Wittmann, es hafte der Braunschen Röhre der Mangel an, „daß man bei der geringen Lichtintensität des sich schnell bewegenden Kathodenfleckes mit den heutigen Hilfsmitteln auf eine objektive Darstellung der Erscheinung" — gemeint sind Stromkurven, wie Hr. Wittmann sie nachher bringt — „verzichten muß".

Das ist unrichtig. Zum Beweis sind in den Figg. 1—3 photographisch aufgenommene Schwingungskurven von Kondensatorkreisen wiedergegeben, die nach der von mir in Wied. Ann. **69.** p. 838. 1899 beschriebenen Methode[1]) mit Hilfe der Braunschen Röhre hergestellt sind. Die Wechselzahl der Schwingung in Fig. 1 ist ca. 400/sec, derjenigen in Fig. 2 620/sec und derjenigen in Fig. 3 1800/sec.[2])

1) Für den vorliegenden Zweck kommen nur solche Anordnungen in Betracht, bei denen die Kurve auf dem Schirm der Braunschen Röhre oder im rotierenden Spiegel sich *in genau derselben Weise mehrmals wiederholt.* Das ist, abgesehen von der hier verwendeten Anordnung, der Fall bei den Methoden von E. E. Seefehlner, Zeitschr. f. Elektrotechnik (Wien), 1900, Heft 1, 2, 4, 5, 38, 40, (mir nicht zugänglich, Hinweis darauf in der Elektrotechn. Zeitschr. **22.** p. 554. 1901); A. Weinhold, Elektrotechn. Zeitschr. 22. p. 409. 1901; H. Th. Simon u. M. Reich, Physik. Zeitschr. 2. p. 284—291. 1900. Alle diese Abhandlungen scheinen Hrn. Wittmann entgangen zu sein.

2) Die Figg. 2 u. 3 sind die Kurven des Primärstromes eines 30 cm-Induktors der A.E.G. bei Stromunterbrechung; parallel zur Unterbrechungsstelle lag ein Kondensator von 4,9 Mikrof. In Fig. 2 war die

Die Sauberkeit der Kurven, wenigstens auf den Negativen, läßt kaum etwas zu wünschen übrig. Die Anordnung, welche zu ihrer Darstellung nötig ist, ist keineswegs kompliziert. Die Methode eignet sich, da die Kurve als helle, feststehende Linie auf dem Schirm erscheint, sehr gut zur Demonstration. In keiner dieser Beziehungen scheint mir demnach die Methode der von Hrn. Wittmann vorgeschlagenen nachzustehen. In einer Beziehung ist aber die Verwendung der Braunschen Röhre entschieden günstiger als diejenige eines Oszillographen: in der Genauigkeit der Wiedergabe. Daß das Kathodenstrahlenbündel in dem Gebiet, in welchem die Braunsche Röhre überhaupt ver-

Fig. 1.

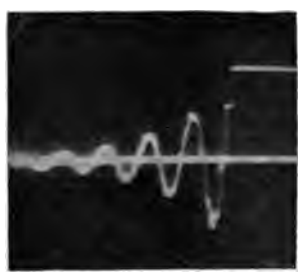


Fig. 2.

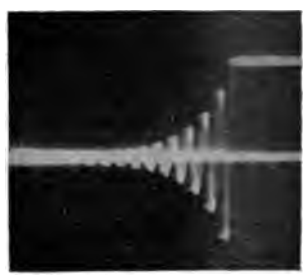


Fig. 3.

wendet werden kann, eine merkliche „Trägheit“ nicht hat, demnach die Angaben der Braunschen Röhre unbedingt zu-

---

Sekundärspule des Induktors offen; es sind deshalb den Hauptschwingungen des Primärkreises superponiert Schwingungen höherer Wechselzahl und sehr geringer Amplitude, welche von der Rückwirkung der Eigenschwingungen der Sekundärspule auf den Primärkreis herrühren. In Fig. 3 war die Sekundärspule durch einen Draht kurzgeschlossen.

verlässig sind, ist von F. Braun mit Recht als besonderer Vorteil seiner Röhre betont worden.[1]) Wie weit aber ein Oszillograph, der eine Schwingungszahl von ca. 1700/sec und keine besonders geringe Dämpfung besitzt[2]), die Form einer elektromagnetischen Schwingung von 800 Wechseln richtig wiedergibt, hängt sehr von den Umständen ab.

Strassburg i. Els., Physik. Institut.

1) F. Braun, Wied. Ann. **60.** p. 552 ff. 1897.
2) Vgl. Fig. 4 in Hrn. Wittmanns erster Abhandlung l. c. p. 376.

(Eingegangen 25. Dezember 1903.)

10. *Die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke;* *von J. Zenneck.*

Die Amplitude $\mathfrak{A}$ der Eigenschwingung von Kondensatorkreisen kann durch eine Exponentialfunktion der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \cdot e^{-\mathfrak{d}\left(\frac{t}{T}\right)} \tag{1}$$

($\mathfrak{d}$ = Dekrement, T Periode einer ganzen Schwingung, t Zeit) nur dann ausgedrückt werden, wenn der Energieverbrauch pro Zeiteinheit dem Quadrat der momentanen Stromstärke proportional ist. Für die Annahme, daß dies bei dem Energieverbrauch in der Funkenbahn zutrifft, daß dieser in derselben Beziehung zur momentanen Stromstärke stehe wie der Energieverbrauch in Metalldrähten, ist kein Grund vorhanden. Wenn also bei Berechnungen gewöhnlich auch für Kondensatorkreise mit Funkenstrecke — solche werden praktisch ja doch fast ausschließlich verwendet — die Gültigkeit von Gleichung (1) vorausgesetzt wird, so kann zugunsten dieser Voraussetzung abgesehen von ihrer Bequemlichkeit für die Berechnung nur angeführt werden, daß man die Funktion, welche die Abnahme der Amplitude richtig darstellt, zurzeit nicht kennt.

An experimentellen Untersuchungen, aus denen man sich ein Urteil über die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke bilden könnte, kommt, soweit mir bekannt ist, nur in Betracht die Arbeit von F. Richarz und W. Ziegler.[1]) Es scheint nach ihr, daß die Amplitudenkurve bei den untersuchten Kondensatorkreisen eine Gerade, nicht eine Exponentialkurve der Form von Gleichung (1) ist. Da es indes den Verfassern nur darauf ankam, eine Methode zur Demonstration anzugeben, so sind die Kurven nur nach

1) F. Richarz u. W. Ziegler, Ann. d. Phys. 1. p. 468. 1901. — Zweifel daran, ob Gleichung (1) bei Oszillatoren mit Funkenstrecken erfüllt ist, sind schon häufig geäußert worden, z. B. von V. Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 74. 1891.

dem Aussehen im rotierenden Spiegel gezeichnet; ob die Ablenkung des Lumineszenzfleckes dem Strom in der Ablenkungsspule proportional war[1], ist nicht untersucht. Eine einwurfsfreie Entscheidung der Frage, ob auch bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke die Amplitudenkurve eine Exponentialkurve der Form Gleichung (1) ist oder nicht, kann demnach wohl in jener Untersuchung, die auch gar nicht diesen Zweck hatte, nicht gesehen werden.

1. Auf eine Methode, welche zur Prüfung dieser Frage bis zu Wechselzahlen von ca. 10^6/sec sehr bequem, bis zu Wechselzahlen von ca. 10^6/sec wenigstens noch verwendbar ist, habe ich früher hingewiesen.[2] Ich habe mit dieser Methode die Eigenschwingungen einer Anzahl von Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke untersucht. Da sich qualitativ in allen Fällen dasselbe ergab und mir eine systematische quantitative Untersuchung der ganzen Frage gegenwärtig nicht möglich ist, so gebe ich im folgenden die Resultate von drei Beispielen an.

a) Kapazität 1540 cm, Selbstinduktionskoeffizient $0{,}48 \cdot 10^9$ cm, Wechselzahl demnach ca. $1{,}1 \cdot 10^4$/sec, Funkenlänge ca. 3 mm zwischen Zinkkugeln von 1,5 cm Durchmesser, Widerstand des Kreises bei konstantem Strom 60 Ohm.[3]

Als Amplitudenkurve ergab sich Kurve A_1 in der nebenstehenden Figur; die auf dem Negativ gemessenen Amplituden sind durch Kreuze markiert. In Kurve B_1 ist der natürliche Logarithmus δ des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Amplituden (entgegengesetzter Richtung) dargestellt. Die durch kleine Kreise markierten Punkte sind aus den beobachteten Werten der Amplitudenkurve berechnet.

b) Kapazität, Selbstinduktionskoeffizient, Funkenstrecke wie in a), außerdem aber ein $CuSO_4$-Widerstand von

---

1) Das Kathodenstrahlenbündel war durch eine einzige unter der Braunschen Röhre befindliche Spule abgelenkt worden.

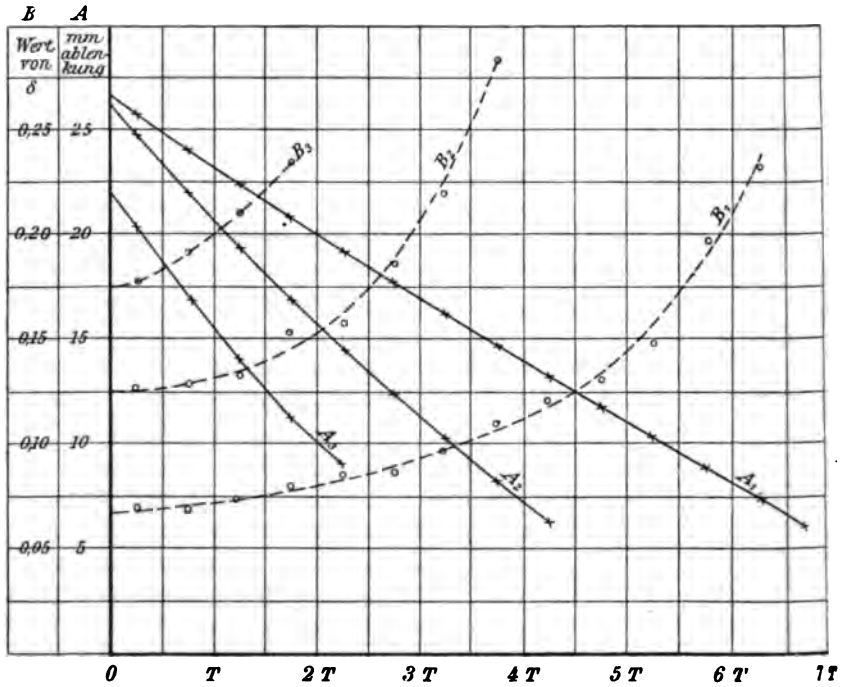
2) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 7. p. 801. 1902.

3) Die Rayleighschen Formeln für den Widerstand von Drähten bei oszillatorischem Strom gelten für eng gewickelte Spulen nicht (vgl. A. Battelli u. L. Magri, Phil. Mag. (6) 5. p. 28. 1903); der Widerstand von solchen bei oszillatorischem Strom kann deshalb nicht ohne weiteres berechnet werden.

ca. 80 Ohm eingeschaltet. Amplitudenkurve: Kurve A_1. Kurve von δ: Kurve B_2.

c) Kapazität 1540 cm, Selbstinduktionskoeffizient 8.10^6 cm, Wechselzahl demnach ca. $0{,}9.10^5$/sec, Widerstand ca. 4,9 Ohm bei stationärem Strom [1]), Funkenlänge ca. 1,5 mm.

Die Untersuchung lieferte als Amplitudenkurve die Kurve A_3, als Kurve für δ die Kurve B_3.



2. Ob die Ablenkung des Lumineszenzfleckes der Braunschen Röhre dem Strom in den Ablenkungsspulen proportional ist, wurde kontrolliert. Für die bei dem Versuch **1.** c) benutzten Spulen war dies schon durch M. Varley [2]) geschehen: er hatte gefunden, daß die Ablenkung bei Schwingungen etwa derselben Wechselzahl wie oben entweder genau dem Strom proportional ist oder höchstens minimal davon abweicht.

1) Vgl. hierzu Anm. 3 auf p. 823.

2) M. Varley, Inaug.-Diss. Straßburg 1901; Phil. Mag. (6) 3. p. 500. 1902.

Bei den Spulen, welche in **1.** a) und **1.** b) Verwendung fanden, wurde die Ablenkung in ihrer Abhängigkeit von dem Strom in den Spulen bestimmt. Es ergab sich bei stationärem[1]) Strom:

Strom in Amp.	Ablenkung in mm[2])	mm Ablenkung / Amp. Strom
0,036s	7,3s	201
0,064s	13,2s	205
0,108	22,2s	206
0,146	30,0s	206
0,209	42,4s	203

Wenn also eine geringe Abweichung von der Proportionalität wirklich vorhanden ist, so beträgt sie sicher nicht mehr als ca. 2,5 Proz.

Daran also, daß die Kurven A_1 bis A_3 die Werte der Amplituden bis auf etwa 2,5 Proz. richtig darstellen, kann nicht gezweifelt werden.

3. Die drei Beispiele in **1.** zeigen das Gemeinsame, daß *die Amplitudenkurven nicht Exponentialkurven sind, wie sie aus Gleichung (1) folgen müßten;* sie nähern sich in ihrer Form mehr oder weniger stark einer Geraden.[3]) Die Folge davon ist, daß *das Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden nicht annähernd konstant ist, sondern mit abnehmender Amplitude anfangs langsam, dann rasch zunimmt.*

Will man also unter diesen Umständen von einem „Funkenwiderstand" sprechen, so wäre das Resultat, daß derselbe nicht einmal während des Verlaufs einer Schwingung konstant ist, sondern mit abnehmender Amplitude anfangs langsam, dann rasch wächst.

4. Es liegt nahe, zu versuchen, die Amplitudenkurven A_1, A_2, A_3 durch eine Beziehung mit zwei Konstanten der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \cdot e^{-\left[b_1\left(\frac{t}{T}\right) + b_2\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]} \tag{2}$$

darzustellen.

---

1) Daß die Verhältnisse bei Schwingungen so niedriger Wechselzahl merklich anders liegen, muß als ausgeschlossen betrachtet werden.

2) Auf dem Negativ gemessen.

3) Die von Richarz und Ziegler l. c. angegebenen Amplitudenkurven sind also wohl qualitativ richtig.

Man erhält

für Kurve	A_1 [1])	$\delta_1 = 0{,}101$,	$\delta_2 = 0{,}0161$,
„ „	A_2 [2])	$\delta_1 = 0{,}203$,	$\delta_2 = 0{,}030$,
„ „	A_3 [3])	$\delta_1 = 0{,}331$,	$\delta_2 = 0{,}058$.

Die Gleichung (2) gibt mit diesen Konstanten die Amplitudenkurven mit etwa derselben Genauigkeit wieder, welche für die Messungen überhaupt in Anspruch genommen werden kann.[4])

5. Denkbar wäre es, daß die Schwingung, wenn die Amplitude einmal relativ klein, der Funken„widerstand" groß geworden ist, „abreißt", d. h. die Amplitudenkurve extrem rasch auf Null abfällt. Bei den von mir untersuchten Schwingungen, die ein Urteil darüber gestatteten, war es nicht der Fall, zum mindesten nicht, ehe die Amplitude auf $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ des Anfangswertes herabgesunken ist.

Straßburg i. E., Physik. Institut.

---

1) Aus $t = 0$, $t = 3\,T$, $t = 6\,T$ berechnet.

2) Aus $t = 0$, $t = 2\,T$, $t = 4\,T$ berechnet.

3) Aus $t = 0$, $t = T$, $t = 2\,T$ berechnet.

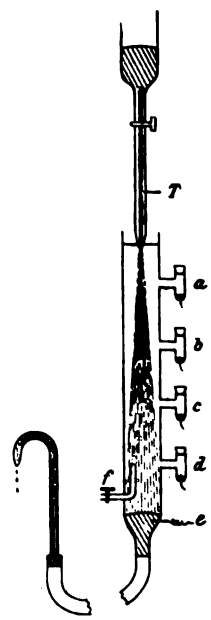
4) Diese Genauigkeit ist übrigens keineswegs so gering, wie es vielleicht nach den von mir l. c. angegebenen Figuren, die durch die Reproduktion stark gelitten haben, scheinen könnte. Um die Genauigkeit derartiger Messungen zu prüfen, machte ich von derselben Schwingung (n = ca. 10^6/sec) zwei Aufnahmen, änderte aber bei der einen durch Auseinanderziehen der Ablenkungsspulen die Ablenkung etwas. Die Ausmessung der Negative ergab der Reihe nach folgende Werte für δ:

1. Aufnahme	2. Aufnahme
$\delta = 0{,}178$	$\delta = 0{,}176$
0,191	0,192
0,209	0,207
0,232	0,223

(Eingegangen 25. Dezember 1903.)

11. *Zu den kapillarelektrischen Bewegungen und über einen Strom im offenen Element; von Jean Billitzer.*

Vor kurzem beschrieb Hr. Christiansen[1]) in diesen Annalen neben einigen kapillarelektrischen Bewegungen auch einige Versuche über die Ablenkung fallender Quecksilbertropfen in einem elektrischen Stromgefälle. Da es bei oberflächlicher Betrachtung scheinen könnte, als stellten diese Versuche die Unzweideutigkeit der von mir kürzlich[2]) beschriebenen Überführungen kolloidaler Metalle, Stromerzeugungen durch fallende Metallteilchen in Lösungen ihrer Salze etc. in Frage, sehe ich mich veranlaßt, schon an dieser Stelle einige Experimente zu beschreiben (deren ausführlichere Publikation a. a. O. erfolgen soll), die unzweideutig darlegen, daß bei den von Hrn. Christiansen beobachteten kapillarelektrischen Bewegungen ganz andere Momente mitspielen, als bei der Bewegung kolloidaler Metalle etc.



1. Bei einer Wiederholung einiger von Hrn. Palmaer mitgeteilter Versuche[3]) beobachtete ich gewisse Erscheinungen, welche die Vermutung erweckten, daß von einer Tropfelektrode zu dem unten sich ansammelnden Quecksilber auch im offenen Element eine Elektrizitätsbewegung stattfinde.

Dies überraschende Phänomen näher zu untersuchen, ließ ich die Tropfelektrode in einer Röhre spielen, deren Gestalt der obenstehenden Figur zu entnehmen ist. Der untere Teil des Apparates und der Ansätze *a b c d* wurde mit Quecksilber,

1) C. Christiansen, Ann. d. Phys. 12. p. 1072. 1903.
2) J. Billitzer, Ann. d. Phys. 11. p. 902. 1903.
3) W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. 25. p. 265. 1898.

ann das ganze Gefäß und die Elektrodenansätze mit einer ösung beschickt. Hatten die Elektroden *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *T* alle gleiches Potential, so wurde jetzt die Tropfelektrode in Gang gesetzt und die gleichzeitig auftretenden Potentialdifferenzen zwischen *a*, *b*, *c* und *d* mit Hilfe eines hochempfindlichen Nernst-Dolezalekschen Elektrometers gemessen.

Da zeigte es sich zunächst, *daß die fallenden Tropfen einen konstanten Potentialabfall im Rohre* erzeugten, d. h. *daß von der Tropfelektrode zu dem unten sich ansammelnden Quecksilber ununterbrochen ein Strom fließt, ohne daß beide Quecksilbermassen miteinander verbunden wären.*[1]) Dabei bewegt sich immer die positive Elektrizität im Sinne der fallenden Tropfen und nur in konzentrierten Cyankaliumlösungen kehrt sich der Sinn des Potentialgradienten um.[2]) So war beispielsweise in:

KCl an HgCl *gesättigt* mit überschüssigem HgCl	$HgNO_3$ verdünnt	KCN konz.
a|*b* −0,004 Volt	−0,002 Volt	+0,001 Volt
a|*c* −0,009 „	−0,005 „	+0,002 „
a|*d* −0,012 „	−0,008 „	+0,004 „

Die Potentialdifferenzen ändern sich kaum, wenn die Flüssigkeit im Rohre während des Versuches durch einen Wasserstoffstrom gerührt wird, den die Ansatzröhre *f* eintreten läßt, und sofort sieht man sie verschwinden, wenn das Tropfen eingestellt wird.

In den einzelnen Teilen der Röhre ist der Potentialabfall proportional dem Widerstande. Er wuchs beispielsweise zwischen *b* und *c* auf das Vierfache, als eine zwischen *b* und *c* verengte Röhre benutzt wurde, deren Widerstand in diesem Intervalle annähernd viermal so groß war, wie zwischen *a* und *b* oder *c* und *d*. Durch jeden Querschnitt findet also eine gleiche Elektrizitätsbewegung statt. Dasselbe Verhältnis herrscht auch vor, wenn man in derselben Röhre von einer Lösung zu einer anderen übergeht, gegen welche Hg dieselbe Potentialdifferenz aufweist, deren Leitfähigkeit aber eine andere ist.

---

1) Die Messungen wurden mit einem Elektrometer vorgenommen, um jede Verbindung auszuschließen. Mit einem Galvanometer beobachtet man Ströme der Größenordnung 10^{-6} bis 10^{-5} Amp.

2) Hier und im folgenden heißt *a*|*b* −, daß die negative, *a*|*b* + daß die positive Elektrizität durch das Galvanometer von *a* nach *b* fließt.

2. Größe und Sinn dieser Potentialdifferenzen, ihr nahe linearer Abfall im Rohre, wie das Beispiellose eines stetigen Potentialgradienten in einem offenen Elemente erweckten die Vermutung, daß es sich hier um eine ganz neue Erscheinung handle, welche mit der bekannten Stromerzeugung der abfallenden Teilchen in Lösungen ihrer Salze nichts zu tun hat. Und diese Vermutung wurde zur Gewißheit, als es sich zeigte, daß der Potentialgradient im Rohre sich *momentan umkehrt*, wenn man T mit e während des Tropfens durch eine metallische Leitung verbindet. So fand ich z. B.:

Lösung $HgNO_3$ äußerst verdünnt.

	a/d
T mit e durch Draht verbunden . .	+0,020 Volt
Verbindung geöffnet	−0,006 „
Wieder verbunden	+0,020 „
Wieder geöffnet	−0,006 „

etc.

Stellt man die Verbindung durch einen regulierbaren Widerstand her, so erhält man innerhalb der gegebenen Grenzen jede beliebige Potentialdifferenz.

	a/d
T mit e durch Draht verbunden . .	+0,020 Volt
Durch 1000 Ω	+0,009 „
Durch 1500 Ω	+0,003 „
Durch 3000 Ω	−0,002 „

Und viele weitere Beobachtungen bestätigten die ersten. Obgleich also Quecksilber in Merkuronitrat zweifellos den positiven Teil der Doppelschicht trägt, erzeugt es bei der Verbindung von T mit e einen Strom, in welchem die positive Elektrizität von a nach d fließt.

Alles hier verhält sich anders, als man gewohnt ist, so sehr zwar, daß man ungläubig bleiben möchte, spräche nicht die Größe der Effekte gegen die Möglichkeit eines Irrtums.

Die Versuchsbedingungen schließen selbst jede Erklärung aus, welche die Ursache der Elektrizitätsbewegung in einer Konzentrationsänderung suchen wollte, nicht minder aussichtslos erscheint es, die Vorgänge durch Verschiebungen der

Doppelschicht etc. mit Bekanntem in Verbindung zu bringen und so reizt das Rätselhafte dieser Erscheinungen zu neuen Konjekturen, das Movens der Elektrizitätsbewegung aufzuspüren, und ihren Ursprung zu verstehen. Indem sich dabei die Aufmerksamkeit vorzugsweise auf alles lenkt, was vielleicht bisher wenig beachtet worden ist, fällt es auf, daß im betrachteten Systeme ein Faktor eine sprungweise Änderung erfährt: die Oberflächenspannung, und vielleicht kann diese Beobachtung einen Weg durch das Wirrsal bahnen, dem wir gegenüberstehen.

3. Wir wissen ja, daß die Tropfelektrode dem Punkte zustrebt, in welchem Quecksilber die größte Oberflächenspannung besitzt. In der Tat muß sich nach dem Prinzipe der kleinsten Wirkung an ihr ein Zustand herstellen, welcher die aufgezwungene Oberflächenvergrößerung möglichst erschwert.

Wie aber allgemein der Dampfdruck einer Flüssigkeit wächst, wenn ein Druck auf ihre Oberfläche allein ausgeübt wird, muß auch der Dampfdruck, mithin auch die Lösungstension des Quecksilbers zunehmen, wenn seine Oberflächenspannung wächst[1]), gerade als wäre ein Druck auf seine Oberfläche allein ausgeübt worden, ein Fall, den bekanntlich Des Coudres[2]) experimentell realisiert hat.

Der geschlossene Strahl der Tropfelektrode besitzt mithin eine größere Lösungstension wie ruhendes Quecksilber und die Zusammenflußelektrode ist in der Regel edler wie dieses. Damit ist zunächst nur eine Verschiedenheit des Potentialsprunges an der Tropf- und Zusammenflußelektrode gegeben, jetzt lösen sich aber fortwährend metallische Teilchen von der unedleren (der Tropf-) Elektrode los und gelangen durch den Elektrolyten zum edleren (dem zusammenfließenden) Metalle und jeder dieser abfallenden Tropfen ist ein Träger elektrischer Ladungen, denn an jedem bildet sich eine elektrische Doppelschicht aus. Im Momente, da er sich vom geschlossenen Strahle abtrennt, besitzt er das Potential der Tropfelektrode,

---

1) Dieser Satz, der für die Theorie der Elektrokapillarität wichtig ist, wird in der ausführlichen Mitteilung exakter bewiesen werden.

2) Th. Des Coudres, Wied. Ann. 46. p. 292. 1892.

ist also negativer (unedler) wie ruhendes Quecksilber, und da wir durch frühere Betrachtungen (l. c.) dazu geführt werden, anzunehmen, daß die Doppelschicht dissoziiert ist, besitzt er eine kleine überschüssige negative Ladung bez. eine positive, die kleiner ist wie die des ruhenden Metalles.[1]) Die Folge ist aber, daß die mit Ladungen behafteten Tropfen beim Übergange von der einen Elektrode zur anderen einen Teil der Potentialdifferenz, die sie gegeneinander aufwiesen, in den Zwischenraum zwischen ihnen verlegen, einen Potentialgradienten in der Lösung erzeugen, deren Sinn nur davon abhängt, welche von beiden Elektroden die edlere, welche die unedlere ist. In der Regel ist die Tropfelektrode die unedlere, dann ist auch immer im offenen Systeme der untere Teil der Röhre positiv gegen den oberen, also d/a +, nur in konzentrierten CNK-Lösungen kehrt sich das Verhältnis um, die Tropfelektrode wird die edlere und jetzt ist d/a —.

Ist der Tropfen positiv, so schlagen sich Merkurionen auf ihm nieder, ist er negativ, so bilden die Merkurionen den äußeren Belag der umhüllenden Doppelschicht, in jedem Falle wird also ein Ionentransport durch die Lösung stattfinden. Natürlich können aber am Ende des Versuches keine freien Elektrizitäten an den Enden des Apparates zurückbleiben, und nun der Potentialgradient solange besteht, als die Tropfelektrode in Gang bleibt, müssen sich die +Ionen unten wohl konstant entladen, etwa durch eine chemische Einwirkung auf die Lösung, indem sich z. B. Merkuronitrat bildet und ungeladener Wasserstoff in Freiheit gesetzt werden kann, oder durch die Mitwirkung gelösten Sauerstoffs etc.

Ein wichtiger Unterschied dieser Auffassungsweise von den früheren liegt darin, daß hier auf einen *Ionen*transport geschlossen wird, während man bisher von einer Überführung des Quecksilber*salzes* sprach. Obwohl diese Deutung noch als eine vorläufige bezeichnet werden mag, scheint sie durch die Beobachtung Palmaers[2]), daß die Strahlelektrode mehr Merkur-

---

1) Auch die Helmholtzsche Vorstellung der Doppelschicht führt zum selben Schlusse, nur daß hier die Ladung erst bei der Bewegung frei wird.

2) W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. 28. p. 277. 1899.

ionen als Anionen (0,044 : 0,017!) mit hinabführt, schon eine sichere Stütze zu erhalten. Natürlich wird Rückdiffusion von + Ionen Hinüberwandern von — Ionen den Effekt mildern, so daß auch Salz übergeführt wird; was wir hier gemessen haben, ist aber die Differenz beider Faktoren.[1])

4. Verbinden wir T mit e durch einen Draht, so wird T minder unedel gegen e, aber es besteht die Tendenz, bei T im Maße der Oberflächenvergrößerung + Ionen abzuspalten, bei e wieder niederzuschlagen (bez. wenn die Tropfelektrode + gegen die Lösung ist, weniger + Ionen bei T als bei e niederzuschlagen). Wir haben also jetzt das genaue Analogon eines geschlossenen galvanischen Elementes vor uns, in welchem T den Zink-, e den Kupferpol vorstellt. Führt man zwei Sonden ein, so verhalten sie sich wie ein Mittelleiter: die T zugewandten Teile werden positiv, die e zugekehrten negativ, und die Umkehr der Potentialdifferenzen a/d im Momente der Verbindung folgt notwendig, denn dieser letztbeschriebene Effekt hat eine andere Größenordnung als die Jonenabspaltung der fallenden Tropfen. Wirken diese nur vermöge der Spur dissoziierten Anteiles der Doppelschicht, so tritt ja bei der Verbindung von T mit e die ganze Doppelschicht in Action.

Eben dieselben Erscheinungen geben sich zu erkennen, wenn man die Verbindung $T - e$ nicht durch einen Draht, sondern dadurch herstellt, daß man einen geschlossenen Quecksilberstrahl (der sich also gar nicht in einzelne Tropfen auflöst) von T nach e schickt. Bei T bildet sich dann fortwährend neue Oberfläche, bei e verschwindet sie und gleichzeitig ist T mit e durch den Strahl metallisch verbunden.

In konzentrierten CNK-Lösungen kehrt sich aber natürlich alles um, weil nun wieder die Tropfelektrode die edlere ist.

Einige Daten mögen dies erläutern, bei ihrer Ermittelung diente eine Röhre, die zwischen b und c verengt war, deshalb sind die Potentialdifferenzen in diesem Intervalle größer.

---

1) In allen Fällen werden also im ungeschlossenen Systeme Merkurionen hinabgeführt werden, gleichgültig ob Hg + oder — gegen die Lösung ist. Ist die Tropfelektrode positiv gegen die Lösung, so wird ihre Umgebung an Merkurionen verarmen, sie wird sich aber anreichern, wenn die Tropfelektrode negativ ist.

Lösung $HgNO_3$ verdünnt.

$T-e$ offen		$T-e$ durch Draht verbunden		Einzelne Tropfen		Geschlossener Strahl
a/d	−0,006 Volt	+0,057	Volt	a/d	−0,006 Volt	+0,051 Volt
b/d	−0,005 „	+0,044	„			
c/d	−0,001 „	+0,012	„			

Lösung CNK konz. (Hg/CNK/0,1 KCl/HgCl/Hg −0,8 Volt.)

d/a Tropfen	+0,006 Volt
Geschlossener Strahl	−0,011 „
Tropfen	+0,005 „
$T-e$ durch Draht verbunden .	−0,012 „

5. Ist aber die hier geschilderte Änderung der Lösungstension wirklich die gesuchte Ursache des Stromes im offenen Element, so ist es zu erwarten, daß ein solcher überall dort auftreten wird, wo Quecksilber aus einer Tropfelektrode, an der es eine bestimmte Oberflächenspannung besitzt, in ein Medium tritt, in der ihr eine andere Größe zukommt, sofern eine Gelegenheit zu einem Ionenaustausch gegeben ist. In Wasserstoff, Kohlensäure, Luft etc. ist z. B. die Oberflächenspannung des Quecksilbers größer als in wässerigen Lösungen. Liegt also der Auflösungspunkt einer Tropfelektrode in einem indifferenten Gasraume über der Lösung, so sollte ein gleichgerichteter Potentialgradient von den fallenden Tropfen in der Lösung erzeugt werden. In Olivenöl etc. ist die Oberflächenspannung nur wenig verschieden von der in Lösungen, immerhin etwas kleiner. Es wird kein merklicher oder ein entgegengerichteter Potentialgradient zu erwarten sein, wenn wir den Auflösungspunkt in übergeschichtetes Olivenöl oder dergleichen verlegen. Das Experiment bestätigt in der Tat alle diese Erwartungen:

Lösung $HgNO_3$ verdünnt. Zerstäubungspunkt der Tropfelektrode			Lösung HCl verdünnt + HgCl. Zerstäubungspunkt der Tropfelektrode		
	in der Lösung	in CO_2		in der Lösung	in CO_2	in Olivenöl
a/b	−0,009 Volt	−0,008 Volt	a/d	−0,009	−0,008	+0,001
a/c	−0,042 „	−0,039 „				
a/d	−0,051 „	−0,056 „				

6. Während betreffs aller Einzelheiten auf die ausführliche Publikation in der Zeitschrift für physikalische Chemie verwiesen werden muß, zeigen doch schon diese Versuche unzweideutig an, daß die von Hrn. Christiansen beobachtete Ablenkung der fallenden Quecksilbertropfen der Ausdruck eines Effektes ist, der bei meinen Versuchen über die Stromerzeugung durch fallende Metallteilchen und die Ablenkung feiner Metalldrähte in Lösungen ihrer Salze etc. eliminiert war.

Ebensowenig können die kapillarelektrischen Bewegungen von Quecksilbertropfen im elektrischen Stromgefälle mit der Überführung kolloidaler Metalle verglichen werden, denn auch sie haben wie die Ablenkung der fallenden Quecksilbertropfen ihren Ursprung hauptsächlich in einer Beeinflussung der Oberflächenspannung des Quecksilbers, indem es dank seiner Stellung als Mittelleiter auf einer Seite anodisch, auf der anderen kathodisch polarisiert wird und dadurch ungleiche Oberflächenspannungen an beiden Enden erlangt, die zu Bewegungen und zu mannigfaltigen Veränderungen[1]) Anlaß geben, deren genaues Studium zuweilen durch viele Nebenumstände besonders erschwert wird. Die Umkehr der Bewegung müßte, wenn nichts anderes hinzukäme, in allen diesen Fällen dort erfolgen, wo eine weitere kathodische Polarisation die Oberflächenspannung des Quecksilbers wieder verkleinert, der Umkehrpunkt also je nach Umständen ein anderer sein, als für die Überführung kolloidaler Metalle. Von der Überführung so kleiner Teilchen wie die der kolloidalen Metalle, in denen der Potentialabfall kleiner als 0,0001 Volt war (ihre Stellung als Mittelleiter mithin keine nennenswerte Einwirkung auf die Kapillarität haben kann), sind die kapillarelektrischen Bewegungen aber auch ganz verschieden[2]), und diese Versuche zeigen nur von neuem an, wie

1) Vgl. Henry, Gilb. Ann. 6. p. 370. 1800; Gerboin, Ann. de chim. et phys. 41. p. 196; Hellwig, Gilb. Ann. 32. p. 289. 1809; Ermann, Gilb. Ann. 32. p. 289. 1809; Herschel, Ann. de chim. et phys. 28. p. 280; Phil. Trans. p. 162. 1824.

2) Vgl. auch J. Billitzer, Zeitschr. f. phys. Chem. 45. p. 307. 1903. Die Abhängigkeit der Ablenkungs*richtung* von der Größe der Potentialdifferenz, die Hr. Christiansen beobachtet hat, ist aber leicht zu erklären, wenn man beachtet, daß Ladungssinn und Polarisation entgegengerichtete Bewegungen zu veranlassen streben, daß beide Kraftwirkungen aber verschieden schnell mit der Potentialdifferenz wachsen.

vorsichtig man bei der Ermittelung „einzelner" Potentialdifferenzen mittels Quecksilber jede Oberflächenänderung, jedes Übertreten des Quecksilbers von einem Medium in ein anderes vermeiden muß, und dies ist fast nur bei der Verwendung *wenig* amalgamierter Edelmetalle in Merkursalzlösungen oder mit Hilfe des kolloidalen Quecksilbers zu erreichen.

Indem Hr. Christiansen die von ihm beobachteten Erscheinungen kapillarelektrische Bewegungen nennt, trifft er also durchaus das Richtige. Vermeidet man aber die Kapillareinwirkung, indem man statt der Quecksilbertröpfchen ganz fein amalgamierte Goldkügelchen durch die Lösungen fallen läßt, so kann man mit großer Aufmerksamkeit beobachten, daß sie durch einen elektrischen Strom im selben Sinne bewegt werden wie das kolloidale Quecksilber. Diese Effekte sind aber sehr klein, um sie deutlicher zu erhalten, habe ich (l. c.) den amalgamierten Golddraht an einen Quarzfaden gehängt. Augenfälliger und reiner ist aber die Beobachtung der Überführung kolloidaler Metalle und der Stromerzeugung beim Falle metallischer Teilchen durch ihre Lösungen. Hier sind die Teilchen keine Mittelleiter, bei ihrer Bewegung findet nirgends eine nennenswerte Oberflächenänderung statt und alle Fehlerquellen verschwinden, die uns die Ermittelung einzelner Potentialsprünge so erschweren, wo Kapillareinwirkungen vorhanden sind.[1])

Wien, II. physik. Institut.

1) In der angekündigten Abhandlung wird es nachgewiesen werden, daß auch aus theoretischen Gründen die Doppelschicht nicht beim Maximum der Oberflächenspannung des Quecksilbers verschwinden kann.

(Eingegangen 9. Dezember 1903.)

12. *Bemerkungen zur Absorption und Diffusion der Kathodenstrahlen;* von *W. Kaufmann.*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit über die Absorption der Kathodenstrahlen wendet sich Hr. Lenard[1]) gegen eine von mir früher vertretene Auffassung des Absorptions- und Diffusionsvorganges der Kathodenstrahlen. Die bezügliche Anmerkung auf p. 731 der Lenardschen Arbeit hat folgenden Wortlaut:

> „Eine hiervon abweichende Definition, welche dem Absorptionsvermögen gelegentlich beigelegt worden ist (W. Kaufmann, Wied. Ann. **69.** p. 95. 1899) muß nach dem oben Vorhergehenden, sowie auch nach früher schon Bekanntem (Wied. Ann. **52.** p. 23. 1894) als nicht zutreffend bezeichnet werden; sie dürfte daher auch schwerlich zu zutreffenden Folgerungen geführt haben. Dasselbe gilt auch von der an gleicher Stelle benutzten Auffassung des Diffusionsvorganges der Kathodenstrahlen, welche nicht vereinbar ist mit der beobachteten, von mir in Zeichnungen wiedergegebenen Ausbreitungsweise der Strahlen in Gasen (Wied. Ann. **51.** p. 225. 1894)."

Da die Lenardsche Bemerkung infolge ihrer etwas allgemein gehaltenen Form leicht zu der Ansicht führen könnte, als seien meine damaligen *Messungsresultate* von den obigen Einwänden betroffen, so möchte ich auf die Bedeutung dieser Einwände etwas näher eingehen. Wenn ich Hrn. Lenard richtig verstanden habe, so richtet sich sein zweiter Einwand im wesentlichen gegen die von mir zunächst nur *zur Erleichterung der Korrektionsbetrachtungen* gemachte Annahme, daß die Diffusion der Kathodenstrahlen gleichmäßig nach allen Seiten erfolge. Da die Korrektionen wegen der aus den Öffnungen meines Auffangezylinders wieder heraus gelangenden Strahlen aber im ungünstigsten Falle nur etwa 1 Proz. betrugen, und, wie eine einfache Betrachtung zeigt, wegen einer teilweise eintretenden Kompensation der Fehler auch bei einer anderen Verteilung der diffusen Strahlen sich nur wenig ändern konnten, so ist

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **12.** p. 714. 1903.

die von mir gemachte, und wie ich zugebe, vielleicht inkorrekte Annahme jedenfalls *ohne Einfluß auf die Messungsresultate.*

Gemessen wurde bei meinen Versuchen derjenige Bruchteil eines engen Strahlenbündels, der, einen Messingzylinder von 3,13 Länge durchsetzend, durch irgendwelche Einwirkung des Gasinhaltes gezwungen wurde, von seiner ursprünglichen Bewegung abzuweichen und an die Wände des Zylinders zu gelangen. Ich zeigte, daß dieser Betrag, pro Zentimeter Strahlenlänge berechnet, proportional dem Gasdruck und umgekehrt proportional dem Potential der emittierenden Kathode war; wenn also p den Druck, V das Kathodenpotential, b den pro Zentimeter Weglänge aufgefangenen (elektrisch gemessenen) Strahlungsbruchteil bedeutete, so war die Größe $\beta = b\,V/p$ eine dem betreffenden Gase eigentümliche Konstante. In dieser von jeder besonderen Vorstellung über den Mechanismus der gegenseitigen Einwirkung zwischen Strahlen und Gas freien Auffassungsweise sind also die damals gemessenen Zahlen durchaus korrekt.

Fraglich ist allerdings nach den neuen Resultaten Hrn. Lenards, ob man β als *Absorptions-* oder als *Diffusionskoeffizienten* auffassen soll. Da die von mir gefundene Beziehung zwar bei den niedrigsten Potentialen (2000—2500 Volt) weniger gut (positive Abweichungen von 10—15 Proz.), bei den höheren Potentialen (3000—8000 Volt) aber sehr gut stimmte, so hielt ich es für wahrscheinlich, daß sie auch bei noch höheren Potentialen noch annähernd gelten würde. Daraus ergab sich bei einem Potential von 30000 Volt, das den von Hrn. Lenard[1]) früher bei seinen Absorptionsmessungen benutzten Strahlen entspricht, für Luft: $b/p = 0{,}19$, während Hr. Lenard für den Absorptionskoeffizienten der Luft angibt: $a/p = 0{,}005$, d. h. fast 40 mal weniger als meinen Messungen entspricht. Ich glaubte also annehmen zu müssen, daß die Absorption (d. h. der bei den früheren Lenardschen Messungen in Frage kommende Vorgang) bei meinen Versuchen nur eine untergeordnete Rolle spiele, und daß fast der ganze beobachtete Effekt von einer diffusen Zerstreuung herrühre.

1) P. Lenard, Wied. Ann. **56**. p. 255. 1895.

Was nun die *Auffassung der Absorption* selbst anbetrifft, so kann es allerdings nach der Gesamtheit der vorliegenden Beobachtungen keinem Zweifel unterliegen, daß die Energieverminderungen nicht gleichmäßig zwischen kleinen und großen Beträgen verteilt sind, sondern daß *wenigstens bei der Absorption in Gasen* weitaus der größte Teil des eingetretenen Verlustes in einer gänzlichen Vernichtung der Bewegungsenergie eines Teiles der Strahlen bestehe. Wenn bei einem Teil der Strahlen die Energie nur um geringe Bruchteile vermindert ist, so kommt dieser Teil nur wenig in Betracht.[1])

Dadurch werden die atom- und gastheoretischen Schlüsse, die ich meinen Messungsresultaten beifügte, hinfällig. Sie sind es aber auch abgesehen hiervon schon deshalb, weil die neueren Erkenntnisse über die Natur der Elektronen als bloßer Kraftzentra die Annahme elastischer Stöße zwischen ihnen und den Gasmolekülen als kaum zulässig erscheinen lassen.

Die *Messungsresultate*, die, wie nochmals betont, durch die Lenardschen Einwände nicht getroffen werden, stellen, wie ich schon damals bemerkte (l. c. p. 97), die *Summe von Absorptions- und Diffusionskoeffizienten* dar. Sollte die Auffassung Hrn. Lenards sich bei weiterer Prüfung als richtig erweisen, daß die Diffusion, namentlich bei höheren Potentialen, wenig in Betracht kommt, so wären also meine Zahlen als *Absorptionskoeffizienten* zu bezeichnen. In der Tat habe ich ja dieselbe Größe, nämlich den Verlust an elektrisch gemessener Strahlmenge pro Zentimeter Weglänge bestimmt, wie Hr. Lenard bei seinen neuen Messungen. Es müßte also auch eine numerische Übereinstimmung zwischen den Lenardschen Zahlen und den meinen bestehen. Leider kann man in dieser Beziehung von einem Vergleich nicht allzuviel erwarten, da die

---

1) Stärker absorbierende Körper, wie Metallblätter, verhalten sich anders, wie aus den Untersuchungen von G. E. Leithäuser (Inaug.-Diss. Berlin 1903) hervorgeht. Ein großer Teil der ein Aluminiumblatt durchsetzenden Strahlen erhält eine verminderte Geschwindigkeit; die Geschwindigkeiten sind hierbei zwischen nahezu unverminderten und sehr stark verminderten stetig verteilt. Dieses Verhalten entspricht also durchaus der von mir damals angenommenen Vorstellung, daß ein anfangs homogenes Strahlenbündel, wenn es irgend einen Körper passiert, notwendigerweise inhomogen werden muß . . ." (l. c. p. 111).

Lenardschen Zahlen Mittelwerte aus zum Teil um mehr als 100 Proz. voneinander abweichenden Zahlen darstellen (vgl. die untenstehende Tabelle), und außerdem die angebrachten Korrektionen stellenweise 10 Proz. der direkten Ergebnisse betragen. Eine Übereinstimmung ist also nur der Größenordnung nach zu erwarten. Ich gebe in folgender Tabelle einen Vergleich der von Hrn. Lenard und von mir gefundenen Zahlen für 1000-Voltstrahlen, wobei die Werte aus meinen Beobachtungen nach dem oben genannten Gesetz extrapoliert sind. Für 4000-Voltstrahlen war ein direkter Vergleich zwischen den Lenardschen Werten für Luft und meinen für Stickstoff möglich.

1000-Voltstrahlen.

	a/p (Lenard)	b/p (Kaufmann)
H_2	1,19	0,73
Luft	1,94—4,01	—
N_2	—	5,65
CO_2	4,26—9,53	6,88

(Der von Hrn. Lenard benutzte Wasserstoff war käuflicher, während ich reinen benutzte, doch ist meine Zahl für dieses Gas aus l. c. angeführten Gründen nicht sehr sicher.)

4000-Voltstrahlen.

	a/p (Lenard)	b/p (Kaufmann)
Luft	1,20	—
N_2	—	1,4

Die Zahlen stimmen so weit überein, wie bei der bedeutend größeren Unsicherheit der Lenardschen Zahlen überhaupt möglich ist. Weitere Messungen scheinen hier dringend nötig, namentlich zur Auffindung des Potentials, bei dem der bedeutend schnellere Abfall der Absorptionskoeffizienten gegenüber dem zwischen 2000 und 8000 Volt statthabenden beginnt; dieser Abfall muß sehr plötzlich sein, da er eine Extrapolation der oben angegebenen zwischen 3000 und 8000 sehr gut geltenden Beziehung $b\,V/p = \text{const.}$ auf 30000 Volt zu Fehlern von 4000 Proz. führen läßt.

Bonn, Dezember 1903.

(Eingegangen 22. Dezember 1903.)

13. *Über den Energieumsatz in der Mechanik; von Zemplén Győző.*

In einem der letzten Hefte der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht Hr. E. Förster[1]) eine Untersuchung über das Ostwaldsche Axiom des größten Energieumsatzes, woselbst nach Erwähnung auch meiner in diesen Annalen erschienenen Abhandlung[2]) ausgesprochen wird, daß es nicht nur unmöglich sei, aus dem erwähnten Prinzipe die Newtonschen Differentialgleichungen der Mechanik abzuleiten, sondern eine dem Ostwaldschen Prinzipe entsprechende Bewegung überhaupt nicht existiere.

In meiner erwähnten Abhandlung habe ich jedoch die Differentialgleichungen eines dem Ostwaldschen Prinzipe entsprechend sich bewegenden Massenpunktes aufgestellt, was dem zweiten Teile der Behauptung des Hrn. Förster zu widersprechen scheint. Es sei mir nun gestattet, einige ergänzende Bemerkungen zu meiner Abhandlung zu veröffentlichen, woraus — wie ich hoffe — klar hervorgehen wird, wie das Ostwaldsche Prinzip zur eindeutigen Bestimmung der Bewegung eines Massenpunktes (bez. Systems) benutzt werden kann; es wird nämlich gezeigt, daß durch das Ostwaldsche Prinzip *eine* Bewegung unter sämtlichen der Gleichung der lebendigen Kraft entsprechend sich abspielenden Bewegungen *ausgezeichnet* ist, vollkommen entsprechend der Idee, die Hr. Ostwald in seiner Arbeit über das Prinzip des ausgezeichneten Falles[3]) ausgesprochen hat. Leider führt aber der vorliegende ausgezeichnete

1) E. Förster, Zeitschr. f. Math. u. Physik **49.** p. 84. 1903.

2) Zemplén Győző, Ann. d. Phys. **10.** p. 419. 1903.

3) W. Ostwald, Ber. über die Verhandl. der Kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig **45.** p. 600. 1893.

Fall im allgemeinen nicht zu den üblichen Gleichungen der Mechanik.

In meiner erwähnten Abhandlung habe ich zuerst die angenähert richtigen Gleichungen (6)[1]) aufgestellt, welche bei gewissen, zur Zeit t gegebenen Werten der Koordinaten x, y, z und der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w eines Massenpunktes m zur Bestimmung der Werte der Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ zur Zeit $t + \tau$ dienen. Diese Gleichungen gelten um so genauer, je kleiner der Zeitraum τ ist; aus diesen Gleichungen habe ich durch den Grenzübergang $\lim \tau = 0$ die eigentlichen Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet.

Zur Aufstellung des Systems (6) habe ich die notwendigen Bedingungen der Existenz des Extremums von

$$T_{t+\tau} - T = \tfrac{1}{2} m (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) - \tfrac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)$$

benutzt; um allen eventuellen Einwänden vorzubeugen werde ich nun beweisen, daß dadurch auch den hinreichenden Bedingungen der Existenz des Extremums Genüge geleistet wurde.

Damit nämlich

$$\delta (T_{t+\tau} - T) = m \bar{u} \delta \bar{u} + m \bar{v} \delta \bar{v} + m \bar{w} \delta \bar{w} + \tfrac{1}{2} m (\delta \bar{u}^2 + \delta \bar{v}^2 + \delta \bar{w}^2)$$

bei allen Werten der Variationen, welche die Bedingungsgleichungen[2])

$$\delta F = \left(m \bar{u} - \frac{\tau}{2} X\right) \delta \bar{u} + \left(m \bar{v} - \frac{\tau}{2} Y\right) \delta \bar{v} + \left(m \bar{w} - \frac{\tau}{2} Z\right) \delta \bar{w} + \tfrac{1}{2} m (\delta \bar{u}^2 + \delta \bar{v}^2 + \delta \bar{w}^2) = 0,$$

$$\delta G = \frac{\tau}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \bar{u} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta \bar{v} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \bar{w} = 0$$

befriedigen, ein konstantes Vorzeichen besitze, muß

$$\delta \Phi = \delta (T_{t+\tau} - T) + \lambda \delta F + \mu \delta G$$

bei allen Werten von $\delta \bar{u}, \delta \bar{v}, \delta \bar{w}$ sein Vorzeichen unverändert behalten, wenn λ und μ so bestimmt wurden, daß die ersten Potenzen von $\delta \bar{u}, \delta \bar{v}, \delta \bar{w}$ aus $\delta \Phi$ herausfallen.

Die Rechnung ergibt für λ[3]):

$$\lambda = - \frac{2 \bar{u} (u + \bar{u}) + 2 \bar{v} (v + \bar{v}) + 2 \bar{w} (w + \bar{w})}{(u + \bar{u})^2 + (v + \bar{v})^2 + (w + \bar{w})^2}$$

---

1) l. c. p. 424.

2) l. c. p. 424; vgl. daselbst auch die Erklärung der Bezeichnungen.

3) l. c. p. 424, Zeile 6 von unten.

und daher für $\delta \Phi$:

$$\delta \Phi = \tfrac{1}{2} m (1 + \lambda)(\delta \bar{u}^2 + \delta \bar{v}^2 + \delta \bar{w}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} m \frac{u^2 + v^2 + w^2 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2 - \bar{w}^2}{(u + \bar{u})^2 + (v + \bar{v})^2 + (w + \bar{w})^2} (\delta \bar{u}^2 + \delta \bar{v}^2 + \delta \bar{w}^2).$$

$T_{t+\tau} - T_t$ wird daher ein Maximum, falls

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 > u^2 + v^2 + w^2 \tag{1}$$

und ein Minimum, falls

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 < u^2 + v^2 + w^2. \tag{2}$$

Im Falle (1) ist aber der *Energieumsatz*, d. h. der absolute Betrag der in der Zeit τ umgewandelten Energie gleich $T_{t+\tau} - T_p$ im Falle (2) aber gleich $T_t - T_{t+\tau}$, der Energieumsatz ist daher tatsächlich immer ein Maximum, falls $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ aus dem System (6) bestimmt werden.

Für jeden kleinen Wert von τ erhält man daher ein System (6), welches um so genauer den Anforderungen des größtmöglichen Energieumsatzes entspricht, je kleiner τ ist und für den Grenzfall $\tau = 0$ in ein eindeutig bestimmtes Differentialgleichungssystem, in das System (II)[1]) übergeht:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} X + \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = m x'' \dfrac{x' x'' + y' y'' + z' z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ Y + \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = m y'' \dfrac{x' x'' + y' y'' + z' z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ Z + \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = m z'' \dfrac{x' x'' + y' y'' + z' z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Das System (II) ist daher unter allen eine *mögliche* Bewegung darstellenden Systemen dadurch ausgezeichnet, daß es als Grenzwert einer Reihe solcher Systeme erscheint, welche mit immer zunehmender Genauigkeit dem Ostwaldschen Prinzipe entsprechen. Oder mit anderen Worten: wählt man τ so klein, daß die sich unterdessen abspielenden möglichen Bewegungen als gleichmäßig beschleunigte Bewegungen betrachtet werden können, dann gibt das System (6), falls x, y, z und u, v, w im Augenblicke t gegeben sind, die dem Ostwaldschen Prinzipe entsprechenden Werte $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ der Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t + \tau$. Denkt man sich dies für jeden

1) l. c. p. 425.

Augenblick ausgeführt und läßt τ zu 0 konvergieren, so erhält man hieraus das System (II), welches also das Differentialgleichungssystem der dem Ostwaldschen Prinzipe entsprechenden Bewegung angesehen werden kann, womit nicht behauptet sein soll, daß bei dieser Bewegung weder die Änderungsgeschwindigkeit noch die Beschleunigung der kinetischen Energie ein Maximum sei.

Est ist ja ohne weiteres klar, daß bei gegebenen Werten von x, y, z und x', y', z' weder

$$\frac{dT}{dt} = m(x'x'' + y'y'' + z'z'') = Xx' + Yy' + Zz' \quad .$$

noch

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d(Xx' + Yy' + Zz')}{dt} = Xx'' + Yy'' + Zz'' + F(x, y, z, x', y', z')$$

als Funktion von x'', y'', z'' ein Extremum sein kann, denn beide Größen sind lineare Funktionen der unabhängigen Variabeln und die Bedingungsgleichungen enthalten dieselben auch linear.

Betrachten wir nun etwas eingehender das System (II).

Es ist zu bemerken, daß dasselbe nachträglich eine Bedingung auch für die Anfangswerte von x', y', z' aufstellt, es sollen nämlich x', y', z' in jedem Augenblick den Kraftkomponenten

$$X + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

proportional sein, dies entspricht jedoch vollständig der Form der Differentialgleichungen, welche nur scheinbar in sämtlichen Koordinaten zweiter Ordnung sind. Die drei ersten Gleichungen des Systems (II) sind nämlich nicht unabhängig voneinander und können durch folgende ersetzt werden:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{Y_1}{X_1}x', \\ z' = \dfrac{Z_1}{X_1}y', \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$X_1 = X + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ etc.}$$

gesetzt wurde.

Nimmt man hierzu die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\text{(4)} \qquad m(x'x'' + y'y'' + z'z'') = Xx' + Yy' + Zz',$$

so können mit Hilfe der Gleichungen (3) z. B. y'' und z'' aus (4) eliminiert werden und man erhält als endgültige Form des Systems (II):

$$(II^*)\quad \begin{cases} y' = \dfrac{Y_1}{X_1}x', \\ z' = \dfrac{Z_1}{X_1}z', \\ x'' = \dfrac{Xx' + Yy' + Zz' - mx'\left\{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Y_1}{X_1}\right)y' + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Z_1}{X_1}\right)z'\right\}}{m\left\{x' + \left(\dfrac{Y_1}{X_1}\right)y' + \left(\dfrac{Z_1}{X_1}\right)z'\right\}}, \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Das System (II*) ist erster Ordnung in bezug auf y' und z' und zweiter Ordnung in bezug auf x, wir verfügen daher bloß über vier Integrationskonstanten, drei Anfangswerte für x, y, z und eine für x'; sind diese gegeben und die Kraftkomponenten als Funktionen der Koordinaten bekannt, so gibt das System (II*) die Lösung unseres Problems.

Setzen wir die Existenz eines Potentials U voraus, dann werden sogar unsere Gleichungen erster Ordnung in bezug auf alle drei Koordinaten, und man erhält aus (3) und

$$\tfrac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U(x, y, z) = C,$$

wo C eine Konstante bedeutet, das System:

$$(II^{**})\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X_1\sqrt{\dfrac{2(C-U)}{m(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = Y_1\sqrt{\dfrac{2(C-U)}{m(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)}}, \\ \dfrac{dz}{dt} = Z_1\sqrt{\dfrac{2(C-U)}{m(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)}}, \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Die Verfügung über die Konstante C und die Bedingung, daß die Geschwindigkeitskomponenten mit den Kraftkomponenten proportional sein sollen, gibt uns die Anfangswerte von x', y', z' und wir verfügen daher nur über drei Integrationskonstanten x, y, z. In der Tat haben wir es nunmehr mit Gleichungen ersten Grades zu tun.

Es soll endlich noch ein Einwand gegen die Ableitung des Systems (II) behoben werden: Bei der Ableitung der an-

genäherten Formel für die Gleichung der lebendigen Kraft wurde gezeigt[1]), daß die während des Zeitraumes $t \ldots t+\tau$ geleistete Arbeit

$$L_\tau = X(x, y, z)(\bar{x} - x) + Y(x, y, z)(\bar{y} - y) + Z(x, y, z)(\bar{z} - z),$$

falls τ so klein gewählt wird, daß die zweiten und höheren Potenzen der Veränderungen der Koordinaten vernachlässigt werden können; es ist nun fraglich, ob bei dieser Annäherung die Darstellung

$$\bar{x} - x = \frac{\tau}{2}(u + \bar{u}) \text{ etc.}$$

berechtigt erscheint, d. h. ob wir uns in derselben Rechnung nicht etwa zweier verschiedener Annäherungsgrade bedienen.

Wir werden daher unser System auf etwas anderem Wege ableiten, wogegen dieser Einwand nicht erhoben werden kann. Wir machen nun ausdrücklich die Annahme, τ sei so klein gewählt, daß τ^3, τ^4 etc. vernachlässigt werden können, dann ist die Arbeit L_τ folgendermaßen darstellbar:

$$L_\tau = \int_0^\tau \{(Xu)_{t+\vartheta} + (Yv)_{t+\vartheta} + (Zw)_{t+\vartheta}\}\, d\vartheta,$$

wo $t + \vartheta$ einen Zeitpunkt zwischen t und $t + \tau$ bedeutet.

Es ist aber

$$\begin{aligned}(Xu)_{t+\vartheta} = \Big\{ & X(x, y, z) + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}(x_{t+\vartheta} - x) \\ & + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 X(x, y, z)}{\partial x^2}(x_{t+\vartheta} - x)^2 + \cdots \\ & + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y}(y_{t+\vartheta} - y) + \cdots \Big\} \\ & \left(u + \frac{du}{dt}\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{d^2u}{dt^2}\vartheta^2\right),\end{aligned}$$

weiter

$$x_{t+\vartheta} - x = u\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{du}{dt}\vartheta^2 \text{ etc.},$$

---

1) l. c. p. 422.

daher

$$(Xu)_{t+\vartheta} = X(u + u'\vartheta + \tfrac{1}{2}u''\vartheta^2) + \frac{\partial X}{\partial x}(u^2\vartheta + \tfrac{3}{2}uu'\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u'^2 + u''u)\vartheta^3 + \tfrac{1}{4}u'u''\vartheta^4) + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\vartheta^2 f(u, u', u'', \vartheta) + \ldots + \frac{\partial X}{\partial y}(uv\vartheta + (vu' + \tfrac{1}{2}uv')\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u'v' + vu'')\vartheta^3 + \tfrac{1}{4}v'u''\vartheta^4) + \ldots,$$

wo $f(u, u', u'', \vartheta)$ eine ganze rationale Funktion von u, u', u'' und ϑ bedeutet.

Man erhält daher durch Ausführung der Integration und Weglassung der mit τ^3 multiplizierten Glieder:

$$L_\tau = X\left(u\tau + u'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\tau^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}u^2 + \frac{\partial X}{\partial y}uv + \frac{\partial X}{\partial z}uw\right) + Y\left(v\tau + v'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\tau^2\left(\frac{\partial Y}{\partial x}vu + \frac{\partial Y}{\partial y}v^2 + \frac{\partial Y}{\partial z}vw\right) + Z\left(w\tau + w'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\tau^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}wu + \frac{\partial Z}{\partial y}wv + \frac{\partial Z}{\partial z}w^2\right) = X\left(u\tau + u'\frac{\tau^2}{2}\right) + Y\left(v\tau + v'\frac{\tau^2}{2}\right) + Z\left(w\tau + w'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tau^2\Phi,$$

wo Φ eine nur von x, y, z und u, v, w unabhängige Größe bedeutet.

Führt man nun an Stelle der Beschleunigungskomponenten u', v', w die Werte der Geschwindigkeitskomponenten zu Ende des Zeitraumes τ durch die folgenden, ebenfalls bis zur zweiten Potenz von τ richtigen Gleichungen als unabhängige Variabeln ein:

$$u\tau + u'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(u + \mathfrak{u}), \qquad v\tau + v'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(v + \mathfrak{v}),$$

$$w\tau + w'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(w + \mathfrak{w}),$$

so erhält man folgenden Ausdruck für die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$F = \tfrac{1}{2}m(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2) - \frac{\tau}{2}[X(u + \mathfrak{u}) + Y(v + \mathfrak{v}) + Z(w + \mathfrak{w})] - \tau^2\Phi = 0.$$

Soll nun $T_{t+\tau} - T$ bei den wiederholt erwähnten Bedingungen ein Extremum sein, so müssen, wie eine einfache

Rechnung zeigt, abermals die Gleichungen (3), (4) und (5)[1]) bestehen, für λ erhält man aber die Gleichung:

$$\frac{2(1+\lambda)}{\lambda} = \frac{m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)-2\tau^2\Phi}{m[\bar{u}(u+\bar{u})+\bar{v}(v+\bar{v})+\bar{w}(w+\bar{w})]}.$$

Wir erhalten daher anstatt Gleichung (6) die folgende:

$$X+\varrho_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\bar{u}}{\tau}\,\frac{m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)-2\tau^2\Phi}{\bar{u}(u+\bar{u})+\bar{v}(v+\bar{v})+\bar{w}(w+\bar{w})}.$$

Wird aber der Grenzübergang lim $\tau = 0$ ausgeführt, so erhält man daraus wiederum unser System (II).

Man überzeugt sich ebenso leicht, daß auch bei diesem Gange der Rechnung die notwendigen Bedingungen der Existenz des Extremums ebenfalls befriedigt sind; es ist nämlich wegen

$$-\lambda = \frac{2m[(u+\bar{u})\bar{u}+(v+\bar{v})\bar{v}+(w+\bar{w})\bar{w}]}{m[(u+\bar{u})^2+(v+\bar{v})^2+(w+\bar{w})^2]-2\tau^2\Phi}$$

$$\delta\Phi = \delta(T_{t+\tau}-T)+\lambda\delta F+\mu\delta G = \tfrac{1}{2}m(1+\lambda)(\delta\bar{u}^2+\delta\bar{v}^2+\delta\bar{w}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\,\frac{m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)-2\tau^2\Phi}{m[(u+\bar{u})^2+(v+\bar{v})^2+(w+\bar{w})^2]-2\tau^2\Phi}.$$

Wird nun τ so klein gewählt, daß auch τ^2 zu vernachlässigen sei, dann ist ersichtlich, daß $\delta\Phi$ dieselbe Form annimmt wie in der früheren Rechnung, und daß daher die Änderung der kinetischen Energie immer ein Extremum und der Energieumsatz tatsächlich ein Maximum sein wird.

Es ist hierdurch bewiesen worden, daß, wenn wir alle virtuellen Bewegungen durch eine beliebige mit τ zunehmende Annäherung darstellen, eine dieser Bewegungen immer die im Ostwaldschen Prinzipe ausgesprochene Maximumeigenschaft besitzt. Das System (II) ist das Differentialgleichungssystem der Bewegung, welche aus diesen ausgezeichneten Bewegungen für den Grenzfall $\tau = 0$ hervorgeht, welche daher mit Recht als die durch Ostwalds Prinzip *bestimmte* Bewegung angesehen werden darf.

Ich glaube daher meinen früheren Standpunkt aufrecht erhalten zu dürfen, laut welchem das Ostwaldsche Prinzip zwar eine Bewegung eindeutig bestimmt, dieselbe jedoch nur in einzelnen Fällen mit der durch Newtons Axiomen bestimmten Bewegung übereinstimmt.

Budapest, am 1. Dezember 1903.

1) l. c. p. 424.

(Eingegangen 22. Dezember 1903.)

14. *Über die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Interferenz des natürlichen Lichtes; von John Mills.*

Die von Fresnel und Arago festgestellten Grundprinzipien der Interferenzerscheinungen von eben polarisiertem Lichte sind wohl allgemein bekannt. Bei natürlichem Licht nehmen wir an, daß eine elliptisch polarisierte Schwingung vorliegt, bei der die großen Achsen der Ellipse in sehr kurzer Zeit alle möglichen Richtungen annehmen, und die Exzentrizität der Ellipse zu gleicher Zeit fortwährende Veränderungen erfährt. Ferner nehmen wir an, daß diese elliptische Schwingung sich in zwei geradlinige Komponenten auflösen läßt, die zueinander senkrecht stehen und zwischen denen keinerlei Beziehung besteht. Bei der Interferenz natürlichen Lichtes unter gewöhnlichen Verhältnissen müssen wir die Erscheinung ansehen als hervorgerufen durch die Aufeinanderlagerung zweier Komponentensysteme einer Ellipse über ein Ätherteilchen, wobei die beiden Komponenten derselben Art in zueinander parallelen Richtungen wirken. Die Rotation der Ellipse als Ganzes über einen Winkel von 90° würde gleiche Komponenten in zueinander senkrechte Lagen bringen, und Interferenzerscheinungen würden dann verschwinden.

In einer Arbeit von L. Sohncke[1]) wird die Behauptung aufgestellt, daß Abbe in seinen Untersuchungen bemerkt hatte, daß natürliches Licht durch natürliche Rotationssubstanzen sich in Rotation versetzen ließ, die ganz analog der Drehung von eben polarisiertem Lichte ist. Er hatte in den Weg eines Strahles des Interferenzsystems ein Stück eines rechtsdrehenden Quarzes gebracht, welches imstande war, bei eben polarisiertem Lichte eine Drehung von 45° hervorzurufen, und in den Weg des anderen Strahles ein ähnliches Stück von linksdrehendem Quarz. Die auf diese Weise hervorgebrachte Rotation der beiden Strahlen über einen Winkel von 90° zueinander brachte die vorher zu beobachtenden Interferenzerscheinungen zum

1) L. Sohncke, Wied. Ann. 27. p. 206. 1886.

Verschwinden. Wenn er hingegen zwei ähnliche Stücke hinzufügte, welche einen Unterschied von 180° hervorriefen, so traten dieselben wieder auf.

Die Entdeckung der elektromagnetischen Drehung eben polarisierten Lichtes durch Faraday hatte mancherlei Untersuchungen auf diesem Gebiete zur Folge. Die Frage, warum eine elektromagnetische Kraft natürliches Licht ähnlich beeinflußt, wie sie die Drehung von eben polarisiertem Licht veranlaßt, wurde zuerst von Sohncke in der oben erwähnten Arbeit aufgeworfen. In einer Arbeit über die Natur des „Faradayeffektes“ hatte D. B. Brace[1]) bereits die Bemerkung gemacht, daß bei elliptisch polarisiertem Lichte — das also der Schwingungsform natürlichen Lichtes näher kommt als eben oder kreisförmig polarisiertes — die Interferenzstreifen bei der Erzeugung eines elektromagnetischen Feldes in dem umgebenden Medium an Deutlichkeit verloren. Mit einem Interferenzsystem, welches dem von Young in seinem grundlegenden Interferenzversuch benutzten ähnelte, fand Sohncke, daß natürliches Licht der Drehung im Magnetfelde fähig ist.

Seine Methode bestand im folgenden: Das von einem Einzelspalt ausgehende Licht ließ man auf einen Schirm mit zwei kleinen dicht aneinander liegenden Spalten fallen. Auf der anderen Seite des Schirmes waren in geeigneter Entfernung Interferenzstreifen zu beobachten. Wenn hinter diesen Doppelspalt eine Soleilsche Doppelplatte aus Quarz von geeigneter Dicke gebracht wurde, und wenn man das von dem einem Spalt ausgehende Licht durch die eine Seite der Platte gehen ließ, während das Licht des anderen Spaltes durch die andere Seite hindurchging, so entstand eine Drehung der Komponenten des benutzten Lichtes über einen Winkel von 90°, welche auch das Verschwinden der Interferenzstreifen zur Folge hatte. In den Weg des einen dieser interferierenden Strahlen, und zwar zwischen den Schirm und den Beobachter, wurde ein von einer Spule umgebenes Parallelepiped aus Faradayschem Glase gebracht. In den Weg des anderen Strahles brachte man eine ähnliche Platte mit Spule, die jedoch in der Strahllinie so weit zurückgezogen war, daß sich unabhängige elektromagnetische

1) D. B. Brace, Wied. Ann. 26. p. 576. 1885.

Felder bilden konnten. Bei der benutzten Stromstärke war in beiden Spulen eine Rotation von 9,2° möglich. Die Spulen wurden so verbunden, daß sie die doppelte mit *einer* Spule mögliche Drehung ergaben. Wenn nun natürliches Licht einer elektromagnetischen Drehung fähig ist, so müßte mit dem Schließen des Stromkreises das Wiederauftreten der Interferenzstreifen Hand in Hand gehen. Dies war die von Sohncke beobachtete Erscheinung.

Verfasser hat kürzlich eine Apparatform[1]) benutzt, welche ihn darauf brachte, eine weitere Bestätigung der Arbeit nach einer etwas verschiedenen Methode zu suchen. Der benutzte Apparat bestand aus dem Michelsonschen Interferometer in seiner allgemeineren Form; in den Weg der einzelnen Strahlen wurde je eine Röhre mit Kohlendisulfid gebracht, welche von einer Spule umgeben und unabhängig von der Spule festgehalten wurde. Die Spulen waren so miteinander verbunden, daß sie in den beiden Röhren bei eben polarisiertem Lichte Drehung in entgegengesetzter Richtung hervorriefen. Als Lichtquelle wurde Natriumlicht benutzt. Wenn natürliches Licht im Magnetfelde einer Drehung fähig ist, so muß eine Veränderung des Stromes den Durchgang der Interferenzstreifen durch abwechselnde Intensitätsmaxima und -minima hervorrufen. Die Lagen der Minima müssen sodann den Zeitpunkten entsprechen, zu denen der Strom in den beiden Röhren eine Drehung von einem ungeraden Vielfachen von 90° hervorrief.

Eben polarisiertes Licht erfuhr beim Durchgange durch die eine Spule seitens eines Stromes von 13,06 Amp. eine Drehung von 90°. Bei der anderen betrug dieser Strom 13,23 Amp. Der Mittelwert von diesen beiden Werten muß dann den Strom ergeben, der in beiden Spulen nötig ist, um eine Rotation von 180° hervorzurufen, wenn dieselben in entgegengesetzten Richtungen wirken.

Unter Benutzung des beschriebenen Apparates wurde in folgender Weise eine Reihe von Beobachtungen vorgenommen: ein Rheostat im Stromkreise wurde so eingestellt, daß er die Stromstärke erhöhte, bis die durch die Spulen hindurchgehende Strommenge gerade zum Verschwinden der Streifen genügte;

1) Der benutzte Apparat war der von der Am. Ass. Adv. Sc. den Herren Morley u. Miller überlassene. Vgl. Phys. Rev. 7. p. 288. 1898.

dann wurde durch einen Assistenten eine Ablesung des Strommessers vorgenommen. Hierauf wurde die Stromstärke weiter erhöht, bis die Streifen wieder auftraten. Die Bewegung des Hebelarmes des Rheostaten wurde sodann umgekehrt; der Strom nahm hierauf ab, bis die Streifen wieder verschwanden, und an diesem Punkte wurde eine zweite Ablesung vorgenommen. Der Mittelwert der beiden Ablesungen muß den Wert der Stromstärke ergeben, bei der die Streifen vollständig unsichtbar waren. Der Punkt, bei dem die Banden verschwanden, ließ sich, wie festgestellt wurde, sehr einfach durch folgende Vorrichtung feststellen: Die Kompensationsplatte des Interferometers wurde auf einen Messingständer aufgesetzt; an demselben war ein Hebelarm befestigt. Wenn man diesen Arm ein wenig anzog, so tordierte man den Halter, womit die Weglänge des einen Strahles verändert und eine Verschiebung der Streifen durch das Feld hervorgebracht wurde. Durch diese leichte Bewegung konnte man ihre Anwesenheit feststellen, wenn sie sonst unsichtbar waren.

Im folgenden ist eine Reihe von diesen Beobachtungen gegeben. Bei der Tabelle ist zu bemerken, daß der Mittelwert der beiden ersten Kolumnen den die einzelnen Spulen durchfließenden Strom ergeben würde. Der doppelte Betrag dieses Mittelwertes würde den zum Hervorrufen derselben Wirkung nötigen Strom ergeben, wenn nur *eine* Spule eine Drehung hervorriefe.

Tabelle I.

Für eine Drehung von 90°.

Oberer Wert der Stromstärke	Unterer Wert der Stromstärke	Äquivalentstrom für eine Spule	Entsprechende Drehung
7,8	6,4	14,2 Amp.	97,24°
7,8	6,25	14,05	96,20
7,8	6,3	14,1	96,56
7,75	6,25	14	95,86
7,75	6,45	14,2	97,24
7,4	6,45	13,85	94,86
7,7	6,3	14	95,86
7,7	5,8	13,5	92,44
7,4	6,4	13,8	94,53
7,7	6,4	14,1	96,56
		Mittel:	95,73°

Tabelle II.

Für eine Drehung von 270°.

Oberer Wert der Stromstärke	Unterer Wert der Stromstärke	Äquivalentstrom für eine Spule	Entsprechende Drehung
19	18,7	37,7 Amp.	258,2°
19	18,6	37,6	257,5
19,1	18,6	37,7	258,2
18,9	18,6	37,5	256,8
18,9	18,4	37,3	255,7
19,2	18,5	37,7	258,2
19	18,8	37,8	258,9
18,8	18,6	37,4	256,2
19	18,6	37,6	257,5
19	18,5	37,5	256,8
		Mittel:	256,8°

Tabelle III.

Für eine Drehung von 450°.

Oberer Wert der Stromstärke	Unterer Wert der Stromstärke	Äquivalentstrom für eine Spule	Entsprechende Drehung
32	32,5	64,5 Amp.	441,8°
32	33	65	445,1
32,5	33,5	66	452
32	33	65	445,1
33	33	66	452
32,5	33	65,5	448,5
32,5	33	65,5	448,5
32	33	65	445,1
32	33	65	445,1
32,5	33,5	66	452
		Mittel:	447,5°

Tabelle IV.

Für eine Drehung von 630°.

Oberer Wert der Stromstärke	Unterer Wert der Stromstärke	Äquivalentstrom für eine Spule	Entsprechende Drehung
44	44,5	88,5 Amp.	606 °
45	45	90	616,3
45,5	46	91,5	626,6
45	45	90	616,3
44,5	45	89,5	612,8
45	48	93	636,7
44	45	89	609,6
43	45	88	602,7
44	44	88	602,7
44	44,5	88,5	606
		Mittel:	613,6°

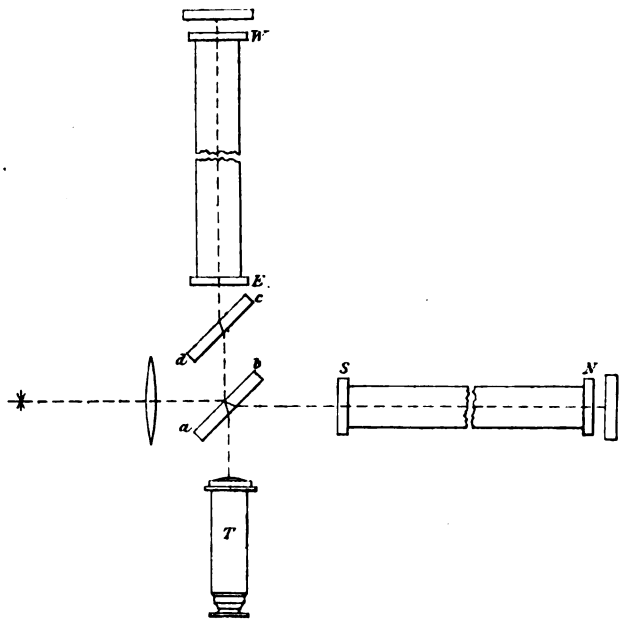
In Anbetracht des Umstandes, daß die Beobachtungen Sohnckes bei einer Drehung von nur 9,2° in jeder Spule vorgenommen wurden, schien es der Mühe wert zu sein, den oben erwähnten Apparat zur Ausführung dieser Untersuchung bei etwa 720° zu benutzen. In der Sohnckeschen Arbeit wurde jedoch ein Interferenzsystem benutzt, bei dem keinerlei spiegelnde Flächen vorhanden waren. Auf den ersten Blick konnte es nun scheinen, daß die in der ersten Form des Versuches erzielten Ergebnisse durch die Benutzung von reflektierenden Platten entstellt gewesen wären. Ein Teil des durch die Spulen gehenden Lichtes ist freilich polarisiert. Wenn jedoch die eben polarisierten Teile der beiden Strahlen, welche die Streifen bilden, gegeneinander über einen Winkel gedreht worden sind, der ein ungerades Vielfaches von 90° beträgt, so verschwinden die früher von ihnen erzeugten Streifen. Die von den natürlichen Lichtteilen derselben Strahlen erzeugten Interferenzerscheinungen waren immer noch zu beobachten, wenn diese nicht gleichfalls eine ähnliche Drehung erfahren hatten.

In der Form, in der die oben angeführten Beobachtungen vorgenommen wurden, war jede Röhre bei dem Minimalpunkt einer Rotation fähig, welche ein ungerades Vielfaches von 45° betrug. Von dem in das Interferometer (vgl. nachstehende Figur) eintretenden Licht wurde ein Teil von dem, welches die Röhre EW erreichte, durch Reflexion an der Scheidefläche[1]) ab und durch Transmission durch die Kompensationsplatte cd eben polarisiert. Beim Austritt hatte seine Ebene eine Drehung von 45° ausgeführt. Der größte Teil von dem in die Röhre NS eintretenden Licht wird durch seine schließliche Transmission und Reflexion bei ab nicht beeinflußt, während ein Teil davon in derselben Ebene wie das in EW eintretende Licht polarisiert wird. Wenn jedoch das natürliche Licht beim Durchgange durch die Spule NS über einen Winkel von 45° gedreht wurde, so wurde der bei ab eine Polarisation erfahrende Teil in zwei rechtwinklige Komponenten aufgelöst, von denen die eine zu dem gedrehten polarisierten Lichte, welches aus der Röhre EW austritt und daher nicht imstande ist zu interferieren, in jeder

1) Bei dem Interferometer in seiner hier vorliegenden Form wurde eine unversilberte Scheidefläche ab benutzt.

Spule um 45° gedreht und war daher zu weiterem Interferieren ungeeignet. Das Kriterium für die Rotation von natürlichem Lichte besteht bei der Form, in der der Versuch hier vorgenommen wurde, im Verschwinden aller früher zu beobachtenden Streifen.

Nun entsteht die Frage, ob die von natürlichem Licht gebildeten Streifen intensiv genug sind, um sichtbar zu sein, wenn keine Rotation natürlichen Lichtes stattfindet. Wenn der in das Feld des Fernrohres tretende Betrag natürlichen



Lichtes groß genug ist, daß die durch ihn gebildeten Streifen zu beobachten sind, wenn der andere Teil des Lichtes nicht interferiert, so dürfte das benutzte Verfahren von genügender Genauigkeit sein. Nach den Fresnelschen Formeln betrug das unbeeinflußte Licht ungefähr 26 Proz. des ganzen zur Bildung der Interferenzstreifen fähigen Lichtes. Um den Minimalwert zu finden, bei dem immer noch eine Beobachtung möglich wäre, wurde eine Reihe von Ablesungen bei eben polarisiertem Licht in folgender Weise vorgenommen: Nur in einer Spule wurde ein Feld erzeugt. Hierauf wurde die Strom-

stärke erhöht, bis die Banden zum Verschwinden kamen, und hierauf der Strom variiert, bis dieselben wieder auftraten und an dieser Stelle eine Ablesung vorgenommen. Der berechnete Wert des Drehungswinkels, der dem Unterschiede zwischen dem Stromwert, bei dem die Streifen sichtbar, und dem, bei dem sie völlig ausgelöscht waren, entsprach, gab ein Maß ab für die Empfindlichkeit vorliegender Versuchsanordnung. Ich fand als Mittelwert verschiedener Ablesungen, daß sich von 6 Proz. des Gesamtlichtes gebildete Streifen noch erkennen ließen. Das im vorhergehenden für die Drehung von natürlichem Licht angegebene Kriterium bestand denn auch im Verschwinden aller vorher zu beobachtenden Streifen.

Die eben beschriebene Untersuchung wurde auf Anregung von Hrn. Dr. D. B. Brace unternommen und in den Laboratorien der Universität Nebraska ausgeführt. Hrn. Brace möchte ich für sein freundliches Interesse und seine Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

Lincoln, Nebraska, Physikal. Institut der Universität, 6. August 1903.

(Eingegangen 30. Dezember 1903.)

15. *Berichtigungen zu der Arbeit: „Über Versuchsfehler beim Messen der Rotationspolarisation absorbierender Substanzen“; von Fred. J. Bates.*

In meinen beiden, Band 12, Nr. 13 dieser Annalen erschienenen Arbeiten kommen leider eine größere Anzahl Druckfehler vor, die unvermeidlicher Umstände halber erst jetzt verbessert werden können:

Seite 1080, Zeile 4: anstatt „drei“ lies „beiden“,
„ 1081, „ 10: „ „Amplituden“ lies „gleiche Ampl.“,
„ 1081: Die rechte Seite der Gleichung (IV) ist $\frac{\sin^2 \alpha_r}{K} + \sin^2 \alpha_r$,
„ 1083, Zeile 2: anstatt 4,770 lies 4,77°,
„ 5: „ 4′ „ 0,4′,
„ 17: „ 4,1° „ 4,1′,
„ 1089, „ 15: „ „Intensität“ lies „Weite“,
„ 15: „ K lies $\mu\mu$,
„ 1094, „ 26: „ 0,2 mm lies 0,02 mm.

In den Tabellen auf den Seiten 1097 ff. hatte die zweite Lösung die Konzentration 0,000 024 und nicht 0,000 025. Schließlich auf Seite 1100, Zeile 33 ist zu lesen „anomale magnetische Rotation“ anstatt „Anomalie“.

Zugleich möchte ich im Anschluß an meine Arbeit über die magnetische Rotationsdispersion von Lösungen von Substanzen mit anomaler Dispersion die Tatsache hervorheben, daß die Konzentration der von mir untersuchten Lösungen dieselbe war wie die, für welche Schmauss deutliche anomale magnetische Rotationsdispersion erhielt. Durch direkten Vergleich beider Apparate fand ich die Empfindlichkeit des meinigen zehnmal größer als die des anderen. Dies wird leicht ersichtlich, wenn meine Werte in derselben Weise wie die Schmaussschen als Kurven aufgetragen werden. Für jede Lösung erhalten wir praktisch eine gerade Linie, deren Ordinaten kleiner sind als der von ihm angegebene wahrscheinliche Fehler. Ich glaube diese Linie war durch die Fehler des Apparates bedingt und es war mir daher in keinem Falle möglich, eine Anomalie zu entdecken.

(Eingegangen 3. Februar 1904.)

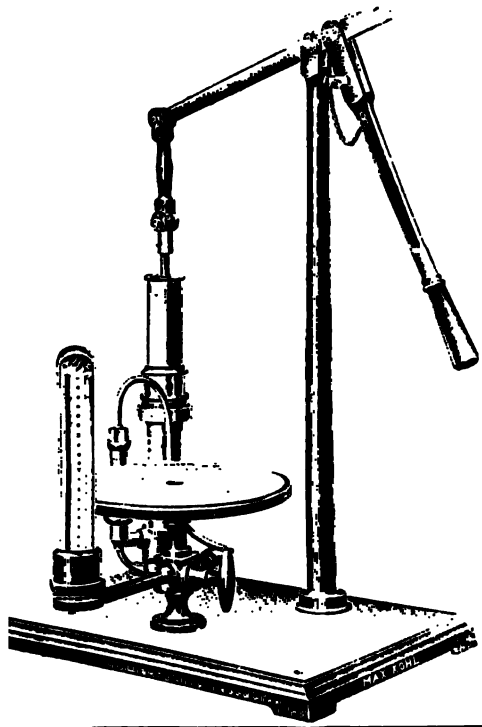
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

MAX WOLZ in Bonn a. Rh.

Werkstätte für wissenschaftliche Präcisions-Instrumente.

Physikalische Instrumente:

Spektrometer nach Raps (Zeitschr. f. Instrum.-Kunde. 1887. H. 8 und Handb. d. Spektrosk. von H. Kayser, pag. 495) bis zu den Einfachsten. **Refractometer** nach Pulfrich. **Kathetometer. Ablesefernrohre** von den Einfachsten bis zu den Vollkommensten. **Apparat zum Ausmessen von Spektrophotogrammen** nach Kayser (Handb. des Spektrosk. von H. Kayser, pag. 644). **Längen- und Kreisteilmaschinen** f. d. verschied. Zwecke. **Lithographie von Sternkarten:** Bonner Sternkarten. II. Serie, Schönfeld. **Atlas stellarum variab.** J. S. Hagen, S.J.



Vakuum-Pumpen

(sogenannte Ölpumpen)

liefern je nach Grösse $^{3}/_{10}$, $^{14}/_{100}$ bis $^{1}/_{1000}$ mm Vakuum;

bei Transmissionsantrieb ist eine weitere Erhöhung des Vakuums möglich!

Vakuummeter

nach Mac Leod-Kahlbaum,
bis 0,000001 mm Vakuum,

sowie

alle anderen physikalischen und chemischen Apparate und Einrichtungen kompletter Laboratorien

liefert als Spezialität

MAX KOHL,

Chemnitz i. S.

Preislisten kostenlos!

Perorto

Farbenempfindlichste Momentplatte nach
Prof. Dr. Miethe und Dr. Traube.
Otto Perutz, Trockenplattenfabr., München.
Illustrierter Katalog „Ph"
für Platten und Apparate gratis.

Man verlange gratis und franko das soeben erschienene

Spezialpreisverzeichnis

über

Selen-Zellen und Selen-Apparate,

System **Ruhmer,**

von

☛ RUHMERS' ☚

Physikalischem Laboratorium.

Berlin S.W. 48.

Neu: **Selen-Zellen flacher Form** in rundem Hartgummigehäuse, für wissenschaftliche und Gebrauchszwecke.
D.R.P. 146262. D.R.P. ang. D.R.G.M. 201140.

Selen-Zellen zylindrischer Form in evakuierter Glasbirne mit Gewindefassung.
D.R.P. 147113. D.R.P. ang. D.R.G.M. 169252.

Komplette Instrumentarien zum Nachweis der Lichtempfindlichkeit des Selens.

Selen-Zündapparate. D.R.P. 136094.

Apparate für intermittierende Beleuchtung des Selens.

Apparate für Lichttelephonie mittels Acetylen- oder Bogenlichts.

Photographophone neuester Konstruktion.

☛ *Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist wohl die Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hülfe derselben gelang, eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von* **15 km** *herbeizuführen, ein bisher von keiner anderen Seite auch nur annähernd erreichtes Resultat.*

LEPPIN & MASCHE, Berlin S.O.,

Engelufer 17.

Elektrische Centrifugalmaschine.

D.R.G.M.

Für Anschluß an Starkstromleitungen.
Gleichzeitig Antriebsmotor.
Tourenzahl regulierbar und meßbar.
Vorhandene Nebenapparate verwendbar.

Näheres „Berichte".

Preis Mk. 160.—.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

NEW WAVE-LENGTH SPECTROSCOPE

(CONSTANT DEVIATION).

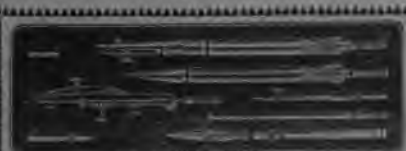
ADVANTAGES:—

Collimator & telescope are fixed at right angles; thus the spectroscope will **stand in a corner**, and is **always ready for use & in a adjustment.** The prism is of special form and automatically sets itself at **minimum deviation.**

Can be supplied **reading in wavelengths direct. Great accuracy readily** obtainable in wavelength measurements.

Descriptive Pamphlet of this Spectroscope price free on application to

ADAM HILGER, LIMITED. 75 A. Camden Road, LONDON N.W.



PARIS 1900
GRAND PRIX

Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren,
Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. München.
Gegründet 1841.

Dr. Steeg & Reuter,

Optisches Institut,

Homburg v. d. Höhe.

Specialität:

Apparate und Präparate zur Polarisation, Interferenz, Beugung, Fluorescenz, Phosphorescenz des Lichts.

Orientirte Schliffe von Mineralien und künstl. Krystallen.

Präparate aus Kalkspath, Quarz, Steinsalz, Gyps und Glimmer.

Spectral-Apparate, Glasprismen und Linsen aller Art. — Röntgenschirme.

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig.

Schlömilchs

Handbuch der Mathematik.

Zweite Auflage.

Bearbeitet von

Prof. Dr. **R. Henke** und Prof. Dr. **R. Heger** (Dresden).

Band I. **Niedere Mathematik.**

Band II. **Höhere Mathematik.** I. Teil.

Band III. **Höhere Mathematik.** II. Teil.

Brosch. à Band ℳ 20.—, geb. à Band ℳ 22.50.

Bd. I. gr. 8°. XII. 611 S. Mit 321 Figuren.

Bd. II. gr. 8°. VIII. 765 S. Mit 281 Figuren und 12 Tafeln.

Band III (unter der Presse).

Induktorien

mit Präcisions-Spiralstaffelwicklung Pat. Klingelfuss von bisher unerreichter Leistungsfähigkeit und Haltbarkeit.

Auf wissenschaftlicher Basis construirt.

Für physikalische Arbeiten, Röntgenapparate, Hertz'sche Schwingungen, drahtlose Telegraphie, Teslaströme und zum Laden von Sündanoden

auch bei Dauerbetrieb

gleich hervorragend. Reich illustrirte Preisliste zu Diensten.

Fabrikanten: Fr. Klingelfuss & Co. Basel (Schweiz).

Carl Zeiss, Optische Werkstaette, Jena.

Berlin NW., Dorotheenstraſse 29. II.
London W., 29 Margaret Street, Regent Street.
Wien IX/3., Ferstelgasse 1, Ecke Maximilianplatz.
Frankfurt a. M., Kaiserstraſse 16.
Hamburg, Rathausmarkt 8. St. Petersburg.

Spektrometer und Refraktometer (14 verschiedene Modelle);
Prismen jeder Art und optisch-physikalische Präparate, Spektroskope;
Dickenmesser, Komparatoren, Sphärometer und Fokometer;

Pulfrich's Stereo-Komparator, großes Modell, für Platten 24 × 30 cm.

Dilatometer, Interferenzmeſsapparate, Interferenztischchen etc.
Interferenzrefraktometer und Schlierenapparate;
Stereo-Telemeter und Stereo-Komparatoren;
Neues Stereoskop, Stereo-Mikrometer und Stereo-Diapositivbilder;
Abbe'sches Diffraktionsmikroskop (Neukonstruktion).

Beschreibungen und Preislisten gratis und franko.
Bei Bestellungen Bezugnahme auf diese Annonce erbeten.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämmtlichen beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.

Mechanisches Institut,

gegründet 1886.

Specialität:

Physikalische und analytische Waagen

in garantirt vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Schnellschwingende

Waagen für Chemiker.

Preislisten kostenfrei.

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20.

Ampèremeter und Voltmeter

nach Deprez-d'Arsonval, D. R.-P.

Funkeninduktoren, Condensatoren, Spiegelgalvanometer.

Thermosäule

nach Angabe des Herrn Prof. Dr. Rubens.

Pyrometer

zum Messen von Temperaturen bis 1600° Celsius.

Galvanometer

zu Linde'schen Kältemessungen.

= Preisverzeichnisse kostenfrei. =

E. LEITZ,

Optische Werkstätte,

Wetzlar.

Zweiggeschäfte: Berlin NW., Luisenstr. 45.

New York 411 W., 59th Str. Chicago 32—38, Clark Str.

Vertreter für München:

Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Neuestes Modell 1902.

Mikroskope,

Mikrotome, Mikrophotogr. und Projektions-Apparate.

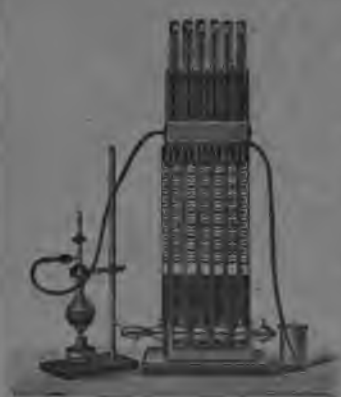
Preislisten kostenfrei.

J. Robert Voss,
Mechaniker,
Berlin N.O. 18, Pallisadenstr. 20.

Specialität:
Influenz-Elektrisir-Maschinen
aller Systeme
(auch die dazu gehörigen Nebenapparate)
und
Metall-Spiral-Hygrometer
in allen Ausführungen.

Physikalische Apparate.

Projektionsapparate. Modelle jeder Art.
Röntgen-Apparate.



Neu!

Differential- und Doppel-Thermoskop und **sechsfaches Manometer** nach Kolbe.
Spinthariskop nach Crookes. Prospekt zu Diensten.
Apparat für elektrische Drahtwellen nach Coolidge-Blondlot.
Universal Instrumentarium nach Seibt-Ernecke für Resonanz elektr. Schwingungen, elektr. Wellen in Spulen, Tesla-Versuche, Abstimmung in der Marconi-Telegraphie.

Neue Preisliste, über
4000 Nummern und 1600 Abbildungen enthaltend,
erschienen.

Ferdinand Ernecke,
Hoflieferant Seiner Majestät des Kaisers.
Königgrätzerstr. 112, **Berlin S.W.**, Königgrätzerstr. 112.
— Begründet 1880. —

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Spezialitäten: Momentplatten für Astronomische und **Röntgen-aufnahmen**, für Aufnahmen fliegender Geschosse, **Microphotographie** und Spectralphotographie. — **Orthochromatische** Platten, **Abziehplatten** für Lichtdruck, Celluloïdfolien. — **Rollfilms** für Tageslichtcameras.

Trockenplattenfabrik a. Actien
vormals **Dr. C. Schleussner** in **Frankfurt a. M.**

Doppelwandige Glasgefäße
Pentanthermometer bis — 200° C. } zur flüssigen Luft,
einfache und automatische **Quecksilberluftpumpen**, **Röntgenröhren** mit und ohne **Vakuumregulierung**, **ff. Glasschliffe** und **-Hähne**, **Markonirohren** etc. empfiehlt

R. BURGER, Berlin N. 4, Chausseestr. 2E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke,

sowie **Räder**, **Triebe**, **Zeigerwellen**, **schräge Triebe** und **Zahnstangen**

fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

A. Eberhard vorm. R. Nippe,

Berlin NW.,
Platz vor dem neuen Thor 1a.

Chemische und physikalische Apparate und Gebrauchsgegenstände.

Glas-Präcisions-Instrumente und volumetrische Messapparate.
Feinste Thermometer von —200 bis + 550 Grad.
Quecksilber-Luftpumpen neuester Construction.
Vacuum-Röhren
nach *Braun, Crookes, Geissler, Hittorff, Puluj, Röntgen* etc.
Spectral-Röhren.
Mikroskope, Photometer,
Projectionsapparate, Spectralapparate aller Werkstätten
zu Originalpreisen.
Physikalisch-analytische Waagen und Gewichte aller Systeme.
Complete Einrichtung von Laboratorien u. Vorlesungsräumen.
Sachgemässe Kostenanschläge. Aeusserst billige Preise.
Grosse illustrirte Preislisten kostenlos.

Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler, verbessert nach Dr. Krocker (gesetzlich geschützt).

Reiniger, Gebbert & Schall

Elektrotechnische Fabrik

Erlangen.

Filialen: **Berlin N,** Friedrichstr. 131c. **München,** Sonnenstr. 15. **Wien IX/3,** Universitätsstr. 12.

Hamburg, Büschstrasse 12. **Budapest,** Altgasse 42.

Specialitäten:

Röntgen-Apparate neuester Konstruktionen,

Finsen- und Funkenlichttheil-Apparate,

Influenzmaschinen (D. R. P.), verbessertes System,

Töpler-Holtz,

von **hervorragender Leistungsfähigkeit,**

Volt- und Ampèremeter, Kleinmotore,

Schalttableaux für Schulen, Ventilatoren etc.

Prospecte etc. gratis.

Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.

Keine Dämpfe kein Geruch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

Alleiniger Fabrikant: **Julius Pintsch, Berlin O.,** Andreasstr. 72/73.

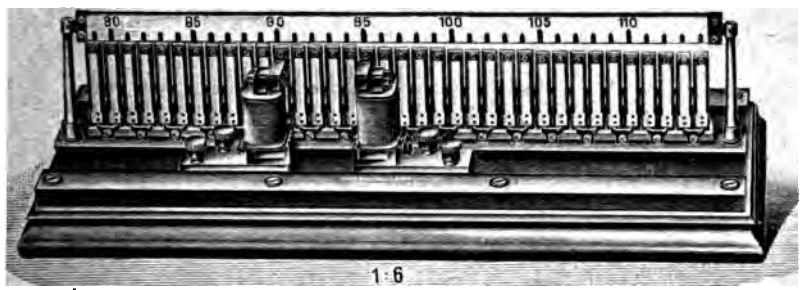
Niederlage auch bei **E. Leybold's Nachf., Cöln a. Rhein.**

Hartmann & Braun A.-G.,

Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Meſsinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Preußische Goldene Staatsmedaille.

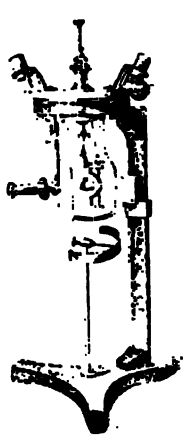


1131

Elektro-akustisches Tonometer (Frequenzmesser); mit zwei Magnetpaaren ausgerüstet dient derselbe als **Schlüpfungsmesser.**

Direkt zeigende Phasenmesser. Elektrodynamometer.

Kataloge auf Verlangen zur Verfügung.



W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. Dr. M. APEL.

Geschäftsgründung 1808. **Göttingen.** Geschäftsgründung 1808.

Chemische und physikalische Apparate.

Specialität:

Rauchgasapparate. Calorimeter zur Bestimmung des **Brennwertes** der verschiedenen **Brennstoffe** und von **Gasen**, nach **Ferd. Fischer.**

Thermometer nach **Ferd. Fischer.** (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach **Nernst.** (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.

Totalreflectometer nach **Kohlrausch.**

Demonstrationsapparate n. **Bohrendsen** und **Grimsehl.**

Krystallmodelle aus **Holz** und **Glastafeln** nach **Klein, Naumann** und **Rose.**

Milchprüfungsbestecke nach **Tollens.**

MEISER & MERTIG,

Dresden-N. 6.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate jeder Art

in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

Funkeninduktoren.

Hochspannungsapparate.

Apparate für drahtlose Telegraphie.

Röntgenapparate.

Chemische Geräte.

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

Neue Preisliste kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1878.

Auszeichnungen: *Staatsmedaillen.*

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.

Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 Gold-Med.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

Ausführung von Uhrwerken und Apparaten für wissenschaftliche und technische Zwecke. Mikrometerraster $^1/_{100}$–$^1/_{500}$ mm direkt. Ablesung.

Max Stuhl, Berlin.

Glastechnische Werkstätte

jetzt

130 Friedrichstrasse 130

(früher Philippstr. 22).

Elektrische und mechanische

Apparate nach Angabe.

Werkstatt für Feinmechanik, elektrotechnisches Laboratorium

H. BICHTELER, Glashütte i. S.

ARTHUR PFEIFFER,

Wetzlar O.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik

Gegründet 1890.

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der

Patent-Geryk-Öl-Luftpumpen

in Deutschland.

Komplette Pumpeneinrichtung für Hand- und Motorbetrieb (1/4 P. S.).

Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Sämtliche Apparate zu Untersuchungen im hohen Vakuum, darunter Originalkonstruktionen:

Rezipient mit Flüssigkeitsdichtung D.R.G.M.
Umschalt- und Vielweghähne D.R.P. a. und D.R.G.M.
Durchgangshähne D.R.G.M.
Trockenröhre mit auswechselbarem Einsatz für P_2O_5. D.R.G.M.

Verlag von Joh. Ambr. Barth in Leipzig

Die Akkumulatoren.

Eine gemeinfassliche Darlegung ihrer Wirkungsweise, Leitung und Behandlung.

Von Prof. Dr. K. Elbs.

Dritte Auflage. Preis 1 Mark.

Ein treffliches Buch ist die

Anleitung zum Glasblasen

von Prof. Dr. H. Ebert.

2. Auflage. M. 2.—

Technische Waagen verschiedener Construction
Preislisten in drei Sprachen. Weltausstellung Paris 1900 Gold. Medaille.

Kurzarmige Analysen-Probir-Waagen
eigener patentirter Construction.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Luftelektrizität und Sonnenstrahlung.

Von H. Rudolph. 8°. 24 Seiten. Mit Figuren und Kurven im Texte. ℳ 1.—

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890:

Präcisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1890, Januar 1890, Nov.-Dezember 1896.)

Normal-Widerstände von 0,0001—10000 Ohm. — **Abzweig-Widerstände** von 1—0,0001 Ohm mit Petroleum- oder Luftkühlung, für Stromstärken bis 5000 Amp. — **Rheostaten, Wheatstone'sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken** für alle Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — **Kompensations-Apparate** für genaue Spannungsmessung in 3 Modellen. — **Normal-Elemente**, beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präcisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

— Illustrierte Preisliste. —

Günther & Tegetmeyer.

Werkstatt für Präcisions-Mechanik

Braunschweig.

Wasserstrahl-Duplicatoren, Actinometer, Quadrantenelectrometer, Electroscope mit Natriumtrockmung (D.R.G.M.), Apparate zur Messung der Electricitätszerstreuung in der Luft, etc. nach **Elster** und **Geitel.**

Registrir-Electroscope nach **Birkeland** (konstruirt für den Gebrauch bei der norwegischen Nordlicht-Expedition 1899).

Photothendelite für meteorologische Zwecke nach **Koppe.**

Ablesefernrohre.

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Berliner Werk

Berlin SW., Markgrafenstrasse 94.

Kompensationsapparat für genaue Strom- und Spannungsmessungen.

Normalwiderstände für Strommessungen.

Messbrücken für **Thomson**'sche und **Wheatstone**'sche Schaltung.

Widerstände aus **Manganindraht** von 1 und 10 Megohm in je 10 Stufen.

Spiegelgalvanometer nach **Deprez-d'Arsonval.**

Spiegel-Elektrodynamometer.

Panzergalvanometer.

Apparate für Eisenuntersuchungen.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 8 Sprachen gratis und franco.

Vertreter in allen Ländern.

Fabrik-Marke.

Emil Gundelach, Gehlberg i. Thüringen.

Glashütte mit Regenerativ-Gasofen. ❀ Glasbläserei mit eigener Gasanstalt.

Schleiferei. Tischlerei. Dampfbetrieb.

Röhren, Kolben, Bechergläser, Kochflaschen etc. aus Glas von hohem Widerstand gegen chemische Agentien und gegen Temperaturwechsel.

Sämmtliche Glasapparate und Instrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Doppelwandige Flaschen nach **Dewar** für flüssige Luft, versilbert und unversilbert.

Elektrische Vacuumröhren nach *Geissler, Crookes, Hittorf, Tesla, Moore* etc.,

speciell:

Röntgenröhren von hervorragender Qualität.

(**Röntgenröhren** für Wehnelt-Unterbrecher, D.R.P. No. 109450, **Röntgenröhren** mit Regenerirvorrichtung, D.R.P. No. 103139.)

Bis jetzt wurden über 35000 Stück Röntgenröhren geliefert.

Die Firma besteht seit 1853.

Neuer Widerstand oder Brücke mit 100- u. 1000-Teilung.
D. R.-Patent a.

Elektrizitätsgesellschaft

Gebr. Ruhstrat,

Göttingen.

Schlitten-, Schiefer- und Porzellanwiderstände von 15 *oM* an.

Schalttafeln
auf Schiefer oder Marmor
für physikalische,
medizinische und technische Zwecke.

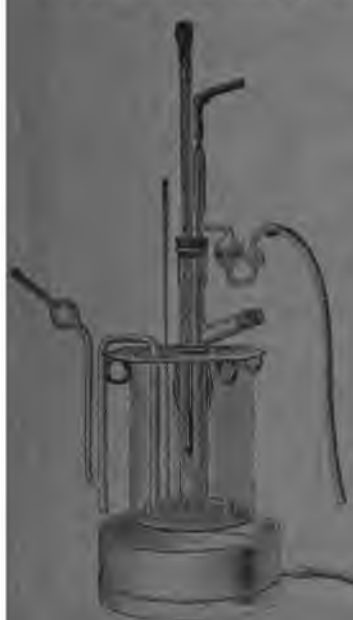
Dynamo-Maschinen, Elektromotoren,
sowie
Messinstrumente jeder Art.

Anfertigung elektrischer Apparate nach Zeichnung oder näherer Angabe.

Hauptkatalog gratis.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.



Thermometer
für
Wissenschaft und Technik,
von —200 bis +575°.

Barometer
mit constantem Nullpunkt,
eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren
nach
Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen, Puluj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

Dr. H. Geissler Nachf. Franz Müller,
Bonn a. Rhein.
Wissenschaftliche Glasapparate und Präcisionsinstrumente.
Specialität:
Elektrische Röhren nach *Geissler, Crookes, Puluj, Hittorff, Arons, Lecher etc.* — **Spectralröhren** (Argon- u. Helium-Röhren).
Röntgen-Röhren. — Braun'sche Kathodenstrahlröhren.
Tesla-Röhren. — **Luftpumpen** nach *Geissler* und *Töpler-Hagen.*
Rowland's Diffractionsgitter und Photogramme.
Feine Thermometer.
Kataloge auf Verlangen.

HANS BOAS BERLIN O.
Elektrotechnische Fabrik Krautstraße 52

Funkeninduktoren
von höchster Nutzleistung im Vakuum hergestellt mit keilförmiger Isolation der Sekundärspule eigenen patentierten Systems

Meßinstrumente
Spiegel und Zeiger
Galvanometer
Kondensatoren

Telegraphen- und Telephonapparate
Apparate für Laboratoriumgebrauch

E. DUCRETET
PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS

Grands-Prix Expositions Universelles | Paris 1889 — Anvers 1894 | Bruxelles 1897 — Paris 1900

Cabinets de physique complets.
Appareils de Mesures électriques.
Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet adoptée pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1902, R. G. et E. D. Materiels complets Rayons X Röntgen, ac courants de haute fréquence.
Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.
Pile primaire du **Dr. A. Vinzent.**

Paul Kröplin,
Rützow i. M.,
mech. Werkstätte für Lehrmittel,
Motorbetrieb,
liefert als Specialität
Apparate
nach Hertz, Marconi, Tesla, Röntgen, Lodge und Lecher.
Funkeninductoren
und polarisirte Relais.

Verlag von Joh. Ambr. Barth, Leipzig.

Kristallisieren
und
Schmelzen.
Von
Dr. Gustav Tammann,
Professor an der Universität Göttingen.
8°. X, 348 Seiten u. 88 Abbildungen. 1903.
broch. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

C. A. Steinheil Soehne,
optisch-astronomische Werkstätte,
Gegründet 1855. **MÜNCHEN.** Gegründet 1855.

Astronomische Fernrohr-Objektive, zwei- und dreiteilig in allen Dimensionen bis 1 Meter Durchmesser, normaler Konstruktion und ohne sekundäres Spektrum.
Okulare, Prismen, Lupen, Plan- und Planparallelgläser.
Komplette astronomische Fernrohre mit und ohne Stativ.
Ablesefernrohre, terrestrische Hand- und Stativfernrohre, Prismenfernrohre.
Spektralapparate verschiedenster Konstruktion, mit und ohne photograph. Einrichtung.
Spektroskope, Spektrographen und Goniometer.
Preislisten frei auf Verlangen, auch über photographische Objektive und Zubehör.

RICH. SEIFERT & CO., Hamburg 13.
Elektrotechnische Werkstätt.
Komplette Röntgeneinrichtungen nach Dr. Albers-Schönberg und Dr. Walter.
Schutzvorrichtungen — gegen Röntgenstrahlen. —
Starkstrom-Dekadenwiderstände,
analog denen nach Zehnern, Einern und Zehntel Ohm abgestuft, ermöglichen eine sehr feine Regulierung, sowie eine genaue Vorausberechnung der Stromstärke und sind besonders für Versuchszwecke zu empfehlen.
Die fahrbaren Regulirtische werden auf Wunsch ebenfalls mit Ohm-Dekaden versehen und können außer zu Röntgenzwecken auch zu allen sonstigen Starkstromversuchen benutzt werden.
Kostenanschläge und Preislisten gratis.

UNGER & HOFFMANN

Gegründet 1878 DRESDEN-A. 16 Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, Öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.

Alle Lichtquellen. Laternbilpositive in reichster Auswahl.

Preislisten und technische Auskunft jederzeit zu Diensten.

GEORG WESTPHAL,

Celle (Hannover).

Mechanisches Institut

(gegründet 1860).

Wagen und Gewichte für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke

in vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

C. M. J. Bodien, Hamburg IV. 200.

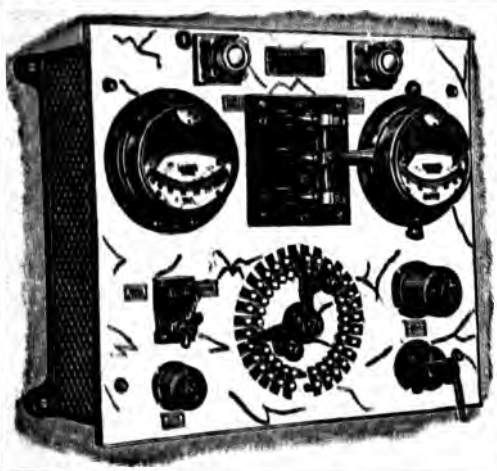
fertigt als Specialität elektrische Glühlichtlampen nach Muster oder Zeichnung ferner Geissler-Röhren, Crookes-Apparate & Glasinstrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Max Kohl, Chemnitz i. S.

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

fertigt als Spezialität:

Funkeninduktoren für Gleichstrom mit veränderlicher Selbstinduktion für jede Spannung bis 250 Volt durch Induktionskommutator nach Kohl; für **Wehnelt-Unterbrecher** mit **einem** oder **mehreren Kontaktstiften; gleichgut** geeignet für **Anwendung weicher, mittelweicher** oder **harter** Röntgenröhren; für **ganz langsame** und **allerschnellste** Unterbrechungen verwendbar; die Einrichtung ermöglicht größte **Schonung** der Röntgenröhren bei sehr geringem Stromverbrauch und liefert **großartige Durchleuchtungen.** Bei Anwendung der **Schaltung** für **mittelweiche Röhren** kann **jeder rotierende Unterbrecher** in **voller Leistung** betrieben werden.



Experimentier-Schalttafeln!

A) zum Anschluß an 110—160 Volt für Stromstärken bis 12 bezw. 24 Ampere.

B) zum Anschluß an 220 Volt für Stromstärken bis 10 bezw. 20 Ampere.

☛ *Man verlange ausführlichen Spezial-Prospekt!*

Neu! **Wechselstrom-Gleichrichter** *Neu!*

zum direkten Laden von Akkumulatoren an einer Wechselstrom-Anlage und zum Betrieb von Funkeninduktoren durch Wechselstrom, ohne daß ein weiterer Unterbrecher nötig ist.

Projektionsapparate für Bogenlicht, Gleich- oder Wechselstrom, Kalklicht, Acetylen- oder Zirkonbeleuchtung, mit angesetzter optischer Bank.

Durch Aufsetzen einzelner Ansätze ist es möglich, die Projektions-Apparate für alle Polarisations-, Doppelbrechungs-, Interferenz- und Lichtbrechungsversuche zu verwenden!

Fabrikation physikalischer Instrumente, Apparate nach Tesla, Hertz, Marconi.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen u. chem. Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Neu! Spintharisskope, Neu!

mit Fluorescenzschirm und einer kleinen Menge Radium auf beweglichem Zeiger, um die außerordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen. Preis Mk. 28.—.

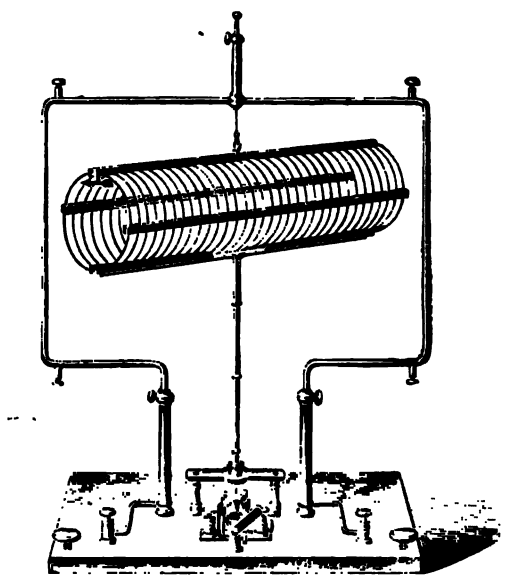
Spezial-Listen auf Wunsch.

E. Leybold's Nachfolger

Mechanische Werkstätten

Köln a. Rh.

Gegründet 1853 Gegründet 1853



Ampère'sches Gestell mit weithin sichtbaren beweglichen Leitern zum direkten Anschluß an eine Starkstromleitung.

Preisliste
über Neue Apparate und Versuche auf Verlangen.

Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Böhmestr. 9.**
Mit einer Beilage von: Siemens & Halske, Berlin.

1904. № 5.

Stanford University Libraries JUN 14 1904

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 13. HEFT 5.

DER GANZEN REIHE 318. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND HERAUSGEGEBEN VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 12. April 1904.)

Inhalt.

		Seite
1.	Gustav Mie. Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator	857
2.	A. Pflüger. Die Anwendung der Thermosäule im Ultraviolett und die Energieverteilung in den Funkenspektren der Metalle	890
3.	A. Eichenwald. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde	919
4.	A. Bestelmeyer. Die Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur	944
5.	Karl L. Schaefer und Otto Abraham. Zur Lehre von den sogenannten Unterbrechungstönen	996
6.	H. Alt. Über kalorimetrische Messungen an flüssigem Sauerstoff und flüssigem Stickstoff	1010
7.	Fr. Heimbrodt. Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Konzentration, bestimmt mit Hilfe gekrümmter Lichtstrahlen	1028
8.	K. Simons. Die Dämpfung elektrischer Schwingungen durch eine Funkenstrecke	1044
9.	F. Kohlrausch und L. Holborn. Über ein tragbares Torsionsmagnetometer	1054
10.	F. A. Schulze. Über die Schallgeschwindigkeit in sehr engen Röhren	1060
11.	F. A. Schulze. Zur Erklärung schrägliegender Kundtscher Staubfiguren	1067
12.	J. Bernstein. Bemerkung zu dem Aufsatz von L. Hermann „Über elektrische Wellen in Systemen von hoher Kapazität und Selbstinduktion	1073
13.	S. Scharbe. Einige Bemerkungen zur Abhandlung des Hrn. Hollmann: „Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische“	1076
14.	G. Berndt. Bemerkung zu der Abhandlung: J. M. Eder und E. Valenta, Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels	1078
15.	E. Warburg. Über spontane Desozonisierung, Berichtigung	1080

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen**, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1904. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator;* *von Gustav Mie.*

1. Das, wodurch sich die elektrischen Ströme (Entladungen) in Gasen von den Strömen in Elektrolyten und Metallen so auffällig unterscheiden, ist hauptsächlich, daß sich in den Gasen wegen der langsamen Neubildung von Ionen durch den Strom selbst freie Ladungen anhäufen, während in den eigentlichen Leitern immer so überreichlich Ionen vorhanden sind, daß alle Ladungen, die sich etwa im Innern bilden wollten, sofort zerstreut werden. Berechnet man den Einfluß dieser inneren Ladungen auf das elektrische Feld, das den Strom erzeugt, so bekommt man in dem Falle plattenförmiger paralleler Elektroden eine auf den ersten Blick ganz einfach aussehende Differentialgleichung (6). Aber auf diese Differentialgleichung kann man merkwürdigerweise, wie mir Mathematiker von Fach bestätigt haben, von den Hilfsmitteln der modernen Analysis nichts anwenden. Nur, wenn die von mir mit $\varkappa$ bezeichnete Größe verschwindet, kann man, was übrigens schon J. J. Thomson bemerkt hat, die Integration auf eine Quadratur zurückführen. Will man das Feld wirklich berechnen, so muß man sich im allgemeinen auf Näherungsformeln beschränken. Ja auch so sind die Rechnungen noch sehr umständlich, wie man aus dem Folgenden sehen wird. Aus diesem Grunde sind sie wohl auch bisher noch nicht durchgeführt. Es scheint mir aber, daß es bei vielen Messungen doch wohl wichtig sein muß, eine gute Grundlage zur Ausrechnung der gesuchten Konstanten der Gasionen zu haben. Deswegen veröffentliche ich die folgenden Berechnungen, in denen ich allerdings, um zunächst überhaupt passende Ansätze für Näherungsformeln

zu gewinnen, einige Komplikationen fürs erste noch außer acht gelassen habe. Ich habe nämlich angenommen:

1. *daß die Oberflächenwirkung der Elektroden auf die Ionisierung des Gases gegen die „Volumenionisierung" vernachlässigt werden könne,*

2. *daß die Diffusion der Ionen vernachlässigt werden könne,*

3. *daß die Wirbelbewegungen des Gases (die natürlich eine Konvektion der Ionen bewirken) keinen wesentlichen Einfluß auf die Verteilung der freien Ladungen haben.*

Die unter 1. und 2. genannten Wirkungen ließen sich jedenfalls (wenn nötig) ohne große Schwierigkeiten in die unten gegebenen Formeln noch einfügen. Die Wirbelbewegungen dagegen wird man wohl praktischer durch geeignete Versuchsanordnungen möglichst unschädlich zu machen suchen.

Ferner ist noch angenommen, daß die Stromstärken so klein sind, *daß keine Ionisierung durch Ionenstoß in Betracht kommt.*

Unter diesen Annahmen erhält man, wie schon bekannt ist, die Differentialgleichung (6). Damit aber über die von mir gewählten Bezeichnungen und Maßeinheiten keine Unklarheit bestehen möge, will ich diese Gleichung noch einmal kurz herleiten.

Alle Größen, die sich auf die Kationen oder auf die Kathode beziehen, will ich durch den Index K kennzeichnen, die Beziehung zu den Anionen oder zur Anode soll dagegen durch A angedeutet werden. So sei ν_K *und* ν_A *der Gehalt des Gases an positiven und negativen Ionen, ausgedrückt in Grammäquivalenten pro Kubikzentimeter.* Dann geht nach den Untersuchungen J. J. Thomsons und anderer Forscher dieser Gehalt dem Gase mit der Zeit verloren, wenn keine besondere ionisierende Wirkung vorhanden ist, und zwar nach dem Gesetz:

$$\frac{d\nu_K}{dt} = \frac{d\nu_A}{dt} = -\alpha . \nu_K . \nu_A ,$$

wo α eine für das Gas charakteristische Konstante ist. Nach den Messungen von R. K. Mc Clung[1]) ist z. B. für Luft $\alpha = 0{,}98 . 10^{18}$, und zwar unabhängig vom Druck. (Ich habe α umgerechnet in das in der Elektrochemie allgemein übliche

1) R. K. Mc Clung, Phil. Mag. (6) 3. p. 283. 1902.

Maßsystem, wo das Gehalt an Ionen, ν, in Grammäquivalenten gerechnet wird, während die englischen Forscher ihn meist durch die Zahl der einzelnen wirklichen Ionen angeben.)

Ist nun eine ionisierende Kraft (z. B. Röntgenstrahlen) vorhanden, die q Grammäquivalente Ionen in jeder Sekunde hervorbringt, so wird

$$\frac{d\nu_K}{dt} = \frac{d\nu_A}{dt} = q - \alpha . \nu_A . \nu_K .$$

Schließlich tritt ein Gleichgewichtszustand ein, der charakterisiert ist durch die folgende, *dem Dissoziationsgesetz der eigentlichen Elektrolyte entsprechende Gleichung*:

$$q = \alpha . \nu_A . \nu_K .$$

Verbindet man die Platten eines ebenen Luftkondensators, zwischen denen eine ionisierende Wirkung tätig ist, mit einer Elektrizitätsquelle, so gehorcht der Strom bekanntlich nur bei niedrigen Spannungen dem Ohmschen Gesetz und strebt bei höheren einem Maximalwert zu, den er schließlich konstant beibehält, und der dadurch charakterisiert ist, daß der Strom in jeder Sekunde die gesamte Zahl von Ionen, die die ionisierende Wirkung in einer Sekunde erzeugt, den Platten zuführt. Es sei $F = 0{,}965 . 10^5$ *Coulomb die Äquivalentladung, ferner* $2A$ *der Abstand der Kondensatorplatten in cm,* J *die Stromdichte in Ampère/qcm,* dann ist dieser Maximalstrom J_M:

$$J_M = q . F . 2A . \tag{1}$$

Wir bezeichnen den durch die Kationen vermittelten Strom durch J_K, den Strom der Anionen mit J_A, also:

$$J = J_K + J_A .$$

Das Koordinatensystem wollen wir so wählen, daß die x-Achse senkrecht zu den Kondensatorplatten gerichtet ist. Und zwar rechnen wir x entweder von der Anode zur Kathode hin, also im Sinne des Stromes: x_A, oder von der Kathode aus entgegengesetzt: x_K. Im folgenden wollen wir, *wenn nichts weiter bemerkt ist,* x *immer in dem Sinne* x_A *gebrauchen.* Es sei ferner ν_K' und ν_A' die Dichtigkeit der nur durch die Wirkung des Stromes angehäuften Ionen, das heißt:

$$F . \frac{d\nu_K'}{dt} = - \frac{dJ_K}{dx}, \qquad F . \frac{d\nu_A'}{dt} = + \frac{dJ_A}{dx} .$$

Die Geschwindigkeiten, die die beiden Ionengattungen bei einer Feldstärke von 1 Volt/Zentimeter annehmen, sollen u_A und u_K heißen, und zwar gerechnet in cm/sec. Für Luft bei Atmosphärendruck ist z. B. $u_A = 1{,}85$ cm/sec, $u_K = 1{,}34$ cm/sec. Ferner sei *E die Feldstärke, gerechnet in Volt Zentimeter*, also:

$$J_K = \nu_K . F . u_K . E; \quad J_A = \nu_A . F . u_A . E.$$

Im ganzen ändert sich nun bei konstantem Strom und konstanter Ionisationswirkung die Dichtigkeit der Ionen nach folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\nu_K}{dt} = q - \alpha . \nu_A . \nu_K - u_K \cdot \frac{d\nu_K . E}{dx},$$

$$\frac{d\nu_A}{dt} = q - \alpha . \nu_A . \nu_K + u_K \cdot \frac{d\nu_A . E}{dx}.$$

Ist der Strom stationär geworden, so ist zu setzen:

$$d\nu_K/dt = d\nu_A/dt = 0,$$

und wir erhalten so die bekannten *Fundamentalgleichungen für die Theorie der Ströme in Gasen:*

$$(2) \qquad \begin{cases} q - \alpha . \nu_A . \nu_K - u_K \cdot \dfrac{d\nu_K . E}{dx} = 0, \\ q - \alpha . \nu_A . \nu_K + u_K \cdot \dfrac{d\nu_A . E}{dx} = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist aber das Feld und damit der Strom noch nicht vollständig bestimmt. Wir müssen noch die Gleichung hinzufügen, die ausdrückt, *daß die Divergenzstellen des Feldes mit den freien Ladungen identisch sind:*

$$F . (\nu_K - \nu_A) = \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dx}.$$

Hier bedeutet ε_0 *die Dielektrizitätskonstante des Gases, die wir gleich der des reinen Äthers ansehen können. In dem von uns gebrauchten praktischen Maßsystem ist*

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 . 10^{11}} = 0{,}884 . 10^{-13}.$$

Wir wollen im folgenden den Quotienten $\varepsilon_0/F = 0{,}916 . 10^{-18}$ *durch den Buchstaben* ε bezeichnen.

$$(3) \qquad \nu_K - \nu_A = \varepsilon \cdot \frac{dE}{dx}.$$

Zunächst geben die beiden Gleichungen (2) durch Subtraktion

$$u_K \cdot \frac{d\,\nu_K \cdot E}{dx} + u_A \cdot \frac{d\,\nu_A \cdot E}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren:

$$F.(u_K.\nu_K.E + u_A.\nu_A E) = J. \tag{4}$$

J ist die Stromdichte, die also nach (4) in dem ganzen Zwischenraum zwischen den beiden Kondensatorplatten wie bei jedem stationären Strom konstant ist. Wir multiplizieren nun die beiden Gleichungen (2) mit u_A und u_K und addieren:

$$q.(u_K + u_A) - \alpha.(u_K + u_A).\nu_K.\nu_A - u_K.u_A \cdot \frac{dE.(\nu_K - \nu_A)}{dx} = 0.$$

Wir benutzen weiter Gleichung (3), die mit (4) kombiniert liefert:

$$\nu_K + \nu_A = -\frac{u_K - u_A}{u_K + u_A} \cdot \varepsilon \cdot \frac{dE}{dx} + \frac{2}{u_K + u_A}\frac{J}{F.E}$$

und:

$$\nu_K.\nu_A = -\frac{u_K.u_A}{(u_K+u_A)^2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{dE}{dx}\right)^2 - \frac{u_K - u_A}{(u_K+u_A)^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{J}{F}\frac{1}{E} \cdot \frac{dE}{dx} + \frac{1}{(u_K+u_A)^2}\frac{J^2}{F^2E^2},$$

und kommen so zu der Differentialgleichung für E:

$$u_K.u_A.\varepsilon.E^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(E \cdot \frac{dE}{dx}\right) - \frac{u_K.u_A.\alpha.\varepsilon^2}{u_K+u_A} \cdot E^2 \cdot \left(\frac{dE}{dx}\right)^2 - \frac{u_K - u_A}{F(u_K+u_A)} \cdot \alpha.\varepsilon.J.E \cdot \frac{dE}{dx}$$

$$- q.(u_K + u_A).E^2 + \frac{\alpha.J^2}{F^2(u_K+u_A)} = 0.$$

Diese Gleichung wird sehr viel übersichtlicher, wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{F^2(u_K+u_A)^2} \cdot \dfrac{J^2}{q} = a^2, \\ \dfrac{E^2}{a^2} = z, \\ \dfrac{u_A - u_K}{u_K + u_A} = \varkappa, \\ \dfrac{u_K + u_A}{\alpha.\varepsilon} = \lambda, \\ \dfrac{2.q.F}{J}x = \dfrac{J_M}{J} \cdot \dfrac{x}{A} = \xi. \end{cases} \tag{5}$$

Wir bekommen so:

$$(6)\qquad \frac{1-\varkappa^2}{2\lambda}\cdot z\cdot\frac{d^2z}{d\xi^2}-\frac{1-\varkappa^2}{4\lambda^2}\cdot\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2+\frac{\varkappa}{\lambda}\frac{dz}{d\xi}-z+1=0.$$

In dieser Gleichung ist ξ zu verstehen als ξ_A, d. h. von der Anode aus gerechnet im Sinne der Stromlinien. Die Gleichung für ξ_K erhalten wir aus (6) einfach, wenn wir das Vorzeichen von $\varkappa$ umkehren.

Die Bedeutung der Konstanten a ist leicht zu verstehen. Wenn das Feld, wie es bei sehr schwachen Strömen der Fall ist, in der Mitte eine Region hat, wo keine freien Ladungen vorhanden sind, also $dz/d\xi=0$, so ist hier $z=1$, $E=a$. In dieser Region stört der Strom das Dissoziationsgleichgewicht nicht, es ist $q=\alpha\,.\,\nu^2$, also

$$E=a=\frac{J}{F.(u_K+u_A)}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{q}}=\frac{J}{F.\nu.(u_K+u_A)}.$$

Die Größe $F.\nu.(u_K+u_A)$ ist das spezifische Leitvermögen der ionisierten Luft, solange sie vom Strom noch nicht verändert ist.

Es sei nun *der Widerstand der ionisierten Luft zwischen den Kondensatorplatten pro Quadratzentimeter, gerechnet in Ohm*, R genannt, dann ist:

$$(7)\qquad \begin{cases} a=\dfrac{R.J}{2A}, \\ E=a\sqrt{z}=\dfrac{R.J}{2A}\cdot\sqrt{z}. \end{cases}$$

Es kommt jetzt alles darauf an, z als Funktion von ξ zu berechnen. Dafür brauchen wir nur die beiden Größen $\varkappa$ und λ zu kennen. Aus den schon oben angeführten Zahlenwerten erhält man z. B. für Luft:

$$\lambda=3{,}56;\quad \varkappa=0{,}160.$$

Wir unterscheiden nun praktisch die beiden Fälle, daß a) der Strom nur ein kleiner Bruchteil des Maximalwertes J_M ist; b) daß er nicht mehr viel von J_M verschieden ist.

Schwache Ströme.

2. In der Nähe der Platte ($\xi=0$) kann man das Integral der Gleichung (6) in eine Potenzreihe nach ξ entwickeln:

$$z=c_0-c_1\,.\,\xi+c_2\,.\,\xi^2-c_3\,.\,\xi^3+c_4\,.\,\xi^4-\ldots$$

Dann ist der Koeffizient c_1 durch die Anfangsbedingung gegeben, daß in der unmittelbaren Nachbarschaft der Platte keine positiven Ionen vorhanden sind, da sie sofort bei ihrer Bildung vom Strom weggeführt werden und hier keine Schicht mehr vorhanden ist, aus der sie sich ergänzen.

Für $\xi = 0$ haben wir also in (3) und (4) einzusetzen $\nu_K = 0$, und bekommen so:

$$\left(\frac{dE^2}{dx^2}\right)_{x=0} = -\frac{J}{F \cdot u_A \cdot \varepsilon}.$$

Rechnen wir das mit Hilfe der Formeln (5) um, so bekommen wir:

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{2\lambda}{1+\varkappa}.$$

Also an der Seite der Anode:

$$c_{1A} = \frac{2\lambda}{1+\varkappa}. \tag{8}$$

Ebenso an der Seite der Kathode:

$$c_{1K} = \frac{2\lambda}{1-\varkappa}.$$

Das konstante Glied c_0, d. h. der Wert von $z = E^2/a^2$ für $x = 0$, läßt sich einfach deuten als das Verhältnis der Quadrate der Feldintensitäten unmittelbar an der Platte und in der Mitte des Kondensators. Um es zu berechnen, wollen wir die Differentialgleichung (6) etwas umformen, indem wir dz/dx durch das Symbol u ausdrücken und als Funktion von z selbst auffassen. Es ist dann $d^2z/dx^2 = du/dz \cdot u$ und die Gleichung wird jetzt:

$$\frac{1-\varkappa^2}{2\lambda} \cdot z \cdot u \cdot \frac{du}{dz} - \frac{1-\varkappa^2}{4\lambda^2} \cdot u^2 + \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot u - z + 1 = 0. \tag{9}$$

Wir wollen diese Gleichung mit

$$4 \cdot \lambda \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}-1}/(1-\varkappa^2)$$

multiplizieren, dann bekommen wir:

$$\frac{d\left(u^2 \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{dz} + \frac{4\varkappa}{1-\varkappa^2} \cdot u \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}-1} - \frac{4\lambda}{1-\varkappa^2}\left(z^{-\frac{1}{\lambda}} - z^{-\frac{1}{\lambda}-1}\right) = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren, wenn $\varkappa = 0$ ist. Man bekommt dann:

$$u^2 = 4\lambda^2 \cdot \left(\frac{z}{\lambda-1} + 1 - C \cdot z^{\frac{1}{\lambda}}\right),$$

wo C die Integrationskonstante ist. Um C zu bestimmen, machen wir von unserer Annahme Gebrauch, daß wir es mit schwachen Strömen zu tun haben, bei denen im mittleren Feld $u = 0$, $z = 1$ wird. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich $C = \lambda(\lambda - 1)$, also:

$$u^2 = \frac{4\lambda^2}{\lambda - 1}\left(z + (\lambda - 1) - \lambda . z^{\frac{1}{\lambda}}\right). \tag{11}$$

Da nun unmittelbar an der Platte $(u)_0 = -c_1 = -2\lambda$ ist, und $(z)_0 = c_0$, so gibt (8) die Gleichung:

$$\begin{cases} c_0 - \lambda . c_0^{\frac{1}{\lambda}} = 0, \\ c_0 = \lambda^{\frac{1}{\lambda - 1}}. \end{cases} \tag{12}$$

Diese Gleichung ist schon von J. J. Thomson gefunden. Im allgemeinen bekommen wir

$$\begin{cases} u^2 = -\frac{4\varkappa}{1 - \varkappa^2} \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}} \int_{z=1}^{z} u . z^{-\frac{1}{\lambda} - 1} . dz \\ \qquad + \frac{4\lambda^2}{1 - \varkappa^2} \cdot \left(\frac{\varkappa}{1 - 1} + 1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \end{cases} \tag{13}$$

und wir können hier auf der rechten Seite für die Funktion u einen Näherungswert einsetzen, weil $\varkappa$ in allen praktischen Fällen klein gegen 1 ist, und es sich also nur um ein Korrektionsglied handelt, das an (12) anzubringen ist. Am einfachsten ist es, die beiden Punkte $u = 0$, $z = 1$ und $u = -2\lambda/(1 + \varkappa)$, $z = c_0$ durch eine gerade Linie zu verbinden und zu setzen:

$$u = -\frac{2\lambda}{1 + \varkappa} \cdot \frac{z - 1}{c_0 - 1}. \tag{14}$$

Um später Rechenschaft geben zu können über die dabei gemachte Vernachlässigung wollen wir setzen:

$$\int_1^z u . z^{-\frac{\lambda + 1}{\lambda}} . dz = -(1 + \delta) \cdot \frac{2\lambda}{(1 + \varkappa)(c_0 - 1)} \cdot \int_1^z \left(z^{-\frac{1}{\lambda}} - z^{-\frac{\lambda + 1}{\lambda}}\right) . dz .$$

δ' ist natürlich eine Funktion von z, wir werden aber sehen, daß ihr Wert so klein ist, daß man sie gegen 1 streichen kann. Durch eine einfache Rechnung bekommt man nun folgenden Ausdruck für u^2:

$$(15)\quad \begin{cases} u^2 = \dfrac{4\lambda^2}{(1-\varkappa^2)} \cdot \left(1 + \left(1 + \dfrac{\delta'}{c_0}\right) \cdot \dfrac{2\varkappa}{1-\varkappa} \cdot \dfrac{c_0}{c_0 - 1}\right) \\ \qquad\qquad \cdot \left(\dfrac{z}{\lambda - 1} + 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot z^{1/\lambda}\right). \end{cases}$$

Wir setzen hier nun die Endwerte $z = c_0$, $u = 2\lambda/(1+\varkappa)$ ein und verstehen auch unter δ' den entsprechenden Endwert, dann bekommen wir folgende Gleichung:

$$(16)\quad \begin{cases} c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda} = -\left(1 + \dfrac{\delta'}{c_0}\right) \cdot \dfrac{2\varkappa}{1-\varkappa} \cdot \dfrac{c_0}{c_0 - 1} \\ \qquad\qquad \cdot \left((\lambda - 1) + c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda}\right). \end{cases}$$

Da $\varkappa$ klein ist, so ist $c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda} = 0$ eine Annäherung an diese exakte Gleichung. Also ist auch $\lambda^{\lambda/(\lambda-1)}$ eine erste Näherung für c_0 und wir setzen deswegen:

$$c_0 = \lambda^{\lambda/(\lambda-1)} \cdot (1 + \delta),$$

wo δ jedenfalls klein gegen 1 ist. Um den Wert δ zu berechnen, setzen wir diesen Ausdruck für c_0 in die Gleichung (16) ein und entwickeln beide Seiten in eine Potenzreihe nach δ. Wir wollen dabei zunächst δ'/c_0 streichen, ferner wollen wir alle höheren Potenzen von δ streichen, so daß wir einfach eine lineare Gleichung bekommen, die sich nun sehr leicht ausrechnen läßt. Das Resultat ist folgendes:

$$(17)\quad \begin{cases} c_0 = c \cdot (1 + \delta), \\ c = \lambda^{\lambda/(\lambda-1)}, \\ \delta \cdot \left(\dfrac{1-\varkappa}{2\varkappa} \cdot \dfrac{c-1}{\lambda} + \dfrac{c}{\lambda} - \dfrac{1}{c-1}\right) = -1. \end{cases}$$

Hier bedeutet c_0 soviel wie c_{0A}, zur Berechnung von c_{0K} haben wir einfach das Vorzeichen von $\varkappa$ umzukehren. So ist für Luft:

$$c = 5{,}845$$

und ferner

auf der Kathodenseite	auf der Anodenseite
$\delta = 0{,}284$	$\delta = -0{,}200$
$c_0 = 7{,}50$	$c_0 = 4{,}68$
$E_K = 2{,}74 \cdot a$	$E_A = 2{,}16 \cdot a$

Hier ist E_K, E_A die Feldstärke unmittelbar an der Elektrode, $a = E_0$ die in der Mitte des Feldes.

Damit ist die Berechnung von c_0 erledigt.

Wir wollen nun nachweisen, daß die Formeln (17) genau genug sind, indem wir die Fehler taxieren, die durch die benutzten Vernachlässigungen entstehen. Zunächst lassen wir noch δ'/c_0 weg, berücksichtigen aber die Glieder zweiter Ordnung in δ. Wir bekommen:

$$(18)\quad \left\{ \delta \cdot \left[\left(\frac{1-\varkappa}{2\varkappa} \cdot \frac{c-1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} \right) \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2\lambda} \right) - \frac{1}{c-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{c-1} \right) \cdot \delta \right) \right] = -1 . \right.$$

Setzt man die Werte für Luft und zwar in die Korrektionsglieder die schon gewonnenen Näherungswerte für δ ein, so ergibt sich

auf der Kathodenseite	auf der Anodenseite
$\delta = 0{,}273$	$\delta = -0{,}205$

Die Werte c_{0A}, c_{0K}, E_A, E_K ändern sich dadurch nur ganz wenig.

Um δ' zu taxieren, berechnen wir den Verlauf der Funktion u nach (15), wo wir zunächst δ'/c_0 streichen und konstruieren uns die Kurve

$$v = z^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} . u = f_1(z).$$

Ganz dasselbe führen wir mit der ungenauen Formel (14) aus. Die beiden Flächen, die durch je eine dieser Kurven und die Geraden: $v = 0$ und $z = c_0$ begrenzt sind, verhalten sich dann wie $(1 + \delta') : 1$. Man kann δ' ohne viel Mühe durch Ausmessen des Flächeninhaltes bekommen.

Ich habe das für Luft ausgeführt. In Fig. 1 sind die beiden v-Kurven für die Kathodenseite, in Fig. 2 für die Anodenseite gezeichnet. Beide Male ist b die ungenaue, mit Hilfe der Formel (14) berechnete, a die genaue Kurve. Man sieht, daß beide Male $1+\delta' > 1$, also δ' positiv ist. Die Ausmessung ergibt für die Kathodenseite $\delta' = 0{,}19$; für die Anodenseite $\delta' = 0{,}25$. Wir haben nun in (18) das Glied

$$(1 - \varkappa) . (c - 1)/2\varkappa . \lambda$$

zu dividieren durch $(1 + \delta'/c_0)$, um den genauen Wert von δ zu finden, man erhält:

auf der Kathodenseite	auf der Anodenseite
$\delta = 0{,}288$	$\delta = -0{,}211$
$c_{0K} = 7{,}52$	$c_{0A} = 4{,}60$
$E_K = 2{,}745 \,.\, a$	$E_A = 2{,}145 \,.\, a$

Vergleicht man diese genauen Werte c_0 und E mit den nach der Formel (17) berechneten, so sieht man, daß die Annäherung von (17) besser ist als die der feinsten Messungen, die man ausführen kann. Da nun die Eigenschaften der ioni-

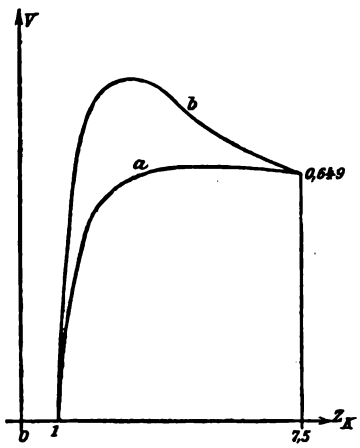


Fig. 1.

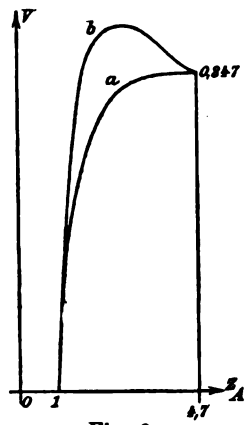


Fig. 2.

sierten Gase wenig voneinander verschieden sind, *so darf man die benutzte Annäherung allgemein als genügend ansehen.*

Nachdem nun c_1 und c_0 gefunden sind, ist es nicht mehr schwer, die übrigen Koeffizienten der Reihe (7) zu berechnen. Man setzt einfach die Reihe mit unbestimmten Koeffizienten in (6) ein, setzt die Faktoren der Potenzen von ξ einzeln gleich Null, und erhält so eine Anzahl von Gleichungen, deren jede *eine* Größe c liefert. Man findet nach dieser Methode der unbestimmten Koeffizienten:

$$(19)\quad \begin{cases} c_2 = \dfrac{\lambda}{1-\varkappa^2}, \qquad c_3 = \dfrac{2}{3\,.\,c_0} \cdot \dfrac{\lambda}{(1-\varkappa^2)^2}, \\ c_4 = -\dfrac{1}{3\,.\,c_0^2} \cdot \dfrac{\lambda}{(1-\varkappa^2)^3} \cdot \big(2\lambda(1-\varkappa) - 1\big) + \dfrac{1}{6\,c_0} \cdot \dfrac{\lambda}{(1-\varkappa^2)^3} \cdot \end{cases}$$

Nach (8), (17), (19) ergibt sich für Luft die Reihenentwickelung für z auf der negativen Seite:

$$z = 7{,}52 - 8{,}48 \,.\, \xi_K + 3{,}66 \,.\, \xi_K^2 - 0{,}332 \,.\, \xi_K^3 - 0{,}082 \,.\, \xi_K^4,$$

auf der positiven Seite:

$$z = 4{,}60 - 6{,}135 \,.\, \xi_A + 3{,}66 \,.\, \xi_A^2 - 0{,}543 \,.\, \xi_A^3 - 0{,}166 \,.\, \xi_A^4.$$

3. Diese Darstellung von z durch eine Potenzreihe gilt nun jedenfalls nur ganz in der Nähe der Platten, für einigermaßen große ξ muß sich nahezu konstant $z=1$ ergeben. Um dies Verhalten wiederzugeben, dazu eignet sich eine Potenzreihe schlecht. Wir setzen deswegen:

$$z = 1 + (c_0 - 1) \,.\, e^{-y}, \tag{20}$$

wo y eine Funktion von ξ ist, die für $\xi = 0$ ebenfalls Null wird, aber für einigermaßen große Werte ξ große Beträge annimmt. Für kleine Werte ξ können wir y wieder in eine Potenzreihe entwickeln

$$y = a_1 \,.\, \xi + a_2 \,.\, \xi^2 + a_3 \,.\, \xi^3 + a_4 \,.\, \xi^4 \,. \tag{21}$$

Setzt man dies in (20) ein und entwickelt nun z in eine Potenzreihe nach ξ, so kann man durch Vergleichung mit der ursprünglichen Potenzreihe für z eine Anzahl Gleichungen gewinnen, aus denen sich die Koeffizienten a durch die c ausdrücken lassen. Es sind das folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{c_1}{c_0 - 1}, \\ a_2 = \frac{1}{2} a_1^2 - \dfrac{c_2}{c_0 - 1}, \\ a_3 = -\frac{1}{6} \,.\, a_1^3 + a_1 a_2 + \dfrac{c_2}{c_0 - 1}, \\ a_4 = \frac{1}{24} \,.\, a_1^4 - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + a_1 a_3 - \dfrac{c_4}{c_0 - 1} \,. \end{cases} \tag{22}$$

Für Luft bekommt man so auf der negativen Seite:

$$y = 1{,}30 \,.\, \xi + 0{,}284 \,.\, \xi^2 + 0{,}0537 \,.\, \xi^3 - 0{,}0225 \,.\, \xi^4,$$

auf der positiven Seite:

$$y = 1{,}70 \,.\, \xi + 0{,}433 \,.\, \xi^2 + 0{,}065 \,.\, \xi^3 - 0{,}027 \,.\, \xi^4 \,.$$

Da schon für $\xi = 1$ der Wert von e^{-y} recht klein ist, so erkennt man, *daß man mit den ersten beiden Gliedern der Reihe für y immer völlig auskommt. Man hat also für kleine* ξ*:*

$$y = a_1 \xi + a_2 \cdot \xi^2.$$

4. Daraus folgt nun eine sehr einfache Darstellung von y für große ξ. Setzt man nämlich in die Differentialgleichung (6) für z den Ausdruck (20) ein, so bekommt man folgende Gleichung für y:

$$(23)\quad y'' - y'^2 + \frac{2x}{1-x^2} \cdot y' + \frac{2\lambda}{1-x^2} = (c_0 - 1) \cdot e^{-y} \cdot \left(\frac{2\lambda - 1}{2\lambda} \cdot y'^2 - y'' \right).$$

Ist nun ξ so groß, daß $(c_0 - 1) \cdot e^{-y}$ schon klein gegen 1 ist, so setzen wir in erster Näherung die rechte Seite gleich Null und bekommen:

$$(24)\qquad y'' - y'^2 + \frac{2x}{1-x^2} \cdot y' + \frac{2\lambda}{1-x^2} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich nach bekannten Methoden leicht einmal integrieren. Wir wollen die beiden Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$\eta^2 - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \eta - \frac{2\lambda}{1-x^2} = 0$$

bezeichnen mit η_1 und η_2:

$$\eta_1 = \frac{x + \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}, \qquad \eta_2 = \frac{x - \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}.$$

Dann ist das erste Integral von (24):

$$y' = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \frac{1 + e^{(\eta_1 - \eta_2) \cdot (\xi - \xi_0)}}{1 - e^{(\eta_1 - \eta_2) \cdot (\xi - \xi_0)}}.$$

Hier ist ξ_0 die Integrationskonstante.

Wenn wir nun für ξ_0 einen Wert annehmen wollten, der von ξ in der näheren oder weiteren Nachbarschaft der positiven Platte erreicht wird, dann würde in etwas größerer Entfernung, z. B. schon für $\xi = \xi_0 + 1$, die e-Funktion in unserer Formel sehr groß gegen 1 werden und wir würden den Wert bekommen $y' = \eta_2$, also $y = c + \eta_2 \cdot \xi$. Nun ist aber η_2 eine negative Größe, es würde also in größerer Entfernung, wo

$\xi > \xi_0$ z nicht mehr gegen 1 näher und näher konvergieren, sondern sich im Gegenteil davon entfernen. Dadurch ist nun der Wert von ξ_0 für unsere Zwecke genügend genau bestimmt. Er muß nämlich so groß sein, daß er in dem ganzen Gebiet zwischen den Platten immer gegen ξ überwiegt. Die beiden Exponentialausdrücke sind dann immer verschwindend klein gegen 1 und wir bekommen so:

$$y' = \eta_1 = \frac{\varkappa + \sqrt{2\lambda(1-\varkappa^2)+\varkappa^2}}{1-\varkappa^2}.$$

Die Differentialgleichung (23) liefert daher bei genügend großen Werten von ξ für y eine lineare Funktion:

$$(25) \qquad \begin{cases} y = b_0 + b_1 \cdot \xi. \\ b_1 = \dfrac{\varkappa + \sqrt{2\lambda(1-\varkappa^2)+\varkappa^2}}{1-\varkappa^2}. \end{cases}$$

Um den Grad der Näherung dieser Formel zu prüfen, wollen wir noch eine zweite Näherung für das Integral von (23) berechnen, indem wir setzen:

$$y = b_0 + b_1 \xi + b_2 \cdot e^{-y}$$

und nun alle Größen von der Ordnung e^{-y} stehen lassen, während wir die Glieder von der Ordnung e^{-2y} und die höheren streichen. Dann ist nämlich:

$$\begin{aligned} y' &= b_1 + b_2 \cdot y' \cdot e^{-y} = b_1 + b_1 b_2 \cdot e^{-y}, \\ y'^2 &= b_1^2 + 2 b_1^2 \cdot b_2 \cdot e^{-y}, \\ y'' &= b_1 \cdot b_2 \cdot y' \cdot e^{-y} = b_1^2 \cdot b_2 \cdot e^{-y}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (23) ergibt das für b_2 die Gleichung:

$$3 b_1^2 b_2 - \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} \cdot b_1 b_2 = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda} \cdot (c_0 - 1) \cdot b_1^2.$$

Man bekommt also:

$$(26) \qquad \begin{cases} b_2 = (c_0 - 1) \cdot \dfrac{(2\lambda - 1) \cdot b_1 \cdot (1-\varkappa^2)}{2\lambda \cdot \left(3 b_1 \cdot (1-\varkappa^2) - 2\varkappa\right)}, \\ y = b_0 + b_1 \xi + b_2 \cdot e^{-b_0 - b_1 \xi}, \end{cases}$$

wo b_1 nach (25) zu berechnen ist.

Wir haben jetzt noch b_0 zu bestimmen. Das geschieht durch die Bedingung, daß für einen Wert $\xi = \xi_1$, der so groß ist, daß $(c_0 - 1) \cdot e^{-y}$ schon klein ist gegen 1, aber doch auch noch klein genug, daß man y nach der Potenzreihe (21) berechnen darf, und zwar nur mit den beiden ersten Gliedern, daß für diesen Wert ξ_1 die beiden Entwickelungen von y selbst und ihre ersten Ableitungen noch übereinstimmen:

$$a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_1^2 = b_0 + b_1 \cdot \xi_1,$$
$$a_1 + 2\, a_2 \cdot \xi_1 = b_1.$$

Der Wert, für den diese beiden Bedingungen allein genau erfüllt sein können, ist:

$$\xi_1 = \frac{b_1 - a_1}{2\, a_2}. \tag{27}$$

Und es ergibt sich daraus:

$$b_0 = -\frac{(b_1 - a_1)^2}{4\, a_2}. \tag{28}$$

Berechnet man nach diesen Formeln die Zahlenwerte für Luft, so bekommt man auf der negativen Seite:

$$y = -1{,}32 + 2{,}52 \cdot \xi + 1{,}79 \cdot e^{1{,}34 - 2{,}55 \cdot \xi}, \qquad \xi_1 = 2{,}14;$$

auf der positiven Seite:

$$y = -0{,}80 + 2{,}875 \cdot \xi + 1{,}07 \cdot e^{0{,}80 - 2{,}875 \cdot \xi}, \quad \xi_1 = 1{,}36.$$

An diesen Zahlen kann man nun prüfen, ob die Rechnung mit der ersten Näherung noch in dem Punkt ξ_1, wo sich die beiden Entwickelungen von y treffen sollen, genügend genau ist. Man findet:

	Entwickelung für kleine ξ		Entwickelung für große ξ	
	zweigliedrig	viergliedrig	erste Näherung	zweite Näherung
neg. y	4,08	4,16	4,08	4,11
Seite y'	2,52	2,37	2,52	2,45
pos. y	3,11	3,18	3,11	3,16
Seite y'	2,88	2,97	2,875	2,74

Diese Zahlen sind deswegen von Wert, weil sich die andern Gase nicht so viel von der Luft unterscheiden, daß

für sie nicht ungefähr dieselbe Annäherung mit unseren Formeln erreicht würde.

5. *Wir können bei schwachen Strömen das Feld in den Gasen also nach folgenden Formeln berechnen:*

$$
\left\{\begin{aligned}
&E = \frac{R\,.\,J}{2\,A}\,.\,\sqrt{z}\,,\\
&z = 1 + (c_{0\,K} - 1)\,.\,e^{-y_K} + (c_{0\,A} - 1)\,.\,e^{-y_A}\,,\\
&y = a_1\,.\,\xi + a_2\,.\,\xi^2 \text{ für kleine } \xi,\\
&y = b_0 + b_1\,.\,\xi \text{ für große } \xi.\\
&\xi = \frac{J_M}{J}\,.\,\frac{x}{A}\,,\\
&c_0 = c\,.\,(1+\delta),\\
&c = \lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}},\\
&\delta\,.\left(\frac{1-\varkappa}{2\,\varkappa}\,.\,\frac{c-1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} - \frac{1}{c-1}\right) = -1,\\
&a_1 = \frac{2\,\lambda}{(1+\varkappa)\,(c_0-1)}\,,\\
&a_2 = \frac{\lambda}{(1+\varkappa)\,(c_0-1)}\,.\left(\frac{2\,\lambda}{(1+\varkappa)\,(c_0-1)} - \frac{1}{1-\varkappa}\right),\\
&b_1 = \frac{\varkappa + \sqrt{2\,\lambda\,(1-\varkappa^2) + \varkappa^2}}{1-\varkappa^2}\,, \qquad b_0 = -\frac{(b_1-a_1)^2}{4\,a_2}\,,\\
&\lambda_K = \lambda_A = \frac{u_K - u_A}{\alpha\,.\,s}\,,\\
&\varkappa_A = \frac{u_A - u_K}{u_A + u_K}\,, \qquad \varkappa_K = -\varkappa_A\,.
\end{aligned}\right. \tag{29}
$$

Die beiden Entwickelungen von y treffen zusammen in dem Punkte:

$$\xi_1 = \frac{b_1 - a_1}{2\,a_2}\,. \tag{30}$$

Diese Stelle kann man als die bezeichnen, die das ungefähr homogene Mittelfeld von dem stark variierenden Feld in der Nähe der Platten abgrenzt.

6. Wir wollen nun gleich die Frage beantworten, *wo die Feldstärke ihr äußerstes Minimum erreiche. Es ist das zugleich die Stelle, wo die räumliche Dichte der elektrischen Ladungen genau gleich Null wird.*

Wir setzen also:

$$\frac{dz}{d\xi} = -y'_A \cdot (c_{0A} - 1) \cdot e^{-y_A} + y'_K \cdot (c_{0K} - 1) \cdot e^{-y_K} = 0,$$

$$y_A = b_{0A} + b_{1A} \cdot \xi, \quad y_K = b_{0K} + b_{1K}\left(2\frac{J_M}{J} - \xi\right).$$

Es möge nun x der Abstand eines Punktes von der Mittelebene des Kondensators sein, gemessen in der Richtung des Stromes, also:

$$\xi_A = \xi = \frac{J_M}{J} \cdot \left(1 + \frac{x}{A}\right),$$

$$\xi_K = 2 \cdot \frac{J_M}{J} - \xi = \frac{J_M}{J} \cdot \left(1 - \frac{x}{A}\right).$$

Für den Abstand x_0 des Punktes, in dem die Feldstärke ihr Minimum hat, von der Mittelebene erhalten wir nun die Gleichung:

$$y_A - y_K = \ln \frac{b_{1A} \cdot (c_{0A} - 1)}{b_{1K} \cdot (c_{0K} - 1)}.$$

Also:

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{J_M}{J} \cdot (b_{1A} + b_{1K}) \cdot \frac{x_0}{A} = \frac{J_M}{J} \cdot (b_{1K} - b_{1A}) + (b_{0K} - b_{0A}) \\ \qquad\qquad + \ln \frac{b_{1A} \cdot (c_{0A} - 1)}{b_{1K} \cdot (c_{0K} - 1)}. \end{cases}$$

Setzt man die Werte für die Luft ein, so bekommt man:

$$\frac{x_0}{A} = -0{,}066 - 0{,}181 \cdot \frac{J}{J_M}.$$

Der Punkt liegt also der Mitte sehr nahe, aber etwas nach der Anode hin.

7. *Um das Potential zu berechnen,* müssen wir zuerst eine bequeme Entwickelung für $\sqrt{z}$ finden. In dem mittleren Felde, wo y_A und y_K beide sehr groß sind, gilt jedenfalls sehr genau:

$$(32) \qquad \sqrt{z} = 1 + \tfrac{1}{2}(c_{0K} - 1) \cdot e^{-y_K} + \tfrac{1}{2}(c_{0A} - 1) \cdot e^{-y_A}.$$

In der Nähe der Elektroden bekommen wir, wenn wir aus der Potenzreihe für z die Wurzel ausziehen:

$$(33) \qquad \sqrt{z} = \sqrt{c_0} - \tfrac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{c_0}} \cdot \xi + \tfrac{1}{8}\frac{4 c_0 c_2 - c_1^2}{\sqrt{c_0^3}} \cdot \xi^2 + \ldots$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$(34)\quad \begin{cases} \sqrt{z} = 1 + \frac{1}{2}(c_0 - 1)\,.\,e^{-\bar{y}}\,, \\ \bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1\,.\,\xi + \alpha_2\,.\,\xi^2, \\ \alpha_0 = \ln\dfrac{(c_0-1)}{2\,.\,(\sqrt{c_0}-1)}\,, \quad \alpha_1 = \dfrac{c_1}{2\,.\,\sqrt{c_0}\,.\,(\sqrt{c_0}-1)} = \dfrac{\sqrt{c_0}+1}{2\,.\,\sqrt{c_0}}\,.\,a_1\,, \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\,.\,a_1^2 - \dfrac{4\,.\,c_0\,c_2 - c_1^2}{8\,.\,\sqrt{c_0^3}\,.\,(\sqrt{c_0}-1)} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{c_0}+1}{2\sqrt{c_0}}\,.\left(a_2 + \dfrac{\sqrt{c_0}-1}{4\,.\,c_0}\,.\,a_1^2\right). \end{cases}$$

Die Kurven

$$\bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,.\,\xi^2, \quad y = b_0 + b_1\,\xi$$

schneiden sich in diesem Falle in den beiden Punkten:

$$\xi = \frac{b_1 - \alpha_1}{2\,\alpha_2} \pm \sqrt{\frac{(b_1-\alpha_1)^2}{4\,\alpha_2^2} - \frac{(\alpha_0 - b_0)}{\alpha_2}}\,.$$

Sie verlaufen aber zwischen diesen beiden Schnittpunkten so nahe nebeneinander, daß es bei er Berechnung von $\sqrt{z}$ keinen merkbaren Unterschied macht, ob man die eine oder die andere Formel für y nimmt. Wir wollen als den Grenzpunkt zwischen beiden Formeln den mittleren Punkt zwischen den beiden Schnittpunkten nehmen:

$$(35)\qquad \xi_1 = \frac{b_1 - \alpha_1}{2\,\alpha_2}\,.$$

Der Unterschied der beiden verschieden berechneten Werte von y an dieser Stelle ist:

$$(36)\qquad (y - \bar{y})_1 = \alpha_2\,.\left(\frac{(b_1-\alpha_1)^2}{4\,\alpha_2^2} - \frac{\alpha_0 - b_0}{\alpha_2}\right).$$

Setzt man die Zahlenwerte für Luft ein, so bekommt man an der Kathode:

$$\bar{y} = 0{,}625 + 0{,}89\,.\,\xi + 0{,}261\,.\,\xi^2,$$
$$y = -\,1{,}32 + 2{,}52\,.\,\xi,$$
$$\xi_1 = 3{,}12,$$
$$(y - \bar{y})_1 = 0{,}59, \quad y_1 = 6{,}55, \quad \bar{y}_1 = 5{,}96.$$

Die beiden verschieden berechneten Werte von $\sqrt{z}$ sind für ξ_1:

$$1{,}0046 \quad \text{und} \quad 1{,}0085,$$

an der Anode:

$$\bar{y} = 0{,}453 + 1{,}25 \,.\, \xi + 0{,}45 \,.\, \xi^2,$$

$$y = -\,0{,}80 + 2{,}875 \,.\, \xi,$$

$$\xi_1 = 1{,}805,$$

$$(y - \bar{y})_1 = 0{,}21, \quad y_1 = 4{,}40, \quad \bar{y}_1 = 4{,}19.$$

Die beiden verschieden berechneten Werte von $\sqrt{z}$ sind:

$$1{,}012 \quad \text{und} \quad 1{,}015.$$

Beide Male haben wir also an der Stelle ξ_1, wo die Abweichung beider Werte nahezu die größte ist, nur Unterschiede von wenigen Promille.

Wir bilden nun, von der Anode ausgehend:

$$(37) \quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z} \,.\, dx = x + \frac{A \,.\, J}{J_M} \cdot \left(\frac{c_{0A} - 1}{2} \cdot \int_0^{\xi_A} e^{-y_A} \,.\, d\xi_A + \frac{c_{0K} - 1}{2} \cdot \int_{\xi_K}^{\infty} e^{-y_K} \,.\, d\xi_K \right). \right.$$

Wir führen die Integration zunächst in dem Gebiet aus, wo $y = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi^2$ zu setzen ist. Zu dem Zweck führen wir folgenden Ausdruck ein:

$$(38) \qquad \eta = \sqrt{\alpha_2} \,.\, \xi + \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}, \quad \eta_0 = \frac{\alpha_1}{2 \,.\, \sqrt{\alpha_2}}.$$

Dann ist nämlich:

$$y = \eta^2 + \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\,\alpha_2}, \quad d\xi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot d\eta.$$

Dadurch wird das Integral zurückgeführt auf die bekannte Funktion:

$$\int_0^{\eta} e^{-\eta^2} \,.\, d\eta = \psi(\eta).$$

Für diese Funktion gibt es Tabellen in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung.[1])

1) z. B. A. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung p. 545. Leipzig 1879.

Man kann ihre Werte aber auch leicht berechnen und zwar für Werte von η, die zwischen 0 und etwa 1,4 liegen, aus folgender Potenzentwickelung:

$$(39) \qquad \psi(\eta) = \eta \cdot \left(1 - \frac{\eta^2}{3}\right) + \frac{\eta^5}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{\eta^2}{21}\right) + \frac{\eta^9}{24} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{\eta^2}{55}\right) \cdot$$

Für größere Werte η nach einer semikonvergenten Reihe:

$$(40) \qquad \psi(\eta) = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} - \frac{e^{-\eta^2}}{2\eta} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right) + \frac{3}{4\eta^4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2\eta^2}\right)\right) \cdot$$

Besonders zu bemerken ist der Wert $\psi(\infty) = \sqrt{\pi}/2$.

Wir bekommen so *in der Nähe der Anode:*

$$(41) \qquad \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx = x + \frac{A \cdot J}{J_M} \cdot \frac{\sqrt{c_{0A} - 1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}} \cdot (\psi(\eta) - \psi(\eta_0)),$$

wo α_1, α_2, η, η_0 (vgl. Formel (38)) alle für die Anodenseite zu berechnen sind.

In etwas größerer Entfernung berechnen wir η nach (40), und zwar werden wir bei genügend großen Werten von η den Faktor des zweiten Gliedes einfach gleich 1 setzen. Das gilt z. B. an der Stelle ξ_1, wo der Gültigkeitsbereich des linearen Ausdruckes für y beginnt. Wir führen noch folgende Abkürzung ein:

$$(42) \qquad C = \frac{\sqrt{c_0 - 1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \psi\left(\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)\right).$$

Dann ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}(c_0 - 1) \cdot \int_0^{\xi_1} e^{-y}\, d\xi = C - \frac{c_0 - 1}{2} \cdot \frac{e^{-y_1}}{b_1} \cdot$$

Ich betrachte die beiden wenig voneinander abweichenden Werte y_1 und $\bar{y}_1$ einfach als identisch. Setzen wir nun für die Werte $\xi > \xi_1 : y = b_0 + b_1 \cdot \xi$, dann ergibt die weitere Fortsetzung der Integration:

$$\tfrac{1}{2}(c_0 - 1) \cdot \int_0^{\xi} e^{-y} \cdot d\xi = C - \frac{c_0 - 1}{2} \cdot \frac{e^{-y}}{b_1}$$

und wir bekommen nun *in dem mittleren Gebiet des Feldes*:

$$(43)\quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z}\,.\,dx = x + \frac{A\,.\,J}{J_M}\left(C_A - \frac{c_{0A}-1}{2\,b_{1A}}\,.\,e^{-y_A} + \frac{c_{0K}-1}{2\,b_{1K}}\,.\,e^{-y_K}\right).\right.$$

Gehen wir weiter über den Punkt ξ_{1K} in *das Gebiet der Kathode* hinein, so bekommen wir durch sehr einfache Rechnungen:

$$(44)\quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z}\,.\,dx = x + \frac{A\,.\,J}{J_M} \cdot\left[C_A + C_K - \frac{\sqrt{c_{0K}}-1}{\sqrt{a_2}}\,.\,e^{\frac{a_1^2}{4\,a_2}}\,.\,(\psi(\eta)-\psi(\eta_0))\right].\right.$$

In dieser Formel sind (im Gegensatz zu (41)) die Größen α_1, α_2, η, η_0 für die Kathodenseite zu berechnen.

Speziell bekommen wir, wenn wir ganz bis zur Kathode gehen, also $x = 2\,A$, $\eta = \eta_0$ setzen:

$$\int_0^{2A} \sqrt{z}\,.\,dx = 2\,A\,.\left(1 + \frac{J}{J_M}\,.\,\frac{C_A + C_K}{2}\right).$$

Weil nun die Feldstärke $E = R\,.\,J\,.\,\sqrt{z}/2\,A$, so bekommen wir aus den Formeln (41) bis (44) die Potentiale, von der Anode ab gerechnet, wenn wir einfach mit $R\,.\,J/2\,A$ multiplizieren.

Als die ganze elektrische Spannung zwischen den beiden Elektroden bekommen wir:

$$(45)\qquad \Psi = R\,.\,J\,.\left(1 + \frac{C_A + C_K}{2}\,.\,\frac{J}{J_M}\right),$$

wo C_A und C_K nach (42) zu berechnen sind.

Diese Gleichung (45) stellt die Abhängigkeit zwischen Stromstärke und Spannung bei schwachen Strömen dar.

Für Luft liefert z. B. (42):

$$C_A = 0{,}68\,,\quad C_K = 1{,}40\,.$$

$$\Psi = R\,.\,J\,.\left(1 + 1{,}04\,.\,\frac{J}{J_M}\right).$$

Wenn also der Strom J k Proz. des Sättigungsstromes ist, so beträgt die Abweichung vom Ohmschen Gesetz auch ungefähr k Proz., d. h. der Widerstand der Luftschicht wird um k Proz. größer gefunden, als bei unendlich schwachem Strom.

8. *Wir wollen annehmen, die eine Platte sei auf* $+\Psi/2$, *die andere* $-\Psi/2$ *geladen, und wollen uns fragen, an welcher Stelle dann der Nullpunkt des Potentials liegen wird.*

Wir wollen bei der Berechnung die beiden Exponentialausdrücke in (43), die jedenfalls äußerst klein sind gegen C_A, vernachlässigen, und nun den so abgekürzten Ausdruck gleichsetzen mit

$$A \cdot \left(1 + \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_A + C_K}{2}\right).$$

Wir haben damit eine einfache Gleichung für die x-Koordinate des gesuchten Punktes und erhalten, indem wir sie mit x_1 bezeichnen:

$$x_1 = A \cdot \left(1 + \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_K - C_A}{2}\right).$$

Jedenfalls liegt also der Punkt sehr nahe der Mitte zwischen beiden Platten. Wir wollen nun, wie wir es bei einem ähnlichen Problem (Formel (31)) taten, auch hier x von der Mitte abrechnen und setzen $\bar{x}_0 = x_1 - A$. Dann haben wir:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} = \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_K - C_A}{2}, \tag{46}$$

bei unendlich kleinem Strom liegt der Nullpunkt des Potentials genau in der Mitte.

Für Luft ist z. B.:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} = 0{,}36 \cdot \frac{J}{J_M}.$$

Mit wachsender Stromstärke rückt der Punkt etwas nach der Kathode hin.

Fast gesättigte Ströme.

9. Die bisherigen Formeln (besonders die fundamentale Formel (17)) gelten nur unter der Voraussetzung, daß in der

mittleren Gegend, wo $dz/d\xi = 0$ ist, z den Wert 1 wenigstens sehr nahezu erreicht.

Physikalisch bedeutet dies, daß im mittleren Felde der Ionengehalt des Gases durch den Strom noch nicht geändert wird. Wir haben nun gesehen, daß die beiden Werte ξ_1, wie sie aus (27) zu berechnen sind, ungefähr die Grenzen angeben, wo das fast homogene Mittelfeld an die stark variablen Randfelder angrenzt. Solange $\xi_{1A} + \xi_{1K} \leqq 2\, J_M / J$, gelten deswegen die bisher entwickelten Formeln, denn solange ist noch Raum für das homogene Mittelfeld da.

Für Luft ist $\xi_{1A} + \xi_{1K} = 3{,}5$; also gelten die Formeln für schwachen Strom noch etwa bis zur Stromstärke $J = 0{,}57\, J_M$.

Wollen wir nun auch für fast gesättigte Ströme eine Potenzreihe für z aufstellen, so erhebt sich nun genau dieselbe Schwierigkeit, die sich der Berechnung bei den schwachen Strömen entgegenstellte, aufs neue: nämlich das konstante Glied c_0 zu berechnen, und wir müssen einen Weg suchen, um ihrer Herr zu werden.

Eine Vereinfachung des Problems wäre es auch hier, wenn $\varkappa = 0$ wäre. Dann müßte nämlich die z-Kurve symmetrisch zur Mittelebene des Kondensators verlaufen, z ließe sich als Potenzreihe der folgenden Variablen darstellen:

$$\eta = \xi_A \cdot \xi_K = \frac{J_M^2}{J^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right).$$

Hier ist x von der Mittellinie ab zu rechnen.

Ist $\varkappa$ von Null verschieden, so muß noch eine ungerade Funktion von x hinzugefügt werden. Nun ist:

$$\xi_A - \xi_K = -\frac{2\, J_M}{J} \cdot \frac{x}{A}.$$

Wir können also ansetzen:

$$z = z_1 + (\xi_K - \xi_A) \cdot z_2. \tag{47}$$

$$\begin{cases} z_1 = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \ldots, \\ z_2 = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \ldots \end{cases} \tag{48}$$

Die Koeffizienten von z_2 enthalten alle den Faktor $\varkappa$.

Ferner führen wir für eine Reihe oft vorkommender Ausdrücke Abkürzungen ein, wir setzen:

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{J_M - J}{J_M} = \varrho, & \dfrac{J_M}{J} = \dfrac{1}{1-\varrho} = C. \\ 4C^2.a_2 - a_1 = \alpha_1, & 2C^2.b_1 - b_0 = \beta_0, \\ 12C^2.a_3 - 6a_2 = \alpha_2, & 4C^2.b_2 - 3b_1 = \beta_1, \\ 24C^2.a_4 - 15a_3 = \alpha_3, & 6C^2.b_3 - 5b_2 = \beta_2, \\ & 8C^2.b_4 - 7b_3 = \beta_3. \end{cases}$$

Weiter haben wir folgende Formeln zu gebrauchen:

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{d\xi_A} = \xi_K - \xi_A;\ \dfrac{d}{d\xi_A}(\xi_K - \xi_A) = -2; \quad \xi_K + \xi_A = 2C; \\ (\xi_K - \xi_A)^2 = 4.(C^2 - \eta). \end{cases}$$

Die Anfangsbedingungen (vgl. Formel 8):

$$\left(\frac{dz}{d\xi_A}\right)_{\xi_A = 0} = -\frac{2\lambda}{1+\varkappa}, \quad \left(\frac{dz}{d\xi_K}\right)_{\xi_K = 0} = -\frac{2\lambda}{1-\varkappa}$$

ergeben nun nach einer ganz einfachen Rechnung:

$$(51)\quad \begin{cases} C.a_1 = -\dfrac{\lambda}{1-\varkappa^2}, \\ \beta_0 = +\dfrac{\lambda.\varkappa}{1-\varkappa^2}. \end{cases}$$

Wenn wir einen dieser Anfangswerte in die Differentialgleichung (6) einsetzen, so bekommt man (wie in Formel 19) den entsprechenden Anfangswert von $d^2z/d\xi^2$:

$$\left(\frac{d^2z}{d\xi_A^2}\right)_{\xi_A = 0} = \left(\frac{d^2z}{d\xi_K^2}\right)_{\xi_K = 0} = \frac{\lambda}{1-\varkappa^2}.$$

Nach einer einfachen Rechnung gibt das:

$$(52)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\lambda}{1-\varkappa^2}, \\ \beta_1 = 0. \end{cases}$$

Wir wollen nun weiter (47) in die Differentialgleichung (6) einsetzen, wobei wir der Kurve wegen die Ableitungen von z_1 und z_2 nach η durch z_1', z_1'', z_2', z_2'' bezeichnen. Wir bekommen dann auf der linken Seite die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion von x, die natürlich beide einzeln gleich Null sein müssen. Wir haben also zwei Differential-

gleichungen für die beiden unbekannten Funktionen z_1 und z_2 und zwar:

$$(53)\quad \begin{cases} \frac{1-\varkappa^2}{\lambda}\cdot\left(z_1\cdot\left(2\,(C^2-\eta)\cdot z_1''-z_1'\right)+4\cdot(C^2-\eta)\cdot z_2\cdot\zeta_2'\right) \\ \quad -\frac{1-\varkappa^2}{\lambda^2}\cdot\left((C^2-\eta)\cdot z_1'^2+\zeta_2^2\right)+\frac{2\varkappa}{\lambda}\cdot\zeta_2-z_1+1=0, \end{cases}$$

wo

$$\zeta_2 = 2\cdot(C^2-\eta)\cdot z_2'-z_2$$

und

$$(54)\quad \begin{cases} \frac{1-\varkappa^2}{\lambda}\cdot\left(z_2\cdot\left(2\,(C^2-\eta)\cdot z_1''-z_1'\right)+z_1\cdot\zeta_2'\right) \\ \quad -\frac{1-\varkappa^2}{\lambda^2}\cdot z_1'\cdot\zeta_2+\frac{\varkappa}{\lambda}\cdot z_1'-z_2=0, \end{cases}$$

wo, wie vorher:

$$\zeta_2 = 2\cdot(C^2-\eta)\cdot z_2'-z_2.$$

Setzt man in diese beiden Gleichungen die Reihenentwickelungen (48) mit unbestimmten Koeffizienten ein, und setzt nun die Faktoren der einzelnen Potenzen von η gleich Null, so gibt zunächst das konstante Glied, wenn man (51) und (52) beobachtet, eine Identität, was ja von vornherein zu erwarten war. Die Glieder mit der ersten und der zweiten Potenz von η liefern:

$$(55)\quad \begin{cases} a_0\cdot\alpha_2+4\,C^2\cdot b_0\cdot 2\beta_2-\frac{a_1}{1-\varkappa^2}=0, \\ a_0\cdot 2\beta_2+b_0\cdot\alpha_2=0, \\ a_0\cdot\alpha_3+\frac{2\lambda-1}{2\lambda}\cdot a_1\cdot\alpha_2+12\,C^2\cdot b_0\cdot\beta_2 \\ \qquad +8\cdot(C^2\cdot b_1-b_0)\cdot\beta_2-\frac{a_2}{1-\varkappa^2}=0, \\ 3\cdot a_0\cdot\beta_3+\frac{2\lambda-1}{2\lambda}\cdot a_1\cdot 2\beta_2+b_0\cdot\alpha_3+b_1\cdot\alpha_2=0. \end{cases}$$

Die höheren Potenzen liefern ähnliche Gleichungen, die immer länger werden, je mehr der Grad der Potenz steigt. Je mehr solche Gleichungen man nimmt, um so genauer kann man auch die ersten Koeffizienten, vor allem a_0 und b_0 berechnen. Wir begnügen uns mit der Näherung, die wir aus den vier Gleichungen (55) gewinnen können. Um diese Näherung zu bekommen, bedenken wir, daß mit wachsender Feldstärke die Abweichungen von der Homogenität immer kleiner

werden. Um so mehr nähert sich nun aber gleichzeitig $\varrho = (J_M - J)/J_M$ der Null. Also muß a_0 niedrigere Potenzen von ϱ enthalten, als alle anderen Koeffizienten, und zwar sogar negative, weil die Feldstärke, und demnach auch z, schließlich über alle Grenzen wächst. Es läßt sich nun leicht sehen, daß der folgende Ansatz dieser Bedingung und zugleich den Bedingungen (51), (52) genügt:

$$
(56)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 &= \frac{x_0}{\varrho} + y_0 + z_0 \cdot \varrho + \ldots,\\
a_1 &= \frac{\lambda \cdot (1-\varrho)}{1-\varkappa^2},\\
a_2 &= \frac{(1-\varrho)^2}{4} \cdot \frac{\varrho \cdot \lambda}{1-\varkappa^2},\\
a_3 &= x_3 \cdot \varrho^2 + y_3 \cdot \varrho^3 + \ldots,\\
a_4 &= x_4 \cdot \varrho^3 + \ldots\\
b_0 &= -\frac{\lambda \cdot \varkappa}{1-\varkappa^2} + u_0 \cdot \varrho^2 + v_0 \cdot \varrho^3 + w_0 \cdot \varrho^4 + \ldots,\\
b_1 &= \frac{(1-\varrho)^2}{2} \cdot u_0 \cdot \varrho^2 + \frac{(1-\varrho)^2}{2} \cdot v_0 \cdot \varrho^3 + \frac{(1-\varrho)^2}{2} \cdot w_0 \cdot \varrho^4 + \ldots,\\
b_2 &= \tfrac{3}{8}(1-\varrho)^4 \cdot u_0 \cdot \varrho^2 + \tfrac{3}{8} \cdot (1-\varrho)^4 \cdot v_0 \varrho^3 + \tfrac{3}{8}(1-\varrho)^4 \cdot w_0 \varrho^4 + \ldots,\\
b_3 &= u_3 \cdot \varrho^3 + v_3 \cdot \varrho^4 + \ldots,\\
b_4 &= u_4 \cdot \varrho^4 + \ldots
\end{aligned}\right.
$$

Die $x, y, z, \ldots u, v, w \ldots$ sollen in diesen Formeln Zahlen bedeuten, deren Wert nur noch von λ und $\varkappa$ abhängt, ferner ist stets gesetzt: $C = 1/(1-\varrho)$ (vgl. 49).

Setzt man weiter diese Ausdrücke (56) in die Gleichungen (55) ein, so sieht man, wenn man die einzelnen Potenzen von ϱ gleich Null setzt, daß sie gerade ausreichen, um in den a alle Glieder bis zum Grade ϱ^2 inklusive (außer in a_0, wo man nur die beiden ersten Glieder gewinnt) in den b bis zu ϱ^3 inklusive zu berechnen, und daß man durch Hinzufügung der folgenden beiden Gleichungen (Faktoren von η^3 in (53), (54)) gerade die Glieder vom nächsthöheren Grade in ϱ gewinnen müßte, und so fort.

Um ganz exakt zu verfahren, müßte man nun auch noch beweisen, daß die so gewonnenen Reihenentwickelungen für die Koeffizienten a und b konvergent sind, dann wäre es außer

allem Zweifel, daß man so die richtige, und zwar die einzige Lösung gewonnen hätte. Ich habe mich hiermit nicht abgegeben, weil es mir gar zu weit zu führen schien, ich habe mich aber überzeugt, daß in dem Falle $\lambda = 2$, $\varkappa = 0$, in welchem sich die Integration der Gleichung (6) durch Exponentialfunktionen ausführen läßt, der eben beschriebene Weg zur richtigen Lösung führt.

Man erhält nach dem geschilderten Verfahren durch ziemlich umständliche Rechnungen:

$$x_0 = \tfrac{2}{5} \cdot \frac{1}{(1-\varrho)(1-\varkappa^2)}, \quad y_0 = \tfrac{2}{15} \cdot \frac{3(2\lambda-1).(1-\varrho)-1}{(1-\varrho)^2.(1-\varkappa^2)},$$

$$x_3 = \frac{(1-\varrho)^3}{40} \cdot \frac{\lambda}{1-\varkappa^2} \cdot \big(3(2\lambda-1)(1-\varrho)-1\big),$$

$$u_0 = \tfrac{2}{5} \cdot \frac{\lambda^2.\varkappa}{(1-\varrho)(1-\varkappa^2)},$$

$$v_0 = -\frac{18}{350} \cdot \frac{\lambda^2.\varkappa}{(1-\varrho)^2.(1-\varkappa^2)} \cdot \big(4(2\lambda-1)(1-\varrho)-3\big),$$

$$u_3 = \frac{3.(1-\varrho)^4}{112} \cdot \frac{\lambda^2.\varkappa}{1-\varkappa^2} \cdot \big(6.(2\lambda-1)(1-\varrho)-1\big).$$

Lassen wir die Glieder mit ϱ^3, die wir ja doch nur teilweise gefunden haben, einfach weg, so bekommen wir:

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} z = \frac{1}{(1-\varkappa^2)(1-\varrho)} \cdot \Big\{ & \big(\tfrac{2}{5}\varrho^{-1} + \tfrac{4}{15}(3\lambda-2)\big) - \lambda \cdot \Big(1 - \frac{x^2}{A^2}\Big) \\ & + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varrho}{1-\varrho} \Big(1 - \frac{x^2}{A^2}\Big)^2 + \frac{3\lambda-2}{20} \cdot \frac{\lambda\varrho^2}{1-\varrho} \cdot \Big(1 - \frac{x^2}{A^2}\Big)^3 \\ & + 2\lambda\varkappa \cdot \frac{x}{A} \cdot \Big[1 - \tfrac{3}{5} \cdot \frac{\lambda.\varrho^2}{1-\varrho} \cdot \Big(1 + \tfrac{1}{2}\Big(1 - \frac{x^2}{A^2}\Big) \\ & \qquad + \tfrac{3}{8} \cdot \Big(1 - \frac{x^2}{A^2}\Big)^2\Big)\Big]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

x von der Mittelebene aus gerechnet, im Sinne des positiven Stromes.

Damit ist die Aufgabe auch für fast gesättigten Strom gelöst.

In diesem Ausdruck für z hat das konstante Glied einen geringeren Grad von Genauigkeit als die anderen, für die wir noch die Summanden mit ϱ und ϱ^2 gewonnen haben, während wir sie im konstanten Glied unbekannt lassen mußten.

Wenn wir also nur z selbst und nicht die Ableitungen berechnen wollen, dann nehmen wir besser folgende abgekürzte

Formel, in der alle Glieder denselben Grad von Genauigkeit haben:

$$(58)\quad z = \frac{1}{(1-\varkappa^2)(1-\varrho)} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\varrho^{-1} - \tfrac{1}{6} \cdot (\lambda + \tfrac{8}{3}) + 2\lambda\varkappa \cdot \frac{x}{A} + \lambda \cdot \frac{x^2}{A^2} \right).$$

10. Wollen wir die freien Ladungen berechnen, so haben wir zu bilden $1/\sqrt{z} \cdot dz/dx$, und wir werden zur Ausrechnung von dz/dx die Formel (57) nehmen. Wir wollen hier speziell nur die Stelle suchen, wo *das Feld sein Minimum hat und die freien Ladungen also verschwinden.* Wir nennen, wie oben (6.), die Koordinate des gesuchten Punktes x_0, und finden aus $dz/dx = 0$ dafür die Gleichung:

$$(59)\quad \varkappa + \frac{x_0}{A} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\varrho}{1-\varrho} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right) - \frac{9\lambda - 6}{20} \cdot \frac{\varrho^2}{1-\varrho} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right)^2 \right).$$

Daraus ergibt sich in erster Näherung:

$$\frac{x_0}{A} = -\varkappa.$$

Setzt man diesen Wert in die Korrektionsglieder ein, so bekommt man leicht eine zweite und dritte Näherung. Da $\varkappa^2$ gegen 1 sehr klein ist, so kann man einfach rechnen:

$$(60)\qquad \frac{x_0}{A} = -\frac{20 \cdot (1-\varrho)}{20 - 30\varrho - (9\lambda - 6)\varrho^2} \cdot \varkappa.$$

$-x_0/A$ geht also von größeren Werten her gegen $\varkappa$. Vergleicht man dies Resultat mit dem der Formel (31), so sieht man, daß $-x_0/A$ bei einer mittleren Stromstärke ein Maximum haben muß.

Für Luft ist:

$$\frac{x_0}{A} = -0{,}16 \cdot \frac{20 \cdot (1-\varrho)}{20 - 30\varrho - 26\varrho^2}.$$

Um den Verlauf der Funktion z schneller zu übersehen, wird man gut tun *ihre Werte an den beiden Elektroden selbst:* z_K, z_A *und an der Stelle* x_0 *des Minimums:* z_0 zu berechnen. Die Formel (58) ergibt:

$$(61)\quad \begin{cases} z_K = \dfrac{1}{(1-\varkappa^2)(1-\varrho)} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\varrho^{-1} + \tfrac{4}{6}(\lambda - \tfrac{2}{3}) + 2\lambda\varkappa \right), \\ z_A = \dfrac{1}{(1-\varkappa^2)(1-\varrho)} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\varrho^{-1} + \tfrac{4}{6}(\lambda - \tfrac{2}{3}) - 2\lambda\varkappa \right), \\ z_0 = \dfrac{1}{(1-\varkappa^2)(1-\varrho)} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\varrho^{-1} + \tfrac{4}{6} \cdot (\lambda - \tfrac{2}{3}) - \lambda(1+\varkappa^2) \right). \end{cases}$$

Stellt man die Funktion z graphisch dar, so liegt die Kurve an ihrer tiefsten Stelle x_0 um $\lambda/(1-\varrho)$ unter der geraden Verbindungslinie ihrer Endpunkte.

In Luft haben wir:

$$z_K = \frac{1{,}026}{1-\varrho}\cdot(\tfrac{3}{5}\varrho^{-1} + 3{,}46), \qquad z_A = \frac{1{,}026}{1-\varrho}\cdot(\tfrac{3}{5}\varrho^{-1} + 1{,}18),$$

$$z_0 = \frac{1{,}026}{1-\varrho}\cdot(\tfrac{4}{5}\varrho^{-1} - 1{,}33).$$

11. Um *das Potential zu finden,* stellen wir eine Formel für $\sqrt{z}$ auf, indem wir nach der gewöhnlichen Methode die Quadratwurzel aus der Reihe (58) ausziehen und gleich alle höheren Potenzen von ϱ streichen.

Wir erhalten so:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot(1-x^2)(1-\varrho)\cdot\varrho}} \cdot\left(1+\varrho\cdot\left(-\frac{3\lambda+8}{20} + \frac{3\lambda x}{2}\cdot\frac{x}{A} + \frac{3\lambda}{4}\cdot\frac{x^2}{A^2}\right)\right).$$

Wir bilden nun:

$$(62)\quad \int_0^x \sqrt{z}\,.\,dx = \sqrt{\frac{2}{3(1-x^2)}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}} \,.x.\left(1+\varrho\cdot\left(-\frac{3\lambda+8}{20} + \frac{3\lambda x}{4}\cdot\frac{x}{A} + \frac{\lambda}{4}\cdot\frac{x^2}{A^2}\right)\right).$$

Da $E = R\,.\,J\,.\,\sqrt{z}/2A$, so haben wir den Ausdruck (62) einfach mit $R\,.\,J/2A$ zu multiplizieren, *um das Potential an einer Stelle x, von der Mittelebene ab gerechnet, zu finden.*

Setzt man speziell $x = +A$ und $x = -A$, und subtrahiert, so bekommt man die gesamte Spannung zwischen den beiden Elektroden. Wir wollen in den so gefundenen Wert gleich für ϱ einsetzen: $J_M - J/J_M$ und bekommen:

$$(63)\quad \Psi = R\cdot\sqrt{\frac{2}{3(1-x^2)}}\cdot\sqrt{\frac{J\,.\,J_M}{1-J/J_M}}\cdot\left(1-\frac{4-\lambda}{10}\cdot\left(1-\frac{J}{J_M}\right)\right).$$

Diese Gleichung (63) enthält die Abhängigkeit zwischen Spannung und Stromstärke für fast gesättigte Ströme.

J. J. Thomson hat unter der Annahme, daß das elektrische Feld und die Dichtigkeit der Ionen in dem ganzen

Raum zwischen den Kondensatorplatten konstant seien, eine Formel[1]) hergeleitet, die die Abhängigkeit zwischen Spannung und Stromstärke sowohl für schwache als auch für fast gesättigte Ströme wiedergeben soll. In den von mir benutzten Zeichen lautet diese Formel:

$$\Psi = \frac{R \,.\, J}{\sqrt{1 - J/J_M}}. \tag{64}$$

Bei genaueren Rechnungen muß diese Formel also durch (45) und (63) ersetzt werden.

Für Luft gibt (63), da $4 - \lambda/10$ sehr klein wird:

$$\Psi = 0{,}828 \,.\, R \cdot \sqrt{\frac{J \,.\, J_M}{1 - J/J_M}}.$$

12. Wir können nun auch, wie bei den schwachen Strömen, berechnen, *in welchem Abstande $\bar{x}_0$ von der Mittelebene das Potential Null wird, wenn man die Platten auf entgegengesetzt gleiche Potentiale lädt.* Die Rechnung gibt:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left\{1 - \varrho \cdot \left(\frac{4 - \lambda}{10} + \frac{\lambda}{4} \cdot \left(1 - \frac{\bar{x}_0^2}{A^2}\right)\right)\right\} = \frac{3 \lambda \varkappa \varrho}{4} \cdot \left(1 - \frac{\bar{x}_0^2}{A^2}\right).$$

In erster Annäherung ist also:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} = \frac{3 \lambda \varkappa \varrho}{4}.$$

Da wir nun alle Glieder mit ϱ^2 gegen 1 streichen, so bekommen wir mit genügender Genauigkeit:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left(1 - \left(\frac{3 \lambda}{20} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{J_M - J}{J_M}\right) = \frac{3 \lambda \varkappa}{4} \cdot \frac{J_M - J}{J_M}. \tag{65}$$

Der Punkt liegt also auf der Kathodenseite, rückt aber mit wachsender Stromstärke in die Mitte (wo er nach (46) auch bei sehr schwachen Strömen liegt).

Für Luft ist:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left(1 - 0{,}934 \cdot \frac{J_M - J}{J_M}\right) = 0{,}427 \cdot \frac{J_M - J}{J_M}.$$

1) J. J. Thomson, Die Entladung der Elektrizität durch Gase. (Deutsch von Dr. P. Ewers) p. 27. Leipzig 1900.

Vielleicht kann man durch Beobachtungen an fast gesättigten Strömen die beiden Größen λ, $\varkappa$, von denen der Charakter des Feldes allein abhängt, direkt bestimmen, da sie in die Formeln für sie ziemlich einfach eintreten.

Zusammenfassung der Resultate.

13. Ich gebe nun noch eine kurze Übersicht über die gewonnenen Formeln, indem ich sie für den Spezialfall Luft zugleich durch Kurven anschaulich mache.

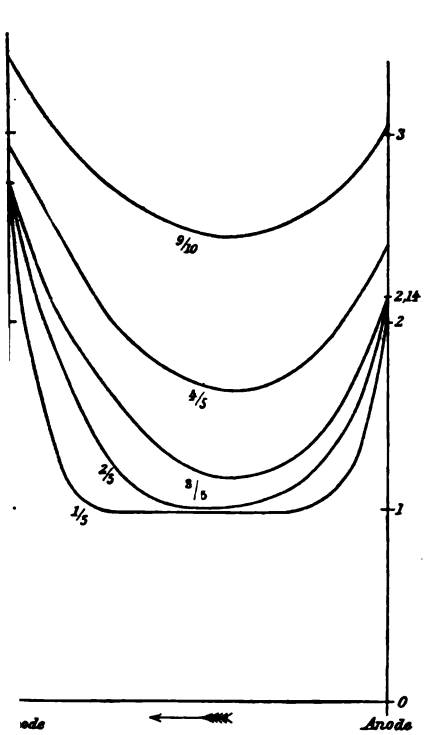


Fig. 3.

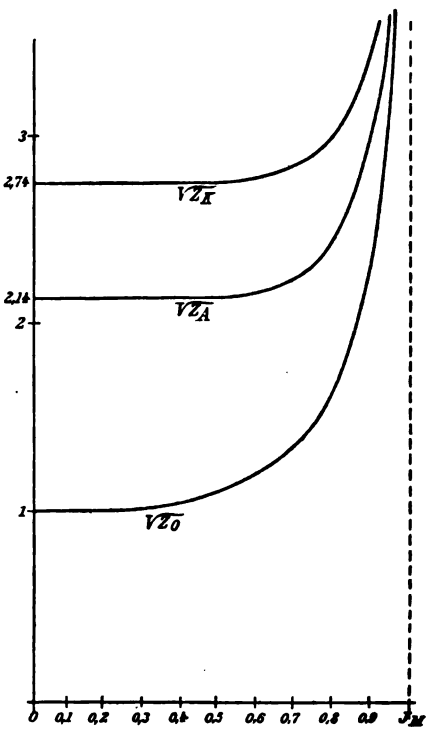


Fig. 4.

Die Stromstärken gebe ich dabei an als Bruchteile der maximalen Stromstärke, also $^1/_5$ heißt $^1/_5 J_M$.

1. Die Fig. 3 gibt für mehrere Stromstärken den *Verlauf der Größe $\sqrt{z}$ zwischen den beiden Elektroden.* Für die Strom-

stärken $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$ habe ich z nach (29) berechnet für $^4/_5$ und $^9/_{10}$ nach (58), und nachträglich die Wurzeln ausgezogen. Aus diesen Kurven bekommt man ohne weiteres den Verlauf des elektrischen Feldes, da ja $E = R.J.\sqrt{z}/2A$.

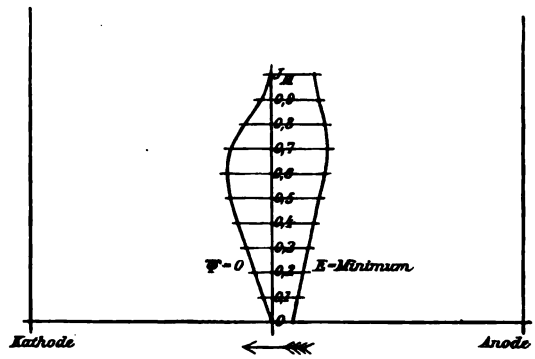


Fig. 5.

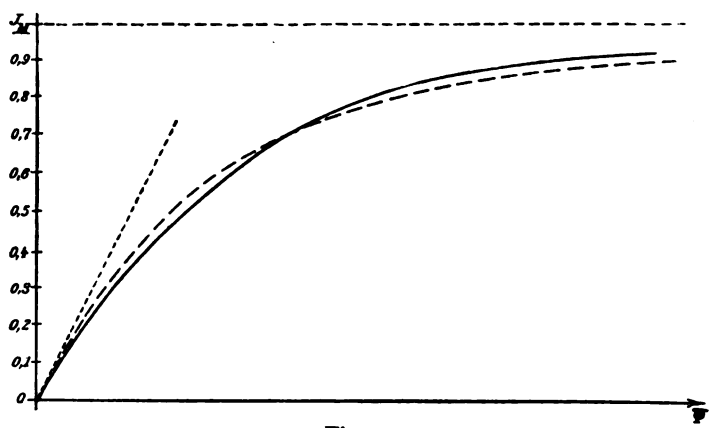


Fig. 6.

2. Speziell *die Endwerte* $\sqrt{z_A}$ *und* $\sqrt{z_K}$ *an den Elektroden und der Minimalwert* $\sqrt{z_0}$ sind in Fig. 4 als *Funktionen der Stromstärke* dargestellt. Für schwache Ströme ist konstant:

$$\sqrt{z_A} = \sqrt{c_{0A}}, \quad \sqrt{z_K} = \sqrt{c_{0K}}, \quad \sqrt{z_0} = 1,$$

für starke ist (61) benutzt.

3. Der Abstand der beiden Punkte, wo das *Potential Null* ist ($\Psi = 0$) und wo die *freie Ladung Null* ist ($E =$ Minimum), von der Mittelebene ist als Funktion der Stromstärke nach (31), (60) und nach (46), (65) berechnet und in Fig. 5 aufgezeichnet.

4. *Die Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung* ist nach (45) und (63) berechnet und in Fig. 6 durch die ausgezogene Linie dargestellt. Zum Vergleich ist die Abhängigkeit, die *die Thomsonsche Formel* (64) ergeben würde, als schraffierte Kurve eingetragen. Die gerade Linie, die diese Kurven im Nullpunkt berührt, bezeichnet die Abhängigkeit, die sich ergeben würde, wenn das Ohmsche Gesetz gälte.

Greifswald, Januar 1904.

(Eingegangen 23. Januar 1904.)

2. *Die Anwendung der Thermosäule im Ultraviolett und die Energieverteilung in den Funkenspektren der Metalle; von A. Pflüger.*

Einleitung.

Während die Thermosäule und das Bolometer vortreffliche Dienste zur Erforschung der ultraroten und der sichtbaren Strahlung geleistet haben, schien die geringe Energie der ultravioletten Lichtquellen bisher ihrer Anwendung zu spotten. Man hat daher für die Photometrie des Ultraviolett die verschiedenartigsten Methoden ersonnen, die entweder auf der photographischen, oder auf der fluoreszenzerregenden, oder schließlich auf der lichtelektrischen Wirkung dieses Strahlengebietes beruhen. Insbesondere zeichnet sich das lichtelektrische Photometer des Hrn. Kreusler[1]) durch große Empfindlichkeit und Genauigkeit aus, verlangt aber zweifellos eine sehr große Übung und Geschicklichkeit in der Handhabung.

In neuerer Zeit hat dann Hr. Snow[2]) gezeigt, daß die Cyanbanden des Kohlebogens bei 388 und 358 $\mu\mu$ eine sehr starke Wärmewirkung hervorbringen. Den Herren Hagen und Rubens[3]) gelang es weiter nachzuweisen, daß sich bei den Wellenlängen 305, 288, 251, ja sogar bei 221 $\mu\mu$ von ihnen als Banden bezeichnete Intensitätsmaxima des Kohlebogens[4]) befinden, deren erste drei die Anwendung der Thermosäule zu Meßzwecken gestatten. Freilich ist ihre Wärmewirkung außerordentlich gering. Um bei der benutzten Versuchsanordnung für die Wellenlänge 251 sieben Skalenteile Ausschlag zu erzielen, mußte der Spalt des Spektrometers nicht weniger als 5 mm breit genommen werden. Auch sind diese Strahlen stets mit einem großen Prozentsatz diffuser

1) H. Kreusler, Ann. d. Phys. 6. p. 412—424. 1901.

2) B. W. Snow, Wied. Ann. 47. p. 227. 1892.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1—22. 1902.

4) 251 und 305 (vermutlich richtiger 310) rühren wohl von Eisenbeimengungen her. Vgl. J. M. Eder u. E. Valenta, Beiträge zur Photochemie p. 52. Wien 1903.

Strahlung, herrührend von den im Vergleich zum Ultraviolett sehr viel energiereicheren langen Wellenlängen, verunreinigt, die sich zwar durch einen Kunstgriff bei der Messung eliminieren läßt, die aber die Versuche immerhin erschwert.

Außer dem Lichtbogen ist der Entladungsfunke zwischen Metallelektroden durch seinen Reichtum an ultravioletten Strahlen bekannt. Die Photographie lehrt, daß die Funkenspektra der Metalle im Ultraviolett sehr kräftige Linien besitzen. Da aber die Empfindlichkeit der photographischen Platten mit der Wellenlänge variiert, ließ sich über die relativen, oder gar über die absoluten Intensitätsverhältnisse dieser Linien nichts Bestimmtes aussagen. Unter Annahme sehr hoher Empfindlichkeit der Platte hat man bisher wohl allgemein geglaubt, daß ihre Energie wohl zur Hervorrufung des chemischen Prozesses, nicht aber dazu ausreiche, eine mit heutigen Instrumenten nachweisbare Wärmewirkung hervorzubringen.

Um so größer war daher mein Erstaunen, als ich bei Prüfung dieser Wärmewirkung mittels einer Rubensschen Thermosäule Ausschläge des Galvanometers von ungeahnter Größe erhielt. Es zeigte sich, daß die bekannten, im äußersten Ultraviolett liegenden starken Linien der Metalle Magnesium, Kadmium, Zink, Aluminium, Zinn, Nickel, Kobalt, Eisen etc. bei mäßiger Empfindlichkeit der Versuchsanordnung Ausschläge von Hunderten, ja bis Tausend Skalenteilen hervorriefen. Aber auch diejenigen Metalle, die sich zwar durch großen Reichtum an feinen Linien, aber nicht durch einzelne besonders starke Linien auszeichnen, gaben Ausschläge von 20—100 Skt., wenn man einen Spektralbereich von wenigen Ångström Breite, auf dem eine Anzahl solcher Linien verteilt liegen, auf die Thermosäule fallen ließ.

Dabei ergab sich, daß bei allen untersuchten Metallen, mit Ausnahme des Magnesiums und des Eisens, das Gebiet stärkster Wirksamkeit unterhalb der Wellenlänge 260 $\mu\mu$ lag, also in einer Region, in der die Empfindlichkeit der photographischen Platte erheblich nachzulassen beginnt. Bekanntlich hören fast alle Photographien des Gitterspektrums etwa bei der Wellenlänge 210 auf. Schon unterhalb 250 bedarf man sehr großer Expositionszeit, und unterhalb 210 hat man überhaupt nur mit sehr licht-

starken Quarzspektrographen brauchbare Erfolge erzielt. Daß aber die Unempfindlichkeit der Platten einerseits, die Intensität der Linien andererseits so groß sei, wie meine Versuche sie ergeben, wird gewiß allgemeine Überraschung hervorrufen.

Als Beispiel führe ich folgendes an. Die Herren Eder und Valenta[1]) berichten, in Übereinstimmung mit Erfahrungen, wie sie die Herren Hagenbach und Konen im hiesigen Institut gemacht haben, daß die Photographie der Linie 199,9 $\mu\mu$ des Kupfers mit den stärksten Batterieentladungen, die sich heutzutage erzielen lassen, mittels Rowlandscher Gitter eine vielstündige, mittels eines Quarzspektrographen immerhin eine halbstündige Exposition verlange. Mit der Thermosäule erhält man dagegen, unter Verwendung eines mittleren Induktoriums und sehr geringer Stromstärke im Primärkreise, 15 Skt. Ausschlag für diese Linie, eine Zahl, die sich bei ähnlich gewaltigen Batterieentladungen, wie sie die Herren Eder und Valenta benutzten, auf das Vielfache steigern wird.

Das Zinn hat etwa bei 190 $\mu\mu$ eine sehr kräftige Liniengruppe, die bisher nur Hr. Schumann mit seinen gelatinefreien Platten nachgewiesen hat, die aber auf den Gitterphotographien der Herren Eder und Valenta nicht zum Vorschein gekommen ist. Diese Linie gibt mir 60 Skt. Ausschlag. Das gleiche gilt von einer Gruppe des Quecksilbers bei 195. Die Liniengruppe des Aluminiums endlich bei 186, die auf den freilich mit stark absorbierendem Quarzprisma aufgenommenen Photographien nur schwach sichtbar ist, liefert mehrere Hundert Skalenteile.

Daß die Intensität der Linien groß genug sei, um mit heutigen Hilfsmitteln gemessen werden zu können, war damit erwiesen. Es fragte sich nun, ob die Strahlung des Funkens konstant genug sein würde, um exakte Messungen zu gestatten. Der Funke wurde in üblicher Weise durch Entladungen eines Induktoriums mit parallel geschalteter Leydener Flasche erzeugt. Mit dem Auge betrachtet, ist er überaus unruhig und flackernd. Photometrische Messungen im sichtbaren Spektrum lassen sich daher nur ausführen, wenn man schnell laufende, regelmäßig arbeitende, rotierende Unterbrecher benutzt, und

1) J. M. Eder u. E. Valenta, Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse p. 379. Wien 1903.

die Arbeiten früherer Beobachter erzählen von den Schwierigkeiten, die dieser Umstand mit sich bringt.

Gleich die ersten Versuche in dieser Richtung brachten mir eine weitere Überraschung. Ein gewöhnlicher Hammerunterbrecher Deprezscher Konstruktion genügte vollständig, um die Ausschläge bis auf wenige Prozent genau zu machen. Zweifellos ist diese Tatsache darauf zurückzuführen, daß die Thermosäule relativ langsam reagiert, und darum nur die Mittelwerte der auftreffenden Strahlung in der Zeit registriert. Ja es zeigte sich, daß es am vorteilhaftesten sei, den Funken durch Schließung des Primärkreises für jede Messung neu „anzuzünden", und nur den ersten Ausschlag zu beobachten. Dieser ist bei allen edlen Metallen bis auf mindestens 2 Proz. konstant. Aber auch die leicht oxydierbaren Metalle liefern durchaus zufriedenstellende Resultate, die denen der ersteren nur sehr wenig nachstehen. Das jedesmalige Anzünden des Funkens bietet außer anderem den Vorteil, daß die Elektroden nicht zu schnell abgenutzt werden, und man keinen Schirm in den Weg der Strahlen zu stellen und zu bedienen braucht, ganz abgesehen von dem Wegfall des beständigen, nervenerschütternden Geräusches.

Somit war die Möglichkeit gegeben:

1. die Energieverteilung in Funkenspektren mit großer Genauigkeit zu messen, eine Aufgabe, die für die Kenntnis des Strahlungsvorganges von ausschlaggebender Bedeutung ist,

2. alle photometrischen Messungen im Ultraviolett mit größter Genauigkeit und Bequemlichkeit auszuführen. Die Methode ist allen älteren derart überlegen, daß diese nach meiner Ansicht nur mehr historischen Wert besitzen, um so mehr als das Arbeiten mit der Thermosäule sehr einfach ist.

Nicht zu unterschätzen ist der Vorteil, der uns gegenüber den Hagen-Rubensschen Messungen durch den Wegfall jeglicher diffusen Strahlung erwächst. Während bei dem Lichtbogen die Energie des sichtbaren und ultraroten Spektrums viele tausendmal größer ist wie die des Ultraviolett, liegt die Sache bei den Funkenspektren nahezu umgekehrt. Die Gesamtstrahlung der ersteren Gebiete ist hier zwar nicht verschwindend, aber immerhin erheblich kleiner als die des Ultraviolett, und ihre diffuse Strahlung vollständig zu vernachlässigen.

Meine ersten Messungen erfolgten mit Hilfe einer Quarzoptik. Die Absorption des Quarzprismas ist indessen schon bei 200 $\mu\mu$ so stark, daß für die tiefer liegenden Regionen nur Flußspat in Frage kommen konnte. Ich danke an dieser Stelle der Firma Carl Zeiss in Jena aufs beste für die Überweisung des erforderlichen wertvollen Materiales. Ich war damit in der Lage, bis zur Durchlässigkeitsgrenze der Luft vorzudringen und nachzuweisen, daß die Aluminiumlinien bei 186 $\mu\mu$ die stärksten des ganzen Aluminiumspektrums sind.

Das Gebiet unterhalb 186 hat bisher nur Hr. Schumann[1]) mit seinem Vakuumspektrographen untersucht. Er hat gezeigt, daß das Aluminium in der Region 186 bis etwa 170 einige sehr kräftige Linien besitzt, die, nach dem Grade der Schwärzung der photographischen Platte beurteilt, der Linie 186 an Intensität nicht viel nachzustehen scheinen. Es schien kein Zweifel an der Möglichkeit zu bestehen, auch die Wärmewirkung dieser Strahlen nachzuweisen, wenn es nur gelang, die Luft aus dem Strahlengang des Apparates zu entfernen. Auch dieser Versuch ist geglückt, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Nach dieser allgemeinen Übersicht gehe ich nun dazu über, die Versuchsanordnung und meine bisherigen Resultate zu beschreiben. Was die letzteren betrifft, so habe ich weniger Gewicht auf sehr exakte und häufig wiederholte Messungen, als darauf gelegt, die verschiedenen Versuchsbedingungen auszuprobieren. Alles weitere bleibe der Detailforschung, der sich hier ein überaus großes Gebiet eröffnet, überlassen. Es wird für deren Zwecke nötig sein, erstlich eine Elektrizitätsquelle von einfacheren Verhältnissen, als ein mit Hammerunterbrecher betriebenes Induktorium, also etwa Wechselstrom oder Influenzmaschinen, zu benutzen. Ferner wird man die Dispersion durch mehrere Prismen oder eventuell durch Quarzgitter (vgl. weiter unten) erhöhen und schließlich die Empfindlichkeit so weit steigern müssen, daß auch die Energie der schwächeren Linien nachweisbar ist. Es wird mit den heutigen Hilfsmitteln

1) V. Schumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 102. IIa. p. 415, 625, 994. 1893.

keine Schwierigkeiten bieten, auf den 50fachen Betrag der Ausschläge zu gelangen, wie unten gezeigt werden soll.

Die Versuchsanordnung.

Das benutzte Spektrometer ist mit Flußspatlinsen (4 cm Öffnung, 32 cm Brennweite für *D*-Licht) und einem großen Flußspatprisma ausgestattet. Die Auszüge der Fernrohre sind gut gearbeitet und tragen eine Skala zur Einstellung der Brennweite. Letztere beträgt für 186 $\mu\mu$ nur noch 27,3 cm.

In der Brennebene des Fernrohrobjektives befindet sich ein verstellbarer Spalt, und hinter diesem, sorgfältig isoliert, die Rubenssche Thermosäule. Sie steht durch eine doppelte, zusammengedrehte, in Watte verpackte Leitung, wie sie bei Klingelanlagen benutzt wird, und einen ganz aus Kupfer gearbeiteten Schlüssel mit dem DuBois-Rubensschen Kugelpanzergalvanometer in Verbindung. Letzteres hängt an einer Juliusschen Aufhängung. Sein innerer Widerstand beträgt ca. 2,5 Ohm; der Widerstand der ganzen Leitung inklusive Thermoelement und Galvanometer ca. 7 Ohm; die bei allen folgenden Versuchen benutzte Empfindlichkeit ist 1 Skt. pro 4.10^{-10} Amp. Sie ist also ziemlich gering und läßt sich leicht auf das Doppelte bringen. Es ist aber mit Rücksicht auf äußere Störungen immer praktisch, mit der geringsten zulässigen Empfindlichkeit zu arbeiten. Die schlechte Beschaffenheit des hiesigen Institutes, insbesondere das Wackeln der Mauern bei halbwegs kräftigem Winde, gestatten eine genauere Ablesung als auf $^1/_2$—1 Skt. nur an sehr ruhigen Tagen.

Die Funkenstrecke befindet sich dicht vor dem Kollimatorspalt. Die Elektroden, von Hartgummihaltern getragen, sind am Auszuge des Kollimators befestigt und mit diesem verschiebbar. Das Spektrometer muß gut zur Erde abgeleitet sein, weil man sonst erhebliche elektrische Einwirkungen erhält.

Bei dieser Anordnung (Funke dicht vor dem Spalt) wird die Energie des Funkenlichtes am besten ausgenutzt. Für verschiedene Zwecke ist indessen vorzuziehen, mittels eines auf einer optischen Bank befestigten Quarz- oder Flußspatkondensors ein Bild der Funkenstrecke auf den Spalt zu entwerfen. Die Energie ist dann erheblich geringer, auch wenn man dafür sorgt, daß das Bild stets für die jeweilige Wellenlänge scharf

ist. Am einfachsten beläßt man zu letzterem Zwecke die Funkenstrecke in ihrer Lage, und läßt den Kondensor aus zwei Linsen bestehen, die man bei abnehmender Wellenlänge so auseinander schiebt, daß Funke und Spalt sich im jeweiligen Brennpunkt befinden.[1])

Für vergleichende Energiemessungen im Spektrum ist die erstere Anordnung unbedingt vorzuziehen, da man bei ihr sicher ist, daß der Funke stets dieselbe Lage zum Spalt behält, es sei denn, daß die optische Bank ganz ausgezeichnet gearbeitet ist.

Die Elektroden sind entweder zugespitzte Stäbe oder Blechstreifen von ca. $^1/_2$—1 mm Dicke, mit der Kante dem Spalt zugekehrt. Der Funke hat dann immer eine gewisse Breite, und man kann die auf die Thermosäule fallende Energie und die Reinheit des Spektrums durch Verstellung beider Spalte regulieren. Bei der großen Dispersion des Flußspates und Quarzes im Ultraviolett ist das Licht auch bei 1 mm Spaltbreite noch immer homogen genug, um spektrophotometrische Messungen jeder Art damit anstellen zu können.

Die günstigste Länge des Funkens richtet sich nach den besonderen Verhältnissen und ist leicht durch Ausprobieren zu finden (vgl. weiter unten). Sie betrug bei meinen Versuchen etwa 2 mm. Dieser Umstand ist sowohl für die Beurteilung der Empfindlichkeit, als der Energiemengen wohl zu beachten. Das auf die Thermosäule fallende Bild ist dann nämlich auch nur 2 mm lang, und von den 20 Gliedern der 18 mm langen Säule werden darum nur zwei bis drei ausgenutzt. Man wird darum zu erheblich höheren Ausschlägen gelangen, wenn man mehrere Funken vor dem Spalte vertikal anordnet, und jeden mit einer besonderen Stromquelle speist. Mit der Verlängerung des einen Funkens darf man nämlich nicht über ein leicht festzustellendes Optimum hinausgehen (vgl. weiter unten). Auch nützt es nichts, den Funken in mehreren Abteilungen überspringen zu lassen.

Der Funke wurde erzeugt durch ein älteres Induktorium (Keiser & Schmidt 1896) von ca. 25 cm Funkenlänge, be-

1) Vgl. auch die eingehende Besprechung, die V. Schumann darüber bringt.

trieben mit Deprezunterbrecher, 24 Volt und 2—3 Amp. Durchschnittsstromstärke im Primärkreise. Der Funkenstrecke parallel sind einige Leydener Flaschen geschaltet. Die Energiestrahlung im Ultraviolett erreicht ein Maximum bei einer leicht festzustellenden Flaschenzahl (vgl. weiter unten). Das Induktorium steht in einem entfernten Raum des Institutes, um magnetische Einwirkungen auf das Galvanometer zu vermeiden. Der Funke wird für jede Messung durch Schließung des Primärkreises vom Platze des Beobachters aus angezündet (wobei der Unterbrecher vorzüglich anspricht), und immer nur der erste Ausschlag beobachtet.

Das Spektrometer ist mit Einrichtung zu automatischer Einstellung des Minimums der Ablenkung versehen. Durch Drehen des Fernrohres und gleichzeitiges Fokussieren der Linsen bringt man jede beliebige Linie oder Spektralpartie mit dem Spalt vor der Thermosäule zur Koinzidenz. Man eicht den Teilkreis auf Wellenlängen, indem man auf einzelne besonders starke Linien verschiedener Metalle (vgl. weiter unten) mit sehr feinen Spalten einstellt. Die Auszüge des Fernrohres und Kollimators müssen natürlich sehr gut gearbeitet sein, wenn man feinere Einstellungen vornehmen will. Oder man müßte Quarz-Flußspatachromate verwenden. Durch vertikales Verschieben des Funkens vor dem Kollimatorspalte sucht man diejenige Stelle der Thermosäule auf, die sich am empfindlichsten erweist.

Wie schon erwähnt, wird es ein leichtes sein, die Ausschläge mit heutigen Hilfsmitteln auf das 50fache zu steigern. Ein rotierender Unterbrecher von Klingelfuss, betrieben mit 70 Unterbrechungen pro Sekunde, 72 Volt und 10 Ampere, gab mir bereits die fünffachen Ausschläge als die der Tabellen. Mit höheren Spannungen und Stromstärken, für die die modernen Unterbrecher eingerichtet sind, und genaue Anpassung an das Induktorium wird man noch erheblich weiter gelangen. Die Empfindlichkeit des Galvanometers läßt sich ohne Schwierigkeit auf die doppelte, bis $2^1/_2$fache, bringen. Bringt man schließlich die Thermosäule nach dem Vorgange von Lebedew[1]) in hohes Vakuum, wobei ihre Empfindlichkeit auf

1) P. Lebedew, Ann. d. Phys. **9.** p. 209. 1902.

das 7fache steigen soll, verwendet 2—3 Funken oder ähnlich gewaltige Batterieentladungen, wie z. B. die Herren Eder und Valenta sie benutzen, so sieht man die Richtigkeit der Behauptung ein. Die Benutzung des von Hrn. Abbott[1]) beschriebenen, hochempfindlichen Galvanometers (Empfindlichkeit 1 Skt. pro $1{,}10^{-12}$ Amp. bei 1,6 Ohm innerem Widerstand) würde der Zahl 50 noch mindestens eine Null hinzufügen.

Die Einschließung der Thermosäule in ein Vakuumgefäß ist unter allen Umständen ein Vorteil. Man vermeidet die lästigen Luftströmungen und vermindert dadurch das Wandern des Nullpunktes. Dabei ist sie vortrefflich isoliert und schon kurze Zeit, nachdem man sie an ihren Platz gebracht und mit Watte umhüllt hat, gebrauchsfähig. Ich verwende ein Gefäß nebenstehender Form (Fig. 1). *F* ist das Flußspatfenster, *G* eine Spiegelglasplatte, beide mit Wachs auf die abgeschliffenen Ränder der Glasröhre *R* aufgekittet. *T* ist der Rahmen der Thermsoäule. Sie steht durch mit Siegellack in seitliche Kapillarröhren *C* eingeschmolzene Kupferdrähte mit der Galvanometerleitung in Verbindung.[2]) Eingeschmolzene Platindrähte sind auch verwendbar, doch muß man dann die äußeren Verbindungsstellen der Platin–Kupferleitung aufs sorgfältigste durch Wattepackung schützen. Durch den Ansatz *A* wird ausgepumpt. Statt des Flußspatfensters kann man auch sehr dünnen Quarz (nicht über $^1/_2$ mm dick) nehmen. Dickerer Quarz absorbiert unterhalb 195 schon sehr beträchtlich. Für Versuche mit Schumannstrahlen ist nur Flußspat zu brauchen. Das Vakuumgefäß wird so am Auszug des Fernrohres befestigt, daß die Thermosäule genau hinter dem Spalte steht, was sich durch die Spiegelglasplatte leicht kontrollieren läßt.

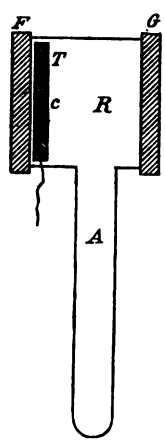


Fig. 1.

Die gesamte Optik kann natürlich auch aus Quarz bestehen, doch gelangt man dann, wegen der starken Absorption in dem dicken Prisma, höchstens bis zur Wellenlänge 200.

1) C. G. Abbott, Astrophys. Journ. 18. p. 1. 1903.

2) Solche Vakuumthermosäulen liefert die Firma Dr. Geissler Nachf. Müller, in Bonn.

Übrigens ist Quarz verschiedener Herkunft sehr verschieden durchlässig.[1])

Konstanz des Ausschlages.

Als Beispiel hierfür seien einige Beobachtungsreihen mittlerer Güte mitgeteilt. Die Zahlen bedeuten Galvanometerausschläge, und wurden erhalten, indem man für Kupfer den Funken direkt der Vakuumthermosäule gegenüber stellte und so die *Gesamtstrahlung* maß. Für Nickel und Kadmium beziehen sie sich auf die Wellenlängen 232 bez. 214 $\mu\mu$. Man sieht, daß das leicht oxydierbare Kadmium den anderen Metallen nur sehr wenig nachsteht.

Nickel:	151	146	148	146	147	148	147	151				
Kupfer:	163	161	162	166	165	164	165	163	160	163	162	
Kadmium:	245	245	250	248	255	250	251	252	257	256	249	249	246

Die Energieverteilung in den Funkenspektren der Metalle.

A. Versuche mit Flußspatprisma.

Im folgenden gebe ich die Resultate der Messungen an einer Anzahl von Metallen, wobei die oben beschriebene Versuchsanordnung benutzt wurde. Beide Spalte hatten eine Breite von 0,6 mm. Der Spalt vor der Thermosäule blendet dann aus dem Spektrum Streifen aus, die von ca. 10 A.-E. Breite bei der Wellenlänge 190 $\mu\mu$ auf etwa 2500 A.-E. bei 1400 $\mu\mu$, entsprechend der abnehmenden Dispersion des Flußspats, anwachsen.

Das Fernrohr wird, von der Wellenlänge 180 $\mu\mu$ (der Durchsichtigkeitsgrenze der Luft) beginnend, in kleinen Schritten von 1—5 Bogenminuten durch das gesamte Spektrum hindurchbewegt, und der zu jeder Einstellung gehörige Galvanometerausschlag gemessen. Dieser ist ein Maß für die Energie eines Spektralbezirkes, dessen Breite und Schwerpunkt aus den obigen Angaben ersichtlich ist. Bei solchen Metallen, die entweder nur sehr wenige Linien aufweisen, oder bei denen einzelne Linien oder enge Liniengruppen besonders kräftig entwickelt sind, wurde durch schrittweises Hindurchbewegen durch den

1) Sehr billige Quarzplatten und -linsen liefert die optische Industrieanstalt vorm. Busch & Co., Rathenow.

Ort der Linie diejenige Fernrohreinstellung gefunden, für die der Ausschlag ein Maximum war.

Man erhält so ein ungefähres Bild sowohl von der Verteilung der Energie in linienreichen Spektren als auch von den Intensitätsverhältnissen der einzeln gemessenen, besonders starken Linien. Dies Bild würde vollkommen sein, wenn wir die Spalte so schmal wählen würden, daß die einzelnen Linien getrennt, jede für sich nacheinander auf die Thermosäule fielen, oder wenn wir wenigstens die Spaltbreite der abnehmenden Dispersion des Flußspats proportional abnehmen ließen. Indessen sind erstlich die feineren Linien nicht energiereich genug, um merkliche Ausschläge zu veranlassen, andererseits genügt diese Methode völlig, sowohl zur vorläufigen Orientierung, wie zur Auffindung der leitenden Gesetze. Ja, sie gibt uns, da die Versuchsbedingungen für alle Metalle die gleichen sind, sogar ein angenähertes Bild von den Intensitätsverhältnissen zwischen den Spektren verschiedener Metalle.

Wie schon oben gezeigt, würde es ein leichtes sein, die Energie und die Empfindlichkeit der Anordnung auf ein Vielfaches zu steigern, und die Ausmessung der Spektra mitsamt den feineren Linien bei großer Dispersion kann daher keine Schwierigkeiten bieten. Eine solche Arbeit müßte indessen auf das sorgfältigste alle Versuchsbedingungen kontrollieren, und insbesondere eine möglichst einfache Elektrizitätsquelle zur Speisung der Funkenstrecke anwenden. Ich betone dies ausdrücklich, um nicht etwa den Anschein zu erwecken, als wenn ich die Zahlen der nachfolgenden Tabelle als die endgültige Feststellung der Energieverteilung in den untersuchten Spektren betrachtete. Diese Zahlen haben nur den Zweck, einen allgemeinen Überblick zu geben, an den die Arbeit der Spezialforschung sich anschließen kann. Bei Besprechung der Versuchsbedingungen werden wir sehen, wie sehr die Energieverteilung von diesen abhängig ist.

Die Zahlen der Tab. 1 gelten also nur für die von mir benutzte Versuchsanordnung, die ich am Kopfe der Tabelle noch einmal anführe. Sie sind nicht auf gleiche Öffnungskegel der Flußspatlinsen umgerechnet, was bei exakten Untersuchungen notwendig sein würde (bei geringerer Brennweite ist die auf die Thermosäule gelangende Energie größer als bei längerer).

Tabelle 1.

Die Energieverteilung in den Funkenspektren der Metalle.

ie Zahlen bedeuten Galvanometerausschläge. Versuchsanordnung: Funke direkt r dem Spalt, 2 mm lang; 2 Leydener Flaschen von je 300 qcm Außenbelegung; eprezunterbrecher, 24 Volt, 2,5 Amp.; beide Spalte 0,6 mm breit. Flußspat-isma von 60°. Ausschläge unter drei sind nicht verzeichnet, sondern die Stellen r besseren Übersicht halber freigelassen. Durch — markierte Punkte wurden nicht gemessen.

ernrohr-ein-tellung	Ungefähre Wellen-länge in $\mu\mu$	Al	Cd	Zn	Fe	Co	Ni	Ag	Cu	Au	Sn	Pb	Pt	Pd	Ir	Hg
1° 45′		13														
50		43														
55		102	13													
2° 0′	186	173	27													
5		168	24					6					6			7
10		87	22		7			10					14			
15		20	21		12			7			11		16			5
20		5	7		14	7		5			32		17	8		
25′	190				22						62		19			
30					9						33		18			
35		6			30			14		9			22	11		
40		14			22	7		15		13			19	12		6
45		42	5		9	22		8		8			20	10		40
50	193	58	6		2	23				4			19	—		40
55		13	6		4	22		0					16	—		20
3° 0′	197		6		20	20	8	6					10	7		5
5		8	7		2	4	9		4				13	—		12
10		29	7		20	8	7		2	6			16	—		8
15	199	50	7		27	8	5		5	15			13	13		
20		16	7	50	20	8	7	4	6	15			12	14		9
25			7	195	10	5	10		1	5			12	13		8
30	203		7	225	15		13		26	4			17	9		
35			0	90	4	8	12		36	12			19	8		
40			6	205	20	6	13		23	11			20	5		
45	206		6	280	4	2	12		12	9			—	4		
50			8	160	17	0	12		10	24			15	—		
55			2	220	20		17		15	17			—	5		
4° 0′	211		8	—	5	unter 0	33	2	3	20			22	6		
5			70	60	8		30	4	54	18			—	6		
10			185	55	0		35	3	52	11	9		22	7		
15	215		160	30	2		37	2	27	7			—	9		
20			45	10	0	23	76	0	20		unter 10		13	6		
25		5	20	unter 10	0	32	107	0	42	12		16	—	7		
30	220	6	100		9	42	85	0	52			32	18	18		7
35		9	51		8	53	140	9	46				—	21		24
40			45		4	48	105	29	48	20			23	19		28

Im ganzen Spektrum ziemlich gleichmäßig 15 20 Skt. bis etwa 7°

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Fernrohr-einstellung	Ungefähre Wellenlänge in $\mu\mu$	Al	Cd	Zn	Fe	Co	Ni	Ag	Cu	Au	Sn	Pb	Pt	Pd	Ir	Hg
4° 45′	226		121		25	55	65	32	41	16			—	19		19
50			170		19	75	105	13	15	10			26	15		13
55			155	unter 10	20	105	160	12	—				—	25		8
5° 0′	232		190		18	150	175	26	7				23	27		
5			83		70	127	90	36	5				—	23		
10			13		70	110	67	17	6				13	29		
15	237	7			85	100	50	14	11				—	29		
20		11			85	140	60	15	8				16	22		
25		5	ca. 10	22	125	120	55	30	4				—	35		
30	244			—	112	75	35	27	4		unter 10		15	44		
35				35	85	42	15	17	5				—	40		
40				80	126	50	23	7	8				14	36		
45	252	unter 5	20	85	122	70	26	5	7	unter 10			—	19		10
50			35	60	122	80	19		8				7	15		10
55			41	—	80	65	19		4				—	14		
6° 0′	261	9	23	20	85	45	20					12	11	10		
10		10	30	10	58	25	14						11	8		10
20	275	5	49	25	125	18	9						12			14
30		14	25	15	30	15						8	12			26
40	292	5	12	19	10		unter 10						11	ca. 8	abnehmend auf ca. 5 Skt.	25
50		18	10	unter 10	15	10							12			25
7° 0′	313	14	12		13	7					19		12			22
15	335	5	25	60	12	20	20	10			18		11	11		16
30	360	27	45	15	18	20	20	5			15		11			52
45	395	20	37	45	25	25	15	15	16	30	28		26			33
8° 0′	465	34	33	40	30	20	28	15	23	25	29	25	27			30
10	515	34	50	80	25	25	—	15	—	25	25	15	22	ca. 10		20
20	570	17	58	45	20	—	—	14	—	26	—	—	—			30
30	650	25	45	50	20	22	30	15	18	24	37	21	25			—
35		28	—	70	20	—	—	15	—	—	50	24	34			
40	800	44	85	80	32	30	—	15	—	35	57	30	41		23	45
45	900	60	88	85	35	35	48	25	42	50	67	39	48	30	28	—
50	1030	62	85	80	50	43	—	31	44	65	37	50	48	—	32	70
55	1200	70	69	75	32	46	—	29	45	60	35	43	41	37	—	63
9° 0′	1400	60	abnehmend	60	26	38	43	22	32	50	30	30	31			41
5	1650	32		abnehmend	abnehmend	abnehmend	—	abnehmend	abnehmend	abnehmend	abnehmend	abnehmend	abnehmend	—		abnehmend
10	1850	32					—							13		
15	2050	16					17							abnehmend		
20	2250	8					—							—		

Das Magnesium ließ sich nicht gut in diese Tabelle einfügen. Die Zahlen für dasselbe sind folgende.

Tabelle 2.

Magnesium.

Kein Ausschlag bis 6° 10′ ($\lambda = 276\,\mu\mu$). Dann kommt die außerordentlich kräftige Liniengruppe bei 280.

	6° 15′	17		6° 46′	90		7° 49′	19
	18	80		48	10		55	20
	20	170		50	18		8° 0′	54
	23	675		57	30		3	77
280 $\mu\mu$	26	970	209 $\mu\mu$	7° 0′	35		5	60
	28	785		3	15		7	45
	31	180		5	4		10	25
	33	45		unter 3 bis			ca. 25 bis	
	35	18		7° 35′	15		45′	35
	38	117		38	26		50	45
285 $\mu\mu$	39	153		40	45		55	48
	40	135	383 $\mu\mu$	42	56		9°	42
293 $\mu\mu$	41	189		44	55		5′	25
	43	153		47	35		abnehmend	

Die Übersicht über die Tabelle wird wesentlich erleichtert, wenn man zum Vergleich die vorzüglichen Photographien der Spektren in den Beiträgen zur Photochemie von Eder und Valenta, Wien 1903, oder des demnächst erscheinenden Atlas von Hagenbach und Konen heranzieht.

Zunächst sehen wir, daß bei allen untersuchten Metallen, mit Ausnahme des Magnesiums und Eisens, die kräftigsten Ausschläge unterhalb der Wellenlänge 260 $\mu\mu$ erhalten werden. So kräftig auch die langwelligen Linien auf der photographischen Platte erscheinen mögen, sie sind nicht zu vergleichen mit denen des äußersten Ultraviolett. Wenn wir sämtliche Ausschläge auf gleiche Dispersion reduzieren könnten, so würde dies Verhältnis noch mehr hervortreten. Diese Reduktion dürfen wir aber offenbar nicht vornehmen, da wir hier keine stetige Energiekurve haben. Wir werden unten sehen, wie wir wenigstens zu einer angenäherten Schätzung des Verhältnisses gelangen können.

Ganz besonders kräftig treten folgende, in Tab. 3 übersichtlich zusammengestellte Linien bez. Gruppen hervor. Von ihnen eignen sich die mit * bezeichneten sowohl zur Eichung des Teilkreises auf Wellenlängen als auch zur Ausführung sehr genauer photometrischer Messungen, da sie für letztere Zwecke genügend homogenes Licht liefern.

Tabelle 3.

Die stärksten Linien und Liniengruppen der Metalle, nach Wellenlängen geordnet. Die Zahlen bedeuten Galvanometerausschläge bei 0,6 mm Spaltbreite. Ein * bedeutet, daß die Linie einfach oder die Gruppe genügend schmal ist, um für Spektrometereichung gebraucht zu werden.

λ in $\mu\mu$	Galvanometer-ausschlag		λ in $\mu\mu$	Galvanometer-ausschlag	
186	Aluminium*	173	240	Kobalt	140
	Kadmium*	27	241	Eisen	125
190	Zinn*	62	249	Eisen	126
193,5	Aluminium*	58	250,2	Zink*	80
195	Quecksilber	40	255,8	Zink*	85
199	Aluminium*	50	257,3	Kadmium*	41
202,5	Zink*	225	258	Kobalt	80
206	Zink*	280	261,4	Blei*	12
208,7	Zink*	160	274,7	Eisen	125
210	Zink	220	274,8	Kadmium*	49
213,8	Zink*	60	277,1	Zink*	25
214,4	Kadmium*	185	280	Magnesium*	950
219	Nickel	107	285	Magnesium*	153
219,4	Kadmium*	120	293	Magnesium*	189
220,3	Blei*	32	309	Magnesium	35
221	Nickel	140	326	Zinn	19
	Kobalt	53	328—334	Zink	60
226,5	Kadmium*	170	340—346	Kadmium	25
231,5	Kadmium*	190	361	Kadmium	45
232	Nickel	175	365	Quecksilber	52
233	Silber	36			

Wie schon oben erwähnt, ist die Liniengruppe 186 des Aluminiums die stärkste seines ganzen Spektrums. Da die Luft nach den Untersuchungen Hrn. Kreuslers[1]) bei dieser Wellenlänge in 20,45 cm dicker Schicht 8,8 Proz. absorbiert, ist der Ausschlag, entsprechend dem Luftweg von 80 cm vom Funken bis zur Thermosäule, auf 250 Skt. zu korrigieren.

Die starken Ausschläge *im Ultraviolett* geben uns die Berechtigung, von *einem Maximum der Energiestrahlung der Funken* in diesem Bereiche zu sprechen. Bei sehr linienreichen Spektren, wie z. B. dem Iridium, Platin, Palladium, Silber, Gold, Kupfer, Eisen, Nickel, Kobalt dürfen wir sogar von einer „Breite“

1) H. Kreusler,

dieses Maximums reden. Denn bei diesen Metallen sind viele (bis zu mehreren tausend) Linien über das ganze Spektrum mehr oder minder gleichmäßig verteilt, und es zeichnen sich keine Linien von ganz besonderer Stärke unter ihnen aus.

Ein *zweites solches Maximum* scheint *im Ultrarot*, etwa zwischen den Wellenlängen 800 und 1500 vorhanden zu sein. Indessen ist zu bedenken, daß die Dispersion des Flußspats in dieser Region sehr klein ist. Das anscheinende Maximum könnte daher durch die Zusammendrängung der Linien dieser Region verursacht sein. Hiergegen spricht aber wieder, daß man nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse nur sehr wenige Linien daselbst vermuten kann, und daß das Maximum ein gutes Stück vor der Stelle geringster Dispersion (ca. 2000) verschwunden ist. Genaueres wird sich erst sagen lassen, wenn die Spektra im Ultrarot genauer bekannt sind.

Wollte man annehmen, daß die Strahlung des Funkens eine reine Temperaturstrahlung sei — was mir unwahrscheinlich erscheint —, so läge es nahe, das ultraviolette Maximum als vom Dampfe, das ultrarote als von den glühenden Metallpartikelchen (kontinuierlicher sog. „Grund" des Spektrums) herrührend anzunehmen. Die Temperatur des Dampfes müßte dann außerordentlich hoch sein. Nach der bekannten Formel $T.\lambda_m = 2940$ bis 2630, die für Körper gilt, deren Strahlungseigenschaften zwischen denen des schwarzen Körpers und des blanken Platin liegen[1]), erhält man für $\lambda_m = 0{,}240\,\mu$, die Temperatur T zu 11000° bis 12000°.

Diese Ansicht wird dadurch gestützt, daß die Änderung der Versuchsbedingungen (vgl. weiter unten) einen verschiedenen Einfluß auf die ultrarote und die ultraviolette Gesamtstrahlung auszuüben scheint. Indessen, wie gesagt, ist die Frage noch nicht reif zur Entscheidung.

B. Versuche mit Rowlandschem Gitter.

Hr. Dr. Hauswaldt-Magdeburg hatte die große Freundlichkeit, mir ein Rowlandsches, auf einer Flußspatplatte geteiltes Gitter zur Verfügung zu stellen. Ich spreche ihm

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 3. p. 36. 1901.

auch an dieser Stelle für die große Unterstützung, die er dieser Arbeit durch Hergabe kostbarer Instrumente hat angedeihen lassen, meinen herzlichsten Dank aus.

Das Gitter hat in erster Ordnung eine Dispersion von ca. 290 A.-E. pro Grad. Es ist also dem Flußspatprisma mit Ausnahme der Region unterhalb 230 $\mu\mu$, wo dessen Dispersion größer ist, gewaltig überlegen, aber freilich von sehr großer Lichtschwäche in Vergleich zu diesem.

Von den Messungen führe ich nur einzelne an. Man ersieht aus ihnen, daß die Energie des gesamten Spektrums bis zur Grenze des Maximums im Ultraviolett überhaupt nicht ausreicht, um merkbare Ausschläge zu erzeugen. Im Bereiche des Maximums sind dagegen kräftige Ausschläge zu verzeichnen.

Wenn auch die Energieverteilung durch ein Gitter nach den Untersuchungen des Hrn. Paschen[1]) erheblich verzerrt wird, so wird man dies Resultat doch als ein qualitatives gelten lassen.

Aluminium. Spaltbreite 9 Min. Nur Spuren von Ausschlägen bis etwa 203 $\mu\mu$. Dann wachsend von 2 bis auf 48 Skt. für 186. Bei der geringen Dispersion (ca. 5 A.-E. pro Minute) und großer Spaltbreite sind die Linien nicht mehr deutlich getrennt.

Nickel. Spaltbreite 6 Min. Nur Spuren von Ausschlägen bis ca. 245 $\mu\mu$. Dann anwachsend bis zu 30 Skt. bei 231 und abnehmend bis auf Null bei ca. 205.

Kadmium. Spaltbreite 6 Min. Nur Spuren bis 234 $\mu\mu$. Dann anwachsend auf 28 Skt. für 231, 31 Skt. für 214, abnehmend auf Null.

C. Versuche mit absorbierenden Schirmen.

Daß sämtliche Metalle ein Maximum der Strahlung im äußersten Ultraviolett besitzen, ist durch die Versuche unter A und B erwiesen. Wie gehen nunmehr über zur Besprechung von Versuchen, die uns ein ungefähres, zahlenmäßiges Bild von der Verteilung der Energie in den verschiedenen Spektralregionen geben sollen.

1) F. Paschen, Wied. Ann. 48. p. 272—306. 1892.

Zu diesem Zwecke wurde die im Vakuum eingeschlossene Thermosäule in etwa 25 cm Entfernung der Funkenstrecke direkt gegenübergestellt. Der Ausschlag wurde gemessen, wenn nacheinander: 1. ein undurchsichtiger Hartgummischirm, zur Feststellung des Einflusses etwaiger elektrischer Einwirkungen; 2. ein rotes Glas, undurchsichtig unterhalb 580 $\mu\mu$; 3. eine dünne Platte ultraviolettdurchlässigen Glases von Schott, undurchlässig unterhalb 280 $\mu\mu$; 4. überhaupt kein Schirm in den Weg der Strahlen zwischen Funke und Thermosäule gestellt wurde.

Der Ausschlag für 2. (roter Schirm) gibt uns die Gesamtenergie der Strahlung oberhalb 580, abzüglich etwaiger Absorptionsverluste in dem Glase. Bei Verwendung von 3. (U.-V. Glas) addiert sich zu diesem Ausschlage der von der Energie im Bereich 580 bis ungefähr 280 herrührende. Bei 4. endlich messen wir die Gesamtstrahlung, in der zu Ausschlag 3 noch die im Strahlengebiete 280 bis 180 (Durchlässigkeitsgrenze der Luft) vorhandene Energie hinzukommt. Von letzterer müssen wir zunächst einen Betrag von etwa 9 Proz. subtrahieren, da auch die Strahlung bei 2. und 3. durch die Reflexion an den beiden Glasoberflächen um einen solchen Betrag verkürzt worden ist. Zweckmäßiger gewesen wäre Einschaltung einer Flußspatplatte, die bis 186 durchlässig ist, die aber gerade nicht zur Verfügung stand.

Ein Beispiel einer solchen Messung bietet Tabelle 4.

Tabelle 4.

Iridium.

Galvanometerausschläge.

Hartgummischirm	Rotes Glas; Ultrarot bis 580 $\mu\mu$	U.-V. Glas; Ultrarot bis 280 $\mu\mu$	Kein Schirm; Gesamtstrahlung
0	14	36	91
	14	37	91
	Mittel: 14	36,5	91; reduziert 82

Daraus berechnen sich folgende Prozente der Gesamtstrahlung.

Ultrarot bis 580 $\mu\mu$	580—280 $\mu\mu$	280—180 $\mu\mu$
17 %	28 %	56 %

Die Zahlen der Tab. 5 sind nach diesem Verfahren gewonnen; sie bedeuten die in den drei Spektralgebieten enthaltenen Energiemengen als *Prozentteile der Gesamtstrahlung.* Man erkennt wiederum die große Überlegenheit der ultravioletten Strahlung.

Es möge aber wiederum betont werden, daß die Energieverteilung nur für die am Kopfe der Tabelle angegebene Versuchsanordnung gilt. Das Verhältnis würde sich noch günstiger für die ultraviolette Strahlung gestaltet haben, wenn man vorher die günstigste Funkenlänge ausprobiert und statt einer drei Leydener Flaschen genommen hätte, wodurch, wie weiter unten gezeigt wird, die Energie der ultravioletten Strahlen mehr gesteigert wird, als die der übrigen.

Beim Magnesium wurde statt des Ultraviolettglases eine dicke, unterhalb etwa 330 undurchlässige Spiegelglasplatte benutzt, da die starken Linien des Magnesiums gerade in der Durchlässigkeitsgrenze des Ultraviolettglases liegen.

Tabelle 5.

Verteilung der Energie auf verschiedene Spektralbereiche. Versuchsanordnung: Funke, ca. 3 mm lang, direkt vor der Thermosäule. Deprezunterbrecher 24 Volt, 2,5 Amp. 1 Leydener Flasche mit 1300 qcm Außenbelegung.

Metall	Spektralbereich		
	Ultrarot bei 580 $\mu\mu$	580—280 $\mu\mu$	280—180 $\mu\mu$
Aluminium	11,4 %	26,6 %	62 %
Kadmium	9,7	24,3	66
Zink	11	20,8	68,2
Eisen	3,6	16,4	80
Kobalt	5	14,5	80,5
Nickel	7	17,7	75,3
Silber	15	28,5	56,5
Kupfer	13,1	21,3	65,6
Gold	21,2	39,3	39,5
Zinn	18,7	37,3	44,0
Blei	26,5	31,3	42,2
Palladium	16	28	56
Iridium	17,1	27,4	55,5
		580—330 $\mu\mu$	330—180 $\mu\mu$
Magnesium	12,3	20,6	67

Bestimmung des absoluten Energiewertes der Funkenstrahlung.

Dieser Wert wurde in folgender Weise der Größenordnung nach bestimmt. Man setzte der Vakuumthermosäule zunächst eine Hefnerlampe in 1 m Entfernnng gegenüber. Die Gesamtstrahlung derselben erzeugte einen Ausschlag von 250 Skt. Nun brachte man den Funken an die Stelle der Hefnerlampe. Die Ausschläge schwankten für die verschiedenen Metalle zwischen 2,5 und 8 Skt.

Da nach Hrn. Ångström[1]) die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe in 1 m Abstand gleich

$$2150 \cdot 10^{-8} \text{ g-cal. sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

ist, so ergibt sich für den Metallfunken der $^1/_{100}$ bis $^1/_{30}$ Teil dieser Energie. Als Versuchsanordnung für die Erzeugung des Funkens galt dabei die der Tab. 5.

Nachweis Schumannscher Strahlen (Wellenlänge kleiner als 180 $\mu\mu$) mittels der Thermosäule.

Hr. Schumann[2]) hat gezeigt, daß das Spektrum des Aluminiumfunkens unterhalb 186 $\mu\mu$ einige Linien besitzt, die, nach der Schwärzung der photographischen Platte beurteilt, der Gruppe bei 186 an Stärke nicht viel nachzustehen scheinen. Die Schwierigkeit ihres Nachweises liegt in der starken Absorption der Luft, die bei etwa 170 $\mu\mu$ schon in einem Millimeter Dicke die Strahlung nicht mehr durchläßt. Schumann hat daher, außer seinen besonders präparierten, gelatinefreien photographischen Platten zum Zwecke der Messungen seinen bekannten Vakuumspektrographen konstruieren müssen.

War nun die Energie der Gruppe bei 186 groß genug, um kräftige Galvanometerausschläge zu bewirken, so ließ sich das gleiche bei den neu entdeckten Linien erwarten, wenn es nur gelang, die Luft aus dem Strahlengang des Apparates zu entfernen. Nun hat Schumann[3]) nachgewiesen, daß

1) K. Ångström, Nov. Act. Soc. Sc. Ups. (3.) 1903; Beibl. 28. p. 247. 1904.

2) l. c.

3) V. Schumann, Ann. d. Phys. 4. p. 641—644. 1901.

der Wasserstoff für die genannten Wellenlängen nahezu vollkommen durchlässig ist. Ich stellte daher den Versuch zunächst in der Weise an, daß die Fernrohre des Spektrometers und die Umgebung des Flußspatprismas mittels besonderer Anordnungen luftdicht abgeschlossen und mit reinem Wasserstoff, hergestellt nach Schumanns Vorschrift, angefüllt wurden. Die Wände des so hergestellten, gaserfüllten Raumes bestanden aus Metall, mit Ausnahme eines etwa 2 mm breiten Zwischenraumes vor dem Objektiv des Fernrohres. Hier mußte, um dem Fernrohr einige Beweglichkeit zu geben, eine dicke Lage Seide mit darüber gespanntem Kautschuk Verwendung finden. Der Spalt wurde mit einer Flußspatplatte verschlossen, und der Funke so dicht als möglich davor gesetzt.

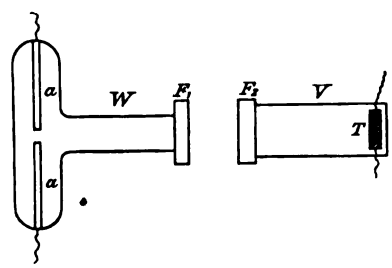


Fig. 2.

Der Versuch ergab kein Resultat. Vielmehr erwies sich der Wasserstoff als noch undurchlässiger wie Luft. Er mußte sich daher innerhalb des Apparates irgendwie verunreinigt haben. Hat doch Schumann gezeigt, daß er beim Passieren von Kautschukschlauch seine Durchlässigkeit völlig einbüßt. Derselbe Wasserstoff, in *Glasröhren* eingeschlossen, erwies sich, wie besondere Versuche ergaben, für die Wellenlängen 186 sehr viel durchlässiger als Luft.

Es wurde darum folgender Versuch angestellt, nach dessen, wie gleich bemerkt sei, erfolgreichem Gelingen erst die Arbeit mit dem schwer zu behandelnden Vakuumspektrographen aufgenommen werden sollte.

Eine mit reinem Wasserstoff gefüllte Glasröhre *W* (Fig. 2) enthält die Aluminiumelektroden *a*, und ist mit dem Flußspatfenster F_1 verschlossen. Durch besondere Versuche wurde

festgestellt, daß der Funke unter diesen Bedingungen die Linie 186 kräftig, wenngleich erheblich schwächer als in Luft, zeigte. Die Thermosäule T befand sich in dem mit Flußspatfenster F_2 verschlossenen Vakuumgefäß V. Die Energie der Strahlung wurde nun gemessen, einmal, wenn sich zwischen den Flußspatplatten F_1 und F_2 3 mm Luftraum befand, ein zweites Mal, wenn die Platten durch Rechtsbewegung von W aufeinander gedrückt waren, also keine Luft in dem Strahlengang von a bis T vorhanden sein sollte. Da keine starke Pressung angewandt werden konnte, ist es indessen möglich, daß sich eine keilförmige Luftschicht von Bruchteilen eines Millimeters Dicke noch zwischen ihn befinden mochte. Die Entfernung Funken—Thermosäule betrug bei 0 mm Luftraum 9,9 cm.

Durch Kontrollversuche wurde zunächst festgestellt, daß keinerlei direkte elektrische Einwirkung auf die Thermosäule vorhanden war, auch nicht, wenn die Gefäße sich berührten.

Dagegen verursachte die während des Funkenüberganges erfolgende Erwärmung der Elektroden und des Wasserstoffs, die sich durch die Glaswände hierdurch nicht ausgleichen konnte, durch langwellige Strahlung auf die Thermosäule eine Verschiebung des Nullpunktes, *während* der Galvanometerausschlag sich vollzog. Da der Funke immer nur angezündet blieb, bis der erste Ausschlag erfolgt war, die Erwärmungszeit also immer die gleiche war, variierte diese Verschiebung nur in engen Grenzen, und verursachte darum keine erheblichen Fehler. Selbstverständlich mußte die mit ihr verbundene Veränderung der Empfindlichkeit des Galvanometers jedesmal gemessen und berücksichtigt werden.

Im folgenden sei eine solche Messung ausführlich wiedergegeben. Man sieht daraus, wie der Nullpunkt sich von Messung zu Messung ziemlich gleichmäßig verschiebt. Als Ausschlag wurde jedesmal die Differenz zwischen dem Nullpunkt vor der Messung und dem ersten Umkehrpunkt der Galvanometernadel angenommen. Die Empfindlichkeit ist ausgedrückt in Skalenteilen pro $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Amp. (rund 30 Skt., also Empfindlichkeit = 1 Skt. pro $5 \cdot 10^{-10}$ Amp.).

0 mm Luftraum.

Empfindlichkeit	Nullpunkt	Nullpunktverschiebung	Erster Umkehrpunkt	Ausschlag	Auf Empfindlichkeit 30 reduzierter Ausschlag
32	33	14	132	99	92,8
31,5	47	14	144	97	92,2
31	61	12	157	96	92,8
31	79	15	Messung durch Störung mißglückt		
30,5	94		188	94	92,3
Luftraum auf 3 mm gebracht, wobei der Nullpunkt sich um einige Skalenteile verschiebt.					
30,5	112	15	192	80	78,7
30	127	15	202	75	75
30	144	14	219	75	75
29,5	158	15	236,5	78,5	79,5
29,5	173	12	252	79	80,2
29	185	13	258	73	75,3
28,5	198		270	72	76
Luftraum wieder auf 0 mm gebracht, wobei der Nullpunkt sich auf 274 verschiebt.					
27,5	274	15	360	86	94
27	289		373	84	93,5

Mittel für 0 mm Luftraum: 92,9,
„ „ 3 „ „ : 77,1.

Das Verhältnis beider Werte beträgt 0,83. Nun hätte die Vergrößerung der Entfernung Funke—Thermosäule um 3 mm, also von 9,9 auf 10,2 cm, die Intensität der Strahlung auf die Thermosäule im Verhältnis des Quadrates der Entfernungen, d. h. nur auf 0,943 verringern dürfen.

Die sehr große Differenz 0,943 — 0,83 ist zweifellos *der Wirkung der Schumannstrahlen*[1] *zuzuschreiben*, denn für die Wellenlängen oberhalb 185 ist die Luft noch recht gut durchsichtig. Nach den Untersuchungen des Hrn. Kreusler[2] würde die Absorption von 3 mm Luft bei 186 $\mu\mu$ weniger

1) Herrührend von dem Spektrum des Aluminiums plus dem des Wasserstoffs.

2) l. c.

als 0,5 Proz. betragen, und die Zunahme der Ausschläge kann daher nicht von der Zunahme dieser Strahlung herrühren.

Das wirkliche Verhältnis der Strahlung ohne Luft zu der Strahlung mit Luft läßt sich nur angenähert bestimmen wegen der Verschiebung des Nullpunktes. Rechnen wir die Ausschläge von der Mitte zwischen Nullpunkt vor und Nullpunkt nach der Messung, so werden wir der Wirklichkeit ziemlich nahe sein. Das Verhältnis ist dann 0,82 statt 0,83, und der Prozentgehalt der Gesamtstrahlung an Schumannstrahlen würde ungefähr $(0{,}943 - 0{,}82) : 0{,}943 = 13$ Proz. betragen, was natürlich nur für die benutzte Versuchsanordnung und unter der Bedingung stimmt, daß sich zwischen den Platten keine Luft mehr befand. Letztere Bedingung läßt sich aber bei dieser Anordnung nicht streng realisieren.

Eine zweite und dritte Versuchsreihe ergab das Verhältnis 0,835 und 0,81. Bei der letzten derselben wurde das Verfahren etwas modifiziert, um von den Fehlern der Empfindlichkeitsbestimmung frei zu werden. Man erteilte der Thermosäule durch Berührung des Gefäßes mit der Hand eine kleine Erwärmung, die eine starke Nullpunktsverschiebung bewirkte, welche äußerst langsam zurückging. Nun wurden die Messungen derart vorgenommen, daß man nach jedem Ausschlage wartete, bis durch diese langsame Wanderung der ursprüngliche, bei jeder Messung verschobene Nullpunkt, und damit dieselbe Galvanometerempfindlichkeit wieder erreicht war. Die Wanderung erfolgte so langsam, daß der jedesmalige Ausschlag kaum dadurch beeinflußt wurde.

Bei einer zweiten Versuchsanordnung war zwischen F_1 und F_2 eine Glaskammer von 3 cm Länge gekittet, die abwechselnd mit Luft und Wasserstoff gefüllt werden konnte. Die Fehler durch Nullpunktsverschiebung sind die gleichen, wie im vorigen Fall. Außerdem war man nicht sicher, ob wirklich alle Luft aus der Kammer verdrängt worden sei, da die Füllung mit Wasserstoff durch längeres Hindurchleiten des Gases, nicht nach vorherigem Auspumpen erfolgte. Dafür hat man den Vorteil, daß die Entfernung Funke–Thermosäule dieselbe bleibt. Die Versuchsreihen bei verschiedenen Galvanometerempfindlichkeiten ergaben folgende Resultate:

Kammer gefüllt: mit Wasserstoff	mit Luft
80	66
84,5	64,6
86,8	61,5
81,8	62,2
87,5	64,3
Mittel: 84,1	63,7

Verhältnis: 0,76.

Kammer gefüllt: mit Wasserstoff	mit Luft
92	77,7
89	77,2
94	76,4
91	78,4
Mittel: 91,5	77,4

Verhältnis: 0,84.

Kammer gefüllt: mit Wasserstoff	mit Luft
83,5	67
83,5	68
80	66
82	68
80	69
Mittel: 81,8	67,6

Verhältnis: 82,8.

Die erste Versuchsreihe halte ich für die beste, da bei ihr der Wasserstoff sehr lange durch die Kammer hindurchgeleitet wurde. Das für die Schumannstrahlen besonders günstige Verhältnis (24 Proz. der Gesamtstrahlung) ist daher sehr wahrscheinlich durch völlige Verdrängung der Luft veranlaßt.

Ein dritter Versuch, die Funken in Luft, und zwar einmal in einem Centimeter Entfernung, ein zweites Mal unmittelbar vor F_2 überspringen zu lassen, scheiterte an nicht zu beseitigenden elektrischen Störungen.

Das Resultat dieser Versuche ist der unzweifelhaft feststehende Nachweis, daß die *Aluminiumlinien kürzester Wellenlänge die erwartete erhebliche Wärmewirkung hervorbringen.*

Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Strahlung des Funkens.

Die folgenden Resultate gelten nur für die von mir benutzte Versuchsanordnung. Ein bündiger Schluß, ob sie von allgemein gültiger Natur sind, läßt sich daraus nicht ziehen.

A. Einfluß der Funkenlänge.

Es wurde wieder mittels der undurchlässigen Schirme die Strahlung der Gebiete Ultrarot bis 580, 580—280, 280—180 untersucht. Tab. 6 gibt eins der Resultate.

Man sieht, wie mit zunehmender Funkenlänge die ultrarote Strahlung stark, die des mittleren Gebietes weniger stark zunimmt, während die ultraviolette Strahlung bei 2,6 mm ein Maximum erreicht. Diese Erscheinung könnte leicht im Sinne der auf p. 905 ausgesprochenen Vermutung über das ultraviolette und ultrarote Maximum gedeutet werden, was mir indessen verfrüht erscheint.

Tabelle 6.

Einfluß der Funkenlänge auf die Energieverteilung im Nickelspektrum; die Zahlen ohne Zusatz bedeuten Galvanometerausschläge, die anderen Zahlen Prozente der Gesamtstrahlung.

Funkenlänge	Spektralgebiete		
	Ultrarot bis 580 $\mu\mu$	580—280 $\mu\mu$	280—180 $\mu\mu$
0,9 mm	5,5	13	72,5
	6,5 %	14,3 %	79 %
1,8 mm	11,2	27	112
	7,5 %	18 %	74,5 %
2,6 mm	17	32	125
	9,7 %	18,3 %	72 %
3,5 mm	20	37	111
	12 %	22 %	66 %
5,2 mm	26	46	100
	15,1 %	26,7 %	58,2 %
8,7 mm	35	56,5	79,5
	20,4 %	32,8 %	46,8 %
11,3 mm	40	59	77
	22,7 %	33,5 %	43,8 %

B. Einfluß der Kapazität im Entladungskreise.

Tab. 7 zeigt diesen Einfluß für Aluminium. Man sieht, wie die Strahlung für drei Leydener Flaschen ein Maximum erreicht, bei welchem zugleich die Energie des ultravioletten Bereiches ein relatives Maximum ist.

Tabelle 7.

Aluminium.

Einfluß der Kapazität im Entladungskreise auf die Energiestrahlung. Die Zahlen ohne Zusatz bedeuten Galvanometerausschläge, die anderen Zahlen Prozente der Gesamtstrahlung.

	Ultrarot bis 580 $\mu\mu$	580—280 $\mu\mu$	280—180 $\mu\mu$
1 Flasche	9	21	48,5
	11,4 %	26,6 %	62 %
3 Flaschen	13	29	82
	10,5 %	23,3 %	66 %
6 Flaschen	9	22,5	52,5
	10,7 %	26,7 %	62,5 %

Weitere Messungen betrafen den Einfluß der Unterbrechungszahl, der Kapazität im Primärkreise etc., sind aber nicht von allgemeinerem Interesse, bez. müssen sorgfältiger und unter einfacheren Bedingungen studiert werden.

Eine einfache Demonstrationsmethode der Wärmewirkung der ultravioletten Strahlen.

Man benutzt dazu die auf p. 907 beschriebene Anordnung. Wenn man den Funken dicht vor das Fenster des Vakuumthermoelementes setzt (aber nicht so nahe, daß Entladungen auf dasselbe übergehen können), ist die Energie groß genug, um Ausschläge in einem empfindlichen Deprez-d'Arsonvalgalvanometer hervorzurufen. Ich benutze als solches das Instrument von Siemens & Halske mit der Spule geringsten Widerstandes und ohne Vorschaltwiderstand (Empfindlichkeit 5.10^{-8}). Dasselbe ist, mit einem Hohlspiegel versehen, oder unter Benutzung einer Projektionslinse sehr bequem als Demonstrationsinstrument zu gebrauchen. Die Thermosäule kann auch in der gewöhnlichen, von Keiser & Schmidt mitgelieferten Messinghülse gebraucht werden. Doch muß man sich durch Ableitung der Hülse zur Erde vor elektrischen Einwirkungen schützen, und ihre Öffnung durch ein Flußspat- oder sehr dünnes Quarzfenster verschließen.

Will man nun die Wärmewirkung der Aluminiumlinien bei 186 $\mu\mu$ demonstrieren, so schalte man zunächst einen undurchlässigen Hartgummischirm in den Strahlenweg ein, um eine eventuelle elektrische Einwirkung zu entdecken. Alsdann wird eine Quarzplatte von mindestens 1 cm Dicke eingeschaltet. Diese absorbiert den weitaus größten Teil der Strahlung bei 186, und auch der sehr viel schwächeren Strahlung bei 193.[1]) Ersetzt man nun die Quarzplatte durch ein Flußspatfenster, so wird man einen erheblich größeren Ausschlag als mit Quarz erhalten. Die Differenz der Ausschläge rührt von der Wirkung der Linien 186 her. Wenn kein Flußspat zur Verfügung steht, zeige man den letzteren Ausschlag ohne jede eingeschaltete Platte und ziehe von dieser den Betrag von rund 10 Proz. ab, um den Reflexionsverlust an der Quarzplatte in Rechnung zu bringen.

Steht auch eine Quarzplatte nicht zur Verfügung, so wähle man ein anderes Metall, etwa Zink, Eisen, Nickel oder Kadmium, und zeige unter Benutzung eines sehr dünnen Deckglases, oder besser eines Schottschen ultraviolettdurchlässigen Glases, die Wirkung der Strahlen unterhalb 280.

Das Thermoelement werde vor der Vorlesung, in Watte gehüllt, auf seinen definitiven Platz gesetzt und vor Sonnen- oder Ofenstrahlung geschützt.

Photometrische Messungen.

Am häufigsten werden wohl Absorptionsbestimmungen zu machen sein. Wenn die zu untersuchende Substanz planparallel geschliffen ist, oder wenn man ein planparalleles Absorptionsgefäß aus Quarz besitzt, so ist es am einfachsten, den Funken direkt vor den Spalt zu setzen und den zu untersuchenden Körper in den parallelen Strahlengang zwischen Kollimatorobjektiv und Prisma einzuschieben.

Bei nicht ganz genügender Planparallelität würde das Bild bei dieser Methode von der Thermosäule abgelenkt werden. Man entwirft dann zweckmäßig mittels zweier Linsen ein Bild

---

1) Quarz verschiedener Herkunft ist sehr verschieden durchlässig. Gewisse Sorten sind nur dann brauchbar, wenn man sie in mehreren Zentimetern Dicke benutzt.

des Funkens auf den Spalt, und schiebt den Körper in den parallelen Strahlengang zwischen den beiden Linsen, so zwar, daß die, durch die prismatische Form bewirkte, geringe Verschiebung des Bildes in Richtung des Spaltes erfolgt. Man macht die Messung dann in zwei Stellungen des Körpers, einmal, wenn das Bild nach oben abgelenkt ist, ein zweites Mal, wenn der Körper um 180° in der Ebene seiner Endflächen gedreht ist, und das Bild nach unten abgelenkt wird Vorausgesetzt, daß die Unparallelität der Flächen nicht allzu groß ist, erhält man dann gute Resultate.

Im ganzen Bereich zwischen 186 und etwa 300 macht es keine Schwierigkeit, für jede Wellenlänge ein passendes Metall zu finden. Ist die Nulllage des Galvanometers gut, und kann man auf zehntel Skalenteile ablesen, oder steht große Funkenenergie zur Verfügung, so dürfte in praxi ein linienreiches, aber energiearmes Metall wie Iridium, Platin oder Palladium im ganzen Bereiche des Ultraviolett ausreichen. Man müßte den Teilkreis sorgfältig eichen und das Funkenspektrum wie ein kontinuierliches ansehen. Auch oberhalb 300 wird man, trotz der geringen Energie, keine Schwierigkeiten haben, genügende Ausschläge für eine Reihe zweckmäßig verteilter Punkte des Spektrums zu erhalten, besonders wenn man für das Gebiet oberhalb 350 $\mu\mu$ noch die Bogenlampe hinzuzieht.

Bonn, Physik. Institut der Universität, Januar 1904.

(Eingegangen 18. Januar 1904.)

3. *Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde;* von *A. Eichenwald.*

(Nachtrag zu p. 1 u. 421, Band 11.)

In meiner letzten Arbeit habe ich verschiedene Versuche beschrieben, in welchen die magnetische Wirkung bewegter Dielektrika im elektrostatischen Felde quantitativ untersucht wurde. Es ergab sich das allgemeine Resultat, daß die „fingierten" Ladungen der Dielektrika bei ihrer Bewegung dieselben magnetischen Wirkungen ausüben, wie eine „wahre" elektrische Konvektion oder wie ein galvanischer Strom von gleichem numerischen Betrage. Jetzt will ich dieses Resultat durch neue Versuche, welche mit vollkommeneren Apparaten und mit größerer Genauigkeit ausgeführt worden sind, bestätigen und in mancher Hinsicht erweitern.

Bevor ich aber zur Beschreibung dieser neuen Versuche übergehe, muß ich einen Fehler korrigieren, der sich leider in meine früheren Formeln eingeschlichen hat und welcher die auf p. 441 zusammengestellten Resultate der Versuche zwar nicht beeinflußt, aber dennoch zu Mißverständnissen Anlaß geben kann. Auf diesen Fehler hat mich Hr. Prof. E. Cohn (Straßburg) schon im Juli d. J. aufmerksam gemacht, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Zu den Versuchen mit bewegten Dielektriken benutzte ich einen ebenen Kondensator, welcher zwischen seinen Belegungen eine Hartgummischicht und eine oder zwei Luftschichten enthielt. Es sei

d_0 der Abstand der Belegungen
d die Dicke der Hartgummischicht
E_0 die Feldintensität in Luft
E die Feldintensität in Hartgummi
ε die Dielektrizitätskonstante von Hartgummi
V die Potentialdifferenz im Kondensator.

Dann muß bei homogenem Felde (es wurde ein Schutzring benutzt) folgende Bedingung erfüllt sein:

$$E d + E_0 (d_0 - d) = V. \tag{1}$$

Außerdem an der Grenze Hartgummi–Luft, wo keine „wahre" Elektrizität vorhanden ist

$$\varepsilon E = E. \tag{2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$E_0 = \frac{V}{\frac{d}{\varepsilon} + (d_0 - d)}.$$

Hätten wir keine Hartgummiplatte im Kondensator, so wäre

$$E_0' = \frac{V}{d_0},$$

woraus zu ersehen ist, daß die Kapazität eines Luftkondensators sich beim Einschieben einer dielektrischen Platte

$$K = \frac{d_0}{\frac{d}{\varepsilon} + (d_0 - d)}$$

mal vergrößert, wie es auch bei mir p. 425 angegeben ist.

Die Dichte σ der auf der Oberfläche der dielektrischen Platte „fingierten" Ladung ist

$$\sigma = \frac{E - E_0}{4\pi} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{V}{d + \varepsilon (d_0 - d)}.$$

Dementsprechend sind die „fingierten" Konvektionsströme auf jeder Seite der rotierenden dielektrischen Scheibe, wenn dieselbe eine Oberfläche S hat und n Umdrehungen in der Sekunde macht

$$i_\varkappa = \sigma S n = \mp \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{S}{d + \varepsilon (d_0 - d)} \cdot V n.$$

Bemerkt man aber, daß

$$K - 1 = (\varepsilon - 1) \frac{d}{d + \varepsilon (d_0 - d)}$$

ist, so kann man auch schreiben

$$i_\varkappa = \mp (K - 1) \cdot \frac{S}{4\pi d} \cdot V n,$$

oder, indem wir durch C' die Kapazität eines Luftkondensators mit der Oberfläche S und dem gegenseitigen Abstand d seiner Belegungen bezeichnen, also $C' = S/4\pi d$ setzen,

$$i_x = \mp (K-1) C' V n .^{1})$$

Nach dieser Formel sind auch die fingierten Ströme in allen meinen Versuchen berechnet worden; beim Niederschreiben der Arbeit aber habe ich aus Versehen in der obigen Formel C statt C' hingeschrieben, obgleich $C = S/4\pi d_0$ bedeuten soll.

Es wurden von mir drei Fälle untersucht. Das Dielektrikum wurde nämlich entweder allein oder mit beiden Belegungen des Kondensators zusammen, oder endlich nur mit einer derselben in Rotation versetzt. In allen Fällen ist aber dieselbe Hartgummischeibe von derselben Dicke $d = 0{,}95$ cm benutzt worden; es blieb also die Größe C' für alle Versuche dieselbe.

Die magnetischen Wirkungen des Konvektionsstromes wurden mit den Wirkungen eines galvanischen Stromes verglichen; da der letztere aber eine spiralförmige Stanniolbelegung durchfloß (p. 423, Fig. 8), deren jeder Ring die Fläche

$$S = \frac{\pi}{4}(24{,}8^2 - 23{,}0^2) = \pi \,.\, 21{,}5 \text{ cm}^2$$

hatte, so muß auch dieselbe Fläche für den Konvektionsstrom in die Rechnung eingesetzt werden, und es wird dann für alle Versuche:

$$C' = \frac{S}{4\pi d} = \frac{21{,}5}{4 \times 0{,}95} = 5{,}6 \text{ C.G.S.} = 0{,}63 \,.\, 10^{-11} \text{ Farad.}$$

Ich will die diesbezüglichen Rechnungen für die einzelnen Versuche hier anführen.

---

1) Diese Formel erhält man auch direkt, indem man (1) so schreibt:

$$(E - E_0) d = V - E_0 d_0 ,$$

also

$$4\pi\sigma \,.\, d = \mp (K-1) \,.\, V$$

und

$$i_x = \sigma \,.\, S \,.\, n = \mp (K-1) \,.\, C' \,.\, V \,.\, n .$$

Zu § 29, p. 426.

Es rotiert die dielektrische Scheibe allein, die Belegungen des Kondensators sind unbeweglich. Hier war

$$d_0 = 1{,}50 \text{ cm}^{1}), \quad d = 0{,}95 \text{ cm}, \quad \varepsilon = 2{,}96;$$

also

$$K = \frac{1{,}50}{\frac{0{,}95}{2{,}96} + 0{,}55} = 1{,}72.$$

Entsprechend den obigen Auseinandersetzungen muß es p. 426 unten heißen:

„Die Ladung auf den Belegungen A und B ist $\pm K C V$; die fingierten Ladungen an A' und B' sind $\mp (K-1) C' V$ und die fingierten Ströme $\mp (K-1) C' V n$.“ [2])

$$i_\varkappa = \mp 0{,}72 \times 0{,}63 \cdot 10^{-11} V n = 0{,}45 \cdot 10^{-11} V n \text{ Amp.}$$

Zwei spiralförmige Stanniolbelegungen wurden bei stillstehender Mikanitscheibe an beide Seiten derselben angelegt und ein Strom von $i = 2 \cdot 10^{-5}$ Amp. durch die beiden Belegungen, aber in entgegengesetzter Richtung durchgeschickt. Die Ablenkung der Magnetnadel beim Kommutieren dieses Stromes war $b = 14{,}2$ mm [3]) bei 2 m Skalenabstand. Die Ablenkung a beim Kommutieren des fingierten Konvektionsstromes muß also sein

$$a = \frac{i_\varkappa}{i} b = \frac{0{,}45 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 10^{-5}} \cdot 14{,}2 \cdot V n = 3{,}22 \cdot 10^{-6} V n.$$

Nach dieser Formel wurde die Tab. VI, p. 427 berechnet.

Der Mittelwert aus den beobachteten Ausschlägen entspricht der Formel

$$a = 3{,}37 \cdot 10^{-6} V n.$$

Die Abweichung ist etwa 5 Proz.

---

1) l. c., p. 426 steht fehlerhaft $d_0 = 1{,}60$.

2) Ganz ebenso p. 428, Zeile 30 und p. 431, Zeile 7, 12 u. 16 muß stehen $i = (K-1) C' V n$.

3) An der Größe b ist eine annähernd berechnete Korrektion von + 3 Proz. angebracht, wegen der ungleichen Verteilung der Konvektionsströme und der galvanischen Ströme am Rande der Scheibe (vgl. p. 424); außerdem sind b und a auf gleiche Empfindlichkeit der Magnetnadel reduziert.

Zu § 31, p. 428.

Es rotiert das Dielektrikum mit beiden Belegungen des Kondensators zusammen. Da die Stanniolbelegungen einfach auf die rotierenden Scheiben aufgeklebt waren, so ist hier $d_0 = d$ und $C' = C$. An den Formeln ist hier also nichts zu korrigieren.

Für die Berechnung der Versuche ergeben sich folgende Formeln.

Dielektrikum: *Hartgummi.*

$$d = 0{,}95 \text{ cm}, \quad \varepsilon = 2{,}96, \quad C = 0{,}63 \cdot 10^{-11}, \quad b = 23{,}3.$$

$$a = \frac{0{,}63 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 10^{-5}} \cdot 23{,}3 \cdot V \cdot n = 7{,}29 \cdot 10^{-6} \cdot V \cdot n.$$

Dielektrikum: *Glas.*

$$d = 0{,}98 \text{ cm}, \quad \varepsilon = 5{,}50, \quad C = 0{,}61 \cdot 10^{-11}, \quad b = 32{,}6.$$

$$a = \frac{0{,}61 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 10^{-5}} \cdot 32{,}6 \cdot V \cdot n = 9{,}94 \cdot 10^{-6} \cdot V \cdot n.$$

Die so berechneten Ausschläge sind in den Tab. VII und VIII, p. 430 angegeben und stimmen mit den beobachteten gut überein.

Überhaupt muß ich nochmals hervorheben, daß diese Versuchsanordnung wegen der Abwesenheit eines Luftzwischenraumes im Kondensator und wegen des Umstandes, daß die Dielektrizitätskonstante hier keinen Einfluß auf die magnetischen Wirkungen hat, als die sicherste von allen anzusehen ist. Diese Versuche allein würden schon ausreichen, um die Unbeweglichkeit des Äthers im bewegten Dielektrikum zu beweisen (vgl. unten: Zur Theorie).

Zu § 34, p. 433.

Es rotiert das Dielektrikum mit der einen Belegung B, während die andere A stillsteht. Hier müssen wir bei A' einen Strom

$$i_n = -(K-1) C' V n$$

fingieren und bei B' zwei Ströme: eine wahre elektrische Konvektion $-KCVn$ und eine fingierte $+(K-1)C'Vn$; im ganzen also

$$i_\varkappa' = -\left(KC-(K-1)C'\right)Vn = -\left\{K\frac{d}{d_0}-(K-1)\right\}C'Vn.$$

Es war

$$d_0 = 1{,}3 \text{ cm}; \quad d = 0{,}95; \quad \varepsilon = 2{,}96; \quad K = 1{,}94.$$

$$i_\varkappa = 0{,}94 \times 0{,}63 \,.\, 10^{-11} Vn = 0{,}59 \,.\, 10^{-11} Vn \text{ Amp.}$$

$$i_\varkappa' = 0{,}48 \times 0{,}63 \,.\, 10^{-11} Vn = 0{,}30 \,.\, 10^{-11} Vn \text{ Amp.}$$

Die magnetischen Wirkungen beider Ströme addieren sich.

Ein galvanischer Strom $i = 2 \,.\, 10^{-5}$ gab

bei A' die Ablenkung $b = 22{,}3$ mm
„ B „ „ $b' = 10{,}9$ „

Die Wirkung der Konvektionsströme muß also sein

$$a = \frac{i_\varkappa b + i_\varkappa' b'}{i} = 8{,}21 \,.\, 10^{-6} Vn.$$

Die Beobachtung gab als Mittelwert

$$a = 8{,}27 \,.\, 10^{-6} Vn.$$

Zu § 38, p. 438.

Die letzten Versuche über die magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes sind erst nachträglich gemacht worden, nachdem die ganze Arbeit schon niedergeschrieben war, weshalb auch die Verwechselung zwischen C und C' hier nicht nur die Formeln, sondern die Rechnung selbst beeinflußt hat. Es ist zwar schwer zu sagen, wie groß der so entstandene Fehler sein mag, denn das elektrostatische Feld ist bei diesen Versuchen unhomogen. Jedenfalls wird der Fehler nicht größer als $d_0/d = 1{,}2$, d. h. nicht größer als 20 Proz. sein[1]); wahr-

1) Nehmen wir an, daß die Kraftlinien durch den Hartgummiring so konzentriert werden, daß sie annähernd parallel gehen, dann können wir wie für ein homogenes Feld rechnen und haben:

$$d_0 = 1{,}50 \text{ cm}; \quad d = 1{,}25 \text{ cm}; \quad \varepsilon = 2{,}96; \quad K = 2{,}24;$$

$$C' = \frac{\pi(25^2 - 22^2)}{4 \,.\, 4\pi \,.\, 1{,}25 \,.\, 9} = 7{,}1 \text{ C.G.S.} = 0{,}8 \,.\, 10^{-11} \text{ Farad.};$$

$(K-1)\,C' = 1{,}10^{-11}$ Farad. statt der für die Rechnung benutzten $0{,}9 \,.\, 10^{-11}$ Farad. (p. 439). Der Unterschied ist also etwa 10 Proz.

scheinlich ist er wohl kleiner. Ich habe übrigens auch aus anderen Gründen (p. 439 unten) diesen Versuchen keine große Genauigkeit zugeschrieben. Aber auch in dem Falle, wenn man auf die Korrektion des begangenen Fehlers ganz verzichtet, behalten die Versuche dennoch ihren relativen Wert, denn die Tab. X zeigt erstens, daß der Verschiebungsstrom, welcher bei der Bewegung des Dielektrikums in einem inhomogenen Felde entsteht, auch magnetische Wirkungen ausübt und zweitens, daß diese Wirkungen der Potentialdifferenz im Kondensator und der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sind. Da aber der absolute Betrag dieser Wirkungen nur bis auf etwa 20 Proz. sicher zu berechnen ist, so sind neue *absolute* Messungen erforderlich (vgl. weiter unten).

Der „fingierte" Konvektionsstrom.

§ 29 a. Es schien mir wünschenswert den Versuch, wo das Dielektrikum im elektrostatischen Felde eines Kondensators bei stillstehenden Belegungen desselben allein bewegt wird (§ 29, p. 426), nach zwei Richtungen hin zu erweitern: erstens die magnetischen Wirkungen der „fingierten" Konvektionsströme auch bei niedrigeren Potentialen nachzuweisen, wo die Vermutung einer „wahren" Ladung des Dielektrikums keinen Platz mehr haben kann, und zweitens die Versuche in der Weise anzustellen, daß die Genauigkeit der Resultate [1]) sich berechnen läßt.

In der Tab. VI, p. 427 sehen wir, daß bei 8000 Volt der doppelte Ausschlag der Magnetnadel nur 2 mm beträgt. Um bei kleineren Potentialen zu arbeiten, müßte man die Empfindlichkeit des Magnetometers noch vergrößern; aber viel läßt sich in dieser Richtung nicht erreichen, denn gleichzeitig mit der Empfindlichkeit wachsen auch die störenden Nebeneinflüsse, und die Beobachtungen werden weniger sicher. Wenn man sich zunächst mit relativen Messungen begnügen will, so kann man solche Anordnung wählen, wo die Ablenkungen der Magnet-

---

1) Die Übereinstimmung der Beobachtung und Rechnung war auch in den früheren Versuchen sehr gut, aber sie war eben *unerwartet* gut.

nadel bedeutend größer ausfallen. In der Tat sind solche Versuche von mir schon im April 1902 angestellt worden.

Statt der rotierenden Scheibe im homogenen Felde hatte ich ein ringförmiges Dielektrikum benutzt, welches ich schon p. 435 beschrieben habe (Fig. 14). Zu beiden Seiten des beweglichen Dielektrikums waren auf unbeweglichen Mikanitplatten zwei ringförmige Staniolbelegungen A und B (Fig. 16) befestigt, welche bis zu einer gewissen Potentialdifferenz V geladen werden konnten. Als Magnetnadel wurde das kleine System (p. 8, Fig. 2 b) benutzt und so aufgehängt (Fig. 16), daß der auf der Fläche A' fingierte Konvektionsstrom auf beide Nadeln des astatischen Nadelpaares in derselben Richtung wirke. Die Belegung A und das Magnetometergehäuse wurden an Erde gelegt.

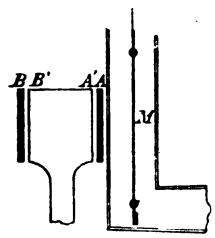


Fig. 16.

Bei dieser Anordnung erhielt ich 10 mal größere Ausschläge, als unter den früher beschriebenen Bedingungen, wie es die folgende Tab. VIa zeigt.

Tabelle VIa.

V	n	a	$\frac{a}{Vn} \cdot 10^6$
1220	± 71	∓ 3,1	3,58
3660	± 71	∓ 9,8	3,72
7320	± 71	∓ 18,3	3,52
9760	± 71	∓ 26,8	3,86
12200	± 71	∓ 32,6	3,76
12200	± 100	∓ 44,8	3,67
7320	± 114	∓ 31,4	3,76
7320	± 140	∓ 37,3	3,64
		Mittelwert:	3,69

Die Ausschläge a sind Mittelwerte von 10 Beobachtungen bei + Rotation und 10 Beobachtungen bei − Rotation. Die maximalen Abweichungen der Größe $a/Vn \cdot 10^6$ in jeder Versuchsreihe vom Mittelwerte 3,69 betragen ± 0,17; sie sind also kleiner als ± 5 Proz.

Obgleich die beschriebene Anordnung keine absoluten Messungen gestattet, so erfüllt sie dennoch ihren Zweck. *Die Versuche zeigen, daß die magnetische Wirkung der fingierten Konvektion proportional der Potentialdifferenz der Belegungen, also der Oberflächendichte der fingierten Ladung und der Geschwindigkeit der Bewegung ist, und zwar gilt die obige Proportionalität zwischen den Grenzen von 1220 bis 12 200 Volt und von 71 bis 140 Umdrehungen der Scheibe in der Sekunde.*

Nachdem dies bewiesen ist, genügt schon eine einzige sicher angestellte „*absolute*" Messung, um deren Gültigkeit auf den ganzen oben angegebenen Bereich auszudehnen. Die absoluten Messungen sind schon in Tab. VI, p. 427 angeführt, aber ich habe jetzt neue genauere Messungen mit vollkommeneren Hilfsmitteln angestellt und erlaube mir dieselben hier ausführlich zu beschreiben.

§ 29 b. In einer vertikalen, möglichst ebenen Hartgummiplatte DD (Fig. 17) von 40 cm Höhe, 30 cm Breite und ca. 1 cm Dicke wurde in der Mitte eine kreisrunde Scheibe $A'B'$ von 25 cm Durchmesser herausgeschnitten. Die Scheibe war mit einer Achse CC aus hartem Messing versehen und konnte in den bei früheren Versuchen beschriebenen Achsenlagern (Fig. 1) rotieren. Zu beiden Seiten der Platte DD waren zwei Messingscheiben A und B von 31 cm Durchmesser und 3,3 mm Dicke angebracht, welche die Belegungen des Kondensators bildeten. Die Befestigung dieser Messingscheiben an die Hartgummiplatte geschah mittels vier Hartgummibolzen mit Unterlegscheibchen von 0,86 mm Dicke, so daß im Kondensator zu beiden Seiten der rotierenden Hartgummischeibe ein Luftzwischenraum von 0,86 mm Dicke gebildet wurde und die Scheibe frei rotieren konnte. Die Messingbelegungen waren auf der Innenseite sorgfältig abgedreht und hochpoliert. Bei früheren Versuchen waren die Belegungen immer mit einem feinen radialen Schlitz versehen, um die Entstehung der störenden Thermoströme zu verhindern. Dieses Mal war kein Schlitz vorhanden, und die Belegungen bildeten eine ununterbrochene ebene und glatte Oberfläche; nur in der Mitte mußte eine

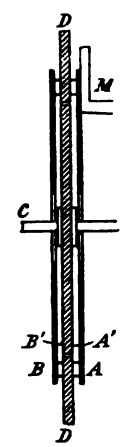


Fig. 17.

kreisförmige Öffnung von 7 cm Durchmesser ausgeschnitten werden, um die Rotationsachse durchzulassen.

Um die Magnetnadel möglichst nahe an die Hartgummischeibe heranbringen zu können, wurde auf der Außenseite der Messingscheibe A oben eine 2 cm breite radiale Furche gemacht, so daß hier die Scheibe nur 1,5 mm dick blieb, und das Magnetometergehäuse in diese Furche hineingeschoben, ohne aber dasselbe mit der Scheibe A in Berührung zu bringen. Dadurch wurde der Abstand der unteren Magnetnadel (des großen Systems p. 8, Fig. 2 a) von dem nächsten Rande der rotierenden Hartgummischeibe auf etwa 8 mm reduziert. (Bei der früheren Anordnung konnte dieser Abstand nicht unter 1,5 cm gebracht werden.) Der ganze Apparat wurde mit der größten Sorgfalt zusammengestellt und auf Isolation geprüft.

Vor den Versuchen überzeugte man sich, daß bei stillstehender Hartgummischeibe die Ladung des Kondensators keine wahrnehmbaren Ablenkungen der Magnetnadel hervorruft. Die Rotation bei ungeladenem Kondensator bewirkt wohl eine Ablenkung, aber ihre Ursache ist der Magnetismus der Hartgummischeibe, wovon man sich leicht bei ganz langsamer Rotation überzeugen kann (vgl. § 29, p. 426). Diese magnetischen Wirkungen stören bei unseren Versuchen nicht, denn die Magnetnadel stellt sich bei schnellerer Rotation immer in dieselbe Ruhelage ein und behält dieselbe unabhängig sowohl von der Rotationsgeschwindigkeit als auch von der Rotationsrichtung der Hartgummischeibe.

Ich teile hier das ganze Beobachtungsprotokoll mit.

Ein Hilfsstrom (von der Größe 10^{-5} Amp.), welcher an dem Magnetometergehäuse selbst angebracht ist, gab beim Kommutieren

vor den Versuchen 40,5 mm Ablenkung
nach „ „ 40,0 „ „

Die mittlere Empfindlichkeit der Magnetnadel wird also durch die Zahl 40,25 charakterisiert. Der Skalenabstand ist dabei 1,7 m, und die volle Schwingungsdauer der Magnetnadel 8 Sek.

In der folgenden Tabelle sind: A die Skalenablesungen, a Ablenkung beim Kommutieren der Ladung, V Potentialdifferenz im Kondensator in Volt, n Zahl der Umdrehungen in der Sekunde, + Rotation ist: Zenith, Nord, Nadir, Süd.

Tabelle VIb.

$V = 7110$		$V = 8370$		$V = 7110$		$V = 8370$	
$n = +102{,}5$		$n = +101{,}0$		$n = -101{,}2$		$n = -100{,}1$	
A	a	A	a	A	a	A	a
199	7	213	12	217	10	229	12
192	12	201	12	227	10	241	11
204	8	213	10	217	9	230	11
196	11	203	14	226	10	241	10
207	9	217	10	216	10	231	12
198	10	207	11	226	9	243	8
208	10	218	11	217	9	235	14
198	10	207	13	226	10	249	11
208	10	220	12	216	13	238	12
198	12	208	11	229	7	250	12
210		219		222		238	
Mittelwert: $a = -9{,}9$		$-11{,}6$		$+9{,}7$		$+11{,}3$	
$\frac{a}{Vn} 10^5 = 1{,}358$		1,372		1,348		1,349	

Mittelwert aus allen Versuchen: $a = 1{,}357 \cdot 10^{-5}\, Vn$.

Um dieses Resultat mit der Theorie zu vergleichen, wurde die Hartgummischeibe herausgenommen und an derselben Stelle eine Holzscheibe von genau denselben Dimensionen angebracht. Auf beiden Seiten der Holzscheibe waren an deren Oberfläche zwanzig isolierte Kupferdrähte von 0,35 mm Durchmesser eingekittet, welche in konzentrischen Kreisen angeordnet waren. Durch jeden einzelnen dieser Drähte wurden Ströme von bekannter Intensität geleitet und die entsprechenden Ablenkungen der Magnetnadel beim Kommutieren beobachtet. In der unten angeführten Tab. VIc, sowie auch in der Fig. 18 sind diese Beobachtungen zusammengestellt. Die Empfindlichkeit der Magnetnadel war bei diesen Versuchen kleiner, als bei den Versuchen mit Konvektionsströmen, um mit größerer Bequemlichkeit und namentlich auch bei Tage arbeiten zu können. Der Hilfsstrom $i = 1{,}10^{-5}$ Amp. am Magnetometergehäuse gab

jetzt beim Kommutieren $b = 14{,}6$ mm (Mittelwert); die Empfindlichkeit ist also jetzt

$$\frac{40{,}25}{14{,}6} = 2{,}76 \text{ mal kleiner.}$$

Schicken wir durch irgend einen Kreis vom Radius r, welcher in der Fläche A' oder in der Fläche B' liegt, einen Strom i, so ist seine Wirkung auf die Magnetnadel darstellbar durch $A' = i f_1(r)$ bez. durch $B' = i f_2(r)$.

Ein Konvektionsstrom an derselben Stelle r, wenn die Oberflächendichte der fingierten Ladung σ und die Umdrehungszahl der Hartgummischeibe n mal in der Sekunde ist, wird eine Wirkung

$$\partial a = 2\pi r\, dr\, \sigma n f(r)$$

ausüben. Die gesamte Wirkung der Konvektionsströme auf beiden Seiten der im elektrostatischen Felde rotierenden Hartgummischeibe wird also

$$a = 2\pi\sigma n \int_0^{r_0} [f_1(r) - f_2(r)]\, r\, dr = \frac{2\pi\sigma n}{i} \int_0^{r_0} (A' - B')\, r\, dr.$$

Dabei ist σ konstant angenommen, weil das elektrostatische Feld hier genügend homogen ist.

In der folgenden Tabelle sind diese Beobachtungen und Rechnungen zusammengestellt. Alle A' und B' sind auf den Wert $i = 0{,}957 \cdot 10^{-3}$ Amp reduziert.

Tabelle VIc.

r cm	A'	B'	$(A'-B')r$	$(A'-B')r\,\Delta r$
12,39	+160,2	−72,0	2877	
				1991
11,82	+390,5	+42,9	4109	
				1825
11,28	334,2	99,3	2650	
				1658
10,28	172,2	108,3	657	
				439
9,30	100,2	74,5	239	
				178
8,32	70,0	55,0	125	
				89
7,31	42,3	35,4	50	
				39
6,30	28,4	23,9	28	
				17
5,33	18,4	16,8	8	
				4
4,35	7,7	7,7	0	

$$\sum (A' - B')\, r\, \Delta r = 6240$$

In dieser Tabelle bemerken wir erstens, daß von den zwei gleichgerichteten Kreisströmen am Rande der Scheibe bei $r = 12{,}39$ cm der eine die Magnetnadel in der einen Richtung (+ 160,2), der andere aber in der entgegengesetzten Richtung (— 72,0) ablenkt. Diese Erscheinung scheint zunächst paradox, erklärt sich aber leicht, wenn man bedenkt, daß die vertikal aufgehängte Magnetnadel nur die Horizontalintensität des Magnetfeldes anzeigt und in einem gewissen Punkte können die Kraftlinien von A' einen spitzen — obgleich in demselben Punkte die Kraftlinien des Stromes B' einen stumpfen Winkel mit dem Horizonte bilden.[1])

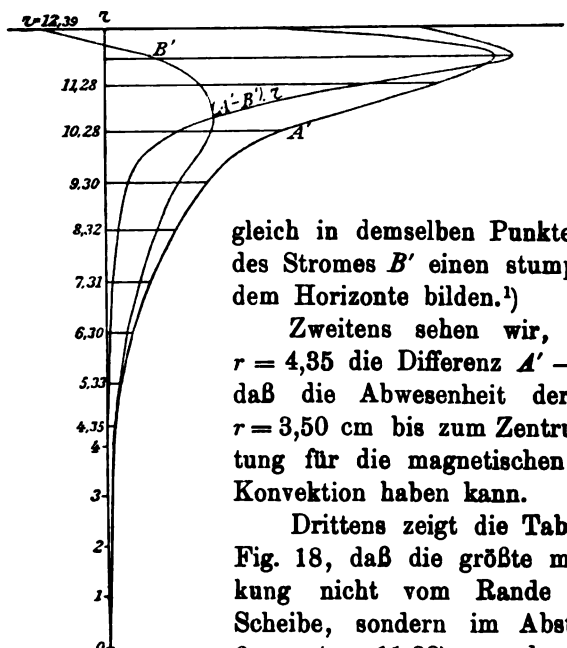


Fig. 18.

Zweitens sehen wir, daß schon bei $r = 4{,}35$ die Differenz $A' - B' = 0$ ist und daß die Abwesenheit der Belegung von $r = 3{,}50$ cm bis zum Zentrum keine Bedeutung für die magnetischen Wirkungen der Konvektion haben kann.

Drittens zeigt die Tab. VI c und auch Fig. 18, daß die größte magnetische Wirkung nicht vom Rande der rotierenden Scheibe, sondern im Abstande von etwa 6 mm ($r = 11{,}82$) von demselben ausgeübt wird. Dieser Umstand ist für die Sicherheit der Rechnung sehr günstig, denn der Rand bringt eine Korrektion mit sich und diese letztere wird dadurch kleiner.

Für die Randkorrektion nehmen wir an, daß die fingierte Ladung, welche die Hälfte des Schlitzes (0,1 cm) zwischen der rotierenden Scheibe und der feststehenden Hartgummiplatte ausfüllen würde, an dem Rande der Scheibe haftet.[2]) Wir

1) Vgl. J. Cl. Maxwell, Elektrizität 2. Taf. XIX.

2) Diese Korrektion ist analog derjenigen, welche man an der Kapazität eines Luftkondensators mit Schutzring anzubringen pflegt.

haben somit noch ein Glied $2877 . 0{,}05 = 144$ zu der Summe zu addieren und erhalten

$$a = 2\pi\sigma n \frac{6384}{0{,}957 . 10^{-3}} = 2\pi\sigma n . 6{,}67 . 10^{6}.$$

Da aber die Empfindlichkeit der Magnetnadel bei den Versuchen mit Konvektionsströmen 2,76 mal größer war, als bei den Versuchen mit den galvanischen Strömen, so muß sein

$$a = 2\pi . 18{,}40 . 10^{6}\sigma n.$$

Für die Berechnung von σ dienen folgende Größen:

Die Dicke der Hartgummiplatte . .	$d = 1{,}019$ cm
„ „ „ Luftschichten . . .	$d_0 - d = 0{,}173$ „
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon = 2{,}98$ „

$$\sigma = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{V}{\frac{d}{\varepsilon} + (d_0 - d)} = \frac{0{,}144}{4\pi} V . 10^{-11}$$

und es berechnet sich

$a = 0{,}072 \times 18{,}40 . 10^{-5} . Vn$	$= 1{,}325 . 10^{-5} . Vn$
Die Beobachtung gab . .	$a = 1{,}357 . 10^{-5} . Vn$
Differenz	$0{,}032 . 10^{-5} . Vn$
oder ca. 2,5 Proz.	

Die Genauigkeit des berechneten Wertes von a hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher die einzelnen Größen, welche in a eingehen, gemessen werden konnten.

a) Die Potentialdifferenz V wurde an einem Braunschen Elektrometer, welches mit einem absoluten Elektrometer (nach Czermak) geeicht wurde, abgelesen. Die Fehler beim Eichen sowie bei der Ablesung und Konstanterhaltung des Potentiales waren kleiner als 1 Skalenteil = 70 Volt, also kleiner als etwa 1 Proz.

b) Die Umdrehungszahl wurde an einem Zähler, welcher jede 50 Umdrehungen angab, abgelesen, indem gleichzeitig mit

dem Zähler eine Sekundenuhr beobachtet wurde. Da diese Beobachtung immer eine Minute dauerte und $^1/_5$ Sekunde noch beobachtet werden konnte, so ist hier der Fehler nicht größer als etwa 0,5 Proz.

c) Die Bestimmung der Dielektrizitätskonstante ε geschah nach der Galvanometermethode[1]), indem die Kapazität eines Kondensators mit Schutzring einmal mit Luft und das andere Mal mit Hartgummi als Dielektrikum bestimmt wurde. Für diese Versuche wurde dieselbe Hartgummischeibe benutzt, wie für die Versuche mit Konvektion. Die Genauigkeit ist hier etwa 1 Proz.

d) Die Dicke der Hartgummiplatte war natürlich an verschiedenen Stellen verschieden — von 1,011 bis 1,028 cm. Da die Scheibe rotiert und die Abweichungen klein sind, so kann für den Konvektionsstrom mit dem Mittelwerte gerechnet werden. Aber wenn wir auch einen Fehler in diesem Mittelwerte von 0,008 cm annehmen, so ist dennoch in d/ε dieser Fehler auf den dritten Teil reduziert. Um die Größe $d_0 - d$ zu bestimmen, wurde die gemeinsame Dicke von acht Unterlegscheibchen gemessen, und es ergab sich $\frac{1}{4}(d_0 - d)$ von 0,689—0,692 cm. Im Mittelwerte kann also der Fehler nicht größer als 0,002 cm sein. Der totale Fehler in der Größe $d/\varepsilon + (d_0 - d)$ (welche etwa 0,5 cm beträgt) kann demnach 1 Proz. nicht übersteigen.

e) Endlich können in der Berechnung von $\sum(A' - B')r\,\Delta r$ Fehler sein, welche in maximo auf 2 Proz. zu schätzen sind.

Im ganzen kann also die Größe a bei den ungünstigsten Bedingungen mit einem Fehler von

$$1 + 0{,}5 + 1 + 1 + 2 = 5{,}5 \text{ Proz.}$$

behaftet sein. Wahrscheinlich ist aber dieser Fehler nicht größer als

$$\sqrt{1^2 + 0{,}5^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2} = 2{,}7 \text{ Proz.}$$

Der Hauptmittelwert aus den beobachteten Ausschlägen weicht von den Werten der einzelnen Beobachtungsreihen auch um etwa 2 Proz. ab. Alles zusammen überzeugt uns, daß die Über-

---

1) Vgl. l. c. § 7. p. 9.

einstimmung der Beobachtung und Rechnung keine zufällige ist, sondern wegen der Genauigkeit der Versuche zu erwarten war.

Die den Rechnungen zugrunde gelegte Theorie wird also durch den Versuch bestätigt.

Der Verschiebungsstrom.

§ 37 b. Ganz nach demselben Schema sind die Versuche mit dem Verschiebungsstrom gemacht worden und es wurde dazu auch derselbe Apparat benutzt.

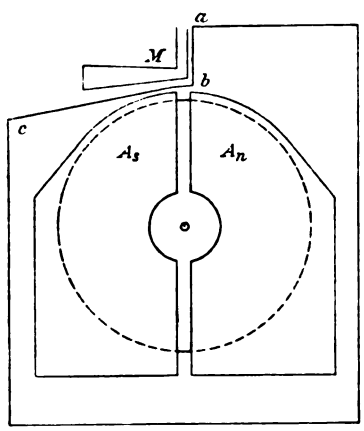


Fig. 19.

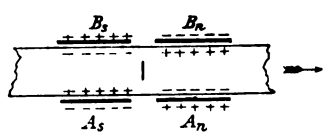


Fig. 20.

In der Fig. 19 sieht man, daß das Magnetometer jetzt in bezug auf seine frühere Lage um 90° gedreht und über der rotierenden Scheibe in einem Ausschnitte *a b c* der Hartgummiplatte angebracht ist. Das Magnetometergehäuse berührt nirgends die Hartgummiplatte und ist auf das sorgfältigste mit Papier und Watte umgeben, um der Entstehung der Luft- und Thermoströme vorzubeugen. Der Abstand der unteren Magnetnadel von dem oberen Rande der rotierenden Scheibe war etwa 2 cm.

In der Fig. 20 sind im Grundrisse die paarweise entgegengesetzt geladenen Belegungen A und B gezeichnet. Der Abstand zwischen A_n und A_s bez. zwischen B_n und B_s ist 1 cm. In diesem Zwischenraume bildet sich bei der Bewegung der Hartgummischeibe in der Pfeilrichtung und bei der in der Fig. 20 angegebenen Elektrizitätsverteilung ein Verschiebungsstrom von A nach B. Der obere Rand der Belegungen A und B ist nur 6 mm höher als der obere Rand der rotierenden Scheibe; das elektrostatische Feld kann also hier nicht in dem Maße homogen sein, wie es in dem vorigen Versuche der Fall war, wo der Schutzring 3 cm breit genommen werden

konnte. Es erlaubt dennoch die jetzige Anordnung des Versuches eine viel sicherere Berechnung, als die frühere[1]) mit einer ringförmigen Belegung.

Die Beobachtung geschah ganz ebenso wie bei den vorigen Versuchen mit dem fingierten Konvektionsstrom und ergab folgendes.

Ein am Magnetometergehäuse befindlicher Hilfsstrom $i = 1 \cdot 10^{-5}$ Amp. gibt beim Kommutieren $b = 50$ mm bei 2,3 m Skalenabstand und bei 10 Sek. voller Schwingungsdauer der Magnetnadel.

Die Mittelwerte der Ausschläge der Magnetnadel beim Kommutieren der Ladung waren

bei $V = 6720$, $n = \pm 100{,}3$, $a = \mp 5{,}3$, $\frac{a}{Vn} 10^6 = 7{,}86$

„ $V = 7360$, $n = \pm 102{,}5$, $a = \mp 5{,}9$, $\frac{a}{Vn} 10^6 = 7{,}82$

Mittelwert $\frac{a}{Vn} 10^6 = 7{,}84$

Jetzt wird die Hartgummischeibe herausgenommen und durch eine Holzscheibe mit eingekitteten Kupferdrähten ersetzt, welche den Weg des fingierten Konvektionsstromes und des Verschiebungsstromes in der rotierenden Hartgummischeibe nachahmen. In der Fig. 21 ist ein solcher Draht dargestellt. Der galvanische Strom durchläuft diesen Draht in der Richtung

$$\underline{A_s a_s} \quad \underline{b_s B_s} \quad \underline{A_n a_n} \quad \underline{b_n B_n} \quad A_s'.$$

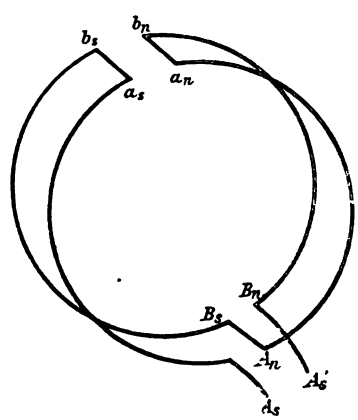


Fig. 21.

Die unterstrichenen Teile dieses Stromkreises entsprechen den fingierten Konvektionsströmen, welche die rotierende Hartgummischeibe bei ihrer Bewegung zwischen den Belegungen $A_s B_s$ und $A_n B_n$ bildet.

1) l. c. § 37. p. 436.

Die durch einen oberen Strich verbundenen Teile entsprechen den Verschiebungsströmen in dem Zwischenraume, wo das elektrostatische Feld zwischen A und B sein Zeichen wechselt.

Wie ich schon früher[1]) auseinandergesetzt habe, bilden bei dieser Versuchsanordnung die fingierten Konvektionsströme und die Verschiebungsströme einen geschlossenen Stromkreis ganz in derselben Weise, wie es unser galvanischer Stromkreis tut.

Es wurde nun die Wirkung einer Reihe solcher galvanischer Ströme von verschiedenem Durchmesser auf die Magnetnadel untersucht[2]) und wie im vorigen Versuche die Summe $\sum f(r)\, r\, \Delta r$ gebildet.

Der benutzte Strom war $i = 3{,}96 \,.\, 10^{-4}$.

$$\sum f(r)\, r\, \Delta r = 2510$$
$$\text{Die Randkorrektion} = \quad 92$$
$$2602$$

Die Empfindlichkeit der Magnetnadel bei den Versuchen mit den Verschiebungsströmen war 1,52 mal größer, also

$$a = 2\pi\sigma n \frac{2602 \times 1{,}52}{3{,}96 \,.\, 10^{-4}} = 2\pi\sigma n \,.\, 10{,}0 \,.\, 10^{6}.$$

Die Oberflächendichte σ ist wie früher

$$\sigma = \frac{0{,}144}{4\pi} 10^{-11}\, V.$$

Demnach berechnet sich:

$$a = 0{,}072 \,.\, 10 \,.\, 10^{-5}\, Vn = 7{,}20 \,.\, 10^{-6}\, Vn$$
$$\text{Beobachtet wurde} \quad a = 7{,}84 \,.\, 10^{-6}\, Vn$$
$$\text{Differenz } 0{,}64 \text{ oder } 8{,}5 \text{ Proz.}$$

Die beobachteten Ausschläge sind ein wenig größer als die berechneten. Das war auch zu erwarten, denn bei der Berechnung haben wir ein streng homogenes Feld vorausgesetzt, in Wirklichkeit aber wird am Rande der rotierenden Scheibe, wegen der kleinen Breite des Schutzringes, eine größere Oberflächendichte sein als bei homogenem Felde, und da gerade der Rand die größte Geschwindigkeit hat und die größere Wirkung auf die Magnetnadel ausübt, so muß auch ein größerer Ausschlag derselben beobachtet werden.

1) l. c. p. 440.

2) Auf die Magnetnadel übten natürlich nur die Stromteile $a, b,$ und $a_n b_n$ eine bemerkbare Wirkung (vgl. l. c. § 37. p. 437) aus.

Ich bemerke noch, daß, falls die Hertzsche Theorie richtig wäre, die beobachteten Ausschläge $\varepsilon/\varepsilon - 1$ mal, d. h. um 50 Proz. größer sein müßten, als die berechneten.

Resultat.

Ich glaube, daß durch die hier beschriebenen Versuche die magnetische Wirkung der im elektrostatischen Felde bewegten Dielektrika quantitativ nicht minder sichergestellt worden ist, als die magnetische Wirkung bewegter Leiter.

Zur Theorie.

In welcher Weise diese Versuche vom Standpunkte der elektromagnetischen Theorie bewegter Körper betrachtet werden können, habe ich schon früher[1]) auseinandergesetzt und will jetzt nur meine Auseinandersetzungen in Formeln kleiden. Gleichzeitig bietet sich hier die Gelegenheit, drei verschiedene Theorien in bezug auf unsere Versuche zu vergleichen, nämlich die Theorien von H. Hertz, H. Lorentz und E. Cohn.

Es soll im folgenden E_0 und M_0 die elektrische bez. magnetische Feldintensität im Äther und E und M im bewegten Körper heißen; $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ sind Polarisationen. Weiter ist mit u die Geschwindigkeit der Körper, mit V die Lichtgeschwindigkeit, und mit A die Stromdichte bezeichnet. Der Symbol Γ bedeutet Divergenz; P bedeutet Rotation oder Curl.

Allen drei Theorien ist dasselbe Maxwellsche Gleichungssystem zugrunde gelegt

$$V P(M) = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + 4\pi A,$$

wo d/dt den vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit bedeutet. Für einen bewegten Körper müssen wir schreiben[2])

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \,.\, \Gamma(A) - P \,.\, [u\, A],$$

wo jetzt $\partial/\partial t$ die zeitliche Änderung in einem unbeweglichen Punkte bedeutet.

---

1) A. Eichenwald, Physik. Zeitschr. 4. p. 310. 1903; Ann. d. Phys. 11. p. 431 u. 432. 1903.

2) J. C. Maxwell, l. c. art. 598; H. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft p. 260. 1892.

Für alle drei Theorien gilt also die Gleichung

$$V P\left(M + \left[\frac{u}{V} \cdot \mathfrak{E}\right]\right) = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi A + u \cdot I(\mathfrak{E}).$$

Die Größen M und $\mathfrak{E}$ haben aber in verschiedenen Theorien verschiedene Bedeutung.

Bei H. Hertz[1]) bewegt sich der Äther mit der Materie zusammen; es ist also

$$E = E_0, \qquad \mathfrak{E} = \varepsilon E_0,$$
$$M = M_0, \qquad \mathfrak{M} = \mu M_0.$$

Nach H. Lorentz[2]) müssen wir für die bewegte Materie bei ruhendem Äther schreiben:

$$E = E_0 + \left[\frac{u}{V} \cdot \mu_0 M_0\right], \quad \mathfrak{E} = \varepsilon_0 E_0 + (\varepsilon - \varepsilon_0) E,$$
$$M = M_0 - \left[\frac{u}{V} \cdot \varepsilon_0 E_0\right], \quad \mathfrak{M} = \mu_0 M_0 + (\mu - \mu_0) M.$$

E. Cohn[3]) läßt für die Polarisationen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ denselben Ausdruck wie bei H. Lorentz, setzt aber

$$E = E_0 + \left[\frac{u}{V} \cdot \mu_0 M\right],$$
$$M = M_0 - \left[\frac{u}{V} \cdot \varepsilon_0 E\right].$$

In allen unseren Versuchen war M_0 die mit dem Magnetometer beobachtete Größe und im günstigsten Falle war

---

1) H. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 370. 1890; Ausbreitung der elektrischen Kraft p. 257. 1892.

2) H. Lorentz, Versuch einer Theorie d. elektr. und opt. Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895. In den hier gewählten Zeichen lauten

die Gleichung (VIb) p. 35 $M = M_0 - \left[\frac{u}{V} \cdot \varepsilon E_0\right]$,

„ „ (Vc) p. 76 $\mathfrak{E} = \varepsilon E - \left[\frac{u}{V} \cdot \mu_0 M_0\right]$,

außerdem ist bei H. Lorentz $\mu = \mu_0$ und der Leitungsstrom A als Konvektionsstrom betrachtet.

3) E. Cohn, Archives Néerlandaise (2) 5. p. 518. 1900; Nachrichten d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 1. 1901; Ann. d. Phys 7. p. 33. Gleichung (C). 1902; l. c. p. 56. Gleichung (C^2) u. (C^3).

$M_0 = 10^{-5}$ C.G.S. Da M von derselben Größenordnung ist wie M_0 und da für die größten von uns realisierten Geschwindigkeiten das Verhältnis u/V etwa 10^{-6} nicht überstieg, so konnte die Größe $[u/V . M]$ überhaupt nicht beobachtet werden. Für unsere Versuche können wir demnach $E = E_0$ setzen. Dann verschwindet aber der Unterschied zwischen der H. Lorentzschen und der E. Cohnschen Theorie, und unsere Versuche können auch zwischen diesen beiden Theorien nicht entscheiden.

Setzen wir jetzt die Werte von E, M und $\mathfrak{E}$ in die Maxwellsche Grundgleichung, so erhalten wir

$$\text{(H. L. C.)} \quad V P(M_0) = \frac{\partial \varepsilon E_0}{\partial t} + 4\pi A + u . \Gamma(\varepsilon E_0) - P[u A],$$

indem nach der H. Hertzschen Theorie

$$A = \varepsilon E_0$$

zu setzen ist, nach der Lorentz-Cohnschen Theorie dagegen

$$A = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0 .$$

Die Gleichung (H. L. C.) zeigt unmittelbar, daß für bewegte Leiter alle Theorien dasselbe Resultat ergeben, für bewegte Dielektrika dagegen nicht.

In der obigen Gleichung steht links die mit dem Magnetometer beobachtete magnetische Kraft M_0. Rechts steht eine Summe von vier Strömen:

$\frac{\partial \varepsilon E_0}{\partial t}$ ist der Maxwellsche Verschiebungsstrom (Hertzeffekt), welcher durch die Hertzschen Versuche in den Dielektrika nachgewiesen worden ist. Bei unseren quantitativen Messungen war immer

$$\frac{\partial \varepsilon E_0}{\partial t} = 0 .$$

A ist der galvanische Strom (Oerstedeffekt) oder auch der Konduktionsstrom, welcher bei der Bewegung der Leiter in einem inhomogenen elektrostatischen Felde entsteht; im allgemeinen also der Leitungsstrom.

$u \Gamma(\varepsilon . E_0)$ ist der *„wahre"* Konvektionsstrom (Rowlandeffekt).

$-P[u . A]$ ist der *„fingierte"* Konvektionsstrom (Röntgeneffekt) oder auch der Verschiebungsstrom, welcher bei der Bewegung der Dielektrika in einem inhomogenen elektrostatischen Felde entsteht (zweiter Röntgeneffekt).

Dieser letzte Strom ist dort zu fingieren, wo $P[u\,A]$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, wo also entweder u oder A örtlich variieren. In unseren Versuchen kommen beide Fälle vor, nur ist die Variation nicht stetig, sondern geht an einer gewissen Fläche sprungweise vor sich; unter dieser Voraussetzung haben wir nämlich den Ansatz für unsere Rechnungen gemacht. An einer Unstetigkeitsfläche geht bekanntlich für irgend einen Vektor B die $P(B)$ in $[(B_1 - B_2)N]$ über, wo N den zu der Unstetigkeitsfläche normalen Einheitsvektor bedeutet.[1]) Außerdem war bei uns u immer senkrecht zu A. Demnach können wir für das letzte Glied der Gleichung statt des Vektors $-P[u\,A]$ die skalare Größe

$$(i) = -(u_1 A_1 - u_2 A_2)$$

schreiben, was einen *in* der Unstetigkeitsfläche fingierten Strom bedeutet.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden.

Erster Fall. Das Dielektrikum bewegt sich in einem homogenen, unveränderlichen Felde (reine Konvektion). Hier ist u unstetig. Der fingierte Strom liegt in der Unstetigkeitsfläche von u, also auf der Oberfläche des Dielektrikums.

a) Nach H. Hertz ist

$$A_1 = A_2 = \varepsilon E_0.$$

Im Dielektrikum ist die Geschwindigkeit u, im angrenzenden Äther (Luft) $u_2 = 0$. Der fingierte Strom wird

$$(i) = -u_1 \varepsilon E_0.$$

b) Nach Lorentz-Cohn haben wir im Hartgummi $A_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0$, im Äther (Luft) $\varepsilon = \varepsilon_0$, also $A_2 = 0$ und erhalten

$$(i) = -u_1 (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0,$$

was auch der Versuch bestätigt.

---

1) Denke man sich an der Unstetigkeitsfläche einen flachen Zylinder und ein schmales Viereck gezeichnet, und zwar so, daß die Höhe des Zylinders und die kurzen Seiten des Vierecks senkrecht zu der Fläche stehen und wende man beim Zylinder den Gaussschen, beim Viereck den Stokesschen Satz an, so erhält man unmittelbar

im ersten Falle für die Flächendivergenz $((B_1 - B_2).N)$,

im zweiten Falle für den Flächencurl $[(B_1 - B_2).N]$.

Zweiter Fall. Das Dielektrikum bewegt sich in einem unhomogenen Felde. Bei unseren Versuchen wird in dem Zwischenraume zwischen den Belegungen A_s und A_n (Fig. 20) an einer Stelle $E_0 = 0$. An dieser Stelle variiert A sehr schnell, aber u bleibt konstant. Der fingierte Strom liegt in der Unstetigkeitsfläche von A, also senkrecht zu der Oberfläche des Dielektrikums.

a) Nach Hertz haben wir

$$A_1 = \varepsilon E_0, \quad A_2 = 0, \quad u_1 = u_2;$$
$$(i_1) = - u_1 \varepsilon E_0.$$

b) Nach Lorentz-Cohn

$$A_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0, \quad A_2 = 0, \quad u_1 = u_2,$$
$$(i_1) = - u_1 (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0.$$

Dieser letzte Ausdruck für (i_1) wird durch den Versuch bestätigt.

Beide Versuche sprechen also gegen die Hertzsche Theorie.

Wir können aber die Versuche anders deuten. Bei der Rotation der dielektrischen Scheibe wird die angrenzende Luft auch mit bewegt und die Geschwindigkeit u_2 in der Luft kann nicht gleich Null gesetzt werden, vielmehr müssen wir nach der Hertzschen Theorie

$$(i) = - (u_1 - u_2) \varepsilon E_0$$

setzen und solche Ströme in der ganzen mitbewegten Luftschicht fingieren. Die Wirkung dieser Ströme wird schwerlich zu berechnen sein, sie könnte aber in einzelnen Fällen der Wirkung des Oberflächenstromes $- u (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0$ gleich ausfallen und es wäre dann zwischen den zwei Theorien unentschieden geblieben. Natürlich, je genauer die Versuche gemacht worden sind, desto unwahrscheinlicher wird die Übereinstimmung der Größen $- (u_1 - u_2) \varepsilon E_0$ und $- u_1 (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0$. Jedenfalls bleibt hier eine gewisse Unbestimmtheit des Versuches bestehen.

Berücksichtigen wir aber die Versuche, wo das Dielektrikum mit seinen Belegungen zusammen rotiert und überhaupt kein Luftzwischenraum vorhanden ist, so sehen wir, daß hier die Verhältnisse ganz genau zu bestimmen sind, denn an der

Grenze Dielektrikum–Metall ist $u_1 = u_2 = u$; im Dielektrikum ist $A_1 = \varepsilon E_0$; in der metallischen Belegung ist $A_2 = 0$, also

$$i = - u \varepsilon E_0 .$$

An derselben Fläche haben wir noch den Konvektionsstrom

$$u \Gamma . (\varepsilon E_0) = + u \varepsilon E_0 .$$

Beide Ströme zusammen erzeugen also nach H. Hertz keine magnetische Wirkung.

Nach der Lorentz-Cohnschen Theorie haben wir dagegen

$$u_1 = u_2 = u, \quad A_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0, \quad A_2 = 0$$

und

$$u \Gamma . (\varepsilon E_0) - P . [u . A] = u \varepsilon E_0 - u (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0 = u \varepsilon_0 E_0 ,$$

wie es auch meine Versuche mit Hartgummi und Glas[1]) bestätigen. Zugleich sehen wir, daß diese Versuche nicht so genau zu sein brauchen, um zwischen den beiden Theorien entscheiden zu können.

Endlich will ich noch bemerken, daß es nach der Hertzschen Theorie unbegreiflich erscheint, warum bei der Bewegung geladener Leiter, d. h. bei dem oft wiederholten Rowlandschen Versuch die mitbewegte Luft auf die magnetische Wirkung ohne Einfluß bleibt. Nach der Lorentz-Cohnschen Theorie erklärt sich das leicht durch den Umstand, daß für Luft $\varepsilon - \varepsilon_0 = 0{,}0006$, also eine sehr kleine Größe ist.

Führen wir an der Gleichung (H. L. C.) die Operation Γ aus und berücksichtigen, daß $\Gamma P(M_0) = 0$ ist, so können wir sagen, daß jede Kombination von den in der rechten Seite stehenden Stromarten stets geschlossene Stromkreise bilden muß. Die zwei Röntgeneffekte aber $P[u A]$ sind immer, unabhängig von anderen Strömen, in sich geschlossen.

Betrachten wir einige von diesen Kombinationen.

1. Eine Kombination von Verschiebungsströmen und Leitungsströmen $\partial \varepsilon E_0 / \partial t + 4 \pi A$ finden wir z. B. in den schlechteren Leitern; sie ist von mir schon früher in den Elektrolyten quantitativ untersucht worden[2]) und für langsame Änderungen der Polarisation (große Wellenlängen) mit der Maxwellschen Theorie in Übereinstimmung gefunden.

1) l. c. § 31. p. 428 ff.

2) A. Eichenwald, Wied. Ann. 62. p. 571. 1897.

2. Da in Elektrolyten die Ionen sich bewegen, so kann dieser Fall auch durch die Formel

$$\frac{\partial \varepsilon E_0}{\partial t} + u \,.\, \Gamma(\varepsilon E_0)$$

dargestellt werden.

3. Wenn die Belegungen des Kondensators mit dem Dielektrikum zusammen rotieren, so beobachten wir

$$u \,.\, \Gamma(\varepsilon E_0) - P[u \,.\, (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0] \,.$$

4. Eine Kombination $4\pi A + u \,.\, \Gamma(\varepsilon E_0)$ haben wir in den Versuchen mit den Konduktionsströmen[1]), welche entstehen, wenn eine geladene *volle* Metallscheibe zwischen Metallsektoren rotiert.

5. Eine Kombination von den drei ersten Gliedern der Gleichung haben wir in den Versuchen, wo die rotierende Metallscheibe *auch* in Sektoren eingeteilt ist.[2]) Dieser Fall ist nur qualitativ untersucht worden, ebenso wie der Fall, wo dielektrische Sektoren rotieren[3]) und welcher durch die Kombination vom ersten, zweiten und vierten Gliede der Gleichung dargestellt wird.

Wir haben gesehen, daß nach der Hertzschen Theorie dem Äther dieselbe Geschwindigkeit wie der Materie zugeschrieben wird; nach H. Lorentz bleibt der Äther in Ruhe; und auch E. Cohn[4]) kommt zu der Anschauung eines überall ruhenden Äthers. *Da unsere Versuche gegen die Hertzsche Annahme sprechen, so müssen wir den Äther auch in den bewegten Dielektrika als ruhend annehmen.*

Ganz analoge Bedeutung für die rein optischen Erscheinungen haben die bekannten Versuche von Fizeau und von Michelson und Morley mit dem strömenden Wasser; aber auch hier ist die Genauigkeit nicht groß genug, um zwischen den Theorien von H. Lorentz und E. Cohn zu entscheiden.

Moskau, Ingenieur-Hochschule, November 1903.

1) l. c § 21. p. 27. Figg. 6 u. 7.
2) l. c. § 20. p. 25.
3) l. c. § 35. p. 433.
4) E. Cohn, Ann. d. Phys. 7. p. 55. 1902.

(Eingegangen 7. Dezember 1903.)

4. *Die Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur; von A. Bestelmeyer.*

(Auszug und Erweiterung der Inaugural-Dissertation des Verfassers.)

Die kinetische Gastheorie in ihrer ursprünglichen Form geht von der Vorstellung aus, daß sich die Moleküle wie vollkommen elastische Kugeln verhalten. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich der Koeffizient der inneren Reibung:

$$\eta = 0{,}30967 \cdot \varrho L \Omega \text{ [1]},$$

wo ϱ die Dichte, L und Ω die nach dem Maxwellschen Gesetze berechneten Mittelwerte der Weglänge und der Geschwindigkeit bedeuten.

Da die Weglänge umgekehrt proportional der Dichte ist, so folgt hieraus zunächst die Unabhängigkeit der inneren Reibung von der Dichte; die experimentelle Bestätigung dieses überraschenden Resultates innerhalb weiter Grenzen ist eine der wichtigsten Stützen der kinetischen Gastheorie.

Andererseits müßte nach obiger Formel η proportional der Geschwindigkeit Ω, also proportional der Quadratwurzel der absoluten Temperatur wachsen; die Experimente dagegen haben eine stärkere Abhängigkeit von der Temperatur ergeben.

Außerdem wurde durch die Untersuchungen verschiedener Forscher, besonders durch die eingehenden und sorgfältigen Messungen S. W. Holmans [2]) festgestellt, daß die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur nicht durch eine Potenz der absoluten Temperatur mit konstantem Exponenten dargestellt werden kann, sondern um so langsamer mit der Temperatur wächst, je höher diese ist.

Will man bei der ursprünglichen Theorie der elastischen Kugeln bleiben, so muß man, worauf zuerst Stefan [3]) auf-

1) O. E. Meyer, Kinet. Theorie d Gase, 2. Aufl., p. 111 d. math. Zusätze, 1899.

2) S. W. Holman, Proc. Amer. Ac. 21. p. 1—44. 1885; Phil. Mag. (5) 21. p. 199—222. 1886.

3) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 65. (II.) p. 339. 1872.

merksam machte, annehmen, daß die mittlere freie Weglänge bei gleicher Dichte mit der Temperatur zunehme, und diese Forderung würde erfüllt werden, wenn die Größe der Moleküle mit wachsender Temperatur abnähme; die Schwierigkeit bei dieser Hypothese war, daß man sich keine befriedigende Rechenschaft geben konnte über den Grund einer derartigen bedeutenden Verkleinerung des Molekularvolumens bei hoher Temperatur.

Hier setzte W. Sutherland [1]) ein. Er zeigte durch Berücksichtigung der Anziehungskräfte der Moleküle, daß wir es bei der Berechnung der freien Weglänge nicht mit der wirklichen räumlichen Ausdehnung der Moleküle, sondern mit einer scheinbaren zu tun haben. Bewegen sich nämlich zwei Moleküle so, daß sie bei Abwesenheit anziehender Kräfte dicht nebeneinander vorbeifliegen würden, ohne sich zu berühren, so werden ihre Bahnen durch eine zwischen ihnen wirkende Anziehungskraft so viel abgelenkt werden, daß ein Zusammenstoß erfolgt; diese Ablenkung wird um so stärker sein, je längere Zeit die ablenkende Kraft wirkt, je geringer also die Geschwindigkeit der Moleküle ist. Indem Sutherland diesen Gedanken rechnerisch verfolgte, fand er, daß der gewöhnliche Ausdruck für die Zahl der Zusammenstöße mit der Größe $(1 + C/\theta)$ zu multiplizieren, die Weglänge also mit derselben Größe zu dividieren sei. θ bedeutet die absolute Temperatur und C eine Konstante des betreffenden Gases, welche proportional ist der bis zum Zusammenstoß zweier Moleküle von ihrer gegenseitigen Anziehungskraft geleisteten Arbeit. Für das Verhältnis der Reibungskoeffizienten bei zwei verschiedenen Temperaturen θ_1 und θ_2 erhält man demnach:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{1/2} \frac{1 + \frac{C}{\theta_2}}{1 + \frac{C}{\theta_1}}.$$

Sutherland selbst hat diese Formel durch Vergleichung mit den Resultaten von S. W. Holman und von C. Barus [2]) geprüft und innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler bestätigt gefunden.

1) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) **36**. p. 507—531. 1893; vgl. auch O. E. Meyer, l. c. p. 79 der math. Zusätze.

2) C. Barus, Wied. Ann. **36**. p. 358—398. 1889.

Holman hat die Reibung der Luft zwischen 0 und 124° und der Kohlensäure zwischen 0 und 225° in Intervallen von etwa 20° untersucht. Er bediente sich der Transpirationsmethode und zwar ließ er das zu untersuchende Gas nacheinander durch zwei auf verschiedener Temperatur gehaltene Kapillaren strömen; durch Messung des Druckes vor, zwischen und nach den Kapillaren konnte er direkt das Verhältnis der Reibungskoeffizienten bei verschiedenen Temperaturen bestimmen. Abgesehen von der Eliminierung der Volumen- und Zeitmessung besitzt diese Methode noch den weiteren bemerkenswerten Vorteil, daß durch beide Kapillaren genau dasselbe Gas strömt und infolgedessen etwaige Verunreinigungen des letzteren das Resultat weniger beeinflussen, ein Umstand, der bei Benützung kleiner Temperaturintervalle besonders stark ins Gewicht fällt. Demgemäß sind die Resultate der Arbeit, die sich durchwegs durch Umsicht und Sorgfalt auszeichnet, wohl als bis auf einige Tausendstel sicher anzusehen. Innerhalb dieser Fehlergrenzen bewegen sich auch die Abweichungen der experimentell gefundenen Werte von den von Sutherland berechneten; da Holman seine Resultate durch eine Formel von der Form $(1 + \alpha T)^n$ nicht befriedigend darstellen konnte, sondern statt derselben eine empirische Formel mit zwei willkürlichen Konstanten, für Kohlensäure sogar eine solche mit drei Konstanten wählen mußte, so ist die Übereinstimmung mit der Sutherlandschen Formel ein sehr wertvoller Beleg für die Berechtigung der letzteren.

Weniger günstig verhält es sich mit den Versuchen von Barus, der die Zähigkeit der Luft und des Wasserstoffs bis zur Temperatur der Weißglühhitze untersucht hat. Bei diesen hohen Temperaturen wuchsen die experimentellen Schwierigkeiten außerordentlich. Die hauptsächlichste bestand in der Herstellung und Messung genügend konstanter Temperaturbäder. Als solche benützte Barus die Luftsäule im Zylinder einer Argandschen Petroleumlampe und die Flamme eines mit Schornstein versehenen Bunsenbrenners, mit dem die Temperatur durch Anwendung eines Luftgebläses bis 1300° gesteigert werden konnte. Der Reibungsapparat bestand aus einigen zu engen Spiralen aufgewundenen Platinkapillaren. Die Temperaturen wurden durch Thermoelemente aus Platin und Platin-

iridium gemessen, die mit dem Porzellanluftthermometer verglichen worden waren. Für die innere und äußere Fläche der Spule ergaben sich Temperaturunterschiede von 0 bis 30°.

Eine kaum minder bedeutende Fehlerquelle, als die Herstellung und Messung der Temperaturen, bildet die Art der Einfügung der Kapillaren. Dieselben befanden sich mit beiden Enden auf Zimmertemperatur und wurden nur in der Mitte erhitzt. Bei dem Fehlen einer scharfen Grenze zwischen heißem und kaltem Teil ist die Einsetzung eines Zahlenwertes für dieselbe ziemlich willkürlich. Befindet sich die ganze Kapillare auf Zimmertemperatur, so ist ihr Reibungswiderstand ihrer Länge L proportional; befindet sich der mittlere Teil auf einer sehr hohen Temperatur, so ist der Widerstand, den das durchströmende Gas in den kalten Enden erfährt, sehr klein gegen den im heißen Teil. Der prozentuale Fehler in der Berechnung des Reibungskoeffizienten ist daher nahezu gleich dem Fehler in der Bestimmung der Länge des heißen Teiles; diese setzt Barus gleich 29 cm; ein Fehler von nur 0,5 cm auf jeder Seite in der Bestimmung der Grenze zwischen heiß und kalt beeinflußt daher das Resultat um ungefähr 3 Proz.

Weitere Fehlerquellen liegen in der Absorption des Gases durch das rasch wechselnde, kalte Wasser der pneumatischen Wanne (für Wasserstoff wurden diesbezügliche Korrektionen bis zu 2 Proz. angebracht), in der Nichtberücksichtigung der thermischen Längenausdehnung der Kapillare und in der Vernachlässigung der Gleitung. In der theoretischen Betrachtung über letztere ist dem Verfasser ein Irrtum unterlaufen, indem er den Gleitungskoeffizienten $\zeta = \zeta_0 \sqrt[6]{1 + \alpha T}$ setzt[1]); $\sqrt[6]{1 + \alpha T}$ ist nach den Ergebnissen seiner Beobachtungen das Gesetz der Änderung der Weglänge mit der Temperatur bei konstanter Dichte; da aber das Gas immer unter dem gleichen Druck untersucht wurde, so kommt noch der Faktor $(1 + \alpha T)$ hinzu. Nimmt man den Gleitungskoeffizienten bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck nach E. Warburg[2]) gleich 0,00001, so erhält man nach der Theorie für den Einfluß der

1) C. Barus, l. c. p. 883.
2) E. Warburg, Pogg. Ann. 159. p. 399—415. 1876.

Gleitung auf das Resultat bei 1000° nicht ganz 2 Proz. für Luft und das Doppelte für Wasserstoff.

Erwägt man die erörterten Punkte zusammen, so wird man auf Fehler von 5 Proz. rechnen und solche bis zur doppelten Größe nicht ausschließen dürfen. Oberhalb 1000° bewirkt außerdem, wie Barus hervorhebt, die Diffusion durch das glühende Platin Fehler; deren Größe entzieht sich wohl einer Schätzung.

Um nun die Resultate mit den Forderungen der Sutherlandschen Theorie zu vergleichen, habe ich eine graphische Darstellung angewendet. Da es sich um das Gesetz der Änderung der Weglänge mit der Temperatur handelt, empfiehlt es sich aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial den Einfluß der Änderung der molekularen Geschwindigkeit auf die Reibung auszuschalten. Ich habe daher die Zahlenwerte der Größe η_T/η_0 für Luft zunächst durch $\sqrt{1+\alpha T}$ dividiert; der Quotient ist dann gleich der molekularen Weglänge, diejenige bei $0^0 = 1$ gesetzt. Diese Werte wurden als Ordinaten aufgetragen (Fig. 1), während die Abszissen die zugehörigen Temperaturen bedeuten. Ferner habe ich die nach der entsprechenden Sutherlandschen Formel berechneten Werte der Weglänge als Kurve eingetragen; die Konstante C ist dabei gleich 113 gesetzt, wie sich aus den Holmanschen Werten für Luft ergibt. Endlich sind zum Vergleich auch die letzteren Werte selbst eingetragen.

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß die Abweichung der Barusschen Werte von der Sutherlandschen Kurve nicht größer ist, als oben als zulässig bezeichnet wurde; aber wenn man von den der Gasdiffusion wegen unsicheren Werten bei 1210° und 1216° absieht, so liegen die Werte sämtlich unter der Sutherlandschen Kurve [1]); bei der Unsicherheit

1) In der Berechnung von Sutherland erscheint bei 442° der berechnete Wert etwas kleiner als der von Barus angegebene; dies rührt daher, daß Sutherland die Zahlen einer kurzen Veröffentlichung im Amer. Journ. of Sc. (3) 35. p. 407—410 1888 entnommen hat, während der vorliegenden Betrachtung die in Wied Ann. 36. p. 386. 1889 angegebenen Zahlen zu Grunde liegen; diese weichen von den ersteren bis zu 1 Proz. ab. Außerdem ist Sutherland bei Berechnung der Werte für 1210° und 1216° ein Rechenfehler unterlaufen.

der Barusschen Werte hat das wenig zu bedeuten; nur können sie nicht als eine gewichtige Bestätigung der Sutherlandschen Theorie angesehen werden; mindestens ebensogut genügt ihnen z. B. das von Barus empirisch angenommene Gesetz, wonach die Weglänge der sechsten Wurzel aus der absoluten Temperatur proportional ist. Das einzige, was be-

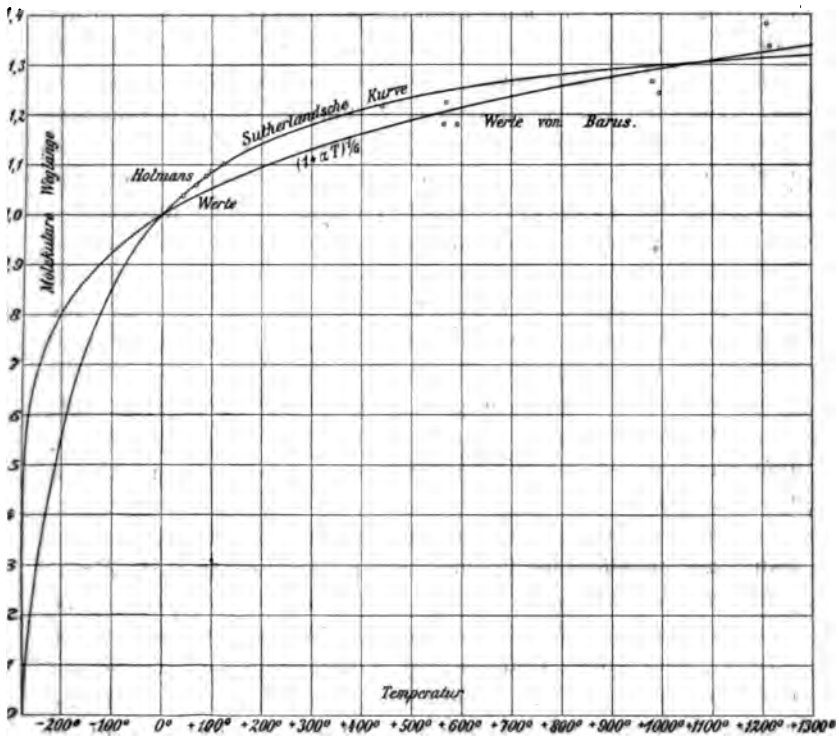


Fig. 1.

züglich der Weglänge aus den Barusschen Werten entnommen werden kann, ist, daß dieselbe zwischen 400° und 1000° um etwa $^1/_6$ größer ist als bei 0°; aber schon die Frage, ob innerhalb des Intervalles von 400—1000° die Weglänge zunimmt, kann kaum mit Sicherheit entschieden werden.

In neuerer Zeit hat P. Breitenbach[1]) ziemlich umfang-

1) P. Breitenbach, Erlanger Inaug.-Diss. 1898; Wied. Ann. 67. p. 803—827. 1899.

reiche Messungen über die Zähigkeit von Luft, Wasserstoff, Kohlensäure, Äthylen und Methylchlorid veröffentlicht. Er bediente sich ebenfalls der Transpirationsmethode und wandte Temperaturbäder von $-21°$, $15°$, $99°$, $182{,}4°$ und $302°$ an. Nachträglich[1]) berechnete er seine Resultate nach Anbringung einer Reduktion an einem Teil derselbsn und Ausschließung der Werte für $-21°$ auch nach der Sutherlandschen Formel. Die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten blieben dann meist innerhalb einiger Zehntel Prozente; die Größe der Konstante C weicht zum Teil nicht unerheblich von früheren Bestimmungen ab. Immerhin wird man, wie es auch der Verfasser tut, die Versuchsergebnisse als eine Bestätigung der Sutherlandschen Theorie ansehen dürfen.

H. Schultze hat die Zähigkeit von Argon[2]) und Helium[3]) bei den Temperaturen $15°$, $100°$, $184°$ ebenfalls nach der Transpirationsmethode gemessen und mit der Theorie verglichen. Während sich bei der Berechnung nach der Formel $(1 + \alpha T)^n$ mit steigender Temperatur für beide Gase wieder fallende Werte von n ergaben, gibt die Sutherlandsche Formel eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment; die Differenz zwischen diesen ist stets kleiner als 0,3 Proz.

Das Ergebnis sämtlicher besprochener Versuche wird man dahin zusammenfassen können, *daß die Sutherlandsche Formel innerhalb des Intervalles von $0—300°$ durch die Erfahrung bestätigt ist, und daß ihr die Versuche über $300°$ nicht widersprechen.* Erwägt man noch, daß sie aus Vorstellungen abgeleitet ist, die auch sonst in der kinetischen Gastheorie zu bemerkenswerten Erfolgen geführt haben, und daher allgemein üblich geworden sind, sowie ferner, daß sie eine sehr ungezwungene und plausible Erklärung der Tatsache liefert, daß die Reibung der Dämpfe und leicht koerziblen Gase stärker mit der Temperatur veränderlich ist als die der permanenten Gase, dann wird man annehmen dürfen, daß die Sutherlandsche Theorie in ihren Grundzügen ein zutreffendes Bild der tatsächlichen

1) P. Breitenbach, Ann. d. Phys. **5**. p. 166—169. 1901.
2) H. Schultze, Ann. d. Phys. **5**. p. 140—165. 1901.
3) H. Schultze, Ann. d. Phys. **6**. p. 302—314. 1901.

Verhältnisse ist. Um so wünschenswerter erscheint es, ihre Prüfung auf ein noch bedeutend größeres Temperaturintervall zu erstrecken. Diese Aufgabe bildet den Gegenstand der vorliegenden Experimentaluntersuchung. Das untersuchte Temperaturintervall ist das zwischen -192^0 und $+300^0$, das untersuchte Gas Stickstoff.

Die Anwendung tiefer Temperaturen bietet mehrfache Vorteile. Zunächst hat man zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und derjenigen des Zimmers ein Temperaturintervall zur Verfügung, das in allen Fällen, in denen es auf das Verhältnis der absoluten Temperaturen ankommt, an Ausdehnung ungefähr dem Temperaturintervall von Zimmertemperatur bis 800^0 gleichkommt; die experimentellen Schwierigkeiten dagegen sind geringer als bei den Versuchen von Barus, die zu erzielende Genauigkeit dementsprechend bedeutend höher. Für den vorliegenden Fall sind die Verhältnisse noch wesentlich günstigere; denn nach der Sutherlandschen Theorie ist die Veränderung der Weglänge bei tiefen Temperaturen bedeutend stärker als bei hohen. Wie aus Fig. 1 zu entnehmen ist, müßte sich das Verhältnis der Weglänge bei 1200^0 zu der bei 20^0 zu 1,3 ergeben, das der Weglänge bei 20^0 zu der bei -190^0 zu 1,7; die Änderung von -190^0 bis $+20^0$ wäre also prozentual mehr als doppelt so groß als die von 20^0 bis 1200^0.

Den ursprünglichen Beobachtungen in tiefen Temperaturen habe ich neuerdings noch Beobachtungen bei 100^0 und 300^0 angeschlossen.

Methode und Theorie der Versuche.

Die Versuche wurden nach der Transpirationsmethode in der von Holman angegebenen Form angestellt.

Die schematische Anordnung des Reibungsapparates ist aus Fig. 2 (p. 955) zu ersehen. Aus einem Gasometer von konstantem Druck strömt das Gas nacheinander durch zwei Kapillaren, die durch Bäder auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden können, nach einem Behälter von ebenfalls konstantem Druck. Gemessen wird der Druck des Gases vor, zwischen und nach den beiden Kapillaren; außerdem werden die Temperaturen der letzteren bestimmt. Einige Zeit nach Beginn des Versuches tritt ein stationärer Strömungszustand

ein; für diesen hat Holman die nötige Gleichung aufgestellt und anschließend eine sehr ausführliche Kritik der Methode gegeben[1]), da seine Formel aber einen vollkommen stationären Zustand zur Voraussetzung hat, der sich in Wirklichkeit nicht mit absoluter Genauigkeit herstellen läßt, so ist aus ihr kein Anhalt darüber zu gewinnen, welchen Einfluß zeitliche Veränderungen der einzelnen Größen auf das Resultat haben. Um die Verhältnisse ganz zu übersehen, habe ich ohne die beschränkende Voraussetzung einer vollkommenen Konstanz der in Betracht kommenden Größen die Ableitung der Formeln gegeben[2]), deren Resultat im folgenden ausgeführt ist.

Es beziehe sich:

Index 1 auf die erste Kapillare,
„ 2 „ „ zweite „
(') auf den Raum vor der ersten Kapillare,
('') „ „ „ zwischen beiden Kapillaren,
(''') „ „ „ nach der zweiten Kapillare.

Es bezeichne ferner:

$p' p'' p'''$ die betreffenden Drucke in absolutem Maß,
$b' b'' b'''$ die Höhen der Quecksilbersäulen in den Manometerröhren in cm,
b den Barometerstand,
$R_1 R_2$, $l_1 l_2$ Radius und Länge der Kapillaren bei 0°,
$T_1 T_2$ die Temperaturen der Kapillaren,
T''' die Temperatur des in freier Luft befindlichen Teiles des Raumes zwischen den Kapillaren,
$\eta_1 \eta_2$ die Reibungskoeffizienten,
$\zeta_1 \zeta_2$ die Gleitungskoeffizienten,
β den linearen Ausdehnungskoeffizienten des Glases,
a den Ausdehnungskoeffizienten des Stickstoffs,
V_1'' den auf der Temperatur T_1 befindlichen Teil des Volumens zwischen den Kapillaren,
V_2'' den auf T_2 befindlichen Teil dieses Volumens,
V'' „ „ T'' „ „ „ „
V_0''' „ „ T''' „ „ „ „ für den Fall $p''=0$,
Q den Querschnitt der Manometerröhren,
q den Querschnitt der die Kapillaren verbindenden Glasröhre,
s das spezifische Gewicht des Quecksilbers,
g die Beschleunigung der Schwere,
$l_1 l_2$ die Entfernung der Oberflächen der Badflüssigkeiten von oberhalb derselben gelegenen festen Ebenen.

---

1) S. W. Holman, Proc. Amer. Ac. 21. p. 25. 1885/1886.
2) A. Bestelmeyer, Münchner Inaugural-Dissertation p. 15. 1908.

Unter Zugrundelegung von O. E. Meyers[1]) angenäherter Theorie der Strömung eines Gases durch eine Kapillarröhre ergibt sich dann[2]):

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{R_2^4\,\lambda_1}{R_1^4\,\lambda_2} \cdot \frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{1+\alpha T_1}{1+\alpha T_2} \cdot \left(\frac{1+\beta T_2}{1+\beta T_1}\right)^2 \\ \cdot \frac{1+4\frac{\zeta_2}{R_2}}{1+4\frac{\zeta_1}{R_1}} \cdot \{1+\Delta\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin hat Δ die Bedeutung:

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{16\,\eta_2\,\lambda_2}{\pi R_2^4 \left(1+4\frac{\zeta_2}{R_2}\right)} \cdot \frac{1+\alpha T_2}{(1+\beta T_2)^2} \cdot \frac{1}{p''^2 - p'''^2} \cdot \\ \cdot \left[\frac{dp''}{dt} \left(\frac{V_1''}{1+\alpha T_1} + \frac{V_2''}{1+\alpha T_2} + \frac{V''}{1+\alpha T''} \right) \right. \\ - \alpha p'' \left(\frac{V_1''}{(1+\alpha T_1)^2} \cdot \frac{dT_1}{dt} + \frac{V_2''}{(1+\alpha T_2)^2} \cdot \frac{dT_2}{dt} + \frac{V''}{(1+\alpha T'')^2} \cdot \frac{dT''}{dt} \right) \\ + p'' \left(\left(\frac{1}{1+\alpha T''} - \frac{1}{1+\alpha T_1} \right) q \frac{dl_1}{dt} + \left(\frac{1}{1+\alpha T''} - \frac{1}{1+\alpha T_2} \right) q \frac{dl_2}{dt} \right. \\ \left. \left. - \frac{Q}{1+\alpha T''} \cdot \frac{db''}{dt} \right) \right]. \end{aligned}$$

Δ ergibt die Korrektion, die zur Holmanschen Formel noch hinzukommt. Richtet man den Versuch so ein, daß zur Zeit der Beobachtung p'' nahe konstant ist, so ist die Korrektion klein, und es genügt dem in Δ vorkommenden η_2 den Wert beizulegen, der sich aus Formel (4) ohne Berücksichtigung von Δ ergibt.

Bei entsprechender Konstruktion des Apparates läßt sich das ganze Korrektionsglied sogar so klein machen, daß es überhaupt kaum in Betracht kommt. Zu diesem Zweck sind die Kapillaren so zu wählen, daß ihr Reibungswiderstand nicht unnötig groß ist, und das Volumen zwischen den beiden Kapillaren ist möglichst klein zu gestalten. Diese beiden Gesichtspunkte sind auch deswegen zu beachten, weil davon die Schnelligkeit abhängt, mit der der stationäre Zustand erreicht wird.

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 261. 1866.

2) Die Numerierung der Gleichungen ist aus der Dissertation übernommen.

Für die Zeit t, die vergeht, bis der Druck zwischen den beiden Kapillaren einen bestimmten Wert p'' erreicht, läßt sich unter Vernachlässigung der von

$$\frac{dT_1}{dt}, \quad \frac{dT_2}{dt}, \quad \frac{dT''}{dt}, \quad \frac{dl_1}{dt} \text{ und } \frac{dl_2}{dt}$$

abhängigen Glieder aus Gleichung (3) die Beziehung ableiten:

$$t = \frac{\frac{1}{\mathfrak{p}''}\left(\frac{V_1''}{1+\alpha T_1} + \frac{V_2''}{1+\alpha T_2} + \frac{V_0''}{1+\alpha T''}\right)\log\frac{(p''+\mathfrak{p}'')(p_0''-\mathfrak{p}'')}{(p''-\mathfrak{p}'')(p_0''+\mathfrak{p}'')} + \frac{2Q}{sg(1+\alpha T'')}\cdot\log\frac{p_0''^2-\mathfrak{p}''^2}{p''^2-\mathfrak{p}''^2}}{\frac{C_1}{1+\alpha T_1}+\frac{C_2}{1+\alpha T_2}},$$

wenn p_0'' den Druck zur Zeit 0 und $\mathfrak{p}''$ den dem stationären Zustand entsprechenden Druck bezeichnet; log bedeutet den natürlichen Logarithmus. Zur Annäherung von p'' an $\mathfrak{p}''$ bis auf $^1/_{10}$ mm Quecksilber sind nach dieser Formel für die Verhältnisse meiner Versuche, wenn die erste Kapillare auf Zimmertemperatur, die zweite auf der Temperatur der flüssigen Luft gehalten wird, 18 Min. nötig, falls man vom Drucke $p_0'' = 0$ ausgeht, und 21 Min., wenn man vom Drucke $p_0'' = 72$ cm ausgeht; befinden sich beide Kapillaren auf Zimmertemperatur, so wird eine gleiche Annäherung an die Ruhelage in ca. 80 Min. erreicht, wenn die eine der beiden Kapillaren eine Temperatur von 300° besitzt, in ca. 120 Min.

Der Einfluß des Korrektionsgliedes der Formel (4) auf die vorliegenden Versuche wird bei Besprechung der Berechnung der Versuche betrachtet werden.

Apparate.

Reibungsapparat. (Fig. 2.)

Der Reibungsapparat ist ganz aus Glas hergestellt, und um jede Undichtheit auszuschließen, an allen Verbindungsstellen zusammengeblasen.

Das von einem Gasometer kommende Gas tritt durch a (Fig. 2) ein, und verläßt den Apparat bei c_2, von wo es nach einem bis auf wenige Zentimenter ausgepumpten Glasballon

von 60 Liter Inhalt strömt. Je nach der Stellung der Dreiweghähne d' und d''' durchströmt es das Röhrensystem mit den beiden Kapillaren 1 und 2 in der durch die Pfeile angedeuteten oder in der entgegengesetzten Richtung. Die beiden Hähne waren mit einer Mischung von Paraffin und Vaselinöl

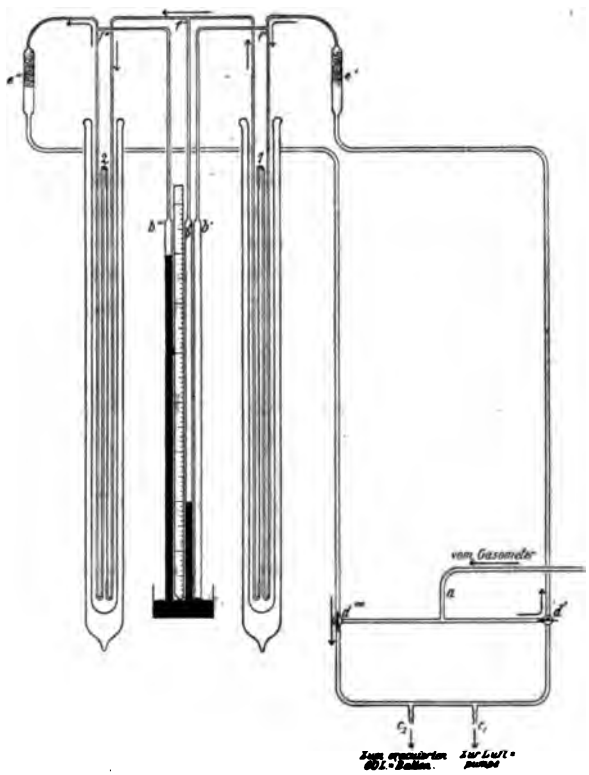


Fig. 2.

gedichtet. Bei e' und e''' hat das Gas reine Watte zum Zweck der Staubentziehung zu passieren. Die die beiden Kapillaren verbindende Glasröhre hat einen inneren Durchmesser von 0,22 cm. Von f' f'' f''' führen Glasröhren zu den Manometerröhren b' b'' b'''. c_1 steht mit einer automatischen Quecksilberluftpumpe Sprengelschen Systems und durch diese mit einer Wasserluftpumpe in Verbindung.

Die Kapillaren.

Aus einer großen Anzahl Kapillaren wurden durch Kalibrieren zwei Stücke von möglichst gleichem und gleichmäßigem Querschnitt und ungefähr 80 cm Länge ausgesucht. Die Ausmessung derselben geschah im wesentlichen nach der von H. Schultze[1]) angegebenen Methode; nach Anschmelzen kurzer Rohransätze wurde die Kalibrierung durch Messung der Länge eines Quecksilberfadens an den verschiedenen Stellen der Kapillaren auf der Teilmaschine ausgeführt; da diese nur Verschiebungen bis zu 50 cm gestattete, so mußten die Kapillaren durch in der Mitte eingeätzte Marken in zwei Abteilungen zerlegt werden. Die unter Berücksichtigung der Menisken auf eine Temperatur von 20° reduzierte Länge des Quecksilberfadens betrug an den aufeinander folgenden Stellen der Kapillare 1 in cm: 4,000, 3,982, 3,948, 4,004, 4,038, 4,080, 4,097, 4,140, 4,176, 4,200, 4,198, 4,163, 4,154, 4,174, 4,172, 4,152, 4,171, 4,170, 4,170.

In analoger Weise ergab sich für Kapillare 2 die reduzierte Länge des Kalibrierungsfadens (eines anderen als bei Kapillare 1): 3,509, 3,510, 3,524, 3,533, 3,549, 3,565, 3,578, 3,568, 3,581, 3,584, 3,581, 3,572, 3,569, 3,567, 3,587, 3,607, 3,614, 3,614, 3,636, 3,649, 3,655, 3,663.

Die Enden wurden nicht in der von Schultze angegebenen Weise berücksichtigt, sondern der Durchmesser derselben gleich dem durch Kalibrieren in der Nachbarschaft gefundenen gesetzt und die Länge der Kapillaren durch Messung der ziemlich scharf bestimmbaren Stellen ermittelt, an denen der Durchmesser schätzungsweise den $1^1/_2$fachen Wert erreicht. Dieses Verfahren kann zu einem nennenswerten Fehler um so weniger Veranlassung geben, als es sich für den vorliegenden Zweck nicht um die absoluten Werte, sondern nur um das Verhältnis der Widerstände der beiden Kapillaren handelt.

Durch Kapillare 1 wurden sodann 13 Quecksilberfäden von ungefähr 45 cm Länge getrieben, deren Masse sich zu $1{,}7767_5$ g ergab.

---

1) H. Schultze, Hallenser Inaug.-Diss. p. 17. 1901; Ann. d. Phys. **5**. p. 147. 1901.

Hieraus, aus der Länge und aus der Kalibrierung berechnet sich der Reibungswiderstand der Kapillare 1:

$$\frac{\lambda_1}{R_1^4} = \pi^2 s^2 . 7989300,$$

worin s das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 20° bedeutet. Daraus folgt dann ferner der mittlere Radius: $R_1 = 0{,}008553$ cm.

In analoger Weise wurde Kapillare 2 mit 12 Quecksilberfäden ausgewogen, deren Masse zu 1,6500 g bestimmt wurde. Der Reibungswiderstand ergab sich:

$$\frac{\lambda_2}{R_2^4} = \pi^2 s^2 . 8824500$$

und der Radius: $R_2 = 0{,}008372$ cm.

Das Verhältnis der beiden Widerstände wird nun:

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = 1{,}1045.$$

Die später zu besprechende experimentelle Bestimmung lieferte im Mittel den um 0,5 Proz. kleineren Wert:

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = 1{,}0986.$$

Die Auswägungen der Kapillaren waren zwar mit möglichster Sorgfalt, jedoch nur einmal vorgenommen worden. Es war die Möglichkeit eines Fehlers, z. B. durch das Verlorengehen eines Quecksilbertröpfchens, nicht absolut abgeschlossen. Nach Vollendung der Versuche in tiefen Temperaturen schnitt ich deshalb die Kapillaren wieder aus dem Reibungsapparat heraus, um nochmals das Verhältnis ihrer Widerstände zu bestimmen.

Die Ausmessung mit Quecksilber geschah diesmal in der Weise, daß ein möglichst langer Quecksilberfaden mittels eines Komparators[1]) zuerst in Kapillare 1, dann in Kapillare 2, und endlich nochmals in Kapillare 1 gemessen wurde.

Unter Berücksichtigung der Temperatur und der durch die frühere Kalibrierung gefundenen Querschnittsverhältnisse berechnet sich hieraus

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = 1{,}1084$$

in genügender Übereinstimmung mit dem zuerst gefundenen Werte.

Da die Abweichung des berechneten und des experimentell gefundenen Wertes auch nicht durch eine Ungenauigkeit des letzteren erklärt werden kann, so vermag ich den Grund der

1) Geliefert von der Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique et de mécanique.

mangelnden Übereinstimmung nicht anzugeben. Erwähnen möchte ich diesbezüglich, daß die bei der Ableitung der O. E. Meyerschen Gleichung gemachte Voraussetzung einer der Rohrachse parallelen Strömung an den Enden der Kapillare bekanntlich nicht erfüllt ist; es können sich vielmehr Wirbel bilden, die von der zufälligen Gestalt der erweiterten Enden abhängen, und sich deshalb unter Umständen bei den beiden Kapillaren in sehr verschiedenem Maße geltend machen. Diese Annahme würde eine Ungenauigkeit des Poisseuilleschen Gesetzes bedingen, insoweit dieses die Abhängigkeit des transpirierten Volumens von den Dimensionen der Röhre angibt; tatsächlich ist die letztere Beziehung bisher nicht mit der in Frage stehenden Genauigkeit geprüft.

Gasbehälter. (Fig. 3.)

Vor dem Eintritt in den Reibungsapparat wurde das Gas in einem Quecksilbergasometer gesammelt. Dieser bestand aus einer in Quecksilber tauchenden, an einem Wagebalken aufgehängten Glocke mit angenähert zylindrischen Wandungen (ein umgestülptes, dünnwandiges Becherglas, dessen nach außen gebogener Rand abgeschnitten war). Der andere Arm des Wagebalkens wurde nur so viel belastet, daß die Stellung der Glocke genügend stabil war.

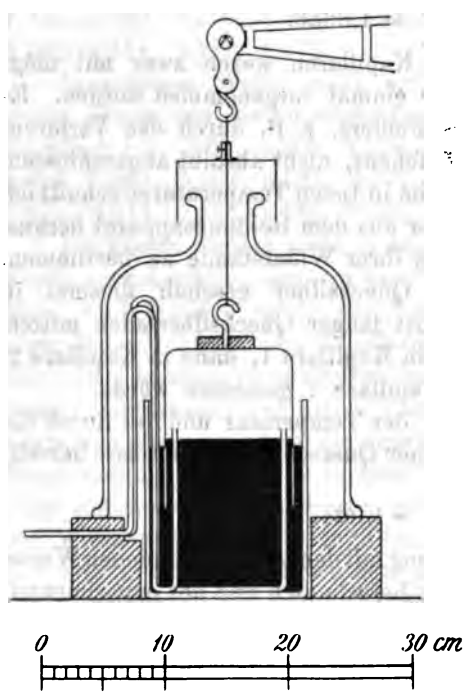


Fig. 3.

Das Gas tritt durch ein U-förmig gebogenes Rohr nahe der Wandung der Glocke ein, und durch ein gleiches auf der gegenüberliegenden Seite aus. Vor Staub schützt den Gaso-

meter ein darübergedeckter Glassturz, dessen offener Hals seinerseits durch einen an der Aufhängeschnur angebrachten Hut von Karton geschützt wird.

Der Inhalt des Gasometers beträgt etwa 750 cm^3 bei der höchsten Stellung der Glocke und ungefähr $^1/_{10}$ dieses Betrages bei der tiefsten.

Durch Aufhängung der Glocke an dem Wagebalken wird ein sehr gleichmäßiger Druck bewirkt. Die Druckdifferenz gegenüber der Atmosphäre nahm in dem Maße, als das Gas verbraucht wurde, in vollkommen regelmäßiger Weise von 0,2—0,5 cm zu.

Messung der Drucke.

Die Manometerrohre b' b'' b''' (Fig. 2) von 1,1 cm Durchmesser tauchen in einen Quecksilberbehälter, dessen Vorder- und Rückwand aus Spiegelglas bestehen. Die freie Oberfläche des Quecksilbers beträgt 50 cm^2. Durch mehr oder weniger tiefes Eintauchen zweier Holzklötze kann die Oberfläche des Quecksilbers bis zur Berührung der Spitze des Maßstabes gehoben werden.

Zum Schutze gegen Temperatureinflüsse sind zu beiden Seiten der Manometerrohre doppelwandige, mit Stanniol beklebte Papierschirme angebracht.

Die zu den Messungen benutzten Teilstrecken des Glasmaßstabes wurden von Zentimeter zu Zentimeter durch Vergleichen mit einem Normalmaßstab im Komparator geprüft.

Die Ablesung der Quecksilberhöhen geschah mittels eines Kathetometerfernrohres mit horizontal gestelltem Fadenkreuz, dessen richtige Stellung häufig kontrolliert wurde. Zehntelmillimeter wurden geschätzt. Es wurde immer auf Kuppe und Rand eingestellt und aus der so bestimmten Kuppenhöhe die Korrektion für die Kapillardepression bestimmt.

Um eine gute Einstellung der Kuppen zu ermöglichen, waren, dem Vorgange W. C. Röntgens [1]) folgend, die Manometerrohre auf der Rückseite mit schief schraffiertem Papier beklebt worden. Die scharfen Spitzen, in denen die schwarzen Linien des Hintergrundes mit ihren Spiegelbildern zusammentreffen, bilden dann eine sehr sichere und bequeme Kennzeichnung der Kuppe. Die Beleuchtung geschah der Raum-

1) W. C. Röntgen, Pogg. Ann. 148. p. 586. 1873.

verhältnisse wegen von vorne durch Spiegel, gewöhnlich mit Tageslicht, bei einigen Versuchen mit einer elektrischen Glühlampe; letztere war dann so aufgestellt, daß sie weder die Manometerröhren noch die Innenfläche der Papierschirme direkt bestrahlen konnte; auch wurde ihr Licht stets nur für die Dauer einer Ablesung auf die betreffende Kuppe reflektiert.

Die Angaben des benutzten Barometers wurden durch Vergleichung mit einem Fuessschen Normalbarometer korrigiert, dessen Vakuum geprüft wurde.

Temperaturbäder.

Als Gefäße für die Bäder von flüssiger Luft, Kohlensäureschnee und Wasser dienten zwei zylindrische, doppelwandige, versilberte und evakuierte Glasgefäße von 100 cm Höhe und 5 cm Weite. Als im späteren Verlauf der Versuche das eine der beiden Gefäße mehrere Sprünge erhielt und Luft in das Vakuum drang, wurde das Gefäß nicht durch ein neues ersetzt, sondern für das Bad von Zimmertemperatur weiter benutzt; die Temperaturkonstanz war auch dann noch eine vollkommen genügende.

Die Gefäße sind an einem Holzgestell montiert und können von unten über die Kapillaren geschoben werden. Ihre obere Öffnung wurde mit Wolle eingehüllt.

Wasserbad von Zimmertemperatur.

Um eine gleichmäßige Temperatur des Wassers in den langen und verhältnismäßig engen Gefäßen herzustellen und zu erhalten, habe ich eine besondere automatische Zirkulationsvorrichtung konstruiert (Fig. 4). Bezüglich der Einzelheiten derselben sei auf die Dissertation verwiesen. Die Wirkungsweise besteht darin, daß abwechselnd das Wasser aus dem oberen Teil des Dewarschen Gefäßes durch das Gummiventil *d* in den Behälter *a* eingesaugt und durch das Glasrohr *b* und das Gummiventil *c* nach dem Boden des Wasserbades befördert wird. Dieses Pumpen besorgt auf pneumatischem Wege der durch eine Rohrleitung mit dem Behälter *a* verbundene Apparat auf der rechten Seite der Zeichnung; die nötige Energie liefert die Wasserleitung, aus der ständig Wasser in *e* zuströmt und absatzweise durch den Heber *g* abfließt.

Das ganze Wasser des Bades wurde auf diese Weise im Verlauf von 6—7 Min. einmal durch die Zirkulationsvorrichtung getrieben.

Bei den Versuchen zur experimentellen Bestimmung des Widerstandsverhältnisses der beiden Kapillaren sollen diese die gleiche Temperatur haben. Zu diesem Zwecke wurden

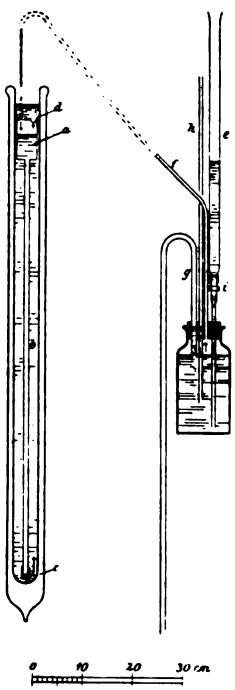


Fig. 4.

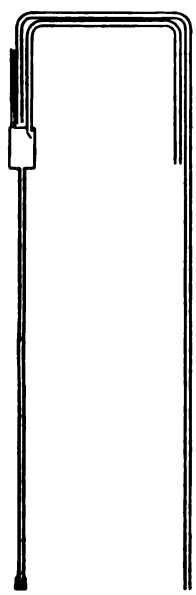


Fig. 5.

beide Gefäße mit Wasser gefüllt und die folgende Anordnung getroffen (Fig. 5).

Der beschriebene Behälter der Zirkulationsvorrichtung mit dem unten angesetzten Rohr und den Ventilen befand sich im linken Gefäße. Auf das obere Ventil wurde ein doppelt gebogenes Glasrohr aufgesetzt, das zu dem oberen Teil des anderen Gefäßes führte. Das Wasser wurde demnach jetzt aus dem oberen Teil des rechten Gefäßes nach dem Boden des linken befördert. Durch einen gewöhnlichen Heber

floß es von dem oberen Teil des linken Gefäßes zurück nach dem Boden des rechten.

Die beiden durch die Luft führenden Heberrohre wurden gut mit Wolle umhüllt. Die Temperaturen der beiden Bäder ergaben sich stets als gleich innerhalb der Ablesefehler (einige hundertstel Grade).

Bäder für tiefe Temperaturen.

Die Temperatur von -79^{0} wurde durch ein Gemisch von Kohlensäureschnee und absolutem Alkohol hergestellt.

Dabei wurde so verfahren, daß das Kältegemisch zuerst zu einem dicken Brei verrührt und dann in das bereits am richtigen Platze befindliche Gefäß eingefüllt wurde. Ein eigentliches Rühren dieses Bades erwies sich als unmöglich; durch Auf- und Abstoßen eines spanischen Rohres wurde versucht die Mischung etwas zu bewegen.

Temperaturen von $-188{,}7$ bis -192^{0} wurden mittels flüssiger Luft erhalten.

Hier kam ein Ringrührer zur Anwendung, bestehend aus sechs an einem Stab befestigten Ringen aus Kupferdraht; die Ringe waren mit Leder umwickelt, und ihre Flächen, soweit es die Glasröhren gestatteten, mit Lederstreifen bespannt. Bei den Versuchen wurde dieser Rührer alle 3 Min. 5—10 mal 15 cm weit auf- und abbewegt.

Wenn nicht gerührt wurde, zeigte die flüssige Luft in den verwendeten hohen Gefäßen ein eigentümliches, unwillkürlich an einen Geiser erinnerndes Verhalten. Die siedende Luft, deren Zustand sich vorher in nichts von dem unter gewöhnlichen Verhältnissen unterschied, brauste unvermittelt so stark auf, daß sie in beträchtlichen Mengen über den Rand des Gefäßes floß; ein Umstand, dem im Laufe der Untersuchungen zwei Gefäße zum Opfer fielen. Den Umfang und die Heftigkeit solcher Ausbrüche kann man danach beurteilen, daß das Niveau der flüssigen Luft, das vorher 5—8 cm unter dem Rande des Gefäßes stand, nach dem Überströmen bis zu 37 cm unter dem Gefäßrand gemessen wurde.

Meistens trat der Beginn des Phänomens ohne jeden sichtbaren Anlaß ein, einmal, als ich nach längerem ruhigen Stehen des Rührers diesen in Bewegung setzte, zweimal bei der bloßen

Annäherung an das Gefäß, als ich auf die vor dem Apparat stehende Treppe stieg. Im Laufe der Versuche, während deren alle 3 Min. gerührt wurde, ereignete sich nie ein Ausbruch.

Bemerken möchte ich außerdem, daß das Phänomen nie eintrat, wenn das Gefäß vollkommen mit frisch bereiteter flüssiger Luft gefüllt war. Zu entscheiden, ob dies Zufall ist, reichen meine Beobachtungen nicht aus. Da die flüssige Luft während einer Versuchsperiode von mehreren Tagen immer durch Nachgießen ergänzt wurde, so könnte die allmähliche Anreicherung mit Sauerstoff in Betracht kommen, eventuell auch die verschiedene Zusammensetzung der nachgegossenen und der bereits vorhandenen Flüssigkeit. Die nachgegossene Luft war im allgemeinen die stickstoffreichere, also leichtere, sie wird sich deshalb ohne den Gebrauch einer Rührvorrichtung nur sehr langsam mit den unteren Schichten gemischt haben.

Sehr wahrscheinlich wird die Erscheinung als die Äußerung eines bemerkenswerten Siedeverzuges aufzufassen sein.

Unter normalen Verhältnissen sank das Niveau der flüssigen Luft infolge Verdampfung ungefähr 2,5 cm im Laufe einer Stunde.

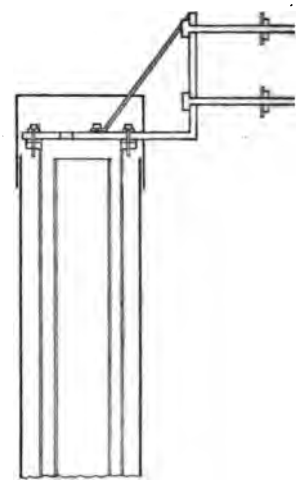
Bäder für hohe Temperaturen.

Zur Anwendung kamen Dampfbäder von siedendem Wasser und von siedendem Diphenylamin. Das Siedegefäß bestand aus Kupfer; die Einrichtung desselben ist aus Fig. 6 zu ersehen. Die Eindichtung der Glasröhren und des Thermometers geschah mittels Asbestpapieres und Wasserglases. Der Messingdeckel war an Stelle des Dewarschen Gefäßes an dem Holzgestell festgeschraubt und trug das Siedegefäß. Dieses war von allen Seiten mit einer reichlich 1 cm dicken Schicht von Asbestpappe umgeben; über dem Deckel befand sich eine 3 cm hohe Schicht von losem Asbest.

Messung der Temperaturen.

Die Temperatur der Wasserbäder wurde mit einem in Zehntelgrade geteilten Quecksilberthermometer gemessen; als

beide Kapillaren auf Zimmertemperatur waren, kam im zweite Gefäß ein in Fünftelgrade geteiltes Thermometer zur Ver wendung. Diese beiden, sowie auch die zur Messung der Manometertemperatur benützten Thermometer wurden mit einem von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüften, in Zehntelgrade geteilten Thermometer verglichen.



Die Messung der tiefen Temperaturen wurde durchwegs mittels eines Platinwiderstandthermometers ausgeführt, das in Zukunft mit I bezeichnet wird; bei den Reibungsversuchen befand es sich bei der Mitte der betreffenden Kapillare. Da die Sicherheit der Eichung bedeutend hinter der Genauigkeit der Widerstandsbestimmung zurückblieb, habe ich einen zweiten Platinwiderstand (II) hergestellt und beide von Zeit zu Zeit miteinander in flüssiger Luft verglichen, um dadurch die Möglichkeit einer nach-

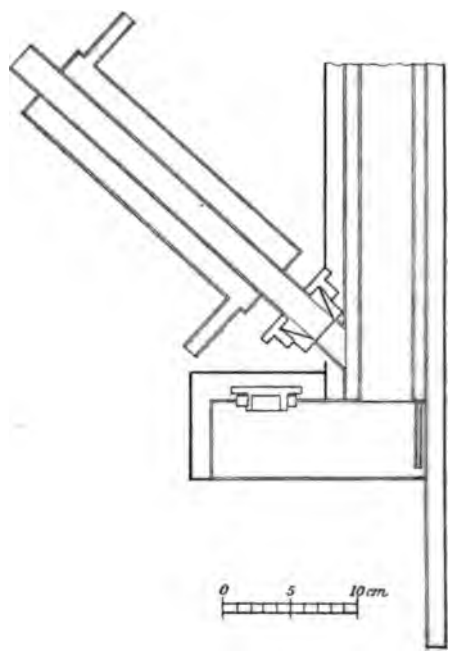


Fig. 6.

träglichen Verbesserung der Temperaturangaben auch dann zu besitzen, wenn dem Thermometer I irgend ein Unfall zustoßen sollte.

Beide Widerstände sind aus chemisch reinem Platin (von Heraeus in Hanau) hergestellt; doch sind sie nicht Stücke eines und desselben Drahtes.

Widerstand I besteht aus ungefähr 1,5 m 0,05 mm dicken, doppelt mit Seide umsponnenen und ursprünglich mit Schellack überzogenen Drahtes, der auf ein Glimmerkreuz aufgewickelt ist; die Zuleitungen bestehen aus 4,00 m langen, 0,5 mm dicken, seideumsponnenen und lackierten Kupferdrähten, die mit Silberlot an das Platin gelötet sind und an den anderen Enden kleine, numerierte Kupferscheiben tragen; zu dem einen Ende des Platindrahtes führen zwei solcher Zuleitungen. Zum Schutze sind ober- und unterhalb des Glimmerkreuzes Korkstücke von passender Form befestigt, welche seitlich über das Glimmerkreuz hervorragen; um diese Korke ist ein dünnes Glimmerblatt gehüllt, jedoch so, daß die Flüssigkeit in das Innere dringen und den Platindraht direkt umspülen kann. Gelegentlich der Eichung in Kohlensäureschnee und Alkohol löste sich der Schellacküberzug; er wurde danach durch einen Überzug von Zaponlack ersetzt; der Widerstand bei 0^0 ist dadurch nicht geändert worden.

Widerstand II besteht aus etwa 2 m 0,1 mm dicken Drahtes, der bifilar auf ein Glasrohr von 0,6 cm äußerem Durchmesser gewickelt ist. Um eine Berührung der einzelnen Windungen zu verhüten, wurde vorher in das Glas ein entsprechendes Gewinde eingeätzt; dadurch war es möglich die Windungen so nahe aneinander zu legen, daß die ganze Platinspule eine Höhe von nur 2,8 cm erhielt. An jedes Ende des Platindrahtes sind mit Silberlot zwei Zuleitungen von 0,5 mm dickem Kupferdraht angelötet, die sich zunächst ebenfalls einigemal um das Glasrohr herumwinden, dann im Innern der 25 cm langen Röhre noch oben führen, und dort an numerierte Klemmschrauben angelötet sind. Platin- und Kupferdrähte sind blank und auf der Außenseite des Glasrohres mit Schellack überzogen; da die nach oben führenden Zuleitungen mit Rücksicht auf die Zusammenziehung bei der Abkühlung

etwas locker sein müssen, so wird ihre gegenseitige Berührung durch einen Hartgummistab von kreuzförmigem Querschnitt verhindert. Der Platindraht war vor dem Wickeln galvanisch ausgeglüht worden, nach dem Wickeln wurde er 3 Stunden lang durch einen elektrischen Strom bis zu eben sichtbarer Glut erhitzt.

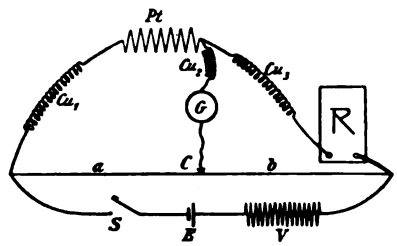


Fig. 7.

Die Messung der Widerstände geschah nach der Wheatstoneschen Brückenmethode. Die Schaltung ist aus nebenstehendem Schema (Fig. 7) zu ersehen. *G* bedeutet ein Deprez-d'Arsonval-Galvanometer mit Spiegelablesung, *R* einen Stöpselrheostaten, *Pt* den Platinwiderstand mit den drei Kupferzuleitungen Cu_1, Cu_2 Cu_3, *a b* den Brückendraht, *S* einen Stromschlüssel, *E* ein Trockenelement und *V* einen Vorschaltwiderstand.

Die Zuleitungsdrähte des Thermometers I wurden direkt an das Brückenende bez. den Rheostaten angelegt; bei Thermometer II geschah dies durch Vermittelung zweier je 4 m langer Stücke eines 1,8 mm dicken Kupferdrahtes; in beiden Fällen waren somit die Widerstände der Zuleitungen Cu_1 und Cu_3 einander gleich.

Die Brücke besteht aus einem 10 m langen, 0,75 mm dicken Manganindraht, dessen mittlerer Meter über einer in Millimeter geteilten Skala ausgespannt ist; die übrig bleibenden $4^1/_2$ m zu beiden Seiten sind auf der unteren Fläche der hohl liegenden Skala nebeneinander isoliert ausgespannt. Die Mitte des Brückenwiderstandes wurde experimentell bei Teilstrich 49,60 cm festgestellt, also 0,4 cm von der Mitte der Skala entfernt.

Der Rheostat enthält Widerstände von 0,1—100 Ω und wurde mit einem von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichten Präzisionsrheostaten verglichen.

Der Vorschaltwiderstand betrug zur endgültigen Einstellung 200 Ω; der Ausschlag des Galvanometers war dann etwa viermal so groß als die zu seiner Kompensation notwendige Verschiebung des Kontaktes *C*.

Bei der Messung wurden die Stöpsel in R so gezogen, daß C möglichst nahe der Mitte der Brücke zu liegen kam; eingestellt wurde auf das Ausbleiben eines Ausschlages bei Niederdrücken des Stromschlüssels; hierdurch wird der Einfluß aller thermoelektrischen Kräfte in den einzelnen Stromzweigen eliminiert.[1])

Man sieht ferner, daß nach dem Schaltungsschema sowohl zum Platinwiderstand als auch zum Rheostaten der Widerstand je einer Kupferzuleitung hinzukommt; da beide Zuleitungen genau gleich sind und nebeneinander laufen, so bleibt ihr Widerstand auch dann noch gleich, wenn sie teilweise auf eine tiefere Temperatur abgekühlt werden. Wenn der Schleifkontakt nahe der Brückenmitte steht, fällt demnach der Widerstand der Zuleitungsdrähte praktisch heraus. Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, daß in den vorliegenden Messungen der dadurch hervorgerufene Fehler in der Temperaturbestimmung nie $^1/_{100}{}^0$ überschreiten konnte.

Bei 0^0 beträgt der Widerstand des Thermometers I $W_{I,0^0} = 73{,}030\ \Omega$, der des Thermometers II $W_{II,0^0} = 24{,}251\ \Omega$; bei $-191{,}48^0$ sind die betreffenden Widerstände: $W_{I,-191{,}48^0} = 18{,}073\ \Omega$ und $W_{II,-191{,}48^0} = 5{,}106\ \Omega$. Der Widerstand II nimmt danach schneller mit der Temperatur ab als I.

Die Temperatur des gesättigten Wasserdampfes wurde aus dem Barometerstand entnommen.

Die Temperatur des Diphenylamindampfbades wurde mit einem in halbe Grade geteilten, von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüften Quecksilberthermometer gemessen; die Prüfungsergebnisse der Reichsanstalt sind auf ganze Grade abgerundet. Für den herausragenden Faden wurde eine Korrektion angebracht unter Zugrundelegung einer Mitteltemperatur von 160^0 für den durch die Asbestschicht führenden Teil des Thermometers.

In beiden Dampfbädern wurde die Gleichheit der Temperatur im oberen und unteren Teil des Siedegefäßes ständig durch ein Thermoelement Konstantan–Kupfer kontrolliert, dessen Lötstellen sich neben den beiden Enden der betreffenden Kapillare befanden.

---

1) O. Fröhlich, Wied. Ann. **30.** p. 156—161. 1887.

Eichung des Platinthermometers.

Als bequemster Weg zur Eichung des Platinthermometers bot sich die Vergleichung mit einem im Besitz des Instituts befindlichen, von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüften Thermoelement Konstantan-Eisen mit zugehörigem Spannungsmesser von Keiser und Schmidt, Berlin, dar. Von dieser Methode wurde indessen Umgang genommen; denn abgesehen von der geringen Empfindlichkeit des Spannungsmessers (1 Teilstrich entspricht ungefähr 3°) waren im Laufe von Vorversuchen mit Thermoelementen Zweifel an der Zuverlässigkeit dieses Instrumentes aufgekommen. Wie ich später festzustellen Gelegenheit hatte, sind die Angaben des Spannungsmessers, dessen Widerstand zum großen Teile aus Kupfer besteht, in erheblichem Grade von der Zimmertemperatur abhängig; durch Messung der durch eine konstante elektromotorische Kraft bewirkten Ausschläge bei Zimmertemperaturen, die um 9° verschieden waren, ergab sich, daß eine Zunahme der Zimmertemperatur um 1° dieselbe Änderung des Ausschlages hervorbringt wie eine Änderung der Temperatur der flüssigen Luft um $^1/_5{}^0$ bis $^1/_4{}^0$.

Der Widerstand I wurde daher in Anlehnung an L. Holborns „Untersuchungen über Platinwiderstände und Petroläthertherthermometer“ [1]) in Kohlensäureschnee und in siedendem Sauerstoff gemessen, und aus den gewonnenen Zahlen sowie dem Werte für 0° der Widerstand durch eine quadratische Formel als Funktion der Temperatur dargestellt. Diese Art der Eichung hat den prinzipiellen Nachteil, daß die Temperaturen der flüssigen Luft durch eine Extrapolation von 5—10 Graden erhalten werden; in Ermangelung eines Wasserstoffthermometers stand mir aber eine einwandfreie Methode nicht zur Verfügung.

Der Kohlensäureschnee wurde mit frischem, absolutem Alkohol zu einem dicken Brei verrührt, in ein versilbertes Dewarsches Gefäß von 25 cm Höhe und 5 cm Weite eingefüllt. Die Mischung wurde mit einem Holzstab auch nach der Einführung des Thermometers etwas durcheinander be-

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 242—258. 1901.

wegt, doch war dieses Rühren sehr unvollkommen. Der Widerstand nahm im Laufe einer Stunde allmählich von 50,911 Ω bis 50,931 Ω zu. In Rechnung gesetzt wurde der Mittelwert der ersten Viertelstunde: 50,915 Ω. Der Barometerstand während der Messung betrug 71,67 cm; beim Barometerstand 76,00 cm ist nach Holborn die Temperatur des Kohlensäure-Alkoholgemisches $-78{,}34^0$; nach H. du Bois und A. P. Wills[1]) ist bei Atmosphärendruck die Abhängigkeit der Temperatur vom Druck gegeben durch die Beziehung:

$$\frac{dP}{dT} = 5{,}5 \frac{\text{cm Quecksilber}}{\text{Grad}};$$

aus den beiden Daten ergibt sich für obigen Barometerstand $T = -79{,}13^0$.

Bei den Reibungsversuchen ergab sich der Widerstand des Thermometers in der Kohlensäure-Alkoholmischung etwas größer, und zwar entspricht die Widerstandsdifferenz unter Berücksichtigung des Barometerstandes einer Temperaturdifferenz von $+ 0{,}63^0$. Diese Temperaturerhöhung ist größtenteils als eine Folge des hydrostatischen Druckes des Alkohols aufzufassen. Im zweiten Falle befand sich das Thermometer 42 cm tiefer unter der Oberfläche des Alkohols als bei der Eichung; der hydrostatische Druck war dementsprechend um 2,7 cm Quecksilber höher, und diese Änderung entspricht einer Temperaturerhöhung von $0{,}49^0$.

Der hydrostatische Druck des Alkohols ist wohl auch die Ursache, weshalb Holborn[2]) die Temperatur des trocknen Schnees um $0{,}10^0$ tiefer fand als die des Gemisches mit Alkohol; es folgt daraus, daß bei Verwendung des Kohlensäureschnees zur Fixpunktbestimmung, falls nicht trockner Schnee angewandt werden kann, die Eintauchtiefe des Thermometers berücksichtigt werden muß.

Die Eichung in siedendem Sauerstoff wurde in der von Holborn angegebenen Weise ausgeführt; die Glimmerumhüllung des Thermometers war dabei entfernt. Es wurden jedesmal

1) H. du Bois u. A. P. Wills, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 1. p. 168—169. 1899.

2) l. c. p. 245.

ungefähr 70 ccm flüssigen Sauerstoffs hergestellt. Nachdem das Bad von flüssiger Luft einige Minuten entfernt war, kam der Sauerstoff zwar in ein ruhiges Sieden, die Temperatur war aber nicht konstant, sondern stieg allmählich an, bis der größere Teil der Flüssigkeit verdampft war; dann fiel er rasch auf den Wert herab, den er zu Beginn des Siedens gehabt hatte, um kurz darauf stark anzusteigen. Dieser Gang trat bei den zwei ausgeführten Versuchen sehr regelmäßig ein, wie aus den folgenden Tabellen hervorgeht. Bei der ersten Messungsreihe wurde die Zeit seltener notiert; weil hier der einzuschaltende Widerstand des Rheostaten erst ermittelt werden mußte, so begannen die Widerstandsmessungen einige Minuten später als beim zweiten Versuch. Bei der Schnelligkeit und Veränderlichkeit der Einstellung ist auf die letzte Dezimale der Widerstandswerte kein Gewicht zu legen.

Versuch vom 23./X. 1901		Versuch vom 25./X. 1901	
$7^h\ 20'$	Ende der Sauerstoffentwickelung	$8^h\ 30'$	Wegnahme des Bades von flüssiger Luft
	$W_1 = 20{,}561\ \Omega$		$W_1 = 20{,}540\ \Omega$
	20,576		20,559
	20,592		20,559
	20,592	$8^h\ 35'$	20,577
	20,592		20,585
	20,605	$8^h\ 37'$	20,601
	20,605	$8^h\ 38'$	20,605
	20,611	$8^h\ 39'$	20,605
	20,535	$8^h\ 40'$	20,605
	20,543	$8^h\ 41'$	20,581
$7^h\ 35'$	Rasches Anwachsen des Widerstandes	$8^h\ 42'$	20,536
		$8^h\ 43'$	20,527
$7^h\ 41'$	Aufhören des Siedegeräusches	$8^h\ 44'$	Rasches Anwachsen des Widerstandes
		$8^h\ 50'$	Aufhören des Siedegeräusches
Barometer: 72,16 cm		Barometer: 71,77 cm	

Nach Wegnahme des Bades von flüssiger Luft schlägt sich bald auf dem Dampfmantel reichlich Reif nieder, der das weitere Beobachten der siedenden Flüssigkeit verhindert. Der Zeit nach zu schließen entspricht das rasche Fallen des Wider-

standes ungefähr dem Stadium, in dem der Platindraht aus der Flüssigkeit in die Dämpfe eintritt.

Der eigentümliche Gang in der Änderung des Widerstandes ist durch die beiden Beobachtungsreihen als festgestellt zu betrachten; da sowohl flüssiger als gasförmiger Sauerstoff vollkommene Isolatoren sind, muß angenommen werden, daß das Verhalten des Widerstandes tatsächlich dem der Temperatur entspricht. Die Erklärung der Erscheinung ist ohne weitere Versuche kaum mit Sicherheit zu geben. Das allmähliche Ansteigen der Temperatur während des Verdampfens entspricht ganz dem Verhalten flüssiger Luft und kann durch die Annahme erklärt werden, daß sich der Stickstoff der Luft in dem flüssigen Sauerstoff gelöst habe; das ursprüngliche Flüssigkeitsquantum müßte hierzu $1—1\,^1/_2$ Proz. Stickstoff aufgenommen haben. Diese Annahme kann aber keine Rechenschaft geben über das plötzliche Fallen der Temperatur gegen Ende des Versuches. Soviel ich sehe, bleibt daher nur die Vermutung übrig, daß man es trotz des starken Siedens mit einer Überhitzung zu tun hat, ähnlich wie solche von C. Baly[1]) in bezug auf Stickstoff beobachtet worden ist. Daß Sauerstoff eine beträchtliche Neigung zum Siedeverzug besitzt, geht aus einem andern Versuch hervor, bei dem das Sauerstoff-Zuleitungsrohr nicht geschlossen war. In diesem Falle fällt die Anregung zum Sieden durch die Dampfblasen weg, die in dem abgeschlossenen Zuleitungsrohr von der herabgedrückten, mit ihrem Dampf in Berührung stehenden Flüssigkeitsoberfläche ausgehen. Es trat dann kein regelmäßiges Sieden ein, sondern der gesamte Sauerstoff verdampfte mit sechs starken Stößen, die durch zwischenliegende Pausen vollkommener Ruhe getrennt waren.

Holborn erwähnt nichts von einem regelmäßigen Gang in der Temperatur, sondern sagt nur, daß „die Temperatur besonders dann sehr konstant wurde, wenn die Flüssigkeit so weit verdampft war, daß sich der Widerstand fast vollständig in den Dämpfen befand". Dies mag damit zusammenhängen, daß bei Holborn der Platindraht von den aufsteigenden Dampfblasen bestrichen wurde, während er bei meinem Thermo-

1) E. C. C. Baly, Phil. Mag. (5) **49**. p. 526. 1900.

meter vor deren Berührung durch den unteren Kork ziemlich geschützt war; auch kann die bei meinen Versuchen vermutete Lösung von Stickstoff aus der Luft unterblieben sein, wenn der Sauerstoff schneller entwickelt wurde, als er sich kondensieren konnte. Gegen die Annahme einer Überhitzung würde sprechen, daß Baly, der auch Sauerstoff untersucht hat, eine solche nur bei Stickstoff fand.

Trifft die versuchte Erklärung zu, so ist die Benützung flüssigen Sauerstoffs zur exakten Fixpunktbestimmung wohl ausgeschlossen; hierzu müssen dann dessen Dämpfe verwendet werden. Dann muß aber auch die von Holborn getroffene Anordnung in dem Sinne abgeändert werden, daß den Dämpfen und dem Thermometer von der Umgebung nur Wärme entzogen, nicht aber zugeführt werden kann. Denn nur die entzogene Wärme kann durch Kondensation des Dampfes ausgeglichen werden.

Die größte in den mitgeteilten Beobachtungsreihen auftretende Differenz der Widerstandswerte 20,605 — 20,527 = 0,078 Ω entspricht einer Temperaturdifferenz von 0,26°. Für die Entscheidung der Frage, welcher Wert dem Siedepunkt des Sauerstoffs entspricht, und zur Eichung verwendet werden soll, war die Überlegung maßgebend, daß in der getroffenen Anordnung nach Erreichung und Überschreitung der Siedetemperatur für den Widerstand keine Möglichkeit besteht, wieder eine tiefere Temperatur als die des Siedepunktes anzunehmen; es müssen daher die kleinsten, gegen Ende der Versuche gemessenen Widerstandswerte dem Siedepunkt des Sauerstoffs am besten entsprechen, vorausgesetzt, daß der bis dahin noch vorhandene Sauerstoff genügend rein war. Diese Wahl empfahl sich auch aus dem Grunde, weil der Berechnung die von Holborn bestimmte Siedetemperatur zu Grunde gelegt wurde, und diese sich auf das gleiche Stadium der Verdampfung bezieht.

Ich setzte daher $W_I = 20{,}536\ \Omega$ bei einem mittleren Barometerstande von 71,96 cm. Nach Holborn ist die Siedetemperatur bei 76,00 cm Druck — 182,7°; nach Baly steigt die Siedetemperatur bei Atmosphärendruck um 1° bei einer Druckerhöhung von 7,40 cm. Daraus ergibt sich für 71,96 cm Druck: — 183,25°.

Aus den Widerstandswerten bei 0^0, $-79{,}13^0$ und $-183{,}25^0$ berechnet sich dann die Formel:

$$W_{I,T} = 73{,}030 + 0{,}27418 \,.\, T - 0{,}000067\, T^2$$

oder auch:

$$W_{I,T} = W_{I,0^0}(1 + 0{,}003754 \,.\, T - 0{,}000000917\, T^2)$$

Nach der ersten dieser Formeln wurde eine Tabelle berechnet, aus der für jeden Wert von W_I die zugehörige Temperatur entnommen werden kann.

Die Genauigkeit der so erzielten Eichung hängt zunächst von dem Wasserstoffthermometer Holborns ab, an das nun auch mein Widerstandsthermometer indirekt angeschlossen ist. Die Frage, inwieweit Wasserstoff bei -190^0 noch den Anforderungen des idealen Gaszustandes entspricht, ist neuerdings durch die Messungen von Travers, Senter und Jacquerod[1]) dahin beantwortet worden, daß das Wasserstoffthermometer in dieser Temperatur um $0{,}1^0$ tiefere Angaben liefert als das Heliumthermometer. Was die Genauigkeit des speziellen von Holborn benutzten Wasserstoffthermometers betrifft, so ist es auffallend, daß er den Spannungskoeffizienten zu 0,003665 bestimmte, während Chappuis[2]), Kamerlingh Onnes und Boudin[3]), sowie Travers und Jacquerod[4]) übereinstimmend $0{,}003662_5$ angeben.

Der Fixpunkt bei $-79{,}13^0$ wird wegen des oben erörterten Einflusses des hydrostatischen Druckes des Alkohols etwas gefälscht sein; doch überschreitet der hieraus entstehende Fehler bei den ähnlichen Verhältnissen der dargestellten Eichung und der Messungen Holborns jedenfalls den Betrag von $^1/_{10}{}^0$ nicht nennenswert.

Die Siedetemperatur des Sauerstoffs wurde von Holborn nicht direkt mit dem Gasthermometer, sondern mit einem

---

1) M. W. Travers, G. Senter u. A. Jacquerod, Phil. Trans. A. 200. p. 152. 1902.

2) P. Chappuis, Rapp. prés. au Congrès Intern. de Phys. à Paris, I, p. 131—147. 1900.

3) H. Kamerlingh Onnes u. M. Boudin, Comm. Physic. Lab. Leiden, Nr. 60. 1900.

4) l. c. p. 131.

Platinwiderstand bestimmt, der seinerseits in flüssiger Luft und in Kohlensäureschnee mit dem Wasserstoffthermometer verglichen worden war. Die Intrapolation zwischen — 78° und 190° gibt hierbei Fehler derselben Größe, wie in meinem Fall die Extrapolation unterhalb — 183°. Würde sich alles Platin in Bezug auf Widerstandsänderung gleich verhalten, so würden sich beide Fehler gegenseitig aufheben; dies scheint aber in tiefen Temperaturen nicht der Fall zu sein, vielmehr bietet der Umweg über den Siedepunkt des Sauerstoffs eine neue Fehlerquelle.

Die mangelhafte Schärfe dieses Siedepunktes in den vorliegenden Messungen wurde schon betrachtet; hier seien noch die Zahlen Holborns etwas näher besprochen. Bei den vier Messungen vom 13. und 14. Februar 1900 weicht der erste Wert vom Mittel der drei anderen um + 0,39° ab, während nach der Druckänderung — 0,03° zu erwarten wären; im übrigen ist die Übereinstimmung der bei nahe gleichem Druck angestellten Versuche eine befriedigende. Dagegen ergibt die Kombination der um ein Jahr auseinander liegenden Beobachtungsgruppen eine Temperaturdifferenz von 0,57° bei einer Druckdifferenz von 1,89 cm. Bei Ausschließung des schon erwähnten ersten Wertes würde die Temperaturdifferenz auf 0,47° herabsinken; aber auch diese Differenz ist noch erheblich größer, als aus anderen Beobachtungen folgen würde. Baly hat die Abhängigkeit der Siedetemperatur vom Druck aus seinen eigenen Messungen, sowie aus denen Olszewskis und Estreichers[1]) in Tabellen dargestellt; diese aus großen Intervallen abgeleiteten Zahlen ebenso wie diejenigen von Travers, Senter und Jacquerod ergeben für die obige Druckdifferenz eine Temperaturdifferenz von 0,23° bis 0,26°.

Mißlich ist bei Holborn die Notwendigkeit der Anbringung einer Korrektion von 0,08°, denn sie sagt doch wohl aus, daß der mit Schutzrohr gebrauchte Widerstand nicht völlig die Temperatur des Bades annimmt.

Schließlich seien noch die aus den verschiedenen Beobachtungen sich ergebenden Werte für die Siedetemperatur des Sauerstoffs zusammengestellt (vgl. nachstehende Tabelle).

---

1) T. Estreicher, Phil. Mag. (5) 40. p. 454—463. 1895.

Beobachter	Siede-temperatur	Barometer-stand (cm)	Auf 76 cm Druck reduzierte Temperatur
Holborn	− 182,46° − 183,03	76,837 74,951	− 182,7°
Dewar	− 182,20 − 182,67 − 181,52	76,06 76,44 75,95	− 182,2 − 182,7 − 181,5
Baly	—	—	− 182,1
Olszewski	− 182,6	74,1	− 182,4
Estreicher	− 182,56	74,38	− 182,4
Travers, Senter u. Jacquerod	— —	— —	− 182,93 (H-Therm.) − 182,83 (He-Therm.)

Bezüglich der voraussichtlichen Genauigkeit der Thermometereichung beim Siedepunkt des Sauerstoffs wird man auf Grund des dargelegten Beobachtungsmateriales und der angestellten Überlegungen zu dem Schluß kommen, daß eine Unsicherheit von mehreren Zehntelgraden zu erwarten ist. Mit der Entfernung der Temperatur von diesem Fixpunkt kann der Fehler ebensowohl wachsen als abnehmen.

Darstellung des Stickstoffs.

Im allgemeinen kam chemischer Stickstoff, bei einigen Versuchen atmosphärischer Stickstoff zur Verwendung.

Der chemische Stickstoff wurde dargestellt durch gelindes Erwärmen einer Lösung von 10 g Natriumnitrit, 10 g Ammoniumnitrat und 10 g Kaliumdichromat in 90 ccm Wasser. Er ging der Reihe nach durch Waschflaschen mit 5 proz. Kaliumpermanganatlösung, 30 proz. Eisensulfatlösung und 25 proz. Kalilauge, dann durch ein längeres Glasrohr mit Glasperlen und konzentrierter Schwefelsäure, schließlich über glühendes Kupfer zum Gasometer. Während des Versuches passierte der aus dem Gasometer kommende Stickstoff unmittelbar vor dem Eintritt in den Reibungsapparat ein in flüssiger Luft gekühltes Spiralrohr, in dem etwa noch vorhandene Spuren von Dämpfen oder leicht koerziblen Gasen ausgefroren wurden.

Direkt hinter dem Gasentwickelungsgefäß ist in den Weg des Stickstoffs ein mit Wasser gedichteter Hahn eingelegt, vor dem Gasometer ein solcher mit Quecksilberdichtung und ohne Fettung. Das Schwefelsäurerohr ist beiderseits mit eingeschliffenen Glasstöpseln geschlossen, die durch die Schwefelsäure selbst gedichtet werden. Das schwer schmelzbare Glasrohr mit dem glühenden Kupfer endet in Schliffen, die durch Phosphorpentoxyd gedichtet sind. Alle übrigen Verbindungen sind durch Verblasen der Glasröhren hergestellt.

Die verwendeten Chemikalien waren in reinster Qualität (von Kahlbaum, Berlin) bezogen. Das Wasser wurde durch Destillation käuflichen destillierten Wassers unter Zusatz von Kaliumpermanganat und Ätzkali hergestellt; die ersten Fraktionen und der Rest wurden nicht verwendet.

Die Erneuerung der Lösung in dem Stickstoffentwickelungsgefäß geschah in der Weise, daß die alte Lösung durch ein Sicherheitsrohr hinausgetrieben, und auf demselben Wege neue Lösung nachgefüllt wurde, sodaß ein Eindringen von Luft bei dieser Gelegenheit vermieden wurde.

Zur Herstellung atmosphärischen Stickstoffs wurde das Entwickelungsgefäß und die beiden ersten Waschflaschen entfernt, und statt deren mittels kurzer Gummischläuche zwei Waschflaschen mit alkalischer Pyrogallussäurelösung vor die Flasche mit Kalilauge vorgelegt.

Bei der ersten Darstellung von Stickstoff, sowie jedesmal, wenn aus irgend welchem Grunde Luft in den Stickstoffbereitungsapparat oder den Gasometer getreten war, wurde wiederholt eine größere Menge Stickstoff entwickelt und durch den in seiner tiefsten Stellung befindlichen Gasometer geleitet.

Vorbereitung und Prüfung der Apparate.

Der eigentliche Reibungsapparat zwischen den beiden Wattestaubfängen wurde nach dem Zusammenblasen durch Durchsaugen von Salpetersäure und danach von destilliertem Wasser, das durch Ton filtriert wurde, gereinigt; getrocknet wurde durch mehrmaliges Evakuieren mit der Quecksilberluftpumpe unter Vorlegen von Phosphorpentoxyd und Wieder-

füllen mit trockener Luft. Alle übrigen Teile wurden vor dem Zusammenblasen mit Salpetersäure und destilliertem Wasser gereinigt; das Zusammenblasen geschah dann unter Benutzung eines Chlorcalciumrohres.

Das zur Füllung des Gasometers und der Manometerröhren benützte Quecksilber war destilliert worden.

Vor Beginn der Versuche mit Stickstoff sowie mehrmals im Laufe derselben wurde der Reibungsapparat mit der Quecksilberluftpumpe wiederholt so weit ausgepumpt, daß auch zwischen den Kapillaren der Druck nur noch wenige Millimeter betrug, und mit trockenem Stickstoff gefüllt.

Zur Prüfung auf Dichtigkeit wurde der Reibungsapparat bis auf einen Druck von 1,5 cm Quecksilber ausgepumpt acht Tage stehen gelassen; es wurde keine Druckänderung nach dieser Zeit bemerkt.

Ausführung der Versuche.

Zu den Versuchen bei Zimmertemperatur zur Bestimmung des Widerstandsverhältnisses der Kapillaren wurde atmosphärische Luft verwendet. Für diesen Zweck wurden statt des Stickstoffapparates vor das Gaszuleitungsrohr des Gasometers durch kurze Gummischläuche Trockenröhren mit Phosphorpentoxyd, Chlorcalcium, und eine Waschflasche mit verdünnter Kalilauge vorgelegt. Während der Versuche wurde meist nicht die im Gasometer angesammelte Luft aufgebraucht, sondern es blieb die Kommunikation mit den Trockenröhren frei, sodaß das nach dem Reibungsapparat abfließende Gas sogleich wieder durch nachströmendes ersetzt wurde. Der Druck im Gasometer war unter diesen Verhältnissen ein vollkommen konstanter.

Bei den Versuchen mit Stickstoff wurde zunächst Gas bereitet, das man durch die niedergedrückte Gasometerglocke strömen ließ. Nach einiger Zeit wurde das hinter dem Gasometer liegende Spiralrohr in flüssiger Luft gekühlt, bald darauf durch Drehen der Dreiweghähne der Gasabfluß aus dem Gasometer eingestellt, und der Reibungsapparat ausgepumpt. Nach vollständiger Füllung des Gasometers wurde dieser von dem

Gasbereitungsapparat durch den zwischenliegenden Hahn abgeschlossen.

Der eigentliche Reibungsversuch wurde dadurch eingeleitet, daß der Gasometer mit der einen Seite des Reibungsapparates, der leergepumpte 60 Literballon mit der anderen Seite desselben verbunden wurde. Die Erreichung des stationären Zustandes wurde durch zeitweiliges Abschließen des Gaszu- oder abflusses beschleunigt.

Die Messungen wurden so ausgeführt, daß nach dem angenäherten Konstantwerden des mittleren Manometers das Quecksilberniveau auf die Maßstabspitze eingestellt und dann in Intervallen von je 2 Min. bei den ersten Versuchsreihen in Zimmertemperatur, von je 3 Min. bei den übrigen Versuchen Manometerablesungen gemacht wurden. Die Reihenfolge der Ablesungen ist durch das Schema gegeben: $b'', b', b'', b''', b'', b' \ldots$ Bei der erstgenannten Versuchsgruppe wurden nebenher in unregelmäßigen Zwischenräumen die Temperaturen der Bäder und der Manometer, sowie der Barometerstand bestimmt; bei den späteren Versuchen wurden diese Messungen in regelmäßiger Zeitfolge ausgeführt, indem zwischen je zwei Manometerablesungen abwechselnd eine der folgenden vier Größen bestimmt wurde: Manometertemperatur, Barometer, Temperatur des Temperaturbades, Temperatur des Wasserbades.

Bei den meisten Versuchen wurde, nachdem alle Größen wiederholt gemessen waren, unmittelbar ein zweiter Versuch angereiht, der gewissermaßen die Fortsetzung des ersten bildete. Durch vorübergehende Regulierung des Gaszu- oder abflusses entfernte man den Druck zwischen den Kapillaren etwas von dem dem stationären Zustand entsprechenden, und wartete dann von neuem die Einstellung auf konstanten Druck ab. Nach Vollendung dieses zweiten Versuches wurde der Reibungsapparat von dem ausgepumpten Ballon abgeschlossen und mit dem Rest des Gasvorrates gefüllt. In diesem Zustande blieb er bis zum nächsten Versuche stehen.

Bei allen Versuchen wurde darauf geachtet, daß vor dem Konstantwerden des mittleren Manometers der Druck zwischen den Kapillaren abwechselnd größer und kleiner war, als im stationären Zustand.

Berechnung der Versuche.

Aus den Beobachtungszahlen wurden durch Mittelnehmen die Werte von b (Barometerstand), b', b'', b''', db/dt, db''/dt, T_1, T_2 für einen mittleren Zeitpunkt erhalten. Unter Berücksichtigung der Manometertemperaturen, der Kapillaritätskorrektionen und der Änderungen des Quecksilberniveaus im Gefäß erhielt man daraus die Werte von p', p'', p''', dp''/dt. Bei den ersten Versuchsreihen zur Bestimmung des Kapillarenwiderstandsverhältnisses begannen die Beobachtungen schon vor Erreichung eines genügend stationären Zustandes; zur Berechnung wurden nur die Werte von der Zeit an benutzt, wo die Änderung von b'' klein und gleichförmig wird; die Bestimmung dieses Zeitpunktes ist einigermaßen willkürlich, aber von keinem nennenswerten Einfluß auf das Resultat. Bei den späteren Versuchen begannen die Beobachtungen immer erst bei genügend stationärem Zustand, weshalb hier alle gemessenen Werte benutzt wurden.

Die Berechnung geschah nach der Gleichung (4):

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{R_2^4 \lambda_1}{R_1^4 \lambda_2} \cdot \frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2} \cdot \frac{1 + 3\beta T_2}{1 + 3\beta T_1} \cdot \frac{1 + 4\frac{\zeta_2}{R_2}}{1 + 4\frac{\zeta_1}{R_1}} \cdot (1 + \Delta).$$

Die Berechnung wurde immer so eingerichtet, daß der Koeffizient der Reibung bei Zimmertemperatur in den Nenner kam. Wenn daher die Kapillare 1 sich im Temperaturbad befand, so ist in vorstehender Gleichung der Index 1 mit 2, (') mit (''') zu vertauschen. Bei beiderseits gleicher Temperatur $T_1 = T_2$ ist auch $\eta_1 = \eta_2$, und man erhält dann die Gleichung für das Widerstandsverhältnis:

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = \frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{1 + 4\frac{\zeta_2}{R_2}}{1 + 4\frac{\zeta_1}{R_1}} \cdot (1 + \Delta). \tag{5}$$

Das Korrektionsglied Δ wurde in beiden Formeln nur insoweit berücksichtigt, als es von dp''/dt und db''/dt abhängt. Bei den 1903 angestellten Versuchen wurde auch das von dT'''/dt herrührende Glied in Rechnung gezogen. Die aus den zeitlichen Änderungen sich ergebende Gesamtkorrektion betrug

im Maximum $\Delta = 1{,}8/1000$; bei den Versuchen in tiefen Temperaturen konnte sie fast immer vernachlässigt werden.

Der Gleitungskoeffizient in Formel (5) wurde gesetzt:

$$\zeta = 0{,}0000086 \cdot \frac{76}{p};$$

dieser Wert ergibt sich aus den Transpirationsversuchen von E. Warburg[1]), wenn

$$p = \frac{p' + p''}{2} \left(\text{bez.} = \frac{p'' + p'''}{2} \right)$$

gesetzt wird.[2])

Die erhaltenen Resultate der 1902 zur Bestimmung von $R_1^4 \lambda_2 / R_2^4 \lambda_1$ angestellten Versuche sind in Tab. I, p. 981 zusammengestellt.

---

1) E. Warburg, Pogg. Ann. **159.** p. 399—415. 1876.

2) Der Wert

$$p = \frac{p' + p''}{2}$$

folgt aus der für einen konstanten Gleitungskoeffizienten abgeleiteten O. E. Meyerschen Formel, wenn man dieselbe für ein unendlich kurzes Stück der Kapillare aufstellt, den Gleitungskoeffizienten umgekehrt proportional dem Druck setzt und über die ganze Länge der Kapillare integriert; Warburg hat eine angenäherte Lösung des Falles gegeben, in welchem eine inkompressible Flüssigkeit durch ein Kapillarrohr strömt, unter der Annahme, daß der Gleitungskoeffizient dem Druck umgekehrt proportional ist, und so den etwas kleineren Wert

$$(p) = \frac{p'}{1 + \frac{p' - p''}{p'}}$$

abgeleitet. Diese Formel haben P. Breitenbach und H. Schultze angewendet, während Warburg den Druck nach beiden Formeln angibt, ohne sich für eine derselben zu entscheiden. Ich habe den arithmetischen Mittelwert vorgezogen, weil der Druck in einer gasdurchströmten Kapillare größer ist, als in einer von inkompressibler Flüssigkeit durchströmten; das ist aus nebenstehender graphischer Darstellung (Fig. 8) ersichtlich, in welcher die Abszissen die Entfernung vom Anfang der Kapillare und die Ordinaten die zugehörigen Drucke vorstellen.

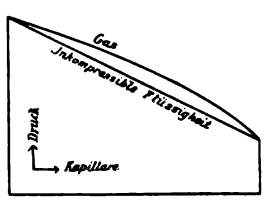


Fig. 8.

Übrigens ist die Wahl zwischen den beiden Formeln ohne nennenswerten Einfluß auf die mitgeteilten Resultate.

Tabelle 1.

Widerstandsverhältnis der beiden Kapillaren.

Versuchszeit	p' (cm Quecksilber)	p'' (cm Quecksilber)	p''' (cm Quecksilber)	Widerstandsverhältnis $\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1}$ ohne Berücksichtigung der Gleitung, bei der Strömungsrichtung 1—2	2—1	$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1}$ mit Berücksichtigung der Gleitung	Abweichung vom Mittelwert	Abweichung in Proz.
18. Februar 1902, 11^{14}—12^{08}	3,308	48,921	70,893	—	1,1054	1,0983	− 0,0003	−0,03
18. „ 1902, 3^{06}— 3^{36}	70,955	51,250	2,037	1,0889	—	1,0962	− 24	−0,22
19. „ 1902, 9^{40}—10^{12}	71,153	51,408	2,389	1,0898	—	1,0970	− 16	−0,15
19. „ 1902, 11^{06}—11^{42}	71,077	51,395	2,646	1,0915	—	1,0986	± 00	±0,00
19. „ 1902, 12^{58}— 1^{50}	2,724	49,002	71,040	—	1,1059	1,0986	± 00	±0,00
19. „ 1902, 2^{46}— 3^{46}	2,463	49,035	71,093	—	1,1050	1,0977	− 09	−0,08
20. „ 1902, 10^{54}—11^{38}	11,099	49,851	71,355	—	1,1039	1,0986	± 00	±0,00
20. „ 1902, 12^{42}— 1^{06}	11,322	49,892	71,414	—	1,1058	1,1005	+ 19	+0,17
20. „ 1902, 1^{56}— 2^{32}	71,392	52,215	11,651	1,0933	—	1,0985	− 01	−0,01
20. „ 1902, 3^{00}— 3^{44}	71,385	52,241	11,809	1,0942	—	1,0994	+ 08	+0,07
27. „ 1902, 10^{42}—11^{42}	31,491	53,519	70,191	—	1,1012	1,0989	+ 03	+0,03
27. „ 1902, 12^{18}—12^{58}	31,705	53,492	70,024	—	1,1006	1,0983	− 03	−0,03
27. „ 1902, 1^{38}— 2^{14}	70,037	55,264	31,963	1,0980	—	1,1005	+ 19	+0,17
27. „ 1902, 2^{40}— 3^{24}	70,030	55,280	32,101	1,0965	—	1,0989	+ 03	+0,03
						Mittelwert: 1,0986		

Die Übereinstimmung der bei den zwei Strömungsrichtungen erhaltenen Resultate ist ein Beweis, daß in Bezug auf die angewendeten Drucke das Poisseuille-Meyersche Gesetz innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler gültig ist.

Der aus sämtlichen Resultaten der Tab. I folgende Mittelwert

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = 1{,}0986$$

wurde durch Einsetzen in Gleichung (4) zur Berechnung der Versuche über die Änderung des Reibungskoeffizienten in tiefen Temperaturen benützt.

Tab. Ia p. 983 enthält die nach der Wiederaufnahme der Versuche angestellten Bestimmungen von $R_1^4 \lambda_2 / R_2^4 \lambda_1$; der Mittelwert dieser Beobachtungen

$$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1} = 1{,}0976$$

wurde der Berechnung der Reibungsversuche in hohen Temperaturen zu Grunde gelegt.

Die Änderung des Gleitungskoeffizienten mit der Temperatur habe ich in Ermangelung einer experimentellen Grundlage der Theorie entnommen. Nach dieser ist der Gleitungskoeffizient proportional der molekularen Weglänge. Die letztere ist durch die zunächst ohne Rücksicht auf die Gleitung berechneten Versuche selbst mit genügender Annäherung gegeben. Es ist:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\varrho_2 L_2 \Omega_2}{\varrho_1 L_1 \Omega_1},$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2} \cdot \frac{p_2}{p_1},$$

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\sqrt{1 + \alpha T_2}}{\sqrt{1 + \alpha T_1}},$$

[ϱ = Dichte, L = Weglänge, Ω = Geschwindigkeit]

also:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{1 + \alpha T_2}}{\sqrt{1 + \alpha T_1}} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1},$$

und endlich:

$$\zeta_2 = 0{,}0000086 \cdot \frac{76}{p_2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \alpha T_2}}{\sqrt{1 + \alpha T_1}} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1},$$

wenn sich Index 1 auf Zimmertemperatur bezieht und p_2 in cm Quecksilber genommen wird.

Tabelle Ia.

Widerstandsverhältnisse der beiden Kapillaren.

Versuchszeit	p' (cm Quecksilber	p'' (cm Quecksilber	p''' (cm Quecksilber	Widerstandsverhältnis $\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1}$ ohne Berücksichtigung der Gleitung, bei der Strömungsrichtung 1—2	2—1	$\frac{R_1^4 \lambda_2}{R_2^4 \lambda_1}$ mit Berücksichtigung der Gleitung	Abweichung vom Mittelwert	Abweichung in Proz.
19. Juni 1903, 5^{36}— 6^{36}	70,439	50,920	2,397	1,0922	—	1,0994	+ 0,0018	+ 0,16
20. „ 1903, 5^{12}— 6^{04}	2,121	48,811	70,812	—	1,1067	1,0993	+ 17	+ 0,15
4. Sept. 1903, 4^{09}— 4^{57}	71,545	51,794	4,803	1,0922	—	1,0989	+ 13	+ 0,11
4. „ 1903, 5^{15}— 6^{03}	71,525	51,744	4,289	1,0912	—	1,0980	+ 04	+ 0,04
5. „ 1903, 8^{15}— 9^{03}	1,721	49,395	71,612	—	1,1032	1,0958	− 18	− 0,16
5. „ 1903, 9^{30}—10^{18}	1,957	49,401	71,615	—	1,1033	1,0960	− 16	− 0,15
5. „ 1903, 11^{03}—11^{51}	71,602	51,754	2,301	1,0922	—	1,0994	+ 18	+ 0,16
5. „ 1903, 12^{30}—12^{51}	71,580	51,734	2,467	1,0916	—	1,0988	+ 12	+ 0,11
5. „ 1903, 2^{12}— 3^{00}	2,384	49,380	71,537	—	1,1023	1,0950	− 26	− 0,24
5. „ 1903, 3^{37}— 4^{12}	2,607	49,364	71,529	—	1,1027	1,0955	− 21	− 0,19
						Mittelwert: 1,0976		

Tabelle II.

Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur.

Versuchszeit	p' (cm Quecksilber)	p''	p'''	Temp. T_W des Wasserbades	Temp. T des Temperaturbades	Strömungsrichtung	$\frac{\eta_T^{14}}{\eta_W}$ ohne Berücksichtigung der Gleitung	$\frac{\eta_T}{\eta_{17}}$ mit Berücksichtigung der Gleitung	$\frac{\eta_T}{\eta_{17}}$ berechn. nach Sutherland ($C = 110{,}6$)	Diff.	Diff. in Proz.
14. März 1902, 5^{06}— 5^{42}	4,624	20,688	71,806	+16,05°	−189,16°	2—1	0,3258	0,3242	0,3204	+0,0038	+1,2
14. „ 1902, 6^{18}— 6^{54}	3,300	20,417	71,657	+16,12	−189,15	2—1	0,3260	0,3245	0,3204	+ 41	+1,3
15. „ 1902, 11^{30}—12^{06}	2,783	20,434	71,307	+16,49	−188,79	2—1	0,3316	0,3305	0,3219	+ 86	+2,7
15. „ 1902, 12^{30}— 1^{06}	3,042	20,429	71,176	+16,52	−188,75	2—1	0,3314	0,3303	0,3220	+ 83	+2,6
20. „ 1902, 4^{45}— 5^{21}	1,963	39,264	70,881	+15,99	− 78,70	2—1	0,7206	0,7208	0,7206	+ 02	+0,03
20. „ 1902, 5^{42}— 6^{45}	2,182	39,208	70,771	+16,09	− 78,69	2—1	0,7205	0,7209	0,7206	+ 03	+0,04
21. „ 1902, 6^{51}— 7^{39}	2,804	39,013	70,415	+16,51	− 78,65	2—1	0,7199	0,7210	0,7207	+ 03	+0,04
21. „ 1902, 8^{12}— 9^{00}	3,079	38,957	70,301	+16,57	− 78,68	2—1	0,7198	0,7210	0,7206	+ 04	+0,06
22. „ 1902, 5^{21}— 6^{12}	2,619	38,969	70,409	+16,86	− 78,57	2—1	0,7187	0,7206	0,7210	− 04	−0,06
22. „ 1902, 6^{39}— 7^{27}	2,865	38,910	70,308	+16,87	− 78,65	2—1	0,7188	0,7201	0,7207	− 06	−0,08
24. „ 1902, 4^{57}— 5^{33}	3,466	19,584	70,784	+18,04	−191,55	2—1	0,3153	0,3154	0,3106	+ 48	+1,5
24. „ 1902, 6^{08}— 6^{39}	3,759	19,610	70,680	+18,05	−191,54	2—1	0,3154	0,3155	0,3106	+ 49	+1,6
25. „ 1902, 10^{39}—11^{15}	3,213	19,601	70,301	+17,56	−190,99	2—1	0,3193	0,3190	0,3129	+ 61	+2,0
25. „ 1902, 11^{38}—12^{09}	3,447	19,610	70,173	+17,50	−190,93	2—1	0,3192	0,3188	0,3132	+ 56	+1,8
26. „ 1902, 11^{30}—12^{06}	71,208	21,420	2,971	+16,58	−191,56	1—2	0,3159	0,3148	0,3106	+ 42	+1,4
26. „ 1902, 12^{38}— 1^{09}	71,078	21,433	3,245	+16,76	−191,52	1—2	0,3164	0,3155	0,3107	+ 48	+1,5
26. „ 1902, 6^{00}— 6^{36}	71,322	21,545	3,315	+17,32	−191,26	1—2	0,3170	0,3165	0,3118	+ 47	+1,5
26. „ 1902, 6^{57}— 7^{33}	71,206	21,552	3,610	+17,21	−191,23	1—2	0,3167	0,3161	0,3119	+ 42	+1,3
27. „ 1902, 10^{42}—11^{18}	71,224	21,650	4,095	+18,87	−190,76	1—2	0,3171*)	0,3160*)	0,3138	+ 42	+1,3
27. „ 1902, 11^{39}—12^{15}	71,011	21,658	4,367	+18,88	−190,70	1—2	0,3177*)	0,3185*)	0,3141	+ 44	+1,4
27. „ 1902, 4^{30}— 5^{06}	70,878	21,657	3,618	+17,67	−190,84	1—2	0,3205*)	0,3203*)	0,3156	+ 47	+1,5
27. „ 1902, 5^{24}— 6^{00}	70,722	21,662	3,881	+17,46	−190,26	1—2	0,3202*)	0,3198*)	0,3159	+ 39	+1,3

| | | |

Nach dieser Formel ist die Gleitung bei gleichem Druck bei -79^0 $^3/_5$ und bei -190^0 etwas weniger als $^1/_5$ derjenigen bei Zimmertemperatur, während sie bei 100^0 auf den 1,4 fachen, und bei 300^0 auf den 2,3 fachen Wert ansteigt.

Die Formel (4) hat die Gültigkeit des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes zur Voraussetzung, das bei der Ableitung der O. E. Meyerschen Gleichung eingeführt wurde. Die Tab. II wurde nach dieser Formel mit $\alpha = 0{,}00367$ berechnet, und zwar enthält die achte Kolumne die Resultate der Versuche über die Änderung des Reibungskoeffizienten mit der Temperatur ohne Berücksichtigung der Gleitung, die neunte Kolumne dieselben Werte mit Berücksichtigung der Gleitung und zur Erleichterung des Vergleiches auf eine Temperatur des Wasserbades von 17^0 reduziert. Die kältere Kapillare wurde vom Stickstoff immer an zweiter Stelle, also bei dem niedrigeren Drucke durchströmt.

Ohne Voraussetzung des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes würde in der Formel (4) statt der Faktoren:

$$\frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2}$$

der Ausdruck:

$$\frac{\int_{p'''}^{p''} \varrho \, dp}{\int_{p''}^{p'} \varrho \, dp} \tag{6}$$

eingehen. Zur Berechnung dieses Ausdruckes muß die Beziehung bekannt sein, die bei den betreffenden Temperaturen ϱ mit p verbindet. Für den Temperaturbereich der flüssigen Luft wurde diese Beziehung von Valentiner und mir experimentell bestimmt und in der Form dargestellt[1]):

$$\frac{p}{\varrho} = 0{,}27774\,(273{,}04 + T) - [0{,}03202 - 0{,}000253\,(273{,}04 + T)]\,.p,$$

1) A. Bestelmeyer u. S. Valentiner, Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. 33. p. 743. 1903.

wobei die Dichte ϱ_0 bei 0° und 76 cm Druck gleich 1 gesetzt und p in cm Quecksilber zu messen ist. T bezieht sich auf die auch der vorliegenden Untersuchung zugrunde liegenden Angaben des Platinthermometers I. Unter Verwendung dieser Werte und Ausführung der Integration in (6) wurde eine Korrektion von + 4,4 Promille erhalten, die an dem in Tab. V aufgenommenen Mittelwert angebracht ist.

Eine analoge Korrektion von + 0,3 Promille ist für die Abweichung des Stickstoffs vom Boyle-Gay-Lussacschen Gesetz an dem in Tab. VI aufgenommenen Mittelwert der Versuche bei 98° angebracht. Bei − 79° und + 300° fehlt die experimentelle Grundlage für die Anbringung einer entsprechenden Korrektion; die Mittelwerte dieser beiden Versuchsreihen wurden daher unverändert in Tab. VI aufgenommen; der dadurch bedingte Fehler dürfte jedoch unbedeutend und jedenfalls kleiner als 1 Promille sein.

Genauigkeit der Resultate.

Der Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate ist aus Tab. III zu ersehen, der des Mangels an Konstanz der einzelnen Größen aus Tab. IV.

Erwähnt mag noch werden, daß bei der Berechnung die Schwere des Gases nicht berücksichtigt wurde; der Druck an Anfang und Ende der Kapillaren ist infolge der Höhendifferenz nicht genau der gleiche als an den Manometerkuppen; andererseits vermehrt bez. verringert die Schwere des Gases in den Kapillaren die Wirkung des treibenden Druckes; beide an sich sehr geringfügige Vernachlässigungen sind um so mehr berechtigt, als sie einander entgegenwirken.

Nach den Tab. III und IV ist zu erwarten, daß die einzelnen Resultate bis auf wenige Tausendstel ihres Wertes übereinstimmen, wenn die durch die Verschiedenheit der Temperaturen bedingten Abweichungen berücksichtigt werden. Tatsächlich stimmen die Bestimmungen des Widerstandsverhältnisses sowohl als auch die der Reibungskoeffizienten bei tiefen Temperaturen innerhalb dieser Grenzen im allgemeinen sehr befriedigend überein; nur die beiden Versuche vom 15. März ergeben Werte, welche zwar unter sich in guter Übereinstimmung,

Tabelle III.

Beobachtungsfehler,

welche das Resultat um $^1/_{1000}$ seines Wertes beeinflussen.

Gemessene Größe	Versuche zur Bestimmung des Widerstandsverhältnisses der Kapillaren			Versuche bei	Versuche bei	Versuche bei	Versuche bei
	1. Gruppe, kleinster Druck = ca. 2,5 cm	2. Gruppe, kleinster Druck = ca. 11,5 cm	3. Gruppe, kleinster Druck = ca. 32 cm	+ 300°	+ 98°	− 79°	− 190°
Barometerstand	±0,048 cm	±0,066 cm	±0,14 cm	−0,028 cm	−0,040 cm	+0,033 cm	+0,017 cm
1. Manometer (größt. Druck)	±0,017 „	±0,017 „	±0,013 „	−0,026 „	−0,021 „	+0,025 „	+0,032 „
2. „ (mittl. „)	∓0,012 „	∓0,012 „	∓0,010 „	+0,013 „	+0,013 „	−0,014 „	−0,010 „
3. „ (kleinst. „)	±0,59 „	±0,11 „	±0,032 „	−0,3 „	−0,5 „	+0,38 „	+0,078 „
Temp. des Wasserbades .	—	—	—	+0,29°	+0,29°	+0,29°	+0,29°
„ „ Temp.-Bades .	—	—	—	−0,58°	−0,37°	−0,19°	−0,08°
Mittl. Ausdehnungskoeffizient des Stickstoffs	—	—	—	−0,000007 9 = −0,22 °/°	−0,000018 = −0,49 °/°	+0,000007 9 = +0,22 °/°	+0,000001 6 = +0,042 °/°
Mittlerer linearer Ausdehnungskoeffizient des Glases	—	—	—	+0,000001 2 = +15 °/°	+0,000004 1 = +51 °/°	−0,000003 6 = −46 °/°	−0,000001 6 = −20 °/°
Gleitungskoeffizient . . .	+16 °/°	+22 °/°	+47 °/°	−30 °/°	−17 °/°	+31 °/°	−42 °/°

Tabelle IV.

Zeitliche Änderungen,

welche das Resultat um $^1/_{1000}$ seines Wertes beeinflussen.

Das Resultat wird um $^1/_{1000}$ seines Wertes beeinflußt durch die folgenden Änderungen pro Minute:	Versuche zur Bestimmung des Widerstandsverhältnisses der Kapillaren			Versuche bei +300°	Versuche bei +98°	Versuche bei −79°	Versuche bei −190°
	1. Gruppe kleinster Druck = ca. 2,5 cm	2. Gruppe kleinster Druck = ca. 11,5 cm	3. Gruppe kleinster Druck = ca. 32 cm				
Zunahme des Barometerstandes . .	∓0,0021 cm	∓0,0021 cm	∓0,0015 cm	+0,0014 cm	+0,0019 cm	−0,003 cm	−0,006 cm
„ „ mittleren Manometers .	±0,0012 „	±0,0012 „	±0,0009 „	−0,0008 „	−0,0011 „	+0,002 „	+0,004 „
„ der Temp. des Wasserbades	±0,11°	±0,10°	±0,08°	−0,15°	−0,20°	+0,35°	+1,0°
„ „ „ „ Temp.-Bades	—	—	—	−0,61°	−0,32°	+0,16°	+0,08°
„ „ Zimmertemperatur . .	±0,013°	±0,013°	±0,009°	−0,013°	−0,014°	+0,027°	+0,12°
Sinken der Oberfläche des Kältebades	—	—	—	—	—	+0,24 cm	+0,14 cm

aber mehr als 1 Proz. größer sind, als bei der betreffenden Temperatur allen übrigen Beobachtungen zufolge zu erwarten wäre. Hier muß ein gröberer Versuchsfehler angenommen werden. Die beiden Werte wurden bei Berechnung des Mittels nicht berücksichtigt.

Auch die beiden Versuche vom 25. März zeigen eine auffallend große Abweichung; doch liegt diese noch an der Grenze der zulässigen Fehler; jedenfalls liegt kein genügender Grund zur Verwerfung der beiden Werte vor.

Erwähnt muß dagegen der Umstand werden, daß das Mittel der Werte für $R_1' \lambda_2 / R_2' \lambda_1$ in Tab. Ia um 0,9 Promille kleiner ist als das der Tab. I. Da zwischen beiden Versuchsreihen $1^1/_2$ Jahre liegen und die Kapillaren in der Zwischenzeit wiederholt mit konzentrierten Säuren und Kalilauge behandelt worden waren, so ließe sich vielleicht eine solche Änderung erklären, die einer Radiusänderung der *einen* Kapillare von 0,00002 mm entsprechen würde. Es ist jedoch auffallend, daß die mit Strömungsrichtung 1—2 angestellten Versuche der Tab. Ia nahe den gleichen Mittelwert ergeben wie die Versuche des vorhergehenden Jahres, während die mit Strömungsrichtung 2—1 angestellten Versuche dieser Tabelle, den ersten ausgenommen, um fast 3 Promille kleiner sind. Da der Grund dieser Abweichung nicht bekannt ist, habe ich mich begnügt den neuen Mittelwert den späteren Berechnungen zugrunde zu legen. Nachdem bei 100° sowie bei 300° nahe gleich viel Versuche mit Vertauschung der Temperaturen der beiden Kapillaren und der Strömungsrichtung angestellt wurden, fällt übrigens ein kleiner Fehler in dem für $R_1' \lambda_2 / R_2' \lambda_1$ angenommenen Werte im Mittel heraus; die aus Tab. Ia folgende Unsicherheit von 1 bis 2 Promille überträgt sich aber trotzdem auf alle späteren Versuche, da möglicherweise aus irgend welchem Grunde tatsächlich das Widerstandsverhältnis um diesen Betrag um den angenommenen Mittelwert geschwankt haben kann.

Im übrigen hängt die absolute Genauigkeit der erhaltenen Werte für die Änderung der Reibung mit der Temperatur in erster Linie von der Zuverlässigkeit der Eichung der verwendeten Thermometer ab.

Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie.

Die Resultate der vorliegenden Versuche wurden mit der Formel von Sutherland verglichen:

$$\frac{\eta_T}{\eta_W} = \left(\frac{\theta}{\theta_W}\right)^{3/2} \frac{1 + \frac{C}{\theta_W}}{1 + \frac{C}{\theta}}. \tag{7}$$

θ und θ_W bedeuten die absoluten Temperaturen des Temperatur- und des Wasserbades; die absolute Temperatur des schmelzenden Eises, wurde nach Chappuis[1]) gleich 273,04° gesetzt.

Es mag vorausgeschickt werden, daß Sutherland die Gültigkeit seiner Ableitung nur für Gase oberhalb der kritischen Temperatur und bei nicht zu großem Druck in Anspruch nimmt. Bei Dämpfen unterhalb der kritischen Temperatur, bei denen „der Fall häufig eintritt, daß zwei Moleküle geschlossene Kurven um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben", nimmt er an, daß die ohne Zusammenstoß durch die Anziehungskraft bewirkte Ablenkung der Molekülbahnen die Reibung wesentlich beeinflussen würde. Dieser Faktor ist bei der Aufstellung der Sutherlandschen Formel nicht berücksichtigt.

Zu bemerken ist außerdem, daß die Gleichung (7) aus der anderen:

$$\eta = k \,.\, \varrho \,.\, L \,.\, \Omega$$

abgeleitet wurde. Dabei wurde einerseits die Annahme gemacht, daß die Weglänge bei gleicher Temperatur umgekehrt proportional der Dichte sei, andererseits wurde die Temperatur als ein Maß der Geschwindigkeit eingeführt, während sie in Wirklichkeit ein Maß der mittleren lebendigen Kraft eines Moleküles ist. Beide Annahmen sind nur so lange berechtigt, als die Masse der Moleküle unverändert ist. Auch aus diesem Grunde wird die theoretische Berechtigung der Sutherlandschen *Formel* in dem Maße zweifelhaft als ein Gas vom Boyle-Gay-Lussacschen Gesetze abweicht.

---

1) P. Chappuis, Rapports prés. au Congrès Internat. à Paris, I, p. 138. 1900.

Zur Prüfung der Sutherlandschen Formel wurde aus dem Mittelwert jeder Versuchsserie die Konstante C bestimmt. Die Vergleichung von Theorie und Experiment geschieht am sichersten durch Betrachtung der Einzelberechnungen von C selbst an Hand der Tab. V; in dieser sind in den beiden letzten Zeilen diejenigen Änderungen des beobachteten η_T/η_W bez. T enthalten, die den Wert von C um 1 vergrößern würden. Hierbei ist in den drei ersten Werten der letzten Zeile dem doppelten, sich addierenden Einfluß Rechnung getragen, den ein Fehler in der Temperaturbestimmung einerseits direkt, andererseits durch Beeinflussung des aus den Beobachtungen folgenden Wertes von η_T/η_W indirekt auf C ausübt; nur bei $-190°$ fällt diese indirekte Wirkung weg, weil hier die Dichte des Stickstoffes für die gleichen Angaben desselben Thermometers direkt bestimmt worden ist.

Tabelle V.

Mittelwerte.

T	$+300{,}4°$	$+98{,}41°$	$-78{,}66°$	$-190{,}63°$
T_W	$+18{,}45°$	$+19{,}51°$	$+16{,}48°$	$+16{,}46°$
$\frac{\eta_T}{\eta_W}$	1,6216	1,1983	0,7217	0,3208
C	110,3	114,4	110,6	103,6
$\Delta\frac{\eta_T}{\eta_W}$	$+1{,}0\,‰$	$+0{,}42\,‰$	$-0{,}8\,‰$	$-2{,}7\,‰$
ΔT	$-0{,}36°$	$-0{,}09°$	$+0{,}08°$	$+0{,}21°$

Man erkennt leicht, daß die C-Werte der drei ersten Reihen vollkommen innerhalb der Grenze der Versuchs- und Beobachtungsfehler übereinstimmen, während die Abweichung des letzten Wertes zu der Annahme einer bei dieser tiefen Temperatur merkbar werdenden Abweichung des Reibungskoeffizienten von der Sutherlandschen Formel im Sinne größerer Reibung drängt. Nimmt man nämlich unter möglichst ungünstiger Verteilung der Richtung der Fehler an, daß die aus den Versuchen bei $98°$ und bei $-190°$ folgenden Werte von η_T/η_W um je 3 Promille falsch seien, womit wohl die Grenze der möglichen Fehler erreicht ist, so müßte man außerdem noch annehmen, daß die Temperatur der flüssigen Luft um

0,53° zu tief gemessen wurde. Auch bei Vergleichung der bei 300° und — 78° erhaltenen Zahlen mit dem bei — 190° sich ergebenden Werte von C müßte man die größtmöglichen Fehler in stets sich addierender Richtung annehmen, um ohne Voraussetzung einer zu tief gemessenen Temperatur der flüssigen Luft Übereinstimmung der beiden erstgenannten mit dem letzten C-Wert zu erhalten. Nun wäre nach dem früher gesagten ein Fehler von 0,5 bis 0,6° in der Eichung des Platinthermometers, wenn auch unwahrscheinlich groß, immerhin möglich. Indessen haben die erwähnten Messungen der Dichte des Stickstoffes zu dem Schluß geführt, daß das Platinthermometer I in flüssiger Luft wahrscheinlich um einige Zehntel Grade zu hohe, keinesfalls zu tiefe Angaben liefert, so daß die gefundene Abweichung der Versuche bei — 190° wohl nicht ganz auf Rechnung von Beobachtungs- und Versuchsfehlern gesetzt werden kann.

In Tab. VI sind noch einmal die beobachteten, auf eine Wasserbadtemperatur von 17° reduzierten, und die nach der Sutherlandschen Formel mit dem in der Dissertation angenommenen $C = 110{,}6$ berechneten Werte der Verhältnisse η_T/η_W zusammengestellt. Diese Werte durch die Quadratwurzel aus dem Verhältnis der absoluten Temperaturen dividiert liefern die Größe der molekularen Weglänge, diejenige bei 17° und der gleichen Dichte gleich 1 gesetzt, und diese Werte sind in Fig. 9 eingetragen. Außer der Sutherlandschen Kurve sind dortselbst noch einige Kurven für die Weglänge eingezeichnet, die sich aus früher versuchten Gesetzen der Reibungsänderung mit der Temperatur ergeben.

Tabelle VI.

Mittelwerte.

T	+300,4°	+98,41°	−78,66°	−190,63°
$\frac{\eta_T}{\eta_{17}}$ beob.	1,6279	1,2064	0,7207	0,3204
$\frac{\eta_T}{\eta_{17}}$ ber.	1,6283	1,2045	0,7207	0,3144
beob.-ber.	−0,0004 = −0,2 ‰	+0,0019 = +1,6 ‰	± 0 = 0 ‰	+0,0060 = +19 ‰

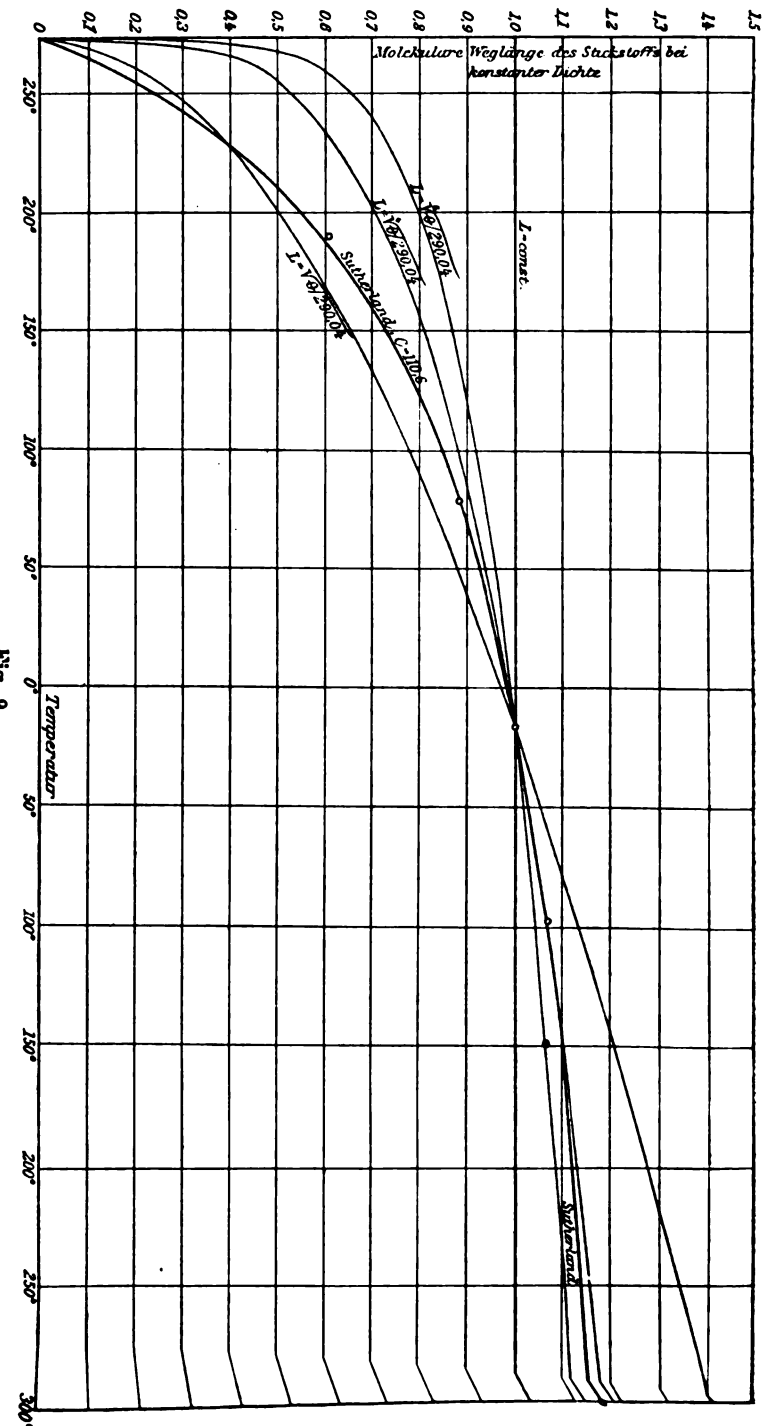

Molekulare Weglänge des Stickstoffs bei konstanter Dichte
L-const.
Temperatur
Sutherland
Sutherland C-110.6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
250°
200°
150°
100°
50°
0°
50°
100°
150°
200°
250°
300°

Fig. 9.

Schlußresultat der vorliegenden Untersuchung.

Die Sutherlandsche Formel stellt mit großer Annäherung die innere Reibung des Stickstoffes zwischen $+300^0$ und -190^0 als Funktion der Temperatur dar. Die gefundene Abweichung von ungefähr 2 Proz. bei der Temperatur der flüssigen Luft ist mit hoher Wahrscheinlicheit als der Beginn einer Abweichung von jenem Gesetz im Sinne größerer Reibung bei tiefer Temperatur anzusehen.

Zum Schlusse sei es mir auch hier gestattet, Hrn. Geheimrat Röntgen für die Anregung zu der vorstehenden Untersuchung, die im physikalischen Institute der Universität München ausgeführt wurde, sowie für das Interesse und die Unterstützung bei Ausführung derselben verbindlichsten Dank zu sagen.

München-Cambridge, 3. November 1903.

(Eingegangen 29. Januar 1904.)

5. *Zur Lehre von den sogenannten Unterbrechungstönen;*

von Karl L. Schaefer und Otto Abraham.

(Aus dem Psychologischen Institut der Universität Berlin.)

Im Jahre 1876 hat R. Koenig in seiner Abhandlung „Über den Zusammenklang zweier Töne“[1]) auf Grund verschiedener Versuche die Behauptung aufgestellt, daß periodische „Intermittenzen eines Tones bei genügender Frequenz und Stärke ganz ebenso wie primäre Impulse in einen Ton übergingen“; es wären dazu nicht einmal vollständige Pausen nötig, vielmehr genüge schon ein gleichförmiges Auf- und Abschwanken der Intensität des primären Tones, um die sekundäre Wahrnehmung eines „Intermittenztones“ hervorzurufen. Seitdem gilt es für manche Physiologen und Psychophysiker als ausgemacht, daß dem Ohre die Eigentümlichkeit zukomme, durch eine periodische Folge von Tonstößen in derselben Weise wie von ebenso vielen Sinusschwingungen erregt zu werden.

Verhielte es sich wirklich so, dann würde hieraus der Helmholtzschen Theorie des Hörens, die im übrigen mit den meisten Tatsachen der physiologischen und selbst der pathologischen Akustik bestens in Einklang steht, eine ganz erhebliche, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeit erwachsen, da ihr zufolge das Ohr nur solche Töne wahrnimmt, welche als physikalische Komponenten in der die Basilarmembran treffenden Klangwelle enthalten sind. In der Tat ist denn auch von mehreren Forschern mit besonderer Berücksichtigung der „Unterbrechungstöne“ und der eben erwähnten Auffassung ihres Ursprunges versucht worden, die Helmholtzsche Resonanzhypothese zu modifizieren oder durch eine neue Theorie zu ersetzen. Auffallenderweise hat aber keiner dieser Autoren zuvor die Fragen ernstlich geprüft, ob wirklich immer, sobald ein Ton durch Pausen, die in gleichen Zeitabständen aufeinander folgen, unterbrochen wird, oder seine Intensität periodische Schwankungen erleidet, auch ein Ton auftritt, dessen

1) R. Koenig, Pogg. Ann. 157. p. 177 ff. 1876.

Schwingungszahl gleich der Anzahl der Unterbrechungen ist; und zweitens, ob in jedem Falle, wo ein solcher Ton gehört wird, eine logische Notwendigkeit vorliegt, ihn für einen subjektiven Ton von spezifischer Natur zu erklären.

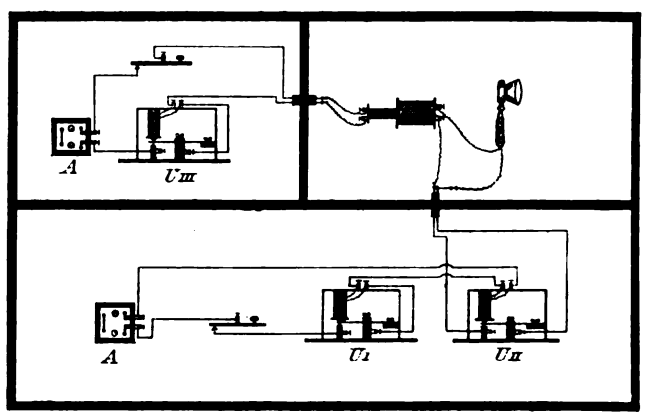
Entscheidende Untersuchungen hierüber anzustellen, war der Zweck unserer früher veröffentlichten „Studien über Unterbrechungstöne“.[1]) Dieselben ergaben, daß die sogenannten Unterbrechungstöne in einigen Fällen durch Resonatoren verstärkt werden, also objektive, auf physikalischen Ursachen beruhende Töne sind, in anderen als gewöhnliche Differenztöne aufgefaßt werden müssen. Wir haben dabei alle bisher bekannten Methoden zur Erzeugung von Tonunterbrechungen, dieselben teilweise durch gewisse Modifikationen ergänzend, durchgeprüft, bis auf das neuerdings von H. Zwaardemaker[2]) benutzte Verfahren.

Dieser Autor leitete den Ton einer Stimmgabel oder einer metallenen Zunge aus einem Zimmer durch ein Loch in der Wand hindurch in ein daneben liegendes, in welchem unmittelbar hinter der Maueröffnung ein Blakesches Mikrophon aufgestellt war. In der Leitung desselben befand sich außer einem oder zwei Leclanché-Elementen die primäre Spirale einer kleinen Induktionsspule, deren sekundäre nach einem Telephon abgeleitet war. Bei dieser Einrichtung vernahm man natürlich den für das unbewaffnete Ohr sehr schwach aus dem Nebenraume herüberdringenden Ton im Telephon ganz deutlich. In die Kette der sekundären Spirale und des Telephons konnte nun mit Hilfe einer Wippe ein übrigens vollständig isolierter, von einer elektrisch getriebenen Stimmgabel 64 mal pro Sekunde geöffneter und geschlossener Kontakt aufgenommen werden. Geschah dies, während die Schallquelle tönte und also die Mikrophonplatte in Bewegung war, so hörte man „ungemein schön einen kräftigen Intermittenzton“ von 64 Schwingungen, entsprechend der Zahl der Unterbrechungen. Die Primärtöne wurden meist aus den mittleren Oktaven genommen; die Frequenz der Intermittenzen war immer die gleiche.

1) K. L. Schaefer u. O. Abraham, Pflügers Archiv f. d. gesamte Physiol. 83. p. 207; 85. p. 536; 88. p. 475. 1901.

2) H. Zwaardemaker, Arch. f. Anat. u. Physiol., Physiol. Abtlg. Supplementband p. 60 ff. 1900.

Zwaardemaker ist nicht zu voller Klarheit darüber gelangt, ob sein Intermittenzton physikalisch oder physiologisch bedingt war. Mit Rücksicht auf die große Wichtigkeit dieses Punktes für die Theorie des Hörens und auf die nahen Beziehungen der Zwaardemakerschen Versuche zu unseren oben erwähnten früheren Untersuchungen schien es wünschenswert, die Beobachtungen in größerem Umfange zu wiederholen und dabei vor allem die Zahl der Unterbrechungen pro Sekunde nicht nur größer zu nehmen, sondern auch möglichst zu variieren. Der Erfüllung der letzteren Bedingung ist es wohl in erster Linie zuzuschreiben, daß wir wesentlich andere Resultate bekommen haben als Zwaardemaker.



Das von diesem angegebene Instrumentarium im übrigen zunächst beibehaltend, benutzten wir für die Öffnungen und Schließungen der Telephonkette zwei Exemplare des Bernsteinschen akustischen Stromunterbrechers. Dieser Apparat unterscheidet sich von einer elektrisch getriebenen Stimmgabel im Prinzip nur insofern, als der schwingende Körper keine Gabel, sondern eine dünne Stahllamelle ist, die sich verlängern und verkürzen läßt, wodurch eine relativ bequeme Veränderung der Tonhöhe innerhalb gewisser Grenzen ermöglicht wird. Der eine Unterbrecher und die Magnetspule des zweiten wurden mit einem Akkumulator zu einer Stromkette vereinigt und die beiden Federn auf genau gleiche Tonhöhe abgestimmt. Wurde der Strom geschlossen, so geriet die Feder des zweiten Unter-

brechers in Mitschwingungen und besorgte damit, sobald sie nebst ihrem Quecksilbernapf in die Kette des Telephons aufgenommen war, die Unterbrechungen des Telephonstromes. (Vgl. die Verbindung des Unterbrechers II mit dem Unterbrecher I und mit dem Telephon in der Abbildung auf voriger Seite, in der übrigens das Mikrophon mit Rücksicht auf die Veranschaulichung später zu erwähnender Versuche durch einen dritten Bernsteinschen Unterbrecher als Erreger des Haupttones ersetzt ist.)

Trotz vieler Mühe ist es uns nicht gelungen, mit dieser Anordnung viel mehr als ca. 400 Unterbrechungen pro Sekunde zu erzielen, und es mußten für die Versuche mit frequenteren Intermissionen andere Hilfsmittel ergriffen werden. Wir bedienten uns in diesen Fällen eines durch einen Elektromotor in Rotation versetzten Rades aus Messing von etwa 20 cm Durchmesser. Dasselbe wurde so in die Kette des Telephons eingeschaltet, daß der eine Pol mit der Achse des Rades verbunden wurde, der andere mit einer Bürste, die auf dem Radkranze schleifte. In letzteren waren in gleichen Abständen gleich große Lücken eingeschnitten, die mit Hartgummiplatten ausgefüllt waren. Solange die Bürste über eine solche Platte hinwegging, war die Kette geöffnet. In dem Radkranze waren ferner nach Art der Seebeckschen Sirene Löcher ausgeschlagen, deren Kreis während der Rotation angeblasen werden konnte. Aus der Höhe des dabei entstehenden Tones ließ sich die Umdrehungsgeschwindigkeit und damit die jeweilige Anzahl der Unterbrechungen pro Sekunde berechnen. Zu einer Serie von Beobachtungen verwendeten wir außer dem Rade eine nach demselben Prinzip funktionierende Walze, die gleichsam aus mehreren konaxial aneinander gesetzten Rädern von der eben beschriebenen Form, aber mit ungleich vielen Unterbrechungsstellen bestand und daher eine Veränderung der Unterbrechungszahl durch seitliches Verschieben der Bürste ohne Wechsel der Umdrehungsgeschwindigkeit gestattete. Die letztere wurde hierbei aus der Höhe des Tones ermittelt, den ein auf der Achse der Walze befestigtes Zahnrad hören ließ, wenn während des Umlaufens ein Kartenblatt daran schleifte. Mittels des Unterbrechungsrades bez. der Walze konnten bis zu 1800 Unterbrechungen in der Sekunde erzielt werden.

War die Unterbrechungsvorrichtung im Gange, während das Mikrophon unerregt blieb, so hörte man, am deutlichsten bei Benutzung der Bernsteinschen Federn, einen Ton oder ein Geräusch im Telephon, dessen Höhe der Zahl der Unterbrechungen entsprach, dessen Intensität jedoch so gering war, daß seine Wahrnehmung für die Versuche praktisch nicht in Betracht kam, da sie durch die vom Mikrophon verursachten Tonempfindungen immer vollständig unterdrückt wurde.

Mikrophon, Telephon und Unterbrecher konnten in der Weise, wie die Abbildung zeigt, in je einem Raume gesondert aufgestellt werden. Jedoch ergab sich im Laufe der Untersuchung, daß es zweckmäßiger und ohne Schaden für die Reinheit der Versuche möglich war, Mikrophon und Telephon in demselben Zimmer zu lassen. Hierbei war, da der eine von uns immer das Mikrophon bediente, während der andere am Telephon hörte, eine gegenseitige Verständigung erleichtert und der Beobachter, der das eine Ohr mit dem Telephon deckte, das zweite aber mit dem Finger verschloß, vernahm kaum etwas von dem Ton der Schallquelle durch die Luft.

Als Schallquelle vor dem Mikrophon, also zur Hervorbringung des Haupt- oder Primärtones, dessen Schwingungszahl im folgenden immer mit p bezeichnet werden soll, während u die Zahl der Unterbrechungen pro Sekunde bedeuten möge, wählten wir teils Stimmgabeln teils Lippenpfeifen mit verschieblichem Stempel. Auf die Benutzung von Zungentönen verzichteten wir mit Rücksicht auf die zu erwartende Störung durch die vielen Obertöne ganz. Die reichen Tonmittel des Berliner psychologischen Institutes erlaubten uns ohnehin die beliebige Wahl von Primärtönen. Wir haben dazu Töne bis zu 4800 Schwingungen verwendet.

Aus mehr als 200 Einzelversuchen, bei denen p und u sowohl an sich als auch in ihrem Verhältnis zueinander in weiten Grenzen variiert wurden, hat sich nun mit vollster Bestimmtheit ergeben, daß der Primärton, welcher ohne Unterbrechungen der Telephonkette deutlich im Telephon zu vernehmen ist, geschwächt wird oder total verschwindet, sobald und solange die Unterbrechungsvorrichtung funktioniert; *daß an seine Stelle ein mehr oder weniger komplizierter Klang tritt und daß ein „Unterbrechungston" u in diesem Klange, von be-*

sonderen, gleich näher zu bezeichnenden Umständen abgesehen, nicht hörbar ist, was als den Angaben Zwaardemakers widersprechend besonders hervorgehoben zu werden verdient.

Wir haben es uns in jedem Falle angelegen sein lassen, den Telephonklang möglichst vollständig mit dem Ohre zu analysieren. Die Bestimmung der herausgehörten Teiltöne durch Vergleichung mit Tönen von genau bekannter Schwingungszahl wurde uns hierbei wesentlich durch den Umstand erleichtert, daß der eine von uns (Abraham) ein im Laufe jahrelanger akustischer Untersuchungen als durchaus sicher erprobtes absolutes Tonbewußtsein besitzt, das ihn befähigt, innerhalb des musikalischen Bereiches der Tonskala von jedem Tone anzugeben, ob derselbe ein *c*, *a*, *fis* oder was sonst immer für eine Note ist und welcher Oktave er angehört. Im übrigen war die Analyse in vielen Fällen ziemlich schwierig und zwar aus verschiedenen Gründen. So war, wenn Gabeln für die Primärtöne verwendet wurden, das rasche Verklingen derselben, und wenn wir Pfeifen nahmen, deren oft relativ zu geringe Intensität hinderlich. Dazu kam, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit des Unterbrechungsrades nicht absolut konstant blieb, so daß bei seiner Benutzung *u* fortwährend kleinen Schwankungen unterlag und immer von Zeit zu Zeit revidiert werden mußte. Selbst die Federn der Bernsteinschen Unterbrecher ändern ein wenig ihre Tonhöhe, wenn man während des Betriebes den Abstand des Magneten oder das Niveau des Quecksilberspiegels verändert. Dennoch lassen sich aus unseren Protokollen, deren vollständige Wiedergabe wegen ihrer Zahl und wegen des Raummangels an dieser Stelle freilich nicht möglich ist, die folgenden bemerkenswerten empirischen Regeln abstrahieren. (Die Richtigkeit derselben wurde durch spätere zahlreiche Kontrollversuche, bei denen die in der Abbildung wiedergegebene Versuchsanordnung zur Anwendung kam, also insbesondere das Mikrophon durch einen dritten Bernsteinschen Apparat ersetzt war und die ganz konstant gehaltenen Tonhöhen der Federn mit Hilfstönen exakt bestimmt wurden, vollauf bestätigt.)

Die in den Telephonklängen am meisten hervortretenden, sozusagen charakteristischen Töne — wir wollen sie kurz als die sekundären Töne bezeichnen — sind von der Art, daß sie

hinsichtlich der Beziehung ihrer Schwingungszahl zu den Größen p und u durchaus an Differenztöne erinnern.

Liegt p zwischen u und $2u$, so hört man vorwiegend $p-u$, häufig daneben auch $2u-p$. In letzterem Falle schweben $p-u$ und $2u-p$ miteinander, wenn ihre Tonhöhen hinreichend wenig differieren. Die Dinge verhalten sich also hier so, als ließen zwei gewöhnliche Töne p und u ihren ersten bez. ersten und zweiten Differenzton hören.

Noch auffallender erscheint es, daß analoge Tonbildungen auch dann auftreten, wenn $u > p$ ist und demnach mehr Stromunterbrechungen pro Sekunde als Schwingungen des Primärtones stattfinden. Fällt nämlich u zwischen p und $2p$, so resultieren Sekundärtöne von der Form $u-p$.

Wählten wir größere Distanzen zwischen p und u, so erhielten wir Töne wie $p-2u$, $p-3u$, $p-5u$, $p-12u$; $\frac{1}{2}u-p$, $3u-p$, $4u-p$, $7u-p$, $13u-p$, als wäre wiederum u nicht die bloße Anzahl der Unterbrechungen sondern die Schwingungszahl eines Tones, dessen Obertöne[1]) mit p Differenztöne bildeten. Dabei war die Differenz fast immer kleiner als der Subtrahend und sind den sogenannten zwischenliegenden Differenztönen, die bekanntlich, wenn überhaupt, nur äußerst schwach gehört werden, entsprechende sekundäre Töne nur vereinzelt beobachtet worden.

Ein Ton von der Schwingungszahl u wurde im Telephon regelmäßig, aber auch ausschließlich unter der Bedingung vernommen, daß p gleich u oder ein ganzes Vielfaches von u war. Er war dann sehr klar und deutlich, ohne von hörbaren Nebentönen begleitet zu sein. Wich p um eine nicht zu große Anzahl Schwingungen von u oder dessen entsprechendem Vielfachen ab, so hörte man u schweben und zwar um so langsamer, je näher p dem Unisono oder dem genauen Multiplum von u kam, wie sich bei jenen Versuchen zeigte, bei denen p durch Pfeifen mit verschieblichem Stempel erzeugt wurde. Nahmen wir beispielsweise p anfangs zu tief, so daß u rollend gehört wurde, und schoben nun den Stempel kontinuierlich einwärts, so verringerte sich zunächst die Zahl der Stöße mehr und mehr,

1) In dem Falle $\frac{1}{2}u-p$ und ähnlichen würde es sich um einen Unterton handeln.

dann erschien u einen Moment rein und hierauf traten aufs neue rascher und rascher werdende Stöße auf.

Eine Übersicht über die Werte von p und u, bei denen der mehr oder weniger schnell schwebende Ton u beobachtet worden ist, gibt die nachstehende

Tabelle I.

u	p	Gehört	u	p	Gehört
150	ca. 150	u schwebend	155	$ges^2 = $ ca. 5 u	u schwebend
307	> 307	u fast rein	307	$ges^3 = $ ca. 5 u	u „
ca. 325	ca. 330	u schwebend	ca. 325	$gis^3 = $ ca. 5 u	u rasch schwebend
290	$d^1 = $ ca. u	u „			
ca. 550	$cis^2 = $ ca. u	u „	307	$ais^3 = $ ca. 6 u	u schwebend
290	$d^2 = $ ca. 2 u	u „	ca. 325	$h^3 = $ ca. 6 u	u „
307	616 = ca. 2 u	u fast rein	307	$c^4 = $ ca. 7 u	u „
ca. 325	$e^2 = $ ca. 2 u	u schwebend	ca. 200	ca. 8 u	u „
ca. 420	ca. 2 u	n „	307	$dis^4 = $ ca. 8 u	u „
ca. 550	$cis^3 = $ ca. 2 u	u „	ca. 200	ca. 12 u	u „
290	$a^2 = $ ca. 3 u	u „	ca. 200	ca. 20 u	u mit hellem Rollen
307	$ais^3 = $ ca. 3 u	u „			
ca. 200	ca. 4 u	u „	ca. 200	ca. 24 u	u rollend
307	$dis^3 = $ ca. 4 u	u „			

War u nahezu ein Vielfaches von p, so wurde p schwebend gehört. Über Fälle dieser Art liegen folgende Versuche vor.

Tabelle II.

u	p	Gehört	u	p	Gehört
ca. 352	$f^0 = $ ca. $\frac{1}{2}$ u	p schwebend	ca. 1350	$a^1 = $ ca. $\frac{1}{3}$ u	p schwebend
„ 550	$cis^1 = $ ca. $\frac{1}{2}$ u	p „	„ 325	$E = $ ca. $\frac{1}{4}$ u	p „
„ 1320	$e^2 = $ ca. $\frac{1}{2}$ u	p „	„ 352	$F = $ ca. $\frac{1}{4}$ u	p „
„ 352	$B = $ ca. $\frac{1}{3}$ u	p „	„ 550	$cis^0 = $ ca. $\frac{1}{4}$ u	p „
„ 550	$fis^0 = $ ca. $\frac{1}{3}$ u	p „	„ 1350	$e^1 = $ ca. $\frac{1}{4}$ u	p „

Im Anschlusse an die in vorstehenden Tabellen mitgeteilten Beobachtungen war noch die Frage zu untersuchen, nach welcher Regel sich die Frequenz der Schwebungen richtet. Da hierbei p und u einige Zeit ganz konstant gehalten werden mußten, so war es notwendig, als Unterbrechungsvorrichtung lediglich die in der Abbildung dargestellte Kuppelung der

Unterbrecher I und II zu benutzen. Auch erwies es sich als zweckmäßig, das Mikrophon aus dem primären Stromkreise zu entfernen und durch einen dritten Bernsteinschen Apparat zu ersetzen. Dieser war ebenso wie die Unterbrechungsvorrichtung in einem Zimmer für sich aufgestellt, während das Telephon sich in einem dritten Raume, in dem die Töne der Federn nicht hörbar waren, befand (vgl. die Abbildung).

Beim ersten Versuche stimmten wir die Federn der Unterbrecher I und II genau unison mit einer Gabel von 200 Schwingungen, so daß $u = 200$ war. Die Feder des Unterbrechers III, also p, wurde ebenso in Übereinstimmung mit einer zweiten Gabel gebracht, deren Tonhöhe von der der anderen nur um wenige Schwingungen abwich. Dann wurde am Telephon das schwebende u beobachtet und dabei erwies sich der Rhythmus der Stöße als derselbe wie derjenige, in welchem die beiden Gabeln zusammen schwebten; womit bewiesen ist, daß die Zahl der Stöße des Telephontones u gleich der Differenz der Größen p und u war.

Nach dem nämlichen Prinzip verfuhren wir in einem zweiten Falle, nur mit dem Unterschiede, daß p als verstimmte Oktave von u genommen wurde. Auch hier ließ das Telephon ebensoviele Stöße hören, wie zwei Gabeln von den Schwingungszahlen p und u.

Das gleiche Ergebnis hatte schließlich noch eine dritte Probe, wobei u die verstimmte Oktave von p war.

Die Versuche waren sehr zeitraubend und mühsam, weil, wie bereits erwähnt, auch die Bernsteinschen Federn leicht Schwankungen der Tonhöhe, wenn auch nur geringe, erleiden. Schon die fortschreitende Verdunstung des auf die Quecksilberkuppe zu gießenden Alkohols genügte, von sonstigen zufälligen kleinen Störungen abgesehen, um die eine oder andere Feder so weit gegen die zugehörige Kontrollgabel zu verstimmen, daß die Telephonstöße in ihrer Frequenz merklich von den Schwebungen des Gabelzusammenklanges differierten, was eine häufige Wiederholung des Einstimmens nötig machte. Wir haben deswegen einige Kontrollversuche in der Weise angestellt, daß wir alle drei Bernsteinschen Unterbrecher in dasselbe Zimmer brachten, so daß die Federtöne p und u direkt miteinander schwebend gehört wurden. Ihr Zusammenklang wurde

dann durch eine Röhre in der Wand ins Telephonzimmer geleitet und dort der Rhythmus der Schwebungen mit den Stößen im Telephon unmittelbar verglichen. Auch dieses Verfahren ergab den eben erwähnten gleiche Resultate.

Da die Federn nur Töne bis zu 400 und einigen Schwingungen lieferten, so haben wir die Beobachtungen auf die mittlere Tonregion beschränkt. Es liegt jedoch auch kein Grund vor daran zu zweifeln, daß bei anderen Werten von p und u die Zahl der Stöße des Telephontones u ebenfalls dieselbe ist wie die der Schwebungen zweier Stimmgabeln von den Tonhöhen p und u.

Wenn dies aber richtig ist, so verhalten sich sämtliche sekundären Tonerscheinungen der Tab. I u. II, lediglich vom Standpunkte der arithmetischen Berechnung aus betrachtet, so, als wären sie durch den Zusammenklang zweier Töne p und u veranlaßt, als wäre also u ein wirklicher Ton. Denn alle einzelnen Fälle der Tabellen lassen sich dann auf das gemeinsame Grundschema zurückführen, daß ein von harmonischen Obertönen begleiteter Ton t, der zugleich mit einem Ton $n.t \pm x$ erklingt, mit dem Differenztone $(n.t \pm x) - (n-1)t = t \pm x$ schwebt, wobei noch t und $t \pm x$ durch Differenztöne von gleicher Höhe verstärkt werden, sobald $n > 2$ ist.

Fassen wir jetzt die bisher gewonnenen Ergebnisse zusammen und nehmen dazu noch die Resultate der

Tabelle III

u	p	Gehört
405	$c^1 = $ ca. $\frac{3}{4}u$	$c^0 = u - p$ schwebend, und zwar der Rechnung nach mit $2p - u$,
ca. 825	$h^1 = $ ca. $1\frac{1}{2}u$	e^0
420	$620 = $ ca. $1\frac{1}{2}u$	as^0 $= \frac{1}{2}u = p - u$ schwebend, und zwar der Rechnung nach mit $2u - p$,
ca. 290	$a^1 = $ ca. $1\frac{1}{2}u$	d^0
ca. 200	$700 = $ ca. $3\frac{1}{2}u$	$G = p - 3u$ schwebend, und zwar der Rechnung nach mit $4u - p$,

so zeigt sich allgemein, *daß die sekundären Töne hinsichtlich der algebraischen Verhältnisse angesehen werden können als Kombinationsprodukte zweier Töne p und u nebst harmonischen Nebentönen.*

Wie ist dies nun zu verstehen, da doch faktisch nur ein Primärton, nämlich p, mit mehr oder weniger zahlreichen Obertönen vorhanden ist? (Der schwache Ton von der Schwingungszahl u, der im Telephon gehört wird, wenn die Unterbrechungsvorrichtung allein funktioniert, kommt hierbei kaum in Frage, weil seine Intensität allzu geringfügig ist. Bei den Versuchen mit dem Schleifkontakt ist übrigens wiederholt in den Protokollen notiert, daß er überhaupt nicht existierte.) Ein Anhänger der oben gekennzeichneten Unterbrechungstontheorie würde allerdings wohl eine genügende Erklärung in der Hypothese finden, daß eben die Unterbrechungen als ein Ton empfunden würden und dieser entotische Ton mit dem von außen zum Ohre dringenden Tone p Kombinationserscheinungen erzeuge.

Dieser Auffassung, derzufolge unsere sekundären Telephontöne subjektive Töne sein müßten, ist indessen schon der Umstand nicht günstig, daß in der Mehrzahl der Fälle p fast oder ganz im Telephonklange verschwindet und u nicht hörbar ist, während doch sonst die Primärtöne neben den Kombinationstönen vorhanden und meist sogar lauter zu sein pflegen. Sie wird aber direkt widerlegt durch den mit Hilfe von Resonatoren ebenso einfach wie überzeugend zu führenden Beweis, *daß die in Rede stehenden Töne physikalisch bedingt sind.*

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur einen auf den gerade vorliegenden sekundären Ton abgestimmten Resonator ins Ohr zu stecken. Da aber hierbei das beständige Sausen in demselben und das Ansprechen auf zufällige Geräusche stört, so ist es meist bequemer, die für die Aufnahme des Schalles bestimmte Öffnung des Resonators dicht an das Telephon zu halten und die andere sonst zur Einführung ins Ohr dienende mit kurzen Pausen durch den Finger zu verschließen. Der sekundäre Ton wird dann intermittierend durch die Resonanz verstärkt.[1]) Dieses Verfahren steht zwar an Empfindlichkeit der Methode, den Resonator direkt ans Ohr zu bringen, nach, hat aber noch den Vorteil, daß die Erscheinung mehreren Personen gleichzeitig demonstriert werden kann.

1) Nimmt man eine von dem sekundären Tone um einige Schwingungen verschiedene Stimmgabel zur Hilfe, so kann man den Versuch auch so einrichten, daß bei Benutzung des passenden Resonators und nur unter dieser Bedingung Schwebungen gehört werden.

Allerdings läßt es sich nicht auf die ursprüngliche Zwaardemakersche Versuchsanordnung anwenden, da hierbei die Telephontöne viel zu schwach sind, um eine vollkommen deutliche Resonanz hervorzurufen. Wir haben deswegen auch für alle Beobachtungen mit Resonatoren die oben in der Figur dargestellte Modifikation benutzt.

In einem Falle, wo $p = 400$ und $u = 100$ war, wurde mit bloßem Ohre nur u und zwar als etwas scharfer Klang gehört. Mit den Resonatoren ließ sich aber das Vorhandensein der Töne 200 und 300 nachweisen, die wir namentlich mit Rücksicht auf die Intensitätsverhältnisse als Obertöne des Tones 100 auffassen möchten. Die Kombination $p = 300$ und $u = 100$ ergab ebenfalls für das Ohr nur den Ton u, während im Resonator auch 200 hörbar wurde. Man darf wohl annehmen, daß solche zwischen p und u liegende Vielfache von u auch bei der Benutzung des Mikrophons auftreten, obwohl sie hierbei ihrer Schwäche wegen der gesonderten Wahrnehmung entzogen bleiben, und unter dieser Annahme würden dann die zur Erklärung der vorhin erwähnten Schwebungen zwischen p und u, die vernommen werden, wenn p nahezu ein Multiplum von u ist, rechnerisch vorausgesetzten Obertöne tatsächlich vorhanden sein.

Die übrigen von uns angestellten Versuche mit Resonatoren, bei denen stets p und u nach Gabeln von genau bekannter Schwingungszahl abgestimmt wurden, fassen wir zusammen in die folgende

Tabelle IV.

p	u	Gehört	Bemerkungen
ca. 300	150	$d^0 = u$, langsam schwebend	d^0 im Resonator kräftig verstärkt
340	155	$fis^0 = p - u$; Rollen: wohl $p - 2u = 30$	fis^0 im Resonator verstärkt
400	175	hohes $a^0 = p - u$	a^0 „ „ „
400	218	$fis^0 = p - u$; tiefer Ton: wohl $2u - p$	fis^0 „ „ „
443	200	$h^0 = p - u$	h^0 im Resonator bedeutend verstärkt
443	300	d^0 (tief) $= p - u$; Schwebungen: wohl von $p - u$ und $2u - p$	d^0 im Resonator sehr deutlich verstärkt

Aus dieser Tabelle geht hervor, und einige andere Nebenversuche bestätigen es, daß bei der Verwendung eines Bernsteinschen Unterbrechers zur Erregung des Primärtones auch Töne von der Form $p - u$ gehört werden, die zwischen p und u liegen, was bei der Zwaardemakerschen Anordnung nur sehr selten vorkommt. Die Ursache dieses Unterschiedes dürfte in der zwar nicht prinzipiellen, aber immerhin vorhandenen und in den Intensitätsverhältnissen überhaupt zum Ausdruck kommenden Verschiedenheit beider Methoden zu suchen sein.

Um den physikalischen Ursprung der sekundären Tonerscheinungen zu beweisen, kann man sich an Stelle der Resonatoren auch einer manometrischen Flamme bedienen. Zu diesem Zwecke ist nur nötig, einen gewölbten Deckel aus Metall, in den zwei angelötete Röhrchen einmünden, luftdicht auf dem Schallloch des Telephons zu befestigen und in die so gebildete Kammer durch das eine Röhrchen Leuchtgas einzuleiten, das dann an der feinen Öffnung des zweiten entzündet wird. Stimmt man nun die Feder des Unterbrechers III (vgl. die Figur) mit den beiden anderen fast unison, so hört man im Telephon die langsamen Stöße und sieht zugleich, wie die Flamme im Tempo derselben zuckt, wobei ihre größte Länge immer mit dem Maximum der Schwebung zusammenfällt. Der nämliche Vorgang findet statt, wenn p annähernd gleich $2u$ ist. Nimmt man ein anderes Verhältnis von p und u, etwa $p = 400$, $u = 220$, Sekundärton $p - u = 180$, so muß man die Flamme im rotierenden Spiegel betrachten. Die Zacken des Flammenbildes erscheinen bei dem gewählten Beispiel und in ähnlichen Fällen relativ breit und an ihrem oberen Rande gezähnt, was auf die Zusammensetzung des Telephonklanges aus diversen Teiltönen deutet. Werden die Unterbrechungen der Telephonkette sistiert, so hört man im Telephon sofort den Hauptton allein und die Flammenzacken werden nicht nur der größeren Schwingungszahl entsprechend schmäler sondern auch ungezähnt. Bei abwechselndem Eintreten- und Aufhörenlassen der Intermissionen kann man leicht die charakteristischen Unterschiede zwischen Hauptton und Sekundärklang am Flammenbilde beobachten. Noch vorteilhafter ist es, ein zweites Telephon mit Gaskammer, das als Zweigleitung mit dem Unterbrecher III verbunden ist, oberhalb des ersten

vor dem Spiegel zu befestigen und so die Flammenzacken des Primärtones und die des Sekundärklanges gleichzeitig nebeneinander sichtbar zu machen.

Wie aus dem Mitgeteilten zweifellos hervorgeht, nimmt die Telephonmembran, die beim Fehlen der Unterbrechungen in der Periode des Primärtones oszilliert, unter dem Einflusse der Intermittenzen eine andere Schwingungsform an und produziert eine Klangwelle, welche den oder die charakteristischen Sekundärtöne als pendelförmige Komponenten enthält. Die Fouriersche Analyse der Klangwelle würde diese Komponenten ebenso ergeben, wie nach der Helmholtzschen Resonanzhypothese die Klangzerlegung im Ohre es tut. Unsere Untersuchung zeigt, daß der Zwaardemakersche Unterbrechungsmodus keinerlei Anhaltspunkte für die Existenz von Tönen ergibt, die im *inneren Ohre* infolge der Auflösung eines anderen Tones in eine Reihe von Tonstößen zustande kommen und deswegen den Namen „Unterbrechungstöne" verdienen. Wir gelangen also hier zu demselben negativen Resultate wie in unseren früheren „Studien über Unterbrechungstöne". Von allen Methoden, die bisher zum Zwecke der Erzeugung *subjektiver* „Unterbrechungstöne" angegeben worden sind, haben wir die Überzeugung gewonnen, daß es nicht berechtigt ist, ihnen diesen Effekt zuzuschreiben, und halten es aus diesem Grunde für empfehlenswert, den Ausdruck „Unterbrechungstöne" aus der Nomenklatur der Physiologie, in welcher er so viel Verwirrung angerichtet hat, überhaupt auszumerzen. Man mag ihn beibehalten für solche Fälle, in denen — wie beim Anblasen von Löchersirenen mit teilweise verstopften Öffnungen — infolge der Durchsetzung eines Tonwellenzuges mit Pausen auf physikalischem Wege Töne hervorgebracht werden, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Unterbrechungen in der Sekunde ist. Dann aber bezeichnet das Wort „Unterbrechungstöne" eben einen rein physikalischen Begriff.

(Eingegangen 6. Januar 1904.)

6. *Über kalorimetrische Messungen an flüssigem Sauerstoff und flüssigem Stickstoff; von H. Alt.*

(Auszug aus der Münchener Inaugural-Dissertation.)

Vornehmlich zum Zwecke kalorimetrischer Messungen bei tiefen Temperaturen, deren Durchführung allerdings im weiteren Verlaufe der vorliegenden Untersuchung zurückgestellt werden mußte, unternahm der Verfasser eine Bestimmung der Verdampfungswärme der flüssigen Luft, und als sich eine beträchtliche Änderung dieser Größe mit der Zusammensetzung des Gemisches zeigte, derjenigen des flüssigen Sauerstoffs und Stickstoffs, sowie der Änderung dieser Größe mit der Temperatur. Die Bestimmung dieser Änderung wurde späterhin als der wesentliche Zweck der Untersuchung betrachtet.

U. Behn[1]) hat eine Bestimmung der latenten Verdampfungswärme der flüssigen Luft in der Art ausgeführt, daß er ein Metallstück (Aluminium von bekannter Temperatur) in flüssige Luft warf und das Volumen des verdampften Gases bestimmte. Er hat bei seinen Versuchen mit einem offenbar sehr sauerstoffreichen Gemische[2]) sehr gut übereinstimmende Resultate, 50,7 cal./g und 50,8 cal./g erhalten, die auch ihrer absoluten Größe nach nach meinen Untersuchungen richtig sind. Das Verdampfen der Flüssigkeit durch ein eingeworfenes Metallstück setzt die genaue Kenntnis der spezifischen Wärme derselben in dem Intervall von 0° bis −200° voraus. Diese Größe war von U. Behn[3]) schon vorher nach der Mischungsmethode bestimmt worden.

Die Messung der verdampften Flüssigkeitsmenge durch Auffangen des Dampfes — ich möchte diese Methode als „Auffangmethode“ bezeichnen — begegnet mannigfachen Schwierigkeiten. Die verdampfte Masse berechnet sich hier aus vier Größen: dem Volumen des Gases, dem Druck, der Temperatur

1) U. Behn, Ann. d. Phys. 1. p. 270—274. 1900.

2) U. Behn nimmt für dasselbe einen Gehalt von 7 Proz. Stickstoff an (l. c., p. 271).

3) U. Behn, Wied. Ann. 66. p. 237—244. 1898.

und der Dichte, die sich mit der Zusammensetzung ändert. Ersteres läßt sich bei großem Volumen sehr genau bestimmen. Auch die Bestimmung des Druckes kann hinreichend genau ausgeführt werden. Die genaue Messung der Mitteltemperatur einer größeren Gasmasse, und eine solche muß verwendet werden, dürfte jedoch ohne Anbringung einer Mischungsvorrichtung schwierig sein und eine Bestimmung der Zusammensetzung des Gases erfordert eine jedesmalige Analyse, die, wenn sie zuverlässig sein soll, bei der Schichtung, die durch fraktionierte Destillation eines Flüssigkeitsgemisches eintreten wird, ebenfalls die Anwendung einer Mischungsvorrichtung voraussetzt. Gerade Fehler in dieser Größe bedingen erhebliche Fehler des Resultates. Diese Überlegungen, die großen Schwankungen, die ich bei neun, nach einer solchen Methode mit flüssiger Luft angestellten Vorversuchen erhielt, sowie die Unmöglichkeit, die Methode in einfacher Weise für die Bestimmung der Verdampfungswärme bei tiefen Drucken brauchbar zu machen, veranlaßten mich, eine andere Methode auszuarbeiten, bei der ich die Menge der verdampften Substanz durch Wägung ermittelte, während gleichzeitig, um eine exakte Bestimmung der zugeführten Wärmemenge zu ermöglichen, die Flüssigkeit durch elektrische Heizung zum Verdampfen gebracht wurde. Die Versuchsanordnung, die sich nach vielen Vorversuchen als zweckmäßig erwies, war folgende (Fig. 1).

An der durch einen Glaskasten geschützten Wage *W* (Maximaltragfähigkeit 1 kg bei einer Empfindlichkeit von ca. 3 mg pro Skalenteil) war auf der einen Seite eine Wagschale angehängt, die unten eine an dünnem Stahldrahte befestigte Dämpfungsscheibe trug, die in ein Gefäß mit Vaselinöl eintauchte. Hierdurch war eine fast aperiodische Dämpfung der Wage erreicht. Am anderen Gehänge befand sich zunächst ein Messingrähmchen *M*, das einen horizontal gespannten Kokonfaden *F* trug. Auf diesen wurde das mit Okularskala versehene Ablesemikroskop *A* eingestellt. Dann folgte ein in der Länge mit einer Schraube verstellbares Gehänge *J* und an diesem das Verdampfungsgefäß *V*. Dies war ein zylindrisches versilbertes Dewarfläschchen von 27 ccm Inhalt. In dasselbe war ein Gummistopfen eingepasst, dessen Bohrung eine 45 cm lange doppelwandige evakuierte Röhre trug, an die oben mittels

Gummischlauches ein Dreiwegstück angeschlossen war, das seinerseits an dem Schraubengehänge hing. Im Inneren der Glasröhre führten drei Drähte zu der Heizspirale; diese war aus 0,1 mm starkem übersponnenem Manganindraht von 50 Ω Widerstand pro Meter gewickelt, sodann auf eine spiralig gewundene Kupferdrahtseele aufgeschoben, welche die Spirale am Boden des Gefäßes festhielt. Zwei der Zuleitungsdrähte führten den Strom zu, der dritte Draht war mit einem der beiden Zuleitungsdrähte direkt verbunden und diente zur Eli-

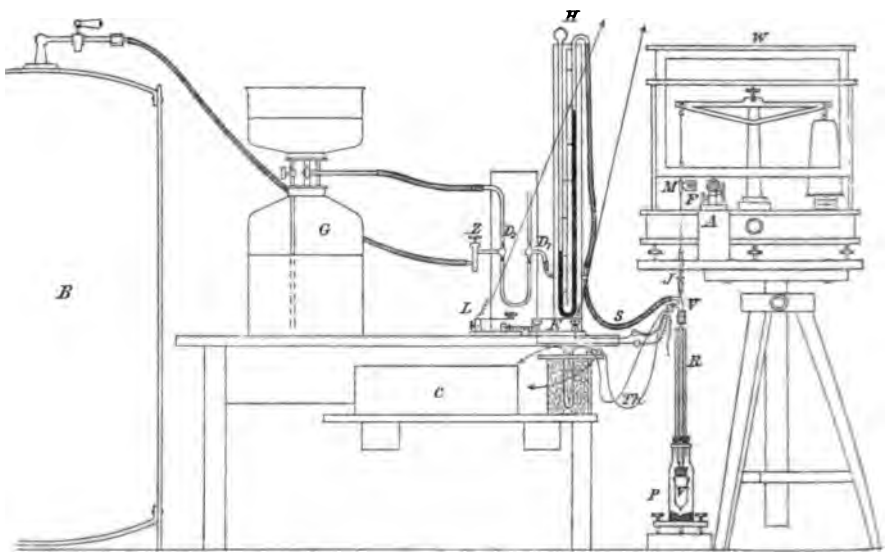


Fig. 1.

mination des Widerstandes der Zuleitungen. Außerdem enthielt die Glasröhre die beiden Drähte des Thermoelementes, das bis ins Innere der Heizspirale geführt war. Nach Entfernen der Kupferdrahtseele und Lösen des oberen Gummiverbindungsstückes konnte das ganze Drahtsystem entfernt und der Glasapparat zum Zwecke etwa nötiger Trocknung zerlegt werden. Das Verdampfungsgefäß mitsamt Röhre schwebte in dem weiten mit Phosphorpentoxyd gefüllten Pulverglas *P*, das sich oben in einer weiten Röhre *R* fortsetzte. Hierdurch war sowohl Gefäß als Dewarröhre von trockener Luft umgeben. Von den beiden offenen Enden des Dreiwegstückes vermittelte

das eine durch Kautschukschlauch und Quetschhahn die luftdichte Durchführung der Drähte ins Freie. Das andere Ende war durch einen Druckschlauch S mit der Absaugevorrichtung verbunden. Unmittelbar hinter dem Gummischlauch war ein offenes Quecksilbermanometer H seitlich angebracht. Die Hauptleitung führte durch ein System von Dreiweghähnen D_1 D_2 zu einem Reduzierventil Z und von da zu zwei zusammen ca. 740 Liter haltenden eisernen Rezipienten B. An diese waren entweder zwei gekuppelte Wasserstrahlpumpen oder bei Versuchen mit sehr tiefen Drucken eine von einem Elektromotor angetriebene Bianchiluftpumpe angeschlossen. Die Heizdrähte führten mittels Kupferdrahtspiralen zu den Klemmen eines Westonvoltmeters E und von da durch einen Stromschlüssel L zur Stromquelle. Die Drähte des Thermoelementes Th gingen zuerst zur zweiten Lötstelle in Eis und zu einer Kompensationsvorrichtung C. Dieselbe enthielt auch eine Wheatstonesche Brücke zur Messung des Widerstandes der Heizspirale. Durch die Dreiweghähne D_1 D_2 konnte das Innere des Verdampfungsgefäßes entweder mit der äußeren Luft kommunizieren oder an die Rezipienten B angeschlossen oder mit dem Gasometer G verbunden werden.

Zur Durchführung eines Versuches wurde zunächst das Dewarfläschchen mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt, verschlossen in das Trockengefäß eingesetzt und an die Wage gehängt. Nach Herstellung der Drahtverbindung und Anschluß des Saugschlauches wurde durch die Dreiweghähne Verbindung mit den Rezipienten, deren Inhalt schon vorher auf den gewünschten Druck gebracht war, hergestellt. Durch Regulierung des Reduzierventiles konnte allmählich abgesaugt werden. Wurde dabei in kurzen Intervallen Strom gegeben, so ging selbst bei sehr tiefen Drucken das Absaugen meist ruhig vor sich. Einige Male jedoch erfolgten durch Siedeverzüge heftige Explosionen, wobei aber das Gummiverbindungsstück zwischen Dewarrohr und Dreiwegstück als Sicherheitsventil wirkte, indem es von der Röhre abglitt. Allerdings konnte dann dieser Versuch nicht weitergeführt werden. War der nötige Druck erreicht, so wurde die Verdampfung vor dem Versuch bestimmt, indem durch das Ablesemikroskop der Durchgang des Kokonfadens durch eine Marke der Okularteilung beobachtet, und gleichzeitig nach dem $^1/_2$ Sek. schlagen-

den Marinechronometer die Zeit mitgezählt wurde, sodann wurde ein Gewicht (z. B. 200 mg) von der Wagschale abgehoben und der nächste Durchgang beobachtet. Dies geschah einige Male. Zwischen je zwei Durchgängen blieb genügend Zeit zur Ablesung des Manometers und Bestimmung der Temperatur durch Kompensation. Bei einem der Durchgänge wurde dann Strom gegeben. Während des Stromganges wurde mehrmals das Manometer sowie die Stromspannung abgelesen. Verdampft wurden 5—6 g, die kurz nach Stromschluß auf der rechten Wagschale abgehoben waren. Im Augenblicke des Durchganges wurde der Strom geöffnet und sodann wie zu Anfang die Verdampfung durch äußere Wärmezufuhr nach dem Versuch beobachtet. Dabei konnte wieder mehrmals Temperatur und Druck beobachtet werden. Zum Schluß wurde der Widerstand der Spirale bei abgeschaltetem Voltmeter gemessen und, wenn noch hinreichend Substanz vorhanden war, deren Siedetemperatur bei atmosphärischem Druck bestimmt, eventuell eine Gasanalyse des Dampfes ausgeführt. Natürlich wurde gleichzeitig das Barometer abgemessen. Ein Schema des ganzen Versuches mag hier gegeben werden:

Barometer 726,8 mm. Temperatur 15,5°.

Zeit	Gewicht an der rechten Wagschale g	Differ. der Zeiten sec	Spannung Volt	Druck mm Hg	Angabe der Kompensation	Temperatur °C.	Widerstand Ω	Proz. c
11h 17m 14,5s	67,6	68	—	Barometer	—	—		—
18 22,5	67,4	68	—		—	—		—
19 30,5	67,2	69	—		—	—		—
20 39,5	67,0		—		4386,5	−182,97		—
Stromschluß			41,60		—	—		—
11h 24m 51,5s	61,0	Strom geöffnet			—	—		—
26 31	60,7		—		4385,5	−182,90		—
27 25,5	60,6	54,5	—		—	—	337,49	—
28 17	60,5	51,5	—		—	—	−0,77	—
29 06,5	60,4	49,5	—		—	—	336,72	—
29 54,75	60,3	48,25	—		—	—		99,3
30 42,25	60,2	47,5	—		—	—		—
31 29	60,1	46,75	—		—	—		—
32 15,5	60,0	46,50	—		4384	−182,8		—

Die bei einer Spannung von e Volt in einem Leiter vom Widerstand $w\,\Omega$ in der Zeit t erzeugte Wärmemenge ist

$$A = 0{,}239\,\frac{e^2\,t}{w}\ \text{g-cal.}$$

Dabei ist als Wärmeeinheit die 15^0-g-cal. zugrunde gelegt, der 419×10^5 absolute Arbeitseinheiten entsprechen. Durch diese Wärmemenge sind m Gramm Substanz verdampft worden. Dazu waren nötig $A' = m \times r$ g-cal., wenn r die gesamte latente Verdampfungswärme in g-cal. bedeutet. Es ist also

$$0{,}239\,\frac{e^2\,t}{w} = m \times r,\ \text{daraus}\ \ r = 0{,}239\,\frac{e^2\,t}{m \times w};$$

an den einzelnen durch Beobachtung erhaltenen Größen sind jedoch Korrektionen anzubringen.

Die Spannung e ist wegen des Spannungsverlustes in den Zuleitungsdrähten (von bekanntem Widerstand), der Widerstand der Heizspirale ist ebenfalls wegen des Widerstandes der Zuleitungen zu korrigieren. Die wesentlichste Korrektion verlangt die von der Wage angegebene Menge m der verdampften Substanz. Die Verdampfung setzt sich zusammen aus der Verdampfung durch äußere Wärmezufuhr, die vor und nach dem Versuche experimentell bestimmt wird, und der Verdampfung durch elektrische Heizung. Um die während der Stromganges verdampfte Menge in diese beiden Komponenten zerlegen zu können, wurde für jeden einzelnen Versuch die Kurve der Verdampfungsgeschwindigkeit (mg/sec) vor und nach der Heizung bestimmt, graphisch dargestellt, und aus dem Verlauf dieser beiden Kurvenäste die Verdampfung durch äußere Wärmezufuhr während der Heizung unter Annahmen, deren Zulässigkeit genauer untersucht wurde, extrapoliert.

Außer der Kenntnis der Verdampfungswärme ist noch die der Temperatur bez. des Druckes nötig. Da der Temperaturmessung bei der Anzahl der übrigen Beobachtungen und bei der Umständlichkeit der Kompensationsmethode nicht allzugroße Sorgfalt zugewendet werden konnte, wurde mehr Wert auf die einfach anzustellende Druckmessung gelegt. Doch ergaben sich hinreichend viel zusammengehörige Druck- und Temperaturmessungen, so daß eine vollständige Dampfspannungs-

kurve für Sauerstoff und Stickstoff erhalten werden konnte. Aus diesen Messungen wurde dann eine ausgeglichene Dampfspannungskurve erstellt und die Temperatur aus dieser Kurve dem jeweilig herrschenden Drucke entsprechend entnommen.

Zur Druckmessung diente ein offenes Manometer, dessen selbstgeteilte Skala die Ablesung auf 1 mm genau gestattete. Auf Kapillarfehler braucht wegen der gleichen Weite der beiden Röhren keine Rücksicht genommen zu werden. Da das Verdampfungsgefäß an die großen Rezipienten angeschlossen war, und die Leitungsquerschnitte so groß als möglich gewählt waren, konnte trotz der starken Verdampfung der Druck auf einige Millimeter konstant erhalten werden. Bei der geringen Änderung der Verdampfungswärme mit dem Druck und bei dem relativ großen Fehler, mit dem die Bestimmung derselben behaftet ist, genügt die Kenntnis des Druckes auf einige Millimeter genau vollkommen. Da während einer *Temperaturbestimmung*, bei der die Verdampfung nur durch die Wärmezufuhr von außen unterhalten wurde und demgemäß sehr gering war, der Druck auf 1 mm konstant hielt und bei jeder Temperaturbestimmung der dazu gehörige Druck genau abgelesen wurde, sind die Drucke in den Dampfspannungskurven höchstens 1—2 mm unsicher.

Da das Manometer nicht am Verdampfungsgefäß unmittelbar angebracht war, sondern seitlich an der Saugleitung, und da zwischen dem Manometer und dem Verdampfungsgefäß der bewegliche Gummischlauch lag, ist diese Art der Druckbestimmung nicht ganz einwandfrei. Es wurde jedoch untersucht, welchen Einfluß die Strömungsgeschwindigkeit des Abdampfes auf die Angabe des Manometers ausübt. Die Größe dieses Einflusses ist aus der folgenden Tab. I zu ersehen. Hierzu ist zu bemerken, daß unmittelbar nach Beginn der Heizung, also der lebhaften Verdampfung, durch Regulierung der Pumpen der Druck nahe gleich dem vor der Heizung herrschenden gemacht wurde; dieser Druck wurde während der Heizung konstant gehalten, was fast stets auf 1—2 mm möglich war. Nach Beendigung der Heizung — bei geringer Verdampfung — sank dann der Druck. Der Unterschied des Druckes mit Heizung und ohne dieselbe zeigt dann eben die Größe des Einflusses der Strömungsgeschwindigkeit. Dieser

Unterschied überschreitet, von einigen Versuchen mit Sauerstoff bei niedrigem Drucke abgesehen, nicht den Betrag von 6 mm und bleibt meist erheblich darunter; zur Berechnung der zu jedem Versuche gehörigen Temperatur wurden die während des Stromganges angegebenen Drucke verwandt. Diese Drucke sind nicht auf 0^0 reduziert, da die Schwankung die Größe der Korrektion erreicht oder übersteigt. Die für die Dampfspannungskurven verwandten Drucke wurden reduziert.

Tabelle 1.

Vom Manometer angezeigter Druck (mm Hg).

I. Nr.	II. Vor dem Versuch	III. Während des Versuches	IV. Nach dem Versuch	V. Differenz III.—IV.	I. Nr.	II. Vor dem Versuch	III. Während des Versuches	IV. Nach dem Versuch	V. Differenz III.—IV.
1	—	725	(Baromet.)	—	18	—	718	(Baromet.)	—
2	—	717	„	—	19	—	715	„	—
3	648	648	646	−2	20	—	715	„	—
4	625	625	625	0	21	—	561	563	+2
5	619	616±1	615	−1	22	475	477	—	—
6	506	508	—	—	23	383	393	391	−2
7	428	425	—	—	24	327	327	321	−6
8	366	366±3	363	−3	25	266	270	264	−6
9	327	328±1	322	−6	26	190	198	196	−2
10	224	229	224	−5	27	177	175±2	173	−2
11	—	198	190	−8	28	—	173	173	0
12	184	182±2	180	−2	29	157	157±2	—	—
13	—	157	149	−8	30	127	128±2	126	−2
14	97	112±2	103	−9	31	129	127±1	126	−1
15	106	107±2	104	−3	32	96	97±1	94	−3
16	63	68	66	−2	33	96	96±1	96	0
17	64	68±1	64	−4					

Die Temperaturmessung geschah mit einem aus 0,25 mm starken Drähten aus Konstantan und Kupfer hergestellten, mit Zinn verlötetem Thermoelement. Die zweite Lötstelle befand sich in Petroleum auf Eis. Die Spannung wurde durch Kompensation gegen ein Weston-Normalelement gemessen. Als Eichpunkte wurden der Siedepunkt des Sauerstoffs und der Siede-

punkt und Erstarrungspunkt des Stickstoffs benutzt. Die Siedepunkte sind 25—30 mal, der Erstarrungspunkt 5 mal bestimmt. Die wahre Temperatur der Eichpunkte wurde gemäß den von K. T. Fischer[1]) und mir gemachten Annahmen bez. Bestimmungen gewählt und zwar Siedepunkt des Sauerstoffs bei 715 mm = — 182,9° C.; Siedepunkt des Stickstoffs bei 715 mm = — 196,17° C.; Erstarrungspunkt des Stickstoffs = — 210,52° C. Die Änderung der Thermokraft des Elementes mit der Temperatur ließ sich vollkommen durch eine Gerade darstellen. Das Thermoelement hielt seine elektromotorische Kraft während der ganzen Zeit der definitiven Versuche (ca. 2 Monate) konstant.

Die definitiven Versuche wurden mit flüssigem Sauerstoff und Stickstoff ausgeführt. Die Herstellung der Substanzen geschah im wesentlichen nach den von K. T. Fischer[2]) und mir beschriebenen Methoden. Die Herstellung des Sauerstoffs erfolgte durch Erhitzen von 250—300 g reinen chlorsauren Kalis in einer Hartglasretorte. Der entwickelte Sauerstoff ging durch zwei Waschflaschen mit Kalilauge, eine Flasche mit Jodkalilösung und durch eine als Windkessel benutzte Wulffsche Flasche, an der außerdem noch ein Sicherheitsventil angebracht war. Von dieser letzten Flasche aus wurde das Gas direkt in das l. c. beschriebene Kondensationsgefäß geführt, das, an einem Stativ gehalten, je nach der Heftigkeit der Gasentwicklung mehr oder weniger tief in eine große kugelige Dewarflasche mit flüssiger Luft eingetaucht werden konnte. Es wurde dabei darauf geachtet, daß das an dem Windkessel angebrachte und zugleich als Manometer verwendbare Sicherheitsventil atmosphärischen Druck oder höchstens kleinen Unterdruck zeigte, damit vermieden würde, daß Luft von aussen durch etwaige Undichtigkeiten der Leitung eintrete. Die häufig durchgeführte Analyse des gereinigten Gases ergab manchmal kaum bestimmbare Mengen Fremdgas; dessen Gehalt stieg in keinem Fall über 0,6 Proz. Der Stickstoff wurde nach der l. c. angegebenen Methode hergestellt, wobei nur

1) K. T. Fischer u. H. Alt, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch. 32. p. 113—151. 1902; Ann. d. Phys. 9. p. 1149—1185. 1902.

2) l. c. p. 114 u. 138, bez. p. 1149 u. 1167.

durch Vermehrung der Eisenvitriollösung enthaltenden Waschflaschen dafür gesorgt wurde, daß schon dem im Gasometer aufgefangenen Gase, bevor es durch die Verbrennungsröhren ging, möglichst wenig Stickstoffdioxyd beigemengt sei. Obwohl dasselbe in den Verbrennungsröhren stets völlig zerlegt wurde, empfiehlt sich diese Vorsicht deshalb, weil das Stickstoffdioxyd in den Gasometern die Metallteile derselben stark angreift. Für die Reinheit des Stickstoffs gilt die von uns l. c. angegebene Grenze von 0,3 Proz.

Zur Füllung des Fläschchens wurde bei Sauerstoff das nach außen abgeschlossene Kondensationsgefäß, bei Stickstoff ein mit Gummistopfen und langem Kautschukschlauch versehenes Dewarfläschchen, in das das Kondensationsgefäß wiederholt ausgeleert worden war, an die Versuchsordnung herangebracht, dann möglichst rasch das verflüssigte Gas in das Verdampfungsfläschchen durch Filtrierpapier eingegossen, wobei darauf geachtet wurde, daß der Flüssigkeitsstrahl möglichst wenig mit der atmosphärischen Luft in Berührung komme. War das Verdampfungsfläschchen gefüllt, so wurde es sofort durch den Gummistopfen mit Glasrohr des Apparates verschlossen, nach sorgfältiger Trocknung mit einem Tuche oder Filtrierpapier in das Trockengefäß eingesetzt und der Apparat zum Versuche fertig gemacht. Die Resultate der Versuche sind in Tab. II zusammengestellt. Über die Dimensionen der Bestimmungsgrößen sei noch erwähnt:

Der Widerstand der Heizspirale betrag ca. 330 Ω. Es wurde bei höheren Drucken mit ca. 41 Volt Spannung gearbeitet. Da bei tiefen Drucken die hierdurch hervorgerufene starke Verdampfung ein Konstanthalten des Druckes nicht zuließ, wurde bei diesen die Spannung auf 24 Volt erniedrigt. Auch einige Versuche bei hohem Druck wurden mit dieser Spannung ausgeführt, so daß ein Einfluß der Spannung — bei niederer Spannung wird der Fehler der regulären Verdampfung größer — auf das Resultat ersichtlich werden müßte. *Ein solcher Einfluß wurde nicht gefunden.* Die angewandten Stromstärken berechnen sich hieraus zu 0,124 bez. 0,073 Amp. Es wurden 5—6 g Substanz verdampft. Die Verdampfung durch äußere Wärmezufuhr während des Stromganges betrug 0,5 g bei 41 Volt bez. 0,9—1,0 g bei 24 Volt, also $^1/_{10}$ bis $^1/_5$

der gesamten Verdampfung, so daß für die Verdampfung durch den Strom 4,5 eventuell 5,5 bez. 4,0 g übrig bleiben. Hierzu war eine Zeit von 190—500 Sek. nötig. In der Tabelle ist in Kolumne 5 der Wert der Verdampfungswärme angegeben, der sich nach dem unten näher zu besprechenden Ausgleich ergibt. Die 6. Kolumne enthält den Fehler der einzelnen Beobachtung.

Tabelle II.

Sauerstoff						Stickstoff					
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Nr.	p mm Hg	T ° C.	r cal.	r' korr. cal.	Δ $=r'-r$	Nr.	p mm Hg	T ° C.	r cal.	r' korr. cal.	Δ $=r'-r$
1	725	−182,8	51,91	52,07	+0,16	18	718	−196,2	48,63	48,72	+0,09
2	717	−182,9	52,24	52,08	−0,16	19	715	−196,2	48,73	48,72	−0,01
3	648	−183,8	52,17	52,17	0,00	20	715	−196,2	48,95	48,72	−0,23
4	625	−184,15	51,77	52,21	+0,44	21	561	−198,15	49,08	49,19	+0,11
5	616	−184,30	52,52	52,23	−0,29	22	477	−199,45	49,65	49,50	−0,15
6	508	−186,2	52,33	52,47	+0,14	23	393	−200,9	49,53	49,85	+0,32
7	425	−187,95	53,18	52,76	−0,42	24	327	−202,8	50,11	50,18	+0,09
8	366	−189,3	52,85	53,00	+0,15	25	270	−203,7	50,50	50,54	+0,04
9	328	−190,25	52,90	53,18	+0,28	26	198	−205,7	50,76	51,02	+0,26
10	229	−193,1	53,77	53,85	+0,12	27	175	−206,5	51,35	51,21	−0,14
11	198	−194,2	53,82	54,18	+0,36	28	173	−206,55	51,50	51,22	−0,28
12	182	−194,75	54,93	54,37	−0,56	29	157	−207,15	51,41	51,37	−0,04
13	157	−195,9	55,38	54,82	−0,56	30	128	−208,3	51,79	51,65	−0,14
14	112	−198,1	55,15	55,97	+0,82	31	127	−208,35	51,59	51,67	+0,08
15	107	−198,55	55,14	56,30	+1,16	32	97	−210,0	52,06	52,06	0,00
16	68	−201,3	58,04	58,85	+0,81	33	96	−210,05	51,85	52,07	+0,22
17	68	−201,3	59,59	58,85	−0,74						

Diese Versuchsresultate sind in den Diagrammen Fig. 2 eingetragen. Die Versuchsresultate für *Sauerstoff* wurden graphisch ausgeglichen, da für sie die Annahme einer analytischen Abhängigkeit der Verdampfungswärme von der Temperatur nicht angängig erschien. Die aus dieser ausgeglichenen Kurve entnommenen Werte sind in Tab. II, Kolumne 5 eingetragen. Bis zu einem Drucke von 198 mm entsprechend −194,2° C. sind die Abweichungen nicht sehr groß. Sie be-

'agen im Mittel (arithm. Mittel der absoluten Beträge der 'ehler) 0,23 cal. = 0,43 Proz. Von da an werden die Abeichungen beträchtlich größer, man wird jedoch besonders

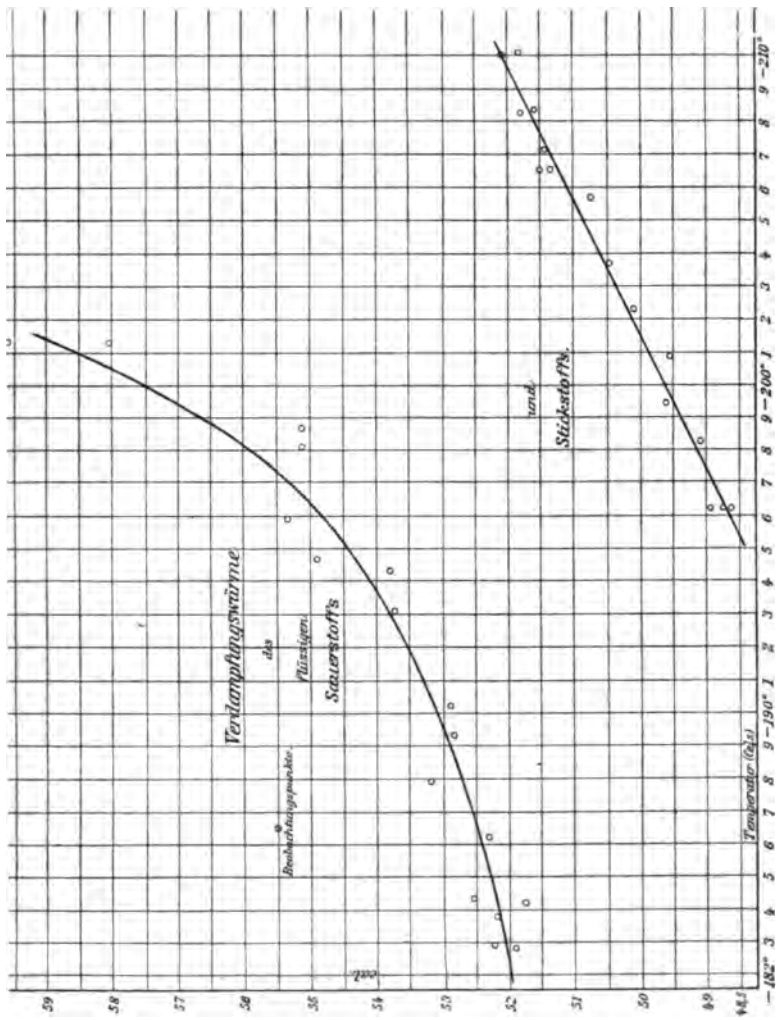


Fig. 2.

ıgesichts der hohen Beträge der Verdampfungswärme bei 3 mm ein außerordentlich starkes Ansteigen der Kurve anehmen müssen, ein Verhalten, das im merkwürdigen Gegenıtz zu dem des Stickstoffs (vgl. unten) steht. Der mittlere

Fehler der Beobachtung bei höheren Drucken läßt sich mangels einer geeigneten Annahme der Kurvenform nicht aus den Fehlerquadraten berechnen. Es wird daher der Fehler bei normalem Druck schätzungsweise zu 0,15 cal. = 0,3 Proz. angenommen und es ergibt sich für 760 mm

$$r_{760\,\mathrm{mm}/-182{,}4^\circ\,\mathrm{C.}} = 52{,}02 \pm 0{,}15\ \mathrm{cal.}$$

Die Änderung der Verdampfungswärme des *Stickstoffs* mit der Temperatur scheint einer geraden Linie zu folgen. Es wurde deshalb unter dieser Annahme nach der Methode der kleinsten Quadrate diese Gerade berechnet und gefunden:

$$r = 1{,}073 - 0{,}2428\,T(\mathrm{C.}).$$

Nach dieser Formel sind in Tab. III die korrigierten Werte für Stickstoff berechnet. Der mittlere Beobachtungsfehler ergibt sich hieraus nach $\varepsilon = \sqrt{\Sigma \Delta^2/n - m}$ (n Anzahl der Beobachtungen, m Anzahl der Konstanten der Gleichung) zu 0,18 cal. = 0,35 Proz.

Es berechnet sich danach

$$r_{760\,\mathrm{mm}/-195{,}67^\circ\,\mathrm{C.}} = 48{,}58 \pm 0{,}18\ \mathrm{cal.}$$

Da von den Fehlern acht nach der einen Seite, sieben nach der andern Seite liegen, während einer gleich Null ist und das Mittel der positiven Fehler 0,15, das der negativen 0,13 beträgt, so dürfte die Annahme einer Geraden die zutreffendste sein.

Tab. III (vgl. p. 1023) gibt Aufschluß über diese Größe.

Die Untersuchungen über die Verdampfungswärme verflüssigter Gase werden gegenwärtig nach einer im Prinzip gleichen, in wesentlichen Einzelheiten jedoch verbesserten Methode fortgesetzt.

Die zur Verwendung gelangte Methode zur Bestimmung der Verdampfungswärme erlaubt gleichzeitig eine Messung der spezifischen Wärme; der derselben zugrunde liegende Gedanke besteht darin, ein durch Absaugen unterkühltes Quantum Flüssigkeit plötzlich wieder unter atmosphärischen Druck zu setzen. Dies wird sich dann durch Wärmezufuhr von außen

Tabelle III.

Sauerstoff			Stickstoff		
T ° C.	r (cal.	$\frac{dr}{d\vartheta}\left(\frac{\text{cal.}}{\text{Grad}}\right)$	T ° C.	r (cal.)	$\frac{dr}{d\vartheta}\left(\frac{\text{cal.}}{\text{Grad}}\right)$
−183,0	52,09	−0,10	−196,5	48,78	
−183,5	52,14	−0,11	−197,0	48,91	
−184,0	52,20	−0,11	−197,5	49,03	
−184,5	52,25	−0,11	−198,0	49,15	
−185,0	52,31	−0,13	−198,5	49,27	
−185,5	52,38	−0,14	−199,0	49,39	
−186,0	52,45	−0,14	−199,5	49,51	
−186,5	52,52	−0,15	−200,0	49,63	
−187,0	52,60	−0,16	−200,5	49,75	
−187,5	52,68	−0,16	−201,0	49,88	
−188,0	52,76	−0,17	−201,5	50,00	
−188,5	52,85	−0,18	−202,0	50,12	konstant = − 0,243
−189,0	52,94	−0,18	−202,5	50,24	
−189,5	53,03	−0,19	−203,0	50,36	
−190,0	53,13	−0,20	−203,5	50,48	
−190,5	53,23	−0,21	−204,0	50,60	
−191,0	53,34	−0,22	−204,5	50,73	
−191,5	53,45	−0,23	−205,0	50,85	
−192,0	53,57	−0,24	−205,5	50,97	
−192,5	53,69	−0,25	−206,0	51,09	
−193,0	53,82	−0,27	−206,5	51,21	
−193,5	53,96	−0,29	−207,0	51,33	
−194,0	54,11	−0,32	−207,5	51,45	
−194,5	54,28	−0,35	−208,0	51,57	
−195,0	54,46	−0,37	−208,5	51,70	
−195,5	54,65	−0,40	−209,0	51,82	
−196,0	54,86	−0,44	−209,5	51,94	
−196,5	55,09	−0,48	−210,0	52,06	
−197,0	55,34	−0,52			
−197,5	55,61	−0,57			
−198,0	55,91	−0,65			
−198,5	56,26	−0,75			
−199,0	56,66	−0,82			
−199,5	57,08	−0,87			
−200,0	57,53	−0,92			
−200,5	58,00	−0,99			
−201,0	58,52	−1,10			
−201,5	59,10	−1,22			

allmählich erwärmen. Führt man außerdem noch Wärme, etwa durch eine Heizspirale zu, so läßt sich aus der so erhaltenen Temperatursteigerung unter Abzug der von außen zugeführten Wärme und aus der bestimmbaren Menge der Flüssigkeit die spezifische Wärme derselben berechnen. Bei der Ausführung der Versuche wurde folgendermaßen verfahren. Nachdem über der Flüssigkeit tiefer Druck, bei Sauerstoff ca. 80 mm, bei Stickstoff ca. 120 mm hergestellt war, wurde die durch Wärmezufuhr von außen pro Zeiteinheit verdampfende Menge bestimmt. Da diese Verdampfungswärme bei dem herrschenden Druck nach den vorausgehenden Bestimmungen bekannt ist, kann daraus die Wärmezufuhr von außen in Kalorien angegeben werden. Nun wurde vermittelst des Dreiweghahnsystems das evakuierte Verdampfungsgefäß mit dem mit Sauerstoff bez. Stickstoff gefüllten Gasometer (*G* in Fig. 1, p. 1012) verbunden, so daß atmosphärische Luft in das Gefäß nicht eindringen konnte; erst als der Druck zwischen Verdampfungsgefäß und Gasometer sich ausgeglichen hatte, also in ersterem kleiner Überdruck herrschte, wurde Kommunikation mit der äußeren Luft hergestellt. Unmittelbar darauf war sowohl Verdampfung als Temperaturzunahme im Gefäß gering, so daß kurz vor dem Durchgang der Marke durch das Mikroskop die Anfangstemperatur der Flüssigkeit ziemlich genau bestimmt werden konnte. Beim Durchgang der Marke wurde dann der Strom geschlossen und die Zeit notiert. Der Temperaturanstieg konnte im Fernrohr des Kompensationsgalvanometers genau beobachtet werden. War Konstanz der Temperatur eingetreten, d. h. der normale Siedepunkt der Flüssigkeit erreicht, so wurde der Strom geöffnet. Einige Beobachtungen der Zeitintervalle zwischen zwei Fadendurchgängen nach dem Versuch lieferten dann im Zusammenhalt mit der bekannten Verdampfungswärme den Betrag der Wärmezufuhr nach dem Versuch; ein Beispiel mag dies erläutern.

Beispiel:

Zeit	Diff. d. Zeiten	Sauerstoff Gewicht
$7^h 02^m 02^s$		72,2 g
	50,5	
02 52,5		72,1
	50,5	
03 43		72,0

Herstellung des atmosphärischen Druckes. Infolge des einströmenden Gases wird das Fläschchen etwas schwerer. Temperatur $-200{,}00^\circ$ C.

Zeit	Diff. d. Zeiten	Gewicht	
$7^h 08^m 10^s$		72,0 g	Strom
11 40			Strom geöffnet. Temp. $-182{,}90^\circ$
12 58,5	47,5	71,2	
13 46		71,1	

Stromdauer: 210 sec $= t'$. Zeit von (72,0 g) bis (71,2 g) $=$ 289 sec $= t$.

Die Wärmezufuhr vor dem Versuch beträgt:

$$\frac{0{,}100\text{ g}}{50{,}5\text{ sec}} \times 57{,}5\ ^1)\ \frac{\text{cal.}}{\text{g}} = 0{,}114\ \frac{\text{cal.}}{\text{sec}};$$

nach dem Versuch:

$$\frac{0{,}100\text{ g}}{47{,}5\text{ sec}} \times 52{,}1\ ^1)\ \frac{\text{cal.}}{\text{g}} = 0{,}109\ \frac{\text{cal.}}{\text{sec}}.$$

Mittlere Wärmezufuhr: $0{,}112\ \frac{\text{cal.}}{\text{sec}}$.

In der Zeit des Stromganges verdampften außerdem 0,8 g Substanz.

Es wurde also von $7^h 8^m 10^s$ bis $7^h 12^m 59^s$ an Wärme zugeführt

$$289 \times 0{,}112 = 29{,}48 \text{ cal. von außen,}$$

$$0{,}239 \times \frac{e^2 t'}{w} = 95{,}66 \text{ cal. durch den Strom}$$

[$e = 24{,}51$ Volt, $t' = 210$ sec, $w = 330{,}6\ \Omega$.]

Da das Gewicht des leeren Fläschchens 55,50 g betrug, war die Flüssigkeitsmenge im Mittel 16,2 g. Dieselbe wurde um $17{,}1^\circ$ erwärmt. Im ganzen wurden an Wärme verbraucht:

$$(c \times 16{,}2 \times 17{,}1) \text{ cal. für Erwärmung,}$$

außerdem $(0{,}8 \times 52{,}1)$ cal. $=$ 41,68 cal., da 0,8 g Substanz während des Versuches verdampften. Es ist anzunehmen,

---

[1]) Verdampfungswärme bei der vor dem Versuch bez. nach dem Versuch herrschenden Temperatur (vgl. Tab. III, p. 1023).

daß sich durch die Wärmezufuhr von außen zuerst die oberste Flüssigkeitsschicht bis zum Siedepunkt erwärmt und dann verdampft, so daß zur Berechnung der dadurch verbrauchten Wärme die Verdampfungswärme bei atmosphärischem Druck zu verwenden ist. Schließlich ergibt sich:

Zugeführte Wärme: 125,14 cal.,

Verbrauchte Wärme: 41,68 cal. + ($c \times 16{,}2 \times 17{,}1$) cal.,

also:

$$c = \frac{83{,}46}{16{,}2 \times 17{,}1} = 0{,}312 \frac{\text{cal.}}{\text{g} \times \text{Grad}}.$$

Dabei ist c die mittlere spezifische Wärme im Intervall von -200° C. bis -183° C.

Die Versuche werden in Serien ausgeführt, so daß nach Beendigung des ersten Versuches sofort mit der noch vorhandenen Flüssigkeitsmenge der zweite Versuch angestellt wurde. Es konnten so bis zu drei Versuchen mit einer Füllung des Fläschchens vorgenommen werden. Im ganzen wurden in vier Serien neun Versuche ausgeführt. Dieselben ergaben als Resultat:

Tabelle IV.

Sauerstoff						Stickstoff					
Serie	Nr.	W cal.	m g	ΔT Grad	c cal./g × Grad	Serie	Nr.	W cal.	m g	ΔT Grad	c cal./g × Grad
I	1	83,46	16,2	17,1	0,312	II	3	64,36	13,4	11,7	0,414
I	2	67,41	11,8	16,0	0,357	II	4	43,44	9,5	10,6	0,431
IV	8	101,01	17,2	17,2	0,341	III	5	69,27	13,05	11,7	0,454
IV	9	78,98	12,75	16,4	0,378	III	6	45,41	9,38	11,0	0,440
						III	7	19,68	6,83	7,0	0,412

Eine systematische Änderung der spezifischen Wärme mit der Größe des Temperaturintervalles kann aus den Resultaten nicht geschlossen werden. Man muß sie also als die mittlere spezifische Wärme für das ganze Intervall betrachten. Dasselbe ist für Sauerstoff von -200° C. bis -183° C., für

Stickstoff von -208° C. bis -196° C. Für Sauerstoff ergibt sich aus obigen Resultaten

$$c_{(-200^\circ \text{ C. bis } -188^\circ \text{ C.})} = 0{,}347 \pm 0{,}014 \left[\frac{\text{cal.}}{\text{g} \times \text{Grad}}\right].$$

Für Stickstoff

$$c_{(-200^\circ \text{ C. bis } -196^\circ \text{ C.})} = 0{,}430 \pm 0{,}008 \left[\frac{\text{cal.}}{\text{g} \times \text{Grad}}\right].$$

Dewar[1]) hat aus der Menge der Substanz, die beim Absaugen verdampfen muß, bis die Flüssigkeit bis zum Erstarrungspunkt abgekühlt ist, auf die Größe der spezifischen Wärme von Wasserstoff und Stickstoff geschlossen und gibt für den letzteren 0,43 an, also ein Wert, der mit dem von mir erhaltenen vollkommen übereinstimmt.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.

1) J. Dewar, Proc. Roy. Soc. 68. p. 361. 1901.

(Eingegangen 15. Januar 1904.)

7. *Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Konzentration, bestimmt mit Hilfe gekrümmter Lichtstrahlen; von Fr. Heimbrodt.*

(Auszug aus der gleichnamigen Leipziger Inaugural-Dissertation, 1903.)

Die vorliegende Untersuchung setzte sich zum Ziel, die Methode von O. Wiener[1]) zu verfeinern und den Konzentrationskoeffizienten der Diffusion einiger Substanzen quantitativ zu bestimmen.

Es wurden sowohl Nichtelektrolyte als Elektrolyte untersucht, und zwar Rohrzucker, Harnstoff, Glyzerin, Chlornatrium und Salzsäure. Rohrzucker erwies sich indes in den angewendeten Verdünnungen als nur kurze Zeit unverändert haltbar, weshalb ich nach mehrfachen Versuchen von seiner Verwendung absehen mußte.

Die Versuchsanordnung war folgende: Durch eine große Sammellinse wurde ein schwach vergrößertes Bild des positiven Kraters einer Bogenlampe auf einen 45° geneigten symmetrischen Platinspalt entworfen. Dicht vor diesem befand sich ein Grünfilter von 560 $\mu\mu$ im Mittel, bestehend aus wässeriger Naphtolgrünlösung 1 : 1000 in 1 cm dicker Schicht (die Wellenlängen größer als 591 $\mu\mu$ beseitigte), kombiniert mit einer Gelbscheibe, die das Gebiet der kürzeren Wellen bis 529 $\mu\mu$ absorbierte. Der Spalt saß in einem Kollimatorrohr, dessen Linse ein stark vergrößertes Bild auf einen zum ersten genau parallel aufgestellten zweiten Spalt entwarf. Hinter diesem stand der Diffusionstrog, hergestellt aus einem U-förmigen Zwischenstück aus planparallelen Glasprismen und zwei ebenfalls planparallelen Deckplatten (vgl. Fig. 1). Der so entstandene parallelepipetische Raum von $10 \times 10 \times 2{,}5$ cm wurde gefüllt mit je 116 ccm der beiden Diffusionslösungen.

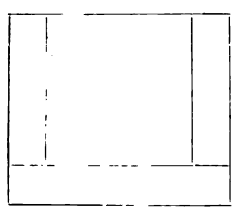


Fig. 1.
($^1/_5$ nat. Größe.)

1) O. Wiener, Wied. Ann. **49**. p. 105—149. 1893.

Der Spalt mit Kollimatorrohr etc. sowie der sogleich zu erwähnende Vertikalschlitten des Kathetometers wurden mir vom Physikalischen Institut zu Aachen freundlichst zur Verfügung gestellt. Hr. Dr. Drecker-Aachen war so liebenswürdig, mir den im folgenden beschriebenen Spiegelglastrog (ein Geschenk des vormaligen Direktors Karl Arbenz der Stollberger Spiegelmanufaktur) für die Untersuchungen zu überlassen. Genanntem Herrn wie auch dem Direktor des Aachener Instituts, Hrn. Geheimrat Wüllner, möchte ich hierfür meinen herzlichen Dank aussprechen. Die Apparate hatten bereits zu Versuchen des Hrn. Dr. Drecker gedient, der aber später von einer Weiterführung der Arbeit hatte absehen müssen.

Die Messungen selbst wurden anfangs auf photographischem Wege versucht, der aber der allzu geringen Lichtstärke wegen verlassen werden mußte. Die im folgenden mitgeteilten Resultate sind durch Okularbeobachtungen gewonnen, und zwar mit Hilfe einer kleinen aplanatischen Lupe von 3 cm Brennweite, deren Rohrstutzen, in der Vertikalebene drehbar, an einem Kathetometer mit Vertikal- und Horizontalschlitten befestigt ist. Beide Schlittenführungen besitzen Mikrometerschrauben mit Trommel von 0,001 mm Ablesung.

Der erste Spalt diente wesentlich dazu, die Helligkeit, der zweite die Breite der so entstehenden Beugungsstreifen zu regulieren. Das Streifensystem wurde scharf eingestellt auf die Ebene eines auf der Teilmaschine in Glas geritzten Fadenkreuzes von nebenstehender Form (Fig. 2). Die Einstellung erfolgte so, daß der Doppelstrich von den beiden ersten Beugungsstreifen symmetrisch eingeschlossen wurde.

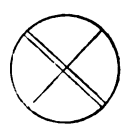


Fig. 2.

Die gegeneinander diffundierenden Lösungen, dargestellt durch geeignete Verdünnungen einer Vierfach-Normal-Vorratslösung, hatten folgenden Gehalt:

Glyzerin, Harnstoff, Chlornatrium: $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{3n}{4}$, $\frac{n}{1}$, $\frac{3n}{2}$, $\frac{2n}{1}$;

Salzsäure: $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{3n}{4}$, $\frac{n}{1}$,

so daß sich 37 verschiedene Diffusionsversuche ergaben, mit den Konzentrationsdifferenzen $^1/_4$, $^1/_2$ und $^1/_1$ normal (vgl. Tab. 1).

Jede Beobachtungsreihe wurde möglichst unter den gleichen Verhältnissen einmal wiederholt.

Tabelle 1.

Konzentrationsdifferenz	$^1/_4$ normal	$^1/_2$ normal	$^1/_1$ normal
Glyzerin	$\frac{n}{4}$ gegen 0	$\frac{n}{2}$ gegen 0	$\frac{n}{1}$ gegen 0
Harnstoff	$\frac{n}{2}$ " $\frac{n}{4}$	$\frac{n}{1}$ " $\frac{n}{2}$	$\frac{2n}{1}$ " $\frac{n}{1}$
Chlornatrium	$\frac{3n}{4}$ " $\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{2}$ " $\frac{n}{1}$	—
	$\frac{n}{1}$ " $\frac{3n}{4}$	$\frac{2n}{1}$ " $\frac{3n}{2}$	—
Salzsäure	$\frac{n}{4}$ gegen 0	$\frac{n}{2}$ gegen 0	$\frac{n}{1}$ gegen 0
	$\frac{n}{2}$ " $\frac{n}{4}$	$\frac{n}{1}$ " $\frac{n}{2}$	—
	$\frac{3n}{4}$ " $\frac{n}{2}$	—	—
	$\frac{n}{1}$ " $\frac{3n}{4}$	—	—

Die vier Ausgangslösungen von Glyzerin, Harnstoff, Chlornatrium und Salzsäure wurden nach den für Gewichtsanalysen üblichen Methoden der Chemie bestimmt und zeigten Fehler unter 0,06 Proz., dürften demnach wohl als chemisch rein zu bezeichnen sein.

Die zur Berechnung der Diffusionskoeffizienten erforderlichen Brechungsexponenten bez. deren Differenzen wurden an einem großen Spektrometer mit Sekundenablesung bei einem genau wie oben zusammengesetzten Lichtfilter gemessen, und zwar mit einem Hallwachsschen Doppelprisma, nach dem Umdrehungsverfahren.[1]) — Die Korrektionen für den Doppeltrog waren so gering, daß ich nach der einfachen Formel rechnen konnte:

$$n - n_0 = \frac{\sin^2 \alpha}{n + n_0}.$$

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. 68. p. 4. 1899.

Der fragliche Ablenkungswinkel $(\alpha = 180 - \varphi)/2$ lag für die untersuchten Konzentrationen zwischen rund 4° 22′ und 13° 15′. Dabei ist φ der Winkel zwischen der ersten und zweiten Trogstellung, d. h. vor und nach der Drehung um 180°, n und n_0 der Brechungsindex von Lösung bez. Wasser. Es wurde stets die Differenz von Lösung gegen Wasser gemessen, da die Brechungsexponenten des letzteren sehr genau bekannt sind. —

Um die Differenz der Brechungsexponenten bis auf fünf Dezimalen genau angeben zu können, wäre nur eine Genauigkeit von 1 Promille der Brechungsindizes des Wassers erforderlich gewesen. Jedoch wurde im folgenden die Rechnung so durchgeführt, daß auch die absoluten Werte der Brechungsexponenten von Wasser und Lösungen bis zu einer Einheit der fünften Dezimale Anspruch auf Genauigkeit besitzen.

Zur Berechnung der Brechungsindizes des Wassers für die fraglichen Temperaturen und $\lambda = 560\ \mu\mu$ wurden sämtliche in Landolt und Börnsteins Tabellen (2. Aufl., 1894) angegebene diesbezügliche Zahlen mit den von B. Walter[1]) 1892 beobachteten verglichen. Ich gewann die Überzeugung, daß die Werte von Ketteler und Walter wohl den größten Anspruch auf Richtigkeit machen können. Walter hat Brechungsindices nur für die D-Linie ($\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$), Ketteler u. a. für Na- und Tl-Licht gemessen. — Die mittlere Wellenlänge meines Lichtfilters ($\lambda = 560{,}0\ \mu\mu$) liegt zwischen der Na- und Tl-Linie — d. h. 589,3 und 535,6 $\mu\mu$. — Ich ging deshalb für die Na-Linie von den Zahlen Walters, für die Tl-Linie z. T. von denen Kettelers aus.

Die Interpolation für verschiedene Zwischentemperaturen wurde nach der Temperaturformel von Jamin für Strahlen mittlerer Brechbarkeit vorgenommen:

$$n_t = n_0 - 0{,}000\,012\,573\,t - 0{,}000\,009\,29\,t^2,$$

die, von mir auf Walters Resultate angewandt, vollkommene Übereinstimmung ergab. Die fehlenden Brechungsexponenten des Wassers für Tl-Licht interpolierte ich nach der vereinfachten v. Helmholtzschen Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

1) B. Walter, Wied. Ann. **46**. p. 423—425. 1892.

Die von Wüllner[1]) angegebenen Werte der drei Parameter P, Q und λ_m:

$$P = 0{,}865\,895, \quad Q = 0{,}865\,767, \quad \lambda_m^2 = 0{,}87979$$

ergaben für Wasser von 19,5° die Werte ($\lambda = 560\ \mu\mu$):

$$n_{Tl} = 1{,}33499, \quad n_\lambda = 1{,}33404;$$

daran schließt sich sehr gut an der Wert Walters für dieselbe Temperatur:

$$n_{Na} = 1{,}33303.$$

Die oben zitierte Temperaturformel von Jamin lieferte dazu die entsprechenden Brechungsexponenten für 0°, 8° ... etc. bis 18°. — Tab. 2 gibt eine Übersicht der so gewonnenen Ausgangswerte.

Tabelle 2.

Brechungsexponenten für Wasser.

$t°$ C.	Na $\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$	$\lambda = 560{,}0\ \mu\mu$	Tl $\lambda = 535{,}0\ \mu\mu$
0	1,33401	1,33502	1,33597
8	1,33379	1,33480	1,33575
9	1,33374	1,33475	1,33570
10	1,33369	1,33470	1,33565
11	1,33364	1,33465	1,33560
12	1,33358	1,33459	1,33554
13	1,33352	1,33453	1,33548
14	1,33346	1,33447	1,33542
15	1,33339	1,33440	1,33535
16	1,33332	1,33433	1,33528
17	1,33324	1,33425	1,33520
18	1,33316	1,33417	1,33512
19,5	1,33303	1,33404	1,33499

Die hieraus nach den Resultaten der Hallwachsschen Differentialmethode abgeleiteten Brechungsindices zeigen die beiden folgenden Tabellen, die — außer den oben angegebenen bez. Werten für Wasser — die Resultate für: 1. Glyzerin, 2. Harnstoff, Chlornatrium und Salzsäure enthalten.

Die Teilung in zwei Tabellen erfolgte wegen der notwendigen Berechnung für die verschiedenen Temperaturintervalle der Diffusionsversuche.

1) A. Wüllner, Physik 4. p. 192. 1899.

Tabelle 3.

Brechungsexponenten für Glyzerin = 92,08; $\lambda = 560{,}0\ \mu\mu$.

Normallösung:	11°	12°	13°	14°
$0 = H_2O$	1,33465	1,33459	1,33453	1,33447
$^1/_4$ Glyzerin	1,33708	1,33702	1,33696	1,33687
$^1/_2$ „	—	1,33936	1,33930	1,33924
$^3/_4$ „	—	1,34174	1,34168	1,34162
1 „	—	1,34410	1,34403	1,34397
$^3/_2$ „	—	1,34887	1,34878	1,34872
2 „	—	1,35363	1,35352	1,35346

Tabelle 4.

Brechungsexponenten für $\lambda = 560{,}0\ \mu\mu$.

Konzentration:		14°	15°	16°
Wasser = 0		1,33447	1,33440	1,33433
Harnstoff = 60,12	$\frac{n}{4}$	1,33670	1,33662	1,33654
	$\frac{n}{2}$	1,33890	1,33882	1,33874
	$\frac{3n}{4}$	1,34109	1,34101	1,34092
	$\frac{n}{1}$	1,34327	1,34319	1,34309
	$\frac{3n}{2}$	1,34764	1,34754	1,34743
	$2n$	1,35194	1,35183	1,35173
NaCl = 58,50	$\frac{n}{4}$	1,33713	1,33705	1,33697
	$\frac{n}{2}$	1,33965	1,33957	1,33949
	$\frac{3n}{4}$	1,34215	1,34206	1,34198
	$\frac{n}{1}$	1,34457	1,34448	1,34439
	$\frac{3n}{2}$	1,34933	1,34922	1,34912
	$2n$	1,35400	1,35387	1,35375
HCl = 36,46	$\frac{n}{4}$	1,33666	1,33659	1,33651
	$\frac{n}{2}$	1,33880	1,33873	1,33865
	$\frac{3n}{4}$	1,34091	1,34084	1,34076
	$\frac{n}{1}$	1,34298	1,34291	1,34283

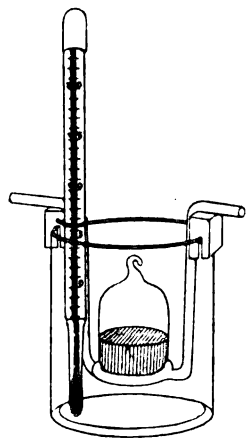


Fig. 3.

Zur Charakterisierung der Lösungen und um etwaige Kontraktion während der Diffusion berücksichtigen zu können, wurden die Dichten der untersuchten Lösungen, wie schon früher angedeutet, nach der Auftriebsmethode bestimmt, und zwar in der von Kohlrausch und Hallwachs[1]) angegebenen Form. Die Wägungen fanden, der erforderlichen Temperaturkonstanz wegen, im Keller statt an einer kurzarmigen Bungeschen Wage von 15,5 Sek. Schwingungsdauer und 0,1 mg Empfindlichkeit bei Belastungen bis zu 200 g und ergaben folgende Werte:

Tabelle 5.

Spezifische Gewichte bei 14,80° C.

Konzentration in $\frac{x}{8}$ normal	Glyzerin = 92,08	Harnstoff = 60,12	NaCl = 58,50	HCl = 36,46
$0 = H_2O$	0,99917	0,99917	0,99917	0,99917
$x = 1$	1,00161	1,00152	1,00474	1,00146
2	1,00409	1,00389	1,01013	1,00379
3	1,00659	1,00618	1,01551	1,00611
4	1,00911	1,00844	1,02091	1,00840
5	1,01163	1,01054	1,02631	1,01071
6	1,01416	1,01260	1,03170	1,01302
7	1,01671	1,01463	1,03710	1,01535
8	1,01988	1,01662	1,04250	1,01767
10	1,02458	1,02061	1,05339	—
12	1,02982	1,02448	1,06427	—
14	1,03509	1,02833	1,07522	—
16	1,04038	1,03216	1,08625	—

Sowohl die bei den Diffusionsversuchen als auch die zur Bestimmung von Brechungsindizes und spezifischen Gewichten benutzten Thermometer wurden mit dem von der Physikalisch-

1) Vgl. F. Kohlrausch u. W. Hallwachs, Wied. Ann. **50**. p. 118. 1893; **53**. p. 14. 1894; **56**. p. 185. 1895. — Den Apparat zeigt Fig. 3.

Technischen Reichsanstalt in Berlin geprüften Normalthermometer des Instituts verglichen, dessen Nullpunkt vorher nachgeprüft wurde. Ebenso wurde die Dicke der durchstrahlten Flüssigkeit im Diffusionstrog mit Hilfe eines Wildschen Sphärometers genau bestimmt. Es ergab sich an der Stelle des Troges, wo die Beobachtungen jedesmal stattfanden, für diese Dicke der Wert:

$$\delta = 2{,}5733 \text{ cm},$$

und zwar als das Außenmaß des Troges, vermindert um die Summe der beiden Wandstärken.

Außerdem ließen sich hierbei zugleich noch die (geringen) Abweichungen des Diffusionsgefäßes selbst vom Planparallelismus feststellen.

Die Diffusionskoeffizienten k wurden nach der aus der Fickschen Differentialgleichung abgeleiteten Formel

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial n}{\partial x}\right) \tag{1}$$

berechnet unter der Annahme eines proportionalen Verlaufes zwischen Konzentration (u) und Brechungsexponent (n), was für die hier in Frage kommenden Verdünnungen im allgemeinen berechtigt ist. Die hieraus in der eingangs zitierten Arbeit für vorliegende Versuchsanordnung sich ergebende Gleichung lautet:

$$k = \frac{(n_2 - n_1)^2 a^2 \delta^2}{4 \pi t} \cdot \frac{1}{z^2}, \tag{2}$$

worin n_2 und n_1 die Brechungsexponenten der unvermischten Lösungen bez. des Wassers, z die maximale Ablenkuug der Diffusionskurve, a den optischen Abstand Trogmitte–Fadenkreuz, δ die oben erwähnte Dicke der Flüssigkeitsschicht im Trog und t die seit Beginn der Diffusion verflossene Zeit bezeichnet.

Gleichung (2) hat die allgemeine Gestalt:

$$t = f(z^2). \tag{3}$$

Berechnet man k jedesmal aus zwei Einzelbeobachtungen — was der Umstand notwendig macht, daß der Zeitpunkt $t=0$ unbekannt ist — so kann man mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate in der umgeformten Gleichung

$$k = \frac{(n_2 - n_1)^2 a^2 \delta^2}{4 \pi} \cdot \frac{1}{C} \tag{4}$$

die Größe C berechnen zu

$$C = \frac{\sum x^4 \sum t x^2 - \sum x^2 \sum t x^4}{n \sum x^4 - (\sum x^2)^2}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet n die Anzahl der Ablesungen für jeden einzelnen Versuch und $\sum$ jedesmal die Summe über sämtliche n Werte des betreffenden Ausdruckes hinter dem Zeichen (für die verschiedenen Ablesezeiten).

Für die langsam diffundierenden Substanzen wurden statt einer einzelnen Ablesung zu den festgesetzten Zeitpunkten deren drei rasch hintereinander gemacht. Dies machte natürlich für die ersten Beobachtungen eine Korrektion nötig, da t und z sich nicht proportional, sondern eben in der oben angegebenen Weise ändern.

Nehmen wir an, zu einem mittleren t

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

gehöre ein entsprechendes

$$z = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \varepsilon,$$

so daß ε das zu berechnende Korrektionsglied bedeutet.

Für die z mögen die drei Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z + \zeta_1, \\ z_2 &= z + \zeta_2, \\ z_3 &= z + \zeta_3, \end{aligned} \quad \text{wobei:} \quad \begin{aligned} \zeta_m &= \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{3}, \\ \zeta &= \zeta_m + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach (2) darf man, da hier die Konstanten nicht in Betracht kommen, setzen:

$$f(z) = \frac{1}{x^3}.$$

Die Entwickelung von $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$ und $f(z + \zeta)$ oder $f(z + \zeta_m + \varepsilon)$ nach Taylor bis zum zweiten Differentialquotienten und nachheriges Ordnen der Glieder nach fallenden Potenzen von ε liefert schließlich:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3} \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) - (\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1)}{\frac{3 f'(x)}{f''(x)} + (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)}.$$

Die Substitution von

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = f''(z) = \frac{6}{x^4}$$

liefert, zusammen mit einer bis jetzt noch verfügbaren, willkürlichen Bedingung für die drei ζ, die lauten möge

$$\zeta_1 = 0,$$

folgende vereinfachte Gleichung:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}\frac{(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) - \zeta_2\zeta_3}{(\zeta_2 + \zeta_3) - z},$$

worin also nach früherer Definition

$$z = z_1, \quad \zeta_2 = z_2 - z_1, \quad \zeta_3 = z_3 - z_1.$$

Die Korrektionsgröße ε bewegte sich zwischen $-0{,}0149$ und $-0{,}0008$ mm, je nachdem es sich um Ablesungen zu Anfang oder gegen Ende des Versuches handelte. Nach etwa 3—4 Stunden war ε zu vernachlässigen, d. h. $< 0{,}0005$ mm geworden.

Für die späteren Versuche kam diese Komplikation nicht in Anwendung, da die einzelnen Ablesezeiten in viel kürzeren Zwischenräumen aufeinander folgten und deshalb stets nur eine Ablesung notiert werden konnte.

Die günstigsten Ablesezeiten sind aus dem Grunde schwer theoretisch zu berechnen, weil die absolute Genauigkeit der Einstellung z anfangs wegen der geringeren Schärfe und Helligkeit der Beugungsstreifen kleiner ist, wie später, jedoch nicht in einer ohne weiteres zahlenmäßig angebbaren Weise. Ich benutzte aus dem angegebenen Grunde zu Beginn des Versuchs eine größere Zahl von Ablesungen und zog ferner zur Beurteilung dieser Frage für jede neue Substanz und Konzentrationsdifferenz eine *Dauerbeobachtung* von etwa 9—12 Stunden heran. Die Ablesungen geschahen hierbei anfangs von etwa 3 zu 3 bez. 5 zu 5 Min. und erfolgten dann nach und nach in immer größeren Zwischenräumen bis zum Schluß. Die hieraus resultierenden Wertepaare t, z trug ich — die t als Abszissen, die z als Ordinaten — in einer Kurve auf, die der Kürze halber im folgenden Kurve (t, z) heißen möge.

Es ergab sich auf diese Weise eine hyperbelähnliche Linie, welche die beiden Koordinatenaxen zu Asymptoten hatte und deren Scheitel etwa bei $t = 1$ bis 2 Stunden lag. Die erste Beobachtung wurde möglichst bald — meist etwa $21^m = 0{,}35^h$ — nach Beginn des Unterfüllens der schwereren

Lösung gemacht. Hierzu war eine genaue Regulierung der Ausflußgeschwindigkeit der unterzuschichtenden Lösung nötig.[1]) Der Versuch wurde abgebrochen zu einem Zeitpunkt, bis zu dem die Kurve (t, z) während etwa 3—4 Stunden nur noch geringe Abweichungen vom geradlinigen Verlauf gezeigt hatte, d. h. ca. 6—9 Stunden nach Versuchsbeginn.

Die einzelnen Ablesezeiten jedes Versuches wurden nun so gewählt, daß die Kurve möglichst sicher bestimmt war, d. h. zu Anfang und an den Stellen größter Krümmung dichter, später bis zu 1 Stunde Zwischenpause. Ersteres aus dem angeführten Grunde der anfänglich unsicheren Ablesung, letzteres wegen der starken Krümmung der Kurve (t, z). Dabei wurde die Zeit jeder Ablesung bis auf Bruchteile von Minuten bestimmt und gleichzeitig so eingerichtet, daß der gebildete Dezimalbruch in Stunden durch zwei Dezimalen genau angegeben wurde. Es ergaben sich auf diese Weise für die verschiedenen Substanzen Versuchsreihen von 12—16 Einzelablesungen, abgesehen von den orientierenden Dauerbeobachtungen, die 30 und mehr Ablesungen umfaßten.

Einzelne Beobachtungen jeder Versuchsreihe fielen zuweilen ungenau aus, hauptsächlich wegen des unruhigen Brennens der Bogenlampe und der dadurch bedingten Verschiebung der Kohlenspitzen. Dies zeigte sich dann deutlich beim Entwerfen der Kurve (t, z) für jeden einzelnen Versuch, indem solche Punkte — die einen besonderen Vermerk in den Beobachtungstabellen bekommen hatten — oft beträchtlich außerhalb der Kurve fielen. Unter diesen Umständen dürfte es wohl als erlaubt gelten, wenn ich derartige abseits liegende Werte von der Berechnung des Gesamtresultates jedes Versuches ausschloß. Derartige Fehler kamen nach Erneuerung der Kohlenfassung selten vor, erreichten dann aber oft 4 bis 5 Proz. Abweichung vom Mittelwert. Außerdem war durch Anstellen je zweier vollkommen identischer Versuche ein be-

1) Die Einführung der Lösungen in das Diffusionsgefäß geschah in der Weise, daß die schwerere Lösung untergefüllt wurde mittels Kugeltrichter mit angeschmolzener Kapillare und zwei Hähnen, von denen der obere zum oben erwähnten Regulieren, der untere zum Öffnen und Schließen diente.

quemes Urteil über die Fehlerhaftigkeit derartiger verirrter Punkte an die Hand gegeben.

Zur Kennzeichnung der Beobachtungsmethode sowie der dabei in Frage kommenden Faktoren möge hier eine Versuchsreihe von NaCl: $\frac{n}{1}$ gegen $\frac{n}{2}$ angeführt sein.

Tabelle 6.

Versuchsreihe: $\frac{n}{1}$ NaCl gegen $\frac{n}{2}$.

Beginn der Einfüllung: $8^h 30^m$ Vorm. $a = 171{,}5$ cm.

1	2	3	4		5		6	7	8	9
Nr.	Beobachtungszeit	Horizontalskala	Vertikalskala		Endstellung		Temperatur ° C.	Zeit seit Beginn des Einfüllens	Ablenkung x des Maximums	Horizontalverschiebung x
			vert.	Trommel	vert.	Trommel				
1	$8^h 54{,}0^m$	72,185	19	5,2	107	46,3	14,60	$0{,}40^h$	44,431	0
2	57,6	72,185	24	17,1	107	46,3	—	0,46	41,792	0
3	9 3,0	72,227	30	29,0	107	42,1	—	0,55	38,631	0,043
4	10,2	72,386	36	49,2	107	26,2	—	0,67	35,270	0,201
5	21,0	72,498	44	5,4	107	15,0	—	0,85	31,596	0,313
6	39,6	72,527	52	30,0	107	12,1	14,61	1,16	27,321	0,342
7	58,8	72,605	58	17,2	107	4,3	—	1,48	24,371	0,420
8	10 24,6	72,762	63	26,1	106	38,6	—	1,91	21,625	0,577
9	11 2,4	72,960	68	47,2	106	18,8	—	2,54	18,716	0,775
10	33,0	73,088	71	41,4	106	6,0	14,63	3,05	17,146	0,903
11	12 18,0	73,153	75	9,9	105	49,5	—	3,80	15,396	0,968
12	1 26,4	73,254	78	39,9	105	39,4	—	4,94	13,495	1,069
13	2 31,2	73,312	81	7,7	105	33,6	—	6,02	12,259	1,127
14	3 30,0	73,350	82	44,6	105	29,8	—	7,00	11,352	1,165

Kolumne 3 zeigt die jeweilige Stellung des Index am Horizontalschlitten an, bei der z gemessen wurde, Kolumne 4 und 5 beziehen sich auf Skala und Trommel des Vertikalschlittens, 6 enthält die in dem Thermostat gemessene Temperatur in °C. Die Kolumnen 7, 8 und 9 sind aus bez. 2, 4 und 5, 3, wie leicht zu ersehen, berechnet.

Die Berechnung von k aus obigen Daten ist in den Gleichungen (4) und (5) angegeben und lieferte $k = 0{,}979$.

Die erhaltenen Resultate gibt die folgende

Tabelle 7.

Diffusionskoeffizienten.

Konzentration $\frac{x}{8}$ normal	c	Glyzerin		Harnstoff		Chlornatrium		Salzsäure	
		k	d	k	d	k	d	k	d
$x = 1$	$^1/_4$	0,356	41	0,973	48	1,020	26	2,208	78
2	$^1/_2$	0,354	25	0,965	79	1,013	26	2,231	16
3	$^1/_4$	0,352	50	0,958	16	1,002	25	2,294	51
4	1	0,350	46	0,946	70	0,996	97	2,331	86
5	$^1/_4$	0,348	41	0,943	46	0,987	1	2,388	33
6	$^1/_2$	0,345	19	0,933	11	0,980	16	2,422	24
7	$^1/_4$	0,342	59	0,926	24	0,972	28	2,480	90
10	$^1/_2$	0,329	66	0,901	52	0,948	82	—	—
12	1	0,315	32	0,883	46	0,932	16	—	—
14	$^1/_2$	0,300	30	0,869	24	0,917	22	—	—
Temperatur:		10,14° C.		14,83° C.		14,33° C.		14,30° C.	

In Tab. 7 enthält die erste Kolumne die Mittelkonzentration jeder Substanz, d. h. das arithmetische Mittel aus den beiden diffundierenden Konzentrationen jeder Substanz, ausgedrückt in $^1/_8$ Normallösung, die zweite Kolumne die Konzentrationsdifferenz c der beiden diffundierenden Lösungen, jede der vier folgenden an erster Stelle den Diffusionskoeffizienten k, an zweiter Stelle die Differenz d je zweier identischer Versuche, aus denen der Mittelwert gebildet wurde, in 0,01 Proz.; in der letzten Zeile endlich sind die Temperaturen notiert, bei denen die Diffusionsversuche angestellt wurden. (Vgl. hierzu Fig. 4.)

Die angegebenen Zahlen reihen sich gut in früher gefundene ein, soweit diese der oft verabsäumten Temperaturkonstanz wegen einen Vergleich zulassen.

Es zeigt sich in Tab. 7 deutlich eine regelmäßige Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Konzentration, und zwar bei Salzsäure eine Zunahme, bei den drei übrigen Substanzen dagegen eine Abnahme des Koeffizienten mit wachsender Konzentration.

Die Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Kon-

zentration für die molekulare Konzentration 1, oder wie man sagen könnte: den Konzentrationskoeffizienten der Diffusion $\varkappa = \partial k / \partial u$ kann man erstens bereits aus obiger Tabelle 7 ermitteln, zweitens aber auch aus der Horizontalverschiebung x (vgl. Tab. 6, Kolumne 9) der maximalen Ablenkung.

Änderung des Diffusionskoeffizienten k von Glycerin, Harnstoff, Chlornatrium und Salzsäure mit der Konzentration.

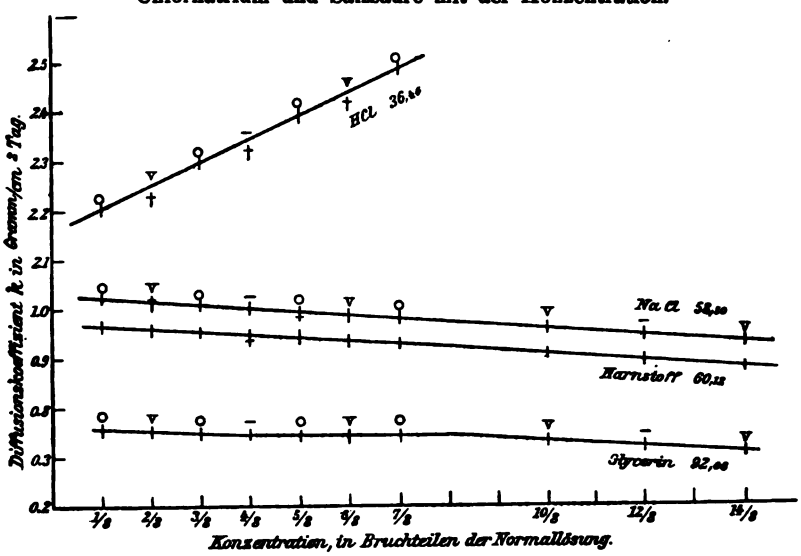


Fig. 4.

Erklärung:

Die Punkte ○ sind aus 1/4 normal. Konzentrationsdifferenz bei der Diffusion berechnet worden.
" " ▽ " " 1/2 " " " " " " "
" " – " " 1/1 " " " " " " "

Ein in dieser Hinsicht angestellter Versuch, mit Hilfe der Fickschen Diffusionsgleichung (1), worin dann natürlich k als Funktion von x aufgefaßt werden muß, d. h. aus

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

1. den Konzentrationskoeffizienten $\varkappa$ zu berechnen, sowie 2. für einen der mittleren Konzentration entsprechenden Wert von k selbst eine genauere Gleichung als (2) aufzustellen, in welche dann — wie im folgenden auseinandergesetzt werden soll — die eben erwähnten Horizontalverschiebungen x eingehen müssen,

blieb leider resultatlos, da jedenfalls Volumkontraktion und sonstige Fehler hierbei noch in Frage kommen. Jedoch stimmt die Richtung jener Verschiebungen im Verlauf der Messungen bei den verschiedenen Konzentrationen mit der aus der Theorie folgenden in jedem Fall überein.

Diese Verschiebungen des Minimums haben die in Hrn. Prof. Wieners Arbeit (l. c. p. 133—137) sehr eingehend beleuchtete Bedeutung: Richtung und Größe derselben geben ein Maß dafür an, nach welcher Seite — von der ursprünglichen Trennungsschicht aus gerechnet — die Diffusion rascher vor sich geht und wie groß der betreffende Überschuß der Wanderungsgeschwindigkeit gegenüber der mittleren Geschwindigkeit der Diffusion einer Substanz ist, für die das k berechnet wurde. Es ergibt sich aus der Theorie vorliegender Untersuchungsmethode durch einfache Überlegung der von Hrn. Prof. Wiener (l. c. p. 136) ausgesprochene Satz:

„Der Punkt maximalen Gefälles muß nach der Seite wandern, nach welcher die Diffusion langsamer erfolgt.“

Zur Messung dieser Verschiebung diente der Horizontalschlitten des Kathetometers. Die gefundenen Werte schwankten zwischen 0 und 0,4319 cm, je nach Substanz, Konzentrationsdifferenz und Zeit der Ablesung.

Als Ursachen der Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Konzentration müssen — abgesehen von Änderungen der Volumkontraktion — folgende Erscheinungen angesehen werden: Änderung der Dissoziation-, Änderung der Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen-, Änderung der Wanderungsgeschwindigkeit der Moleküle durch Veränderung der inneren Reibung mit der Konzentration, Polymerisation und Bildung anderer chemischer Verbindungen bei zunehmender Verdünnung.

Aus der Änderung der Ionenbeweglichkeit bez. Änderung der Reibung ergibt sich vermutlich eine Abnahme von k mit steigender Konzentration bei Chlornatrium, Harnstoff und Glyzerin. Den diesen drei Substanzen gegenüber abweichenden Verlauf des k von Salzsäure erwähnt auch Thovert[1]) in seiner

1) Vgl. J. Thovert, Ann. de chim. et de phys. (7) **26**. p. 366 bis 432. 1902. Verfasser verwandte — etwas modifiziert — ebenfalls vorliegende Untersuchungsmethode, und zwar als erster in ausgedehnterem Maße. —

Arbeit und zwar außerdem noch für Salpeter- und Schwefelsäure, Kaliumhydrat und Chlorkalium, während sämtliche andere von ihm untersuchten Substanzen den regelmäßigen Verlauf zeigen. Es ist schwer, ohne weiteres den Grund für dieses merkwürdige Verhalten anzugeben. Es muß wohl an die Möglichkeit gedacht werden, daß für den nicht dissoziierten Anteil dieser Elektrolyte die Diffusionsgeschwindigkeit die größere ist.

Die Grenze der Fehler, die in den vorliegenden Versuchen sich zwischen 0,97 und 0,01 Proz. bewegten, ließe sich vor allem noch weiter herabdrücken, wenn es gelänge, mit einem genügend hellen Lichtfilter die Diffusionskurven in ihren einzelnen Phasen photographisch aufzunehmen. Man hätte dann außerdem zugleich die beiden Hauptvorteile jeder photographischen Aufnahme gewonnen: Objektivität und Reproduzierbarkeit.

Resultate.

Die Ergebnisse der im vorhergehenden mitgeteilten Untersuchungen lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen:

1. Die Koeffizienten k der freien Diffusion sind bis auf 0,42 Proz. im Mittel genau bestimmt, während die früheren Methoden Werte von durchschnittlich 4—5 Proz. Fehler ergaben.

2. Die Methode ermöglicht es, dank ihrer, wie erwähnt, noch steigerungsfähigen Genauigkeit, die Veränderlichkeit ($\varkappa$) des Diffusionskoeffizienten k mit wachsender Konzentration experimentell (aus den Werten von Tab. 7) zu bestimmen.

3. Chlornatrium, Salzsäure und Harnstoff zeigen einen geradlinigen Verlauf des Diffusionskoeffizienten k, und zwar eine Abnahme für Chlornatrium und Harnstoff, eine Zunahme für Salzsäure mit steigender Konzentration. Bei Glyzerin fällt k anfangs linear, in stärkeren Konzentrationen jedoch rascher ab. (Vgl. vorstehende Fig. 4.)

Leipzig, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 19. Januar 1904.)

8. *Die Dämpfung elektrischer Schwingungen durch eine Funkenstrecke; von K. Simons.*

§ 1. In der Telegraphie vermittelst elektrischer Wellen ist einer der größten Fortschritte seiner Zeit durch Einführung des möglichst ungedämpften elektrischen Schwingungskreises durch Braun gemacht worden. Der geschlossene Kreis dient als Energiereservoir für die Strahlung des Luftleiters, der gedämpft sein muß, sollen Fernwirkungen erzielt werden. Verluste durch Ohmschen Widerstand, Strahlung und dielektrische Hysteresis sind auch in dem geschlossenen Kreise nicht ganz zu vermeiden, vor allem liegt aber auch in der erregenden Funkenstrecke eine nicht zu umgehende Dämpfung. Bisher liegen nur vereinzelte Angaben über die Größe dieser Dämpfung vor. So gibt Bjerknes[1]) nach Resonanzversuchen den einer Funkenstrecke entsprechenden Widerstand auf 11 Ohm an, während Braun ihn auf einige Zehntel Ohm schätzt, wie Wien[2]) mitteilt. Es ist ja aber selbstverständlich, daß sich nicht für alle Funkenstrecken der gleiche Widerstand ergibt, jene Angaben sollen nur zur Bezeichnung der Größenordnung dienen. Der Widerstand wird von der Funkenlänge und der Stromdichte abhängig sein. Letztere ist aber, abgesehen von dem aufladenden Induktorium, eine Funktion der Kapazität und des im Kreise vorhandenen Ohmschen Widerstandes, zugleich auch der Funkenlänge selbst, da diese das Potential, zu dem die Kapazität aufgeladen wird, bestimmt. Einen weiteren Einfluß wird die Beschaffenheit der Luft und vielleicht auch das Elektrodenmaterial haben.

§ 2. Im folgenden soll nun nicht eine allgemeine Formel für den Widerstand einer Funkenstrecke gesucht werden, sondern nur eine Methode nebst einigen danach angestellten Messungen wiedergegeben werden, durch die eine Funkenstrecke direkt durch den Ohmschen Widerstand substituiert wird. Es werde ein Schwingungskreis aus Selbstinduktion und Kapazität

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1895.
2) M. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 686. 1902.

gebildet und in ihm zwei Funkenstrecken angeordnet. Von diesen dient die eine zur Erregung der Schwingungen, wir wollen sie als Entlade-Funkenstrecke (E.-F.-S.) bezeichnen, die zweite nur zur Dämpfung, sie heiße die Dämpfungs-Funkenstrecke (D.-F.-S.). Dies wird durch die nebenstehende Schaltung erreicht (vgl. Fig. 1).

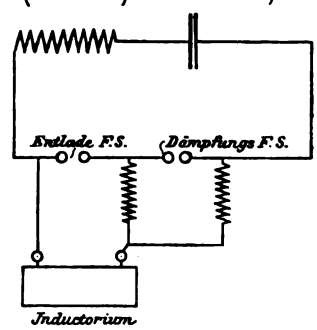


Fig. 1.

Beide Seiten der D.-F.-S. werden durch Drosselspulen von dem einen Pol des Induktoriums aufgeladen, so daß bis zur eintretenden Entladung keine Spannungsdifferenz an ihr herrscht. Oder zieht man die E.-F.-S. so weit auseinander, daß eine Entladung nicht mehr stattfindet, so treten auch an der D.-F.-S. unter keinen Umständen Funken auf. Im Momente der Entladung aber suchen sich die raschen Schwingungen durch die D.-F.-S. ihren Weg, die Wellenlänge ist nur durch die Kapazität und Selbstinduktion des Kreises gegeben, da die Welle, die auch durch die Drosselspule bestimmt ist, von sehr großer Länge und sehr geringer Intensität ist. Wir erhalten so eine variable Funkenstrecke, die auf das Entladungspotential ohne Einfluß ist und direkt durch Ohmschen Widerstand ersetzt werden kann.

Die entstehenden Schwingungen wurden nun durch einen Wellenmesser der Gesellschaft für Funkentelegraphie beobachtet. Es ist dies ein möglichst ungedämpfter Schwingungskreis mit variabler Kapazität, der mit dem zu untersuchenden System lose gekoppelt wird. Eine Windung in ihm aus kräftigem Kupfer induziert Ströme in einem weiteren Kreise, bestehend aus wenigen Windungen und Ohmschen Widerstand. Die Erwärmung dieses Widerstandes, zu der nur ein sehr geringer Energieaufwand im Vergleich zu der Energie des Hauptschwingungskreises erforderlich ist, wird durch ein Lufthermometer gemessen. Der Ausschlag des Thermometers gibt ein Maß für die Amplitude der Welle an, welche der konstanten Selbstinduktion und der gerade eingestellten Kapazität des Wellenmessers entspricht. Wegen genauerer Angaben und Theorie des Wellenmessers muß auf die besonderen Veröffent-

lichungen über ihn hingewiesen werden.[1]) Zunächst wurde mittels dieses Apparates die Welle bei kurzgeschlossener D.-F.-S. gemessen, alsdann diejenigen bei verschiedener Länge der D.-F.-S., während alles übrige E.-F.-S., Induktoriumstrom, Kuppelung des Wellenmessers konstant gehalten wurde. Schließlich wurde noch die Welle bestimmt bei Ersetzung der D.-F.-S. durch passende Widerstände ohne Selbstinduktion. Aus den Kurven der Wellen geht direkt hervor, ob die Forderung vernachlässigbarer Selbstinduktion durch die gewählten Widerstände erfüllt wurde.

§ 3. Als Widerstandsmaterial wurde Graphit bez. Bogenlampenkohle gewählt, die den zu stellenden Bedingungen wohl genügen. Die Erwärmung konnte in solchen Grenzen gehalten werden, daß eine größere Veränderung durch die steigende Temperatur ausgeschlossen schien, außerdem wurde der Widerstand direkt nach der Messung bestimmt. Daß dieser Widerstand praktisch derselbe sei für rasche Schwingungen wie für den Gleichstrom der Wheatstonebrücke, geht aus folgendem hervor. Lord Rayleigh[1]) entwickelt den Widerstand eines geraden zylindrischen Leiters, um den es sich handelt, allgemein in der Form:

$$R' = R\left(1 + \frac{1}{12}\cdot p^2\mu^2\alpha^2 - \frac{1}{180}\cdot p^4\mu^4\alpha^4 + \ldots\right).$$

Hierin bedeutet R' den Widerstand für rasche Schwingungen, R den Ohmschen, p die Anzahl der ganzen Schwingungen pro Sekunde, μ den Permeabilitätskoeffizienten, α die Leitfähigkeit. Nun war der spezifische Widerstand des benutzten Graphits gleich 34 600 000 (C.G.S.) gegenüber 1650 bei Kupfer, so daß für die erste der später wiedergegebenen Messungen sich folgendes ergibt:

$$p = \frac{3\,.\,10^{10}}{5\,.\,10^4} = 6\,.\,10^6, \quad \mu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{3{,}46\,.\,10^7},$$

$$R' = R\cdot\left(1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{36\,.\,10^{10}}{12\,.\,10^{14}}\ldots\right) = R\left(1 + \frac{1}{40000} - \ldots\right).$$

Widerstände aus Graphit und Bogenlampenkohle wurden also an Stelle der Dämpfungsfunkenstrecke eingesetzt und aus den Kurven der so erhaltenen Wellen mit verschiedener

1) J. Dönitz, Elektrotechn. Zeitschr. 24. p. 920. 1903.
1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21. p. 381. 1886.

Dämpfung eine neue Kurve gezeichnet, welche die maximalen Thermometerausschläge als Funktion des zugeschalteten Widerstandes darstellt. Aus den Kurven der durch die Funkenstrecke gedämpften Wellen wurden schließlich ebenfalls die

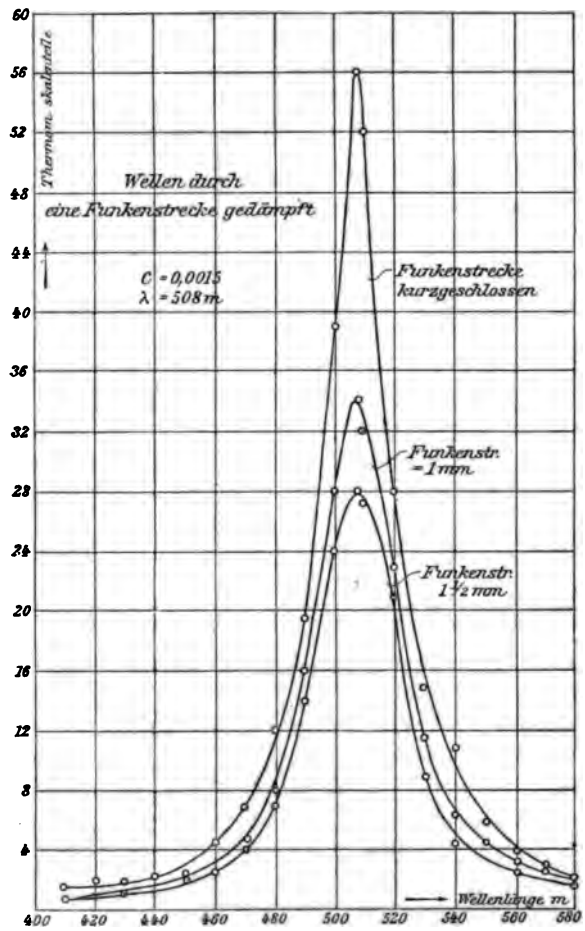


Fig. 2.

maximalen Werte herausgegriffen und der ihnen entsprechende Ohmsche Widerstand aus jener Kurve abgelesen.

§ 4. Dies sei an verschiedenen Beispielen erläutert. Es wurde ein Ölkondensator von 0,0015 Mikrof. Kapazität gewählt

und mit einer Selbstinduktion zu einem Kreise vereinigt, so daß sich $\lambda_{max.} = 508$ m als Wellenlänge ergab. Die Entladefunkenstrecke betrug $2^1/_2$, die D.-F.-S. bis 2 mm. Die Funken waren bläulichweiß und knallend. Die erhaltenen Kurven für

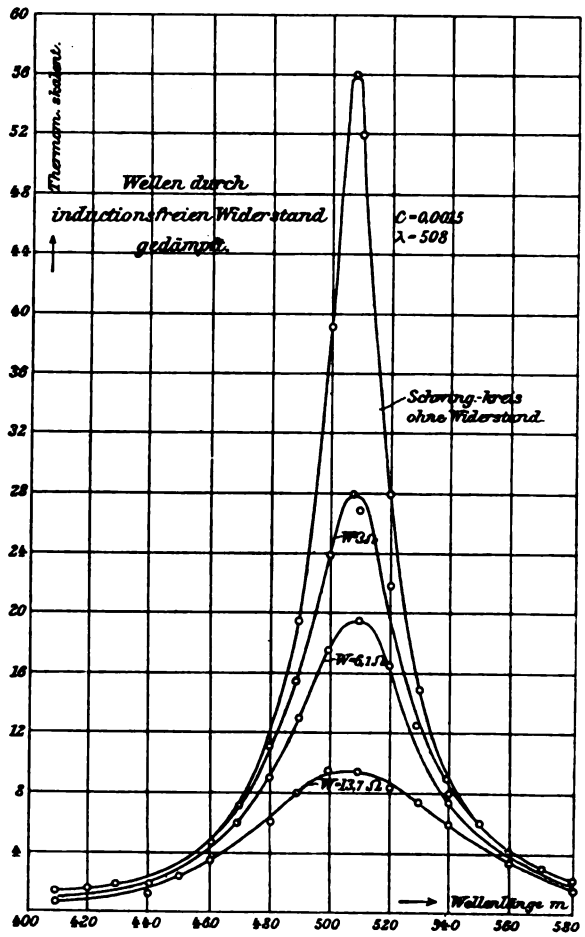


Fig. 3.

kurzgeschlossene Funkenstrecke und 1 und $1^1/_2$ mm gibt Fig. 2; bei 2 mm Funkenstrecke wurden die Thermometerausschläge unruhig, hervorgerufen durch zeitweises Aussetzen der Funken. Die Kurven der Wellen bei eingeschaltetem Ohmschen Wider-

stand (Graphitstäbchen) zeigt Fig. 3. Die Maximalwerte als Funktion des Widerstandes gibt Fig. 4. Als Widerstand der

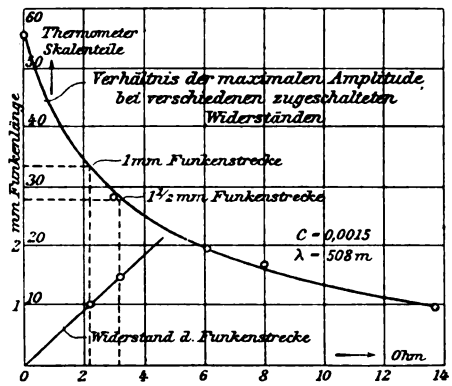


Fig. 4.

Funkenstrecke von 1 mm ergab sich 2,2 Ω, der $1^1/_2$ mm Funkenstrecke 3,2 Ω.

Die Messungen waren:

Wellenlänge in m	Funkenstrecke			Substituierter Widerstand				
	kurzgeschl.	1 mm	$1^1/_2$ mm	3,1 Ω	6,1 Ω	8 Ω	13,7 Ω	3,0 Ω
400	1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	—	—	$^3/_4$
420	$1^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1	—	—	—	1
440	2	1	$1^1/_2$	2	2	$1^1/_2$	$1^1/_2$	2
460	$4^1/_2$	$2^1/_2$	—	$3^1/_2$	3	3	—	$3^1/_2$
470	7	$4^1/_2$	4	6	6	—	—	6
480	12	8	7	$8^1/_2$	8	8	6	9
490	$19^1/_2$	16	14	16	13	$12^1/_2$	8	$15^1/_2$
500	39	28	24	23	$17^1/_2$	$16^1/_2$	$9^1/_2$	24
508	56	34	28	—	—	—	—	—
510	52	32	27	26	$19^1/_2$	$17^1/_2$	$9^1/_2$	27
520	28	23	$20^1/_2$	22	$16^1/_2$	16	$8^1/_2$	22
530	15	11	9	$12^1/_2$	—	11	$7^1/_2$	$12^1/_2$
540	9	$6^1/_2$	$4^1/_2$	8	$7^1/_2$	$7^1/_2$	6	8
550	6	$4^1/_2$	—	6	—	—	—	—
560	4	$3^1/_2$	2	4	4	4	$3^1/_2$	4
570	3	$2^1/_2$	—	—	—	—	—	—
580	2	$1^1/_2$	$1^1/_2$	2	2	2	$1^1/_2$	2

Die Angaben sind gemacht in den willkürlichen Einheiten der Thermometerskala.

Die Funkenstrecken bestanden bei diesen Versuchen aus Zinkzylindern von 10 mm Durchmesser mit aufgesetzten Halbkugeln.

§ 5. Es wurde nun bei gleichen Elektroden ein bläulicher Funken untersucht, den man in der Funkentelegraphie als inaktiv bezeichnen würde. Im Kreise befand sich eine Kapazität von 0,00188 Mikrofarad und zwar eine Leydener Flasche mit Stanniolbelag, und eine Selbstinduktion, welche die Wellenlänge $\lambda_{max.}$ auf 790 m brachte. Der Entladefunken war 3 mm lang, die Dämpfungsfunkenstrecke wurde von $^1/_2$—$1^1/_2$ mm variiert. Die Koppelung des Wellenmessers war eine andere, so daß die Thermometerausschläge nicht mit denen der vorigen Meßreihe verglichen werden können. Es seien nur die maximalen Amplituden angegeben (vgl. Fig. 5):

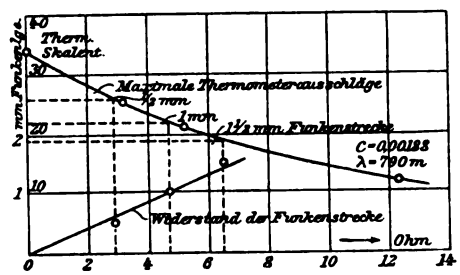


Fig. 5.

D.-Funkenstrecke kurzgeschl.,	$\lambda_{max.}$ = 790,	Thermometerausschlag	= 34
„ $^1/_2$ mm lang,	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 26
„ 1 „ „	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 22
„ $1^1/_2$ „ „	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 19
Substituiert. Widerst. = 3,2 Ω,	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 25
„ „ = 5,2 Ω,	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 21
„ „ = 12,3 Ω,	$\lambda_{max.}$ = 790,	„	= 12

Durch Interpolation ergibt sich hiernach der Widerstand der $^1/_2$ mm-Funkenstrecke = 2,7 Ω, der 1 mm langen = 4,6 Ω, der $1^1/_2$ mm langen = 6,5 Ω. Die Widerstände dieser Funken liegen also bei weitem höher als im vorigen Falle.

§ 6. Es sei noch der Widerstand einer Funkenstrecke wiedergegeben, die sich in einem Schwingungskreise befindet, wie er in der Telegraphie mittels elektrischer Wellen praktisch oft zur Anwendung kommt. Der Kreis wurde gebildet aus sechs Leydener Flaschen mit einer Kapazität von zu-

sammen 0,0101 Mikrof.[1]) und einer solchen Selbstinduktion, daß $\lambda_{max.} = 405$ m betrug. Die Dämpfungsfunkenstrecke wurde aus Zinkzylindern von $5^1/_2$ mm Durchmesser gebildet. Zur Substitution wurden Bogenlampenkohlen von 11 mm Durchmesser und 95 mm Länge gewählt, deren drei maximal hintereinander geschaltet 0,36 Ω Widerstand warm gemessen ergaben. Mit einem großen Funkeninduktorium und Turbinenunterbrecher betrieben ging die Entladung über beide Funkenstrecken, von denen die E.-F.-S. stets eine Länge von $15^1/_2$ mm hatte, doch nicht mehr ganz gleichmäßig vor sich, das Thermometer schwankte, und es wurden nur Mittelwerte erhalten. Die Maximalamplituden betrugen wieder (vgl. Fig. 6):

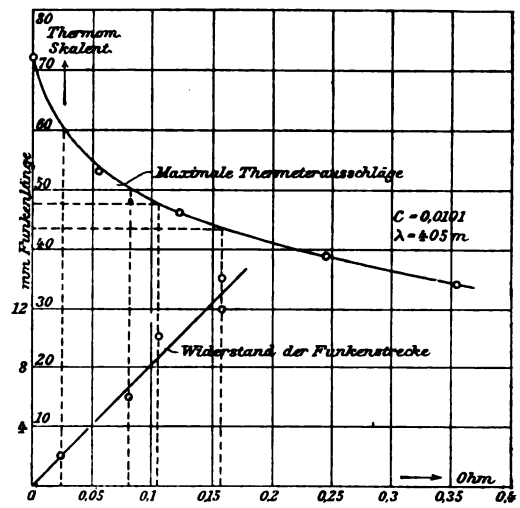


Fig. 6.

Bei Kurzschließung der Funkenstrecke und $\lambda_{max.} = 405$:

	Thermometerausschlag	72
2 mm	Funkenstrecke	60
4 „	„	55
6 „	„	50
10 „	„	48
12 „	„	43
14 „	„	43

Bei Substituierung eines Widerstandes

von 0,061 Ohm	Thermometerausschlag	53
„ 0,12 „	„	46
„ 0,24 „	„	39
„ 0,36 „	„	34

1) Die Flaschen waren in den Laboratorien der Firma Siemens & Halske geeicht.

Eine 4 mm lange Funkenstrecke entspricht also hier erst einem Widerstand von 0,05 Ohm und eine 13 mm lange etwa 0,16 Ohm. Es ergibt sich somit, daß der von **Braun** angegebene Wert die richtige Größenordnung für die heutigen normalen Verhältnisse angibt. Im übrigen scheinen die Messungen zu zeigen

1. daß der Widerstand einer Funkenstrecke um so geringer ist, je größer die entladenen Elektrizitätsmengen sind, d. h. je weißer und knallender der Funke ist;

2. daß innerhalb der beobachteten Grenzen der Widerstand der Funkenstrecke ihrer Länge proportional wächst. Doch müssen genauere Angaben über diese Punkte, sowie den Einfluß aller in § 1 genannten Faktoren weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

§ 7. Wäre der Wellenmesser tatsächlich ein ungedämpftes System und wäre die Koppelung eine ideal lose, d. h. eine Rückwirkung nicht vorhanden, so müßten mit abnehmendem Widerstand im erregenden System zugleich mit dessen Schwingungsamplitude auch die Thermometerausschläge des Wellenmessers bei Resonanz ins Unendliche wachsen, während bei unendlichem eingeschalteten Widerstand der Ausschlag Null wäre. Man könnte in erster Annäherung die Kurve, welche die Abhängigkeit der Thermometerausschläge von dem eingeschalteten Widerstand darstellt, als Hyperbel auffassen; und tatsächlich zeigen die erhaltenen Kurven hyperbolischen Charakter. Alsdann könnte aus diesen Kurven der Widerstand berechnet werden, der den Verlusten im gegebenen System entspricht, und der in Wirklichkeit nicht Ohmscher Widerstand zu sein braucht, der bei einem geschlossenen Schwingungskreis vielmehr zum größten Teil in der E.-F.-S. liegen wird. Man sucht nur zu den als Hyperbeln aufgefaßten Kurven (Figg. 4—6) die negative Abszisse, in der die Asymptote an die Hyperbel zu ziehen ist und in der also der Thermometerausschlag unendlich werden würde. Dieser Widerstand berechnet sich im ersten Beispiel zu rund 3 Ohm, im zweiten zu 12, im letzten zu 0,34 Ohm. Diese Berechnung ist aber natürlich nur eine rohe Annäherung und auch aus dem Grunde nicht zulässig, weil durch Zuschaltung von Widerstand in den Schwingungskreis auch der Widerstand der Entladefunkenstrecke

sich ändert, es ist also die Größe, die berechnet werden soll, nicht in allen Messungen als Konstante enthalten. Da aber ein Maß für die Dämpfung irgend eines Schwingungsgebildes dringend notwendig ist, so wäre eine überschlägige Vergleichung doch vielleicht auf diesem Wege zu erreichen. Denn es läßt sich aussagen, daß von zwei Systemen dasjenige das gedämpftere ist, bei dem ein Einschalten des gleichen Widerstandes die maximale Amplitude, die zunächst bei beiden gleich groß anzunehmen ist, weniger herabzudrücken imstande ist.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, in deren Laboratorien ich diese Messungen ausführen konnte, und ihrem Ingenieur Hrn. R. Schmidt für seine liebenswürdige Unterstützung bei den Messungen meinen Dank auszusprechen.

Charlottenburg, Techn. Hochschule, 19. Januar 1904.

(Eingegangen 1. Februar 1904.)

9. *Über ein tragbares Torsionsmagnetometer;* *von F. Kohlrausch und L. Holborn.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Für Beobachtungen an magnetisch gestörten Orten haben wir die Konstruktion und den Gebrauch eines Magnetometers mit einem astatischen Paar von Magneten beschrieben, die in gewöhnlicher Weise, nur in größerem Abstande, übereinander verbunden sind.[1]) Wir zeigten, daß ein solches Magnetpaar sich zu genauen magnetometrischen Messungen aus *erster Hauptlage* fast ebensogut eignet, wie in einem ungestörten Felde das gewöhnliche Magnetometer. Denn erstens werden innerhalb der gebräuchlichen Meßabstände die von dem zweiten Magnet herrührenden, durch einen einfachen Ausdruck dargestellten Korrektionen für eine genaue Messung und bequeme Rechnung bereits hinreichend klein, wenn der Vertikalabstand des Hilfsmagnetes eine mäßige, mit der instrumentellen Anordnung noch verträgliche Größe bekommt. Zweitens fand sich in einem Platiniridiumdraht eine Aufhängung von sehr konstanter, so gut wie nachwirkungsfreier Torsionskraft.

Das Magnetometer, seit 1902 in Gebrauch, bewährte sich dabei auch bezüglich seiner Haltbarkeit. Die Schwankungen seiner Konstante waren geringer als bei dem Erdfeldmagnetometer; sie verlangen wesentlich nur Temperaturkorrektionen. Die Störungen durch den Straßenbahnbetrieb, an der freien Magnetnadel bis 4′ betragend, machten sich nicht mehr bemerklich.

Der bei den damaligen Versuchen gewählte Magnetabstand betrug 193 cm. Das lange Gehänge, welches oben und unten die Magnete trägt, wurde an der Zimmerdecke aufgehängt.

Man kann nun aber den Abstand vermindern, ohne die magnetometrische Ausgiebigkeit des Instrumentes zu stark einzuschränken. Das hier zu beschreibende Magnetometer

1) F. Kohlrausch u. L. Holborn, Ann. d. Phys. 10. p. 287. 1903.

hat nur 126 cm, und bei dieser Höhe ist es möglich, die in mancher Hinsicht ungünstige Deckenaufhängung zu verlassen. Es ist nunmehr ein *tragbares* Instrument in der Werkstatt der Reichsanstalt ausgeführt, welches sich bei längerem Gebrauche bewährt und dem ersten Apparat gegenüber keine Nachteile gezeigt hat.

Die Magnete sind wie früher Zylinder von 60 mm Länge und 7 mm Durchmesser, deren Moment etwa je 400 C.G.S. beträgt.[1]) Ihr Abstand von 126 cm erlaubt bei den Ablenkungen noch Entfernungen bis zu 1 m anzuwenden, ohne daß die Korrektion wegen des Nebenmagnetes

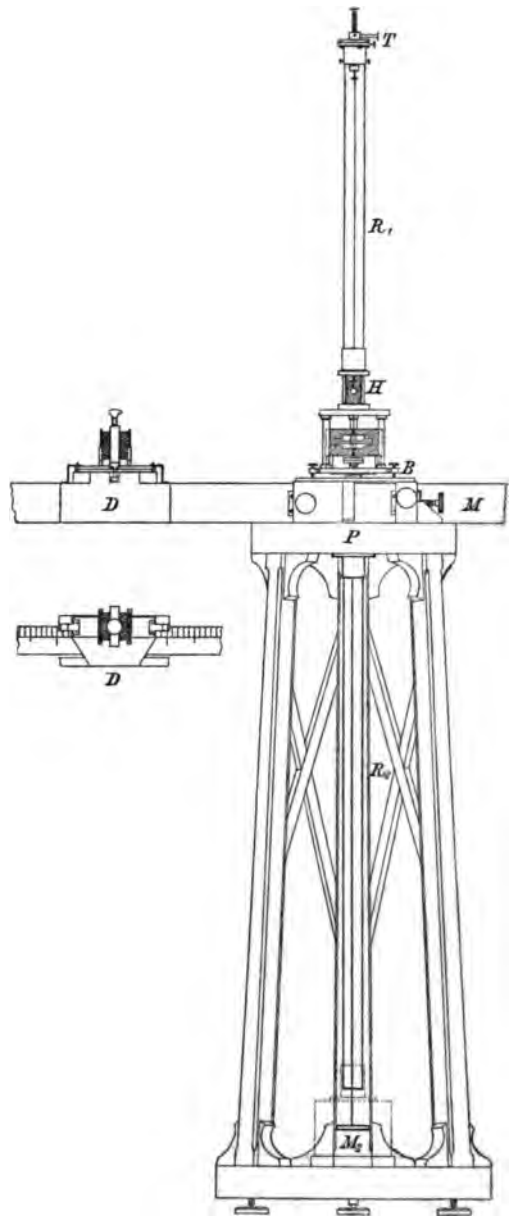


Fig. 1. ($^1/_{14}$ nat. Größe.)

1) Wie man leicht sieht, können schwächere Stäbe in mancher Hinsicht vorteilhaft sein. Für die Verhältnisse der Laboratorien der Reichsanstalt kommen diese Gesichtspunkte nicht in Betracht.

2 Proz. übersteigt (l. c. p. 296). Der obere Magnet M_1, der von dem teilbaren Dämpfer K umgeben wird und jetzt Hauptmagnet ist, befindet sich in bequem zugänglicher Höhe, während der untere Magnet M_2 16 cm vom Fußboden entfernt bleibt.

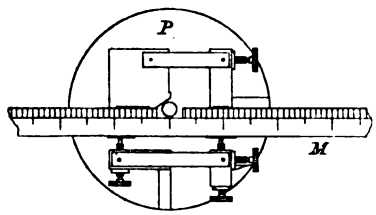


Fig. 1a. ($^1/_{14}$ nat. Größe.)

Das Gehänge ist dadurch vereinfacht, daß die Verbindungsstange S der Magnete sich nicht durch deren Lager hindurch fortsetzt. Die Magnete liegen vielmehr, damit man sie umlegen und vertauschen kann, mit passenden Anschlägen in offenen Schiffchen, die sich im Azimut gegeneinander verstellen lassen; die Drehung gibt der in 40 Teile geteilte Kreis C an.

Die Empfindlichkeit des Systems, das zurzeit an einem geglühten Platiniridiumdraht von 520 mm Länge und 0,15 mm Durchmesser hängt, entspricht hierbei der Empfindlichkeit einer einfachen im Erdfelde aufgehängten Nadel.

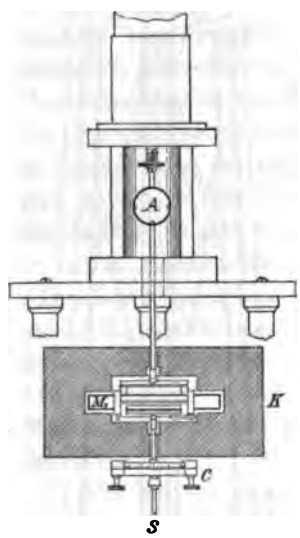


Fig. 2. ($^5/_{18}$ nat. Größe.)

Der obere Teil des Instrumentes (Fig. 1) mit dem auf die Glasröhre R_1 gekitteten Torsionskopfe T und dem unten sich anschließenden Spiegelgehäuse H, das durch drei Säulen mit der auf Stellschrauben ruhenden Bodenplatte B verbunden ist, gleicht vollständig der Konstruktion des gewöhnlichen Magnetometers und könnte als solches gebraucht werden

Dieser obere Teil steht auf der Platte P eines festen, auf drei Stellschrauben ruhenden Stativs aus Eichenholz. An der unteren Seite der Stativplatte ist die Messingfassung des Glasrohres R_2 angeschraubt, welches von der Verbindungsstange der beiden Magnete durchsetzt wird. Das Glasrohr endigt oberhalb des unteren Magnetes, der ebenso wie der obere durch einen zweiteiligen Holzkasten gegen Luftströmungen

geschützt wird. Der Holzkasten um den unteren Magnet ist in Fig. 1 durch punktierte Linien angedeutet.

Die obere Stativplatte P (in Fig. 1a im Grundriß dargestellt) trägt gleichzeitig die in Zentimeter geteilte hölzerne Ablenkungsschiene M von 2,2 m Länge. Durch aufgeleimte Klötze, auf denen der obere Magnetometeraufsatz steht, sind auf der Platte P zwei zueinander senkrechte Lagen für den Maßstab M abgegrenzt, in denen er durch leicht anzuziehende Schrauben derart festgehalten wird, daß die Kante mit den Teilstrichen jedesmal durch die Achse der Aufhängung geht.

Die Richtung der Holzschiene M ist durch ihre Lagerung auf der Platte P des Stativs bestimmt. Ist die Schiene daher für eine Richtung des astatischen Systems, z. B. die Nord-Südlage orientiert[1]), so braucht man die Schiene nur aus dieser Lage herauszuziehen und in die zweite dazu senkrechte hineinzuschieben, wenn man das System durch Drehung des Torsionskreises T in die Ost-Westrichtung bringt. Es ist hierfür also keine Drehung des Stativs nötig.

Damit auch das Beobachtungsfernrohr an seinem Platze stehen bleiben kann, sitzt der Spiegel A an der axialen Stange mit zwei konzentrischen kleinen Hülsen auf. Von diesen läßt sich die innere mit einem Schräubchen feststellen, während die äußere mit Reibung zwischen Anschlägen um 90° drehbar bleibt.[2])

Auf dem Maßstabe M ist der hölzerne Schlitten D verschiebbar. Die Stellung wird durch zwei Indices angegeben. Die ablenkende Spule (oder Magnet) liegt in einem Messingschiffchen, das um eine mittlere Achse gedreht werden kann. Das richtige Azimut wird durch Anschläge gegeben. Um über diese hinüberzukommen, ist das Schiffchen bei der Drehung etwas zu heben. Der Schlitten D hat nur an einer Seite der Schiene Führung. Die Mitte des Schiffchens fällt mit derjenigen Schienenkante zusammen, die durch die Achse des

1) Da die Ablenkungen, wie früher ausgeführt wurde, aus erster Hauptlage erfolgen sollen, so muß die Ablenkungsschiene auf der Richtung der Magnete senkrecht stehen.

2) Man prüft den Winkel zwischen den Anschlägen, indem man den Spiegelträger vor der Montierung des Instrumentes auf einen Theodoliten setzt und auf den Spiegel ein Fernrohr mit Skale einstellt.

Instrumentes geht (vgl. die Fig. 1). Die Schiene wird gegen Durchbiegen neben dem Stativ leicht unterstützt.

Das Gehänge ist seiner ganzen Länge nach gegen Luftströmungen dicht abgeschlossen. Hierfür dienen einmal die Glasrohre R_1 und R_2, sodann die Schutzkasten für die Magnete und den Spiegel, endlich noch ein kurzes Messingrohr, das aus der Bohrung der oberen Stativplatte bis unter die Bodenplatte B heraufgezogen werden kann.

Die Prüfung des Entfernungsgesetzes geschah in der früheren Weise mit einer ablenkenden Spule, deren Stromstärke auf etwa 0,1 Proz. gemessen wurde. Beispielsweise seien die Werte für die Konstante C aus zwei an verschiedenen Tagen angestellten Beobachtungsreihen, nach den Entfernungen a der Spule geordnet, angegeben:

a (cm)	C 20,7°	C 16,0°
45	2. Okt. 0,18991	3. Okt. 0,18986
50	0,18993	0,19010
60	0,19017	0,19000
70	0,19049	0,19010
80	0,19025	0,19010
90	0,19021	0,18993
100	0,19032	0,18985
	Mittel: 0,19018	0,18999

Die Ruhelage ist ebenso befriedigend wie bei dem ersten Instrument. Schwankungen von $^1/_{10}$ Skt. bei 2 m Skalenabstand, die zeitweise auftraten, scheinen nur von mechanischen Erschütterungen herzurühren, da sie ihren Charakter nicht änderten, als die Magnete des astatischen Systems durch Messingzylinder ersetzt wurden.

Wie schon früher bemerkt worden ist, wird die Ruhelage durch Änderungen in der Gleichheit der Magnete am wenigsten gestört, wenn diese nordsüdlich gerichtet sind. Die Empfindlichkeit ändert sich dagegen am wenigsten in der Ost-Westlage, während sich hier die Ruhelage stärker verschiebt, wenn die Magnete ihr Moment in ungleicher Weise ändern. Es wird dies im geheizten Zimmer eintreten, wo die Temperatur in ungleichen Höhen verschieden wechselt. In dieser Beziehung ist der neue Apparat günstiger als der frühere, wo der eine Magnet hoch oben im Zimmer hing.

Das Torsionsmagnetometer verlangt, daß die Störungen an den Orten beider Nadeln merklich gleich sind. Über die Bedingungen, unter denen diese Forderung erfüllt sein wird, läßt sich nur schätzungsweise etwas sagen. Dahin gehört z. B., daß ein großer Gesamtbetrag der Störung meistens auf einen geringen Abstand der Störungsquelle deutet und deswegen von vornherein eine starke Inhomogenität des Störungsfeldes erwarten läßt.

Handelt es sich um den Einfluß magnetisierter Eisenmassen, so wird für unseren Höhenunterschied der beiden Nadeln von 126 cm häufig ein nicht sehr großer Abstand genügen, weil die Differenz der Fernwirkung eines Magnetes auf zwei feste Punkte cet. par. etwa mit der vierten Potenz der Entfernung abnimmt. Über Stromvierecke und besonders über vagabundierende Ströme der Straßenbahnen wird man generell kaum etwas sagen können; ob das Torsionsmagnetometer hier brauchbar ist, wird jeweilig experimentell festgestellt werden müssen.[1]) Man darf daher das Instrument nicht etwa als Universalheilmittel gegen Straßenbahnstörungen ausgeben und annehmen wollen, daß mit dem Torsionsmagnetometer nun alle berechtigten Ansprüche der Physik den Störungen gegenüber befriedigt wären.

Außerdem darf nicht vergessen werden, daß das Torsionsmagnetometer, sei es an der Decke aufgehangen oder, wie das hier beschriebene, aufgestellt, viel stabilere lokale Verhältnisse verlangt, als das andere. Ferner besitzt das gewöhnliche Erdmagnetometer in seiner kunstloseren und wohlfeileren Herstellung sowie in der einfacheren Aufstellung und Einregulierung, endlich auch in der Anwendbarkeit kleiner und schwacher Magnetnadeln unersetzte Vorzüge.

Auf der anderen Seite mag doch noch hervorgehoben werden, daß in höheren Breitengraden, wo die starke Veränderlichkeit des erdmagnetischen Azimuts oder die Schwäche des Erdfeldes den Gebrauch des gewöhnlichen Magnetometers beeinträchtigen, in dem Torsionsmagnetometer für physikalische Zwecke ein bisher nicht vorliegender Ersatz geboten wird.

Charlottenburg, Januar 1904.

1) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von F. Henning.

(Eingegangen 29. Januar 1904.)

10. *Über die Schallgeschwindigkeit in sehr engen Röhren*[1]*; von F. A. Schulze.*

Die von Kundt[2]) zuerst experimentell nachgewiesene, von H. v. Helmholtz[3]) und G. Kirchhoff[4]) theoretisch behandelte Erscheinung, daß die Schallgeschwindigkeit in Röhren kleiner ist als in freier Luft, ist mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen.

Kirchhoff hat als Schallgewindigkeit v in Röhren den Wert angegeben

$$v = V\left(1 - \frac{\gamma}{d\sqrt{\pi n}}\right);$$

wobei V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft, d den Durchmesser der Röhre, n die Schwingungszahl des Tones bedeutet; γ ist gleich

$$\sqrt{\mu} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sqrt{\nu},$$

wobei

$$\mu = \frac{\text{Reibungskonstante}}{\text{Dichte}}, \quad \nu = \frac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spez. Wärme bei konst. Vol.}},$$

a der wahre, b der Newtonsche Wert der Schallgeschwindigkeit ist.

Alle bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand laufen im wesentlichen auf eine Prüfung dieser Formel hinaus. Es seien hier nur die Arbeiten von Kundt[5]), A. Seebeck[6]), Schneebeli[7]), Kayser[8]), Low[9]), Stevens[10]) und J. Müller[11])

1) Der wesentliche Inhalt bereits veröffentlicht in den Sitzungsber. d Marburger Naturwissensch. Gesellsch. p. 59. 1903.

2) A. Kundt, Pogg. Ann. **135**. p. 337 u. 527. 1868.

3) H. v. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. **1**. p. 338. 1882.

4) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **134**. p. 77. 1868.

5) A. Kundt, l. c.

6) A. Seebeck, Pogg. Ann. **139**. p. 104. 1870.

7) H. Schneebeli, Pogg. Ann. **136**. p. 296. 1869.

8) H. Kayser, Wied. Ann. **2**. p. 218. 1877.

9) J. W. Low, Wied. Ann. **52**. p. 641. 1894.

10) H. Stevens, Ann. d. Phys. **7**. p. 285. 1902.

11) J. Müller, Ann. d. Phys. **11**. p. 331. 1903.

erwähnt. Alle diese Arbeiten benutzen nun entweder zwar enge Röhren, aber hohe Töne, oder tiefere Töne, aber verhältnismäßig weite Röhren, so daß die Änderung der Schallgeschwindigkeit immer nur gering sein konnte, und etwaige Beobachtungsfehler großen Einfluß hatten. Die genannte Formel läßt jedoch sehr bedeutende Verringerungen der Schallgeschwindigkeit voraussehen, falls *tiefe Töne* durch *enge Röhren* gehen; so müßte z. B., wenn man für γ bei trockener Luft von Zimmertemperatur den theoretischen Wert, ca. 0,006 (Meter und Sekunde als Einheiten), einführt, die Schallgeschwindigkeit für einen Ton von 200 Schwingungen in einer Röhre von 1 mm Durchmesser schon um 24 Proz. geringer sein als in freier Luft.

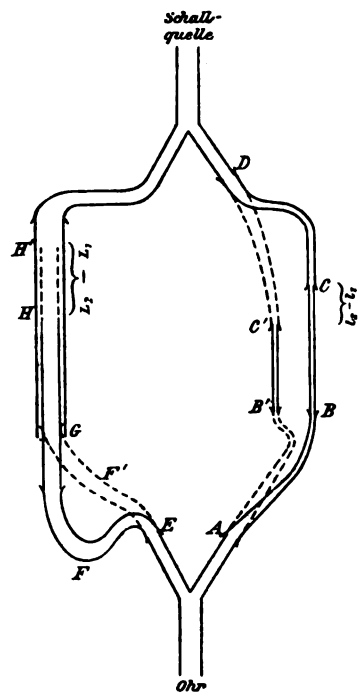
Nun haben alle Beobachter übereinstimmend für γ Werte gefunden, die größer als der theoretische sind; übrigens gibt G. Kirchhoff selbst diesen sogenannten „theoretischen" Wert nur als untere Grenze an, da er in ihm die Wärmestrahlung nicht berücksichtigt.

Nach J. Müller hat γ in Wirklichkeit überhaupt keinen bestimmten Wert; bei seinen Versuchen schwankte γ zwischen 0,00314 und 0,01663; bei Einsetzung dieses letzteren Wertes von γ würde sich in obigem Beispiel, $n = 200$, $d = 1$ mm, eine Verminderung der Schallgeschwindigkeit um bereits 66 Proz. ergeben. Bei einem Durchmesser von 0,66 mm würde die Schallgeschwindigkeit der Formel nach bereits auf Null gesunken sein. Diese enorme Verringerung der Schallgeschwindigkeit erscheint wenig wahrscheinlich, so daß es von Interesse schien, die Schallgeschwindigkeit wirklich einmal bei tiefen Tönen und sehr engen Röhren zu messen.

Die sehr hohen Werte, die gelegentlich für γ gefunden sind, sind vielleicht zum Teil auf die Anwendung der Kundtschen Staubfiguren zurückzuführen, bei denen also die Röhre Pulver enthält, dessen Anwesenheit allein die Schallgeschwindigkeit schon vermindert.

Daß man die Kirchhoffsche Formel nur bei nicht sehr großen Verringerungen der Schallgeschwindigkeit anwenden darf, ergibt sich übrigens schon daraus, daß der Einfluß der Wärmeleitung und Wärmestrahlung die Schallgeschwindigkeit höchstens bis auf den Newtonschen Wert herunterdrücken könnte.

Bei Anwendung enger Röhren und tiefer Töne war die Messung von V durch Kundtsche Staubfiguren aus naheliegenden Gründen nicht möglich. Es wurde hier das Quinckesche[1]) Interferenzrohr benutzt, bei dem der in ein Rohr eintretende Schall sich in zwei Röhren verzweigt, getrennte Wege durchläuft, um dann wieder zusammengeführt zu werden. Treffen an der Vereinigungsstelle Verdünnung und Verdichtung zusammen, so tritt durch Interferenz Aufhebung des Schalles ein; der Unterschied der Weglängen beträgt dann ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge.



Nun war jedoch im vorliegenden Fall, wo die Röhren sehr eng sein sollten, die gewöhnliche Form der Quinckeschen Interferenzröhre, bei der die Verlängerung des einen Weges durch ein posaunenartig verschiebbares Stück geschieht, nicht möglich, da die ineinander verschiebbaren Röhren dann schon erheblich prozentisch verschiedene innere Weite gehabt hätten. Außerdem wäre es auch hier bei der großen Wellenlänge tiefer Töne nicht gut möglich gewesen, den ganzen Apparat aus den zu untersuchenden engen Röhren anzufertigen, schon weil, abgesehen von der Schwierigkeit der Herstellung, die Intensitätsverminderung durch Reibung zu groß gewesen wäre. Es wurde daher so vorgegangen:

Der *eine* Zweig der Quinckeschen Röhre (vgl. Figur) bestand aus zwei *weiten*, mit sanfter Reibung ineinander verschiebbaren, je ca. 1,5 m langen Glasröhren; in den anderen Zweig wurde vermittelst entsprechend sich verjüngenden Glas-

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 128. p. 177. 1866.

röhren und kurzen engen Schlauchstücken ein nicht zu langes Stück BC der zu untersuchenden Röhre von der Länge l_1 eingesetzt. Die Länge des ersten Zweiges, EH, wurde dann so reguliert, daß an der Austrittsstelle des Schalles völliges Auslöschen des Tones stattfand; es sei $EH = L_1$.

Man darf nun jedenfalls nicht annehmen, daß die beiden Zweige sich um ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge des hineingeschickten Tones unterscheiden, da in dem Zweige, der die Verjüngungen enthält, an diesen Verzerrungen der Schallwelle, Reflexionen etc., überhaupt im einzelnen schwer kontrollierbare Unregelmäßigkeiten eintreten, die im wesentlichen bewirken werden, daß erst in gewisser Entfernung von den Verjüngungsstellen die Schallbewegung im engen Rohr regulär verläuft. l_1 sei so groß, daß in einem endlichen Teil der engen Röhre die Schallbewegung regelmäßig, als ebene Welle vor sich geht. Es wurde nun an Stelle des Stückes BC von der Länge l_1 in dem Zweige, der die enge Röhre enthält, ein Stück $B'C'$ des gleichen Rohres von der Länge l_2 eingesetzt. Um jetzt wieder Tonminimum zu erhalten, mußte dem anderen Zweig, der die weiten Röhren enthielt, durch Verschieben der einen der beiden ineinander verschiebbaren Röhren eine andere Länge $EF'GH' = L_2$ gegeben werden. An der Vereinigungsstelle kamen die Töne aus den beiden Zweigen mit sehr verschiedener Intensität an, da in der weiten Röhre der Ton sehr wenig, in der engen aber sehr stark durch Reibung geschwächt war. Um also zur Erzielung eines guten Tonminimums die Intensität beider Schallwellen annähernd gleich groß zu machen, mußte auch in dem die weite Röhre enthaltenden Zweig ein Stück von der engen Röhre eingefügt werden, das aber dann natürlich bei der ganzen Versuchsreihe auf konstanter Länge belassen wurde.

Die Schallgeschwindigkeit in der engen Röhre sei v, in der weiten V; man sieht sofort, daß die Beziehung besteht

$$\frac{v}{V} = \frac{l_2 - l_1}{L_2 - L_1}.$$

Hat die weite Röhre so großen Durchmesser, daß man die Schallgeschwindigkeit V in ihr gleich der Schallgeschwindigkeit V_0 in freier Luft setzen kann, so ist

$$v = V_0 \frac{l_2 - l_1}{L_2 - L_1}.$$

Man hat bei diesem Differenzverfahren den Vorteil, daß man von den engen Röhren nur verhältnismäßig kurze Stücke braucht, also der Ton nicht durch Reibung zu sehr geschwächt wird. Außerdem ist es ja überhaupt schon schwer, lange enge Röhren von einigermaßen überall gleichem Durchmesser zu finden. Die Messungen sind einfach und ziemlich genau, sobald nur die Tonintensität nicht zu gering ist. Benutzt man Stimmgabeltöne, so ist es besonders vorteilhaft, mit dem beobachtenden Ohr in einen Druckknoten der stehenden Welle zu gehen, die sich im Zimmer durch Reflexion an den Wänden ausbildet. Das Ohr erhält dann nur Erregung von dem aus dem Apparat austretenden Ton, und die Messung ist dann sehr genau möglich.

Prinzipiell hätte man mit einer analogen, leicht zu übersehenden Modifikation auch die andere von Quincke angegebene Form der Röhren zur Bestimmung der Wellenlänge benutzen können, bei der man an einem seitlichen Ansatz des einerseits durch einen verschiebbaren Stempel verschlossenen Rohres die Tonintensität abhört; doch hat sich für den vorliegenden Zweck die erstere Form besser bewährt.

Zu den Versuchen wurden Röhren aus Glas, Kautschuk und Messing benutzt, die mit trockener, kohlensäurefreier Luft von Zimmertemperatur gefüllt waren. Als Tonquellen dienten Stimmgabeln und Zinnpfeifen. Über die Genauigkeit der Resultate kann keine bestimmte Angabe gemacht werden, da die Schärfe der Einstellung auf das Tonminimum sehr wesentlich von der jeweiligen zufälligen Disposition abhing. Jedenfalls ist die Einstellung auf Tonminimum bei sehr hohen Tönen, zu deren Schwingungszahlbestimmung ich[1]) früher ebenfalls die Quinckesche Interferenzröhre benutzt habe, unvergleichlich viel schärfer und weniger anstrengend als bei tiefen Tönen, wo sich das Minimum bei einmaligem Versuch nur schwer auf Millimeter, geschweige denn auf Bruchteile von Millimetern genau einstellen läßt. Man tut bei tiefen Tönen am besten, die Stellen des beginnenden Wiederanschwellens des Tones zu beiden Seiten des Minimums aufzusuchen und dann das Mittel daraus als richtige Lage anzunehmen.

1) F. A. Schulze, Wied. Ann. 68. p. 99. 1898.

Immerhin dürfte die Genauigkeit der Resultate, da jede Messung oft, bis 10 mal, gemacht wurde, vielleicht etwa 2 Proz. betragen.

Von den erhaltenen Resultaten seien hier nur die zuverlässigsten mitgeteilt; v ist dabei auf 0^0 umgerechnet.

1. Glasröhren.

$d = 1{,}01$ mm $\begin{cases} n = 512 \text{ v. d.:} & v = 265 \text{ m}; & \text{daraus} & \gamma = 0{,}0080 \text{ m sec}^{-1/2} \\ n = 384 \text{ v. d.:} & v = 258 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0077 \quad \text{„} \end{cases}$

$d = 1{,}51$ mm $\begin{cases} n = 512 \text{ v. d.:} & v = 290 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0075 \quad \text{„} \\ n = 384 \text{ v. d.:} & v = 282 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0079 \quad \text{„} \end{cases}$

2. Messingröhren.

$d = 0{,}99$ mm $\begin{cases} n = 512 \text{ v. d.:} & v = 208 \text{ m}; & \text{daraus} & \gamma = 0{,}0140 \text{ m sec}^{-1/2} \\ n = 384 \text{ v. d.:} & v = 189 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0149 \quad \text{„} \end{cases}$

$d = 1{,}48$ mm $\begin{cases} n = 512 \text{ v. d.:} & v = 253 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0140 \quad \text{„} \\ n = 384 \text{ v. d.:} & v = 230 \text{ m}; & \text{„} & \gamma = 0{,}0158 \quad \text{„} \end{cases}$

3. Kautschukröhren.

$d = 1{,}50$ mm; $n = 512$ v. d.: $v = 195$ m; $\gamma = 0{,}025$.

Daß das Material der Röhre von Einfluß ist, ist in Übereinstimmung mit den Angaben von A. Seebeck, H. Schneebeli und J. Müller.

Die Versuche wurden hier abgebrochen, da das lange Abhören der nur sehr schwachen Töne mit gespannter Aufmerksamkeit zu sehr angriff.

Leider stießen die Bemühungen, noch weiter in das besonders interessant erscheinende Gebiet noch engerer Röhren und noch tieferer Töne vorzudringen, auf Schwierigkeiten. Es gelang nämlich nicht, den Schall durch Röhren von unter 1 mm lichter Weite überhaupt hindurch zu senden, so daß hier die angewandte Methode vorläufig versagte; die Intensitätsverminderung durch Reibung ist jedenfalls zu groß; durch Anwendung besonders starker Tonintensitäten wird es wahrscheinlich gelingen, noch etwas weiter zu kommen.

Es sei noch bemerkt, daß die angegebene Methode zur Bestimmung von Schallgeschwindigkeiten sich immer da eignen würde, wo es nicht möglich ist, die Versuchsbedingungen auf sehr weite Strecken hin zu schaffen, also wenn man z. B. die Schallgeschwindigkeit tiefer Töne in Gasen bei der Temperatur

der flüssigen Luft messen wollte, wo es nicht gut anginge, die ganze Quinckesche Interferenzröhre in flüssige Luft zu bringen.

Von besonderem Interesse würde es sein, die Verminderung der Schallgeschwindigkeit in Röhren für Wasserstoff zu messen, weil hier der bestimmende Faktor γ wegen der großen Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs einen besonders großen theoretischen Wert hat. Es berechnet sich für Wasserstoff bei 0^0

$$\gamma = 0{,}015 \text{ m sec}^{-1/2} \text{ (gegen } \gamma = 0{,}006 \text{ für Luft)},$$

so daß sich hier die Theorie noch besser prüfen lassen würde, da man auch bei weiteren Röhren hier schon erhebliche Verminderungen der Schallgeschwindigkeit erhält.

Marburg a. L., Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Januar 1904.)

11. *Zur Erklärung schrägliegender Kundtscher Staubfiguren; von F. A. Schulze.*

Im folgenden soll ein Versuch zur Erklärung einer eigentümlichen Art von schräg zur Röhrenachse liegenden Kundtschen Staubfiguren gegeben werden, die ich[1]) zum ersten Male beobachtet und mitgeteilt habe. Dieselben Figuren sind später von R. König[2]) und darauf kürzlich wieder von J. Müller[3]) beschrieben worden; beiden scheint meine frühere Arbeit entgangen zu sein.

Unter gewissen Umständen erhält man nämlich Kundtsche Staubfiguren, die nicht, wie gewöhnlich, sämtlich senkrecht zur Röhrenachse stehen, sondern zum Teil unter mehr oder weniger großem Winkel, bis zu 45°, gegen sie geneigt sind, und zwar in einer Anordnung, die am besten ohne längere Beschreibung aus der nebenstehenden Fig. 1 ersichtlich ist. Jede dritte Staubfigur steht also senkrecht zur Röhrenachse, während die benachbarten sich dem unteren Ende ($b\,b$) dieser senkrecht stehenden zuneigen.

Fig. 1.

Ich erhielt damals diese Figuren bei der Messung der Schwingungszahlen der Töne von Galtonpfeifen. Zugleich ergab sich hierbei sofort eine Erklärung dieser Figuren als Superposition des Grundtones und des ersten Obertones der Pfeife. Bei einer Königschen Galtonpfeife z. B. entstand der erste Oberton (nächsthöhere Quinte $3\,n$ des Grundtones n) bei allen Pfeifenlängen zwischen 12,0 und 7,9 mm, bei einer Galtonpfeife in der verbesserten Edelmannschen Form nur bei Pfeifenlängen zwischen 18 und 16 mm, beide Male jedoch *nur*

1) F. A. Schulze, Wied. Ann. **68**. p. 880. 1899.
2) R. König, Wied. Ann. **69**. p. 654. 1899.
3) J. Müller, Ann. d. Phys. **11**. p. 331—354. 1903.

bei Anblasen der Pfeifen mit dem Gummiball, also bei schnell verhallendem Ton, nicht bei gleichmäßig andauerndem Anblasen.

Zum Verständnis sei ein Teil der Tabellen meiner früheren Arbeit hier noch einmal mitgeteilt.

Schwingungszahlen der Königschen Galtonpfeife, mit Gummiball angeblasen.

Teilstrich (Länge der Pfeife in mm)	Schwingungszahl *v. d.*		Teilstrich (Länge der Pfeife in mm)	Schwingungszahl *v. d.*	
12,0	18 360	1. Oberton	7,9	9 420	Grundton
11,0	19 530		7,8	9 490	
10,0	21 200		7,0	10 400	
9,0	23 890		5,0	12 550	
8,0	26 130		3,0	16 950	
7,9	26 480		1,8	32 240	

Beim Teilstrich 7,9 wurde verschieden bald der erste Oberton mit den eigentümlich schräg gestellten Staubfiguren, bald nur der Grundton erhalten. Bei Pfeifenlängen über 7,9 mm entstand stets der erste Oberton, bei Pfeifenlängen unter 7,9 mm stets der Grundton; und zwar war im ersten Fall die schräge Lage der Staubfiguren nur bei Längen sehr nahe der kritischen von 7,9 mm ausgebildet, um so deutlicher, je mehr die Pfeifenlänge sich der Länge 7,9 mm näherte. Es lag also sehr nahe, anzunehmen, daß bei größeren Pfeifenlängen nur der erste Oberton, bei kleineren nur der Grundton entstand, daß dagegen bei der kritischen Länge von 7,9 mm beide Töne in ungefähr gleicher Intensität vorhanden waren und dann hierbei Anlaß zu der eigentümlichen Staubfigur gaben; in diesem Sinne wurden die Versuche damals von mir auch gedeutet.

In derselben Weise erklärt J. Müller diese Staubfiguren, die er bei seinen Versuchen erhalten hat, durch die Wirkung der Superposition von zwei Tönen, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie 1 : 3. Allerdings ist nun aber bei den Versuchen von Müller die Erklärung der Herkunft des Tones mit der kleinen Schwingungszahl schwer zu geben. Während es bei meinen Versuchen an der Galtonpfeife ohne weiteres klar ist, daß man es mit Grundton und erstem Oberton zu tun hat, ist man bei den Versuchen von Müller, wo es sich

um den zweiten Transversalton der erregenden plattenförmigen Stäbe handelt, gezwungen, neben dem eigentlichen gemessenen Ton zur Erklärung der geneigten Staubfiguren noch das Vorhandensein eines Tones von der Schwingungszahl $n/3$ anzunehmen, der sich dem ersten superponiert, eines „Untertones", wie J. Müller ihn nennt.

Nimmt man einen solchen an, so hat man denselben Fall wie bei einer Pfeife, die gleichzeitig Grundton und ersten Oberton gibt. Wie ein solcher „Unterton" zustande kommen soll, ist freilich schwer einzusehen.

Vielleicht kann man mit J. Müller sich vorstellen, daß er nicht primär vorhanden ist, sondern erst sekundär als möglicher Eigenton der Kundtschen Röhre entsteht.

Es scheint mir nun aber, daß sowohl bei den Versuchen von J. Müller als bei meinen eigenen die bloße Superposition der beiden Töne von den Schwingungszahlen n und $3n$ noch nicht genügt, um die *schräge* Lage der Kundtschen Staubfiguren und zwar gerade in der Anordnung, wie sie hier auftreten, zu erklären.

Da hier nur longitudinale Bewegungen längs der Achse vor sich gehen, so sieht man nicht ein, wieso einige der Staubfiguren geneigt sein sollen, woher das nötige Drehungsmoment kommen soll, geschweige denn warum die Neigungen diese regelmäßige Abwechslung haben. Hr. J. Müller gibt eine Zeichnung, wonach dieses Hinneigen derjenigen Staubfiguren, die nur dem Ton $3n$ und nicht auch dem Ton n angehören, nach denjenigen, die auch dem Ton n angehören, direkt verständlich sein soll. Jedoch scheint mir seine Zeichnung dieses Hinneigen nicht zu erklären. Man ersieht daraus nur, daß in *einer bestimmten Phase* die Staubfiguren, die nur dem Ton $3n$ angehören, als Ganzes *ohne Drehung* oder Neigung nach dem Knoten *translatorisch in Richtung* der Röhrenachse hingeblasen werden. In der nächsten Phase jedoch, wo die durch den Ton n erzeugte Bewegung der stehenden Welle sich umkehrt, würden dieselben Staubfiguren von dem Knoten weggeblasen werden, ebenfalls translatorisch ohne Drehung. Der Effekt würde also sich aufheben und die Staubfiguren des Tones $3n$ allein ruhig ohne irgendwelche Veränderung oder Drehung an ihrem Platze bleiben.

Dagegen scheint mir die schräge Neigung der Staubfiguren und gerade in der richtigen Anordnung erklärbar zu sein, wenn man die Annahme macht, daß *die Schallintensität in der Richtung senkrecht zur Röhrenachse variabel ist* und zwar, daß sie *von der einen der Längsachse parallelen Röhrenwand a a in der zur Längsachse senkrechten Richtung zur anderen gegenüberliegenden Röhrenwand b b (also in Richtung der Pfeile) stetig zu- oder abnimmt.* Wir wollen ferner annehmen, was bei meinen Versuchen durchaus plausibel ist, daß der Ton n noch vorhanden ist, nachdem der Ton $3n$ bereits aufgehört hat. Es ist ja bekannt, daß bei Pfeifen die Obertöne größere Intensität des Anblasestromes erfordern als der Grundton. Bei sehr kräftigem Anblasen einer Galtonpfeife mit dem Gummiball durch kurzen einmaligen Druck wird zu allererst der Grundton, gleich darauf der Oberton entstehen, und dann dieser beim Nachlassen des Anblasedruckes zuerst verschwinden, so daß zuletzt der Grundton allein übrig bleibt. Während des stärksten Anblasens sind also die Staubfiguren von $3n$ vorhanden. Nach Verschwinden dieses Tones findet nun der Ton n diese vor und es bilden sich nun die Staubfiguren des Tones n aus.

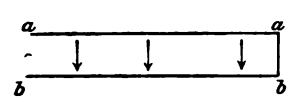


Fig. 2.

Nehmen wir jetzt noch die Erklärung der Rippen der Kundtschen Staubfiguren durch W. König[1]) zu Hilfe, wonach hier die hydrodynamische Abstoßung von Körpern vorliegt, die hintereinander in einem Flüssigkeitsstrom sich befinden; diese Abstoßung wird auch an denjenigen Staubfiguren erfolgen, die von dem Ton $3n$ vorhanden waren und nun an der Stelle eines Bauches der stehenden Welle des Tones n sich befinden. Wäre die Intensität des Tones n nun an allen Stellen der Röhre senkrecht zur Achse dieselbe, so würde nichts weiter erfolgen, als daß die gewöhnliche Rippenbildung der Kundtschen Staubfiguren an den zu $3n$ gehörigen Figuren auftritt. Wirkt die Abstoßung der Staubfiguren aufeinander als Ganzes, so würden sie einfach etwas auseinander treten.

Wenn aber, wie wir annehmen, die Schallintensität an der einen der Längsachse parallelen Röhrenwand größer ist

1) W. König, Wied. Ann. **42**. p. 353 u. 513. 1891.

als an der anderen entgegengesetzten, so wird an der ersteren dieses Auseinandertreten größer sein als an der letzteren, d. h. auf der einen Seite der Röhre werden sich die beiden Staubfiguren, die eine dem Grundton *n* angehörende Staubfigur *n* einschließen, mehr von diesen entfernen als an der anderen; es wird eben genau die Figur entstehen, die man wirklich beobachtet.

Mit dieser Erklärung würde auch die Beobachtung übereinstimmen, die mir aus meinen früheren Versuchen in Erinnerung ist, daß, nachdem diese Figuren bei einem Versuch erzeugt waren, sie beim nächsten Versuch manchmal „umsprangen", d. h. daß die schräg liegenden Staubfiguren sich nun dem anderen Ende der eingeschlossenen Staubfigur zuneigten, wie die Fig. 3 zeigt.

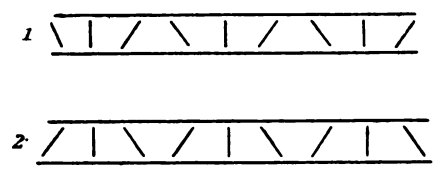


Fig. 3.

Es wird eben ganz zufällig sein, an welcher Seite der Röhre gerade die größere Schallintensität herrscht; also z. B. bei Pfeifen, welcher Röhrenwand gerade die Mundöffnung näher war. Bei Stimmgabeln, namentlich bei kleinen hohen, ist es ohne weiteres klar, daß auf *der* Längsseite der Röhre, an welcher die *Enden* der Zinken liegen, die Intensität größer ist als an der anderen.

R. König[1]) gibt ohne Begründung an, daß diese schrägen Figuren immer entstehen, wenn die Röhre zu weit ist. Auch dies ist erklärlich; ist die Röhre weit, so wird eher eine derartige Verschiedenheit der Tonintensität auftreten, als wenn sie eng ist. Allerdings können nach J. Müller die schrägen Figuren auch in engen Röhren entstehen; jedoch scheint mir gerade in dem von ihm angeführten Fall, wo sie in dem engen Zwischenraum zwischen zwei ungleich weiten Röhren entstanden, die Möglichkeit zu dem hier angenommenen Intensitätsunterschied auf verschiedenen Seiten der Röhrenachse in besonderem Maße gegeben zu sein.

Schließlich ist nach der hier gegebenen Erklärung auch plausibel, warum diese Art schräg liegender Staubfiguren nur bei kurzen, schnell verhallenden, mehr stoßartig auftretenden

Tönen auftritt. Ein Intensitätsunterschied der Art, wie er hier angenommen wird, wird sich wohl in Röhren nur kurze Zeit aufrecht erhalten.

In der Tat habe ich diese Staubfiguren nur bei ruckweisem Anblasen der Pfeifen mit dem Gummiball erhalten, nicht bei länger andauerndem gleichmäßigen Anblasen. Ebenso erhielt sie R. König bei Untersuchung der Schwingungszahl sehr hoher, also sehr schnell abklingender Stimmgabeln.

Ob bei den Versuchen von J. Müller ebenfalls nur verhältnismäßig kurzdauernde Töne bei der Entstehung dieser Staubfiguren vorlagen, ist mir nicht bekannt.

Marburg a. L., Physik. Institut.

(Eingegangen 22. Januar 1904.)

12. *Bemerkung zu dem Aufsatz von L. Hermann „Über elektrische Wellen in Systemen von hoher Kapazität und Selbstinduktion“*[1]*; von J. Bernstein.*

In den Vorbemerkungen zu oben genannter Arbeit gibt Hermann an, daß die Vorgänge der Nervenleitung und eine von ihm aufgestellte Theorie derselben den Anlaß zu seiner Untersuchung gegeben haben. Er erwähnt ferner die von Helmholtz 1850 gefundene Grundtatsache, daß die Nervenerregung sich mit einer verhältnismäßig geringen Geschwindigkeit von 26—43 m in der Sekunde fortpflanzt. Dann sagt er: „Da nach der angedeuteten Theorie die Erregung als elektrische Welle sich fortpflanzt etc.“ Durch diese Darstellung muß in dem der physiologischen Literatur nicht kundigen Leser die Meinung erweckt werden, als ob zwischen der Helmholtzschen Arbeit und der Aufstellung der Hermannschen Theorie gar keine experimentellen und theoretischen Untersuchungen von anderer Seite gelegen hätten, und daß Hermann der Entdecker der als elektrische Welle sich fortpflanzenden Erregung gewesen sei. Ich sehe mich daher veranlaßt hier zu berichten, daß durch meine Untersuchungen aus den Jahren 1866—1871[2]) es zuerst nachgewiesen worden ist, daß *die Erregung im Nerven (wie im Muskel) sich in Form einer elektrischen Welle fortpflanzt*, deren Geschwindigkeit dieselbe ist, wie sie Helmholtz für die „Nervenerregung“ gefunden hatte. Dies war der grundlegende Versuch, den Hermann in seiner erst 1899 veröffentlichten sogenannten Theorie bearbeitet hat. Ich nannte den dem elektrischen Vorgang zugrunde liegenden wellenförmigen

1) L. Hermann, Ann. d. Phys. 12. p. 932. 1903.

2) Erste Mitteilung: J. Bernstein, Zentralbl. f. d. medizin. Wissensch. p. 593. 1866; vgl. ferner: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 14. Februar und 18. Juli 1867; Pflügers Arch. f. Physiol. 1. p. 173. 1868; Untersuchungen über den Erregungsvorgang etc. Heidelberg 1871

Prozeß „die Reizwelle" oder „Erregungswelle".[1]) Den unmittelbaren Anlaß zu der Hermannschen Theorie und seinen damit in Zusammenhang stehenden Versuchen in obiger Arbeit war also der von mir angestellte eben erwähnte Versuch am Nerven. Ich darf daher wohl mit Recht beanspruchen, daß bei dieser Gelegenheit ein solcher einer Theorie zugrunde liegende Versuch mit Angabe des Autors erwähnt wird. Ein bloßer Hinweis auf die physiologische Literatur, welche den Herren Physikern fremd bleiben wird, genügt in diesem Falle keineswegs.

Zweitens behandelt Hermann die von E. du Bois-Reymond entdeckte Erscheinung des Elektrotonus, welche bei Durchleitung eines konstanten Stromes am Nerven entsteht (p. 935 ff.) Von diesem Grundversuch geht er sofort auf seine Untersuchungen an dem sogenannten Kernleiter über und vergleicht die Ausbreitung des Elektrotonus mit der der Kernleiterströme. Auch hier unterläßt er, die von mir angestellte Untersuchung zu erwähnen, in der ich die Entwickelung und Fortpflanzung der elektrotonischen Ströme im Nerven gemessen habe.[2]) Diese Arbeit war aber erst die unmittelbare Veranlassung dazu, daß Hermann auch seinerseits mit Benutzung meiner Methoden (Rheotom) die Fortpflanzung der Kernleiterströme untersuchte und später auch meine Versuche über die Ausbreitung des Elektrotonus wiederholte[3]), deren tatsächliche Resultate er vollkommen bestätigte. Auf die Sache selbst einzugehen, liegt hier keine Veranlassung vor, nur darauf muß ich hinweisen, daß, wenn Hermann an diesem Orte seine auf den Gegenstand bezüglichen Arbeiten erwähnte, es die Gerechtigkeit erforderte, daß er auch die meinigen nennen mußte, welche den seinigen vorausgingen.

Drittens muß ich bemerken, daß die photographische Registriermethode der Kapillarelektrometer-Ausschläge, welche

---

1) Es ist daher auch nicht richtig, wenn Hermann sagt, daß Helmholtz die Geschwindigkeit der „Erregungswelle" gemessen habe. Helmholtz spricht nur von einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Nervenreizung.

2) J. Bernstein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 186. 12. Februar 1880; du Bois' Arch. f. Physiol. 1886. p. 197.

3) L. Hermann, Pflügers Arch. f. Physiol. 35. p. 1. 1885; 71. p. 237. 1898.

Hermann ohne Nennung anderer Autoren als eigene Methode unter dem Namen „Elektrograph" beschreibt, eine schon seit 20 Jahren in der Elektrophysiologie geübte Methode ist, welche zuerst von Burdon-Sanderson[1]) angewendet worden ist. Seitdem ist sie von vielen Untersuchern, von Burdon-Sanderson, Gotch, Burch, Einthoven, R. du Bois-Reymond, Garten und neuerdings von mir und Tschermak in vervollkommter und modifizierter Form gebraucht worden.[2]) Hermann hat auch nicht die Spur von etwas Neuem derselben hinzugefügt.

Für die des physiologischen Gegenstandes nicht kundigen Leser muß ich noch hervorheben, daß die „sogenannten Aktionsströme", welche Hermann gelegentlich erwähnt (p. 932 u. 960), nichts anderes sind als die von E. du Bois-Reymond entdeckte „negative Schwankung" des Muskel- und Nervenstromes, welche bei der Reizung auftritt und deren Fortpflanzung und Verlauf bei verschiedenen Arten der Ableitung ich zuerst mit Hilfe einer Rheotommethode festgestellt habe. *Hermann hat diesen Erscheinungen nur einen anderen Namen gegeben, meine Versuche mit denselben Methoden nachgemacht, aber denselben auf experimentellem Wege nichts prinzipiell Neues hinzugefügt.* Am Ende seiner Arbeit gibt er nun an, daß man seine Vorrichtung in beschränktem Sinne als ein Modell der Nervenfaser betrachten kann, und daß man auch damit den Helmholtzschen Grundversuch nachahmen kann, wenn man mit ihr einen Muskel verbindet. Das was aber Hermann im wesentlichen mit dieser Vorrichtung bezweckt hat, das ist eine Nachahmung der von mir angestellten Versuche über die Fortpflanzung der negativen Schwankung (elektrischen Reizwelle) und der Ausbreitung des Elektrotonus.

---

1) Burdon-Sanderson, Journ. of Physiology 4. p. 339. 1884.

2) An einer anderen Stelle des Aufsatzes erwähnt Hermann nur in einer Anmerkung, daß sich Burch, Einthoven, Hermann, Hermann und Gildemeister mit der Reduktion der Kapillarelektrometerkurven beschäftigt haben.

(Eingegangen 3. Februar 1904.)

13. *Einige Bemerkungen zur Abhandlung des Hrn. Hollmann: „Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische“; von S. Scharbe.*

In der Arbeit „Über die Volumenänderung etc.“[1]) von Hrn. Hollmann ist die mathematische Behandlung der Frage unnötig verwickelt. Deshalb erlaube ich mir einige Bemerkungen zu machen. Als Ausgangsformel nimmt Hr. Hollmann die folgende:

$$v = (v'' - v')x + v' + \Delta,$$

in welcher er weiterhin $\Delta = 0$ setzt; führen wir dies gleich aus; dann haben wir:

(*) $$v = (v'' - v')x + v',$$

was nichts anderes als eine der Regeln der arithmetischen Mischungsrechnung ist. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß v eine Funktion von zwei unabhängigen Variabeln ist: von T, welches implicite in $v' = F_1(T)$ und $v'' = F_2(T)$, und von x, welches nur explicite und linear vorkommt.

Diese Formel differenziert Hr. Hollmann und erhält so die Formel (3) (p. 327). Doch aus der Formel (*) ist klar, daß für $T = \text{const.}$ auch $v' = \text{const.}$ und $v'' = \text{const.}$ sind und v eine lineare Funktion von x wird, was geometrisch durch eine Gerade dargestellt werden kann. Es ließ sich auch nichts anderes erwarten, da die oben erwähnte Regel eben durch eine Gerade dargestellt wird. Die Differentiation der Formel (*) ist also unnötig.

Gehen wir zu heterogenen Systemen über, so besteht gewiß wieder dieselbe arithmetische Regel, d. h. die Gleichung (*) Halten wir uns an die Bezeichnungen des Hrn. Hollmann

(**) $$v = \gamma(v_2 - v_1) + v_1.$$

1) R. Hollmann, Ann. d. Phys. 13. p. 325. 1904.

Die Konzentration der Komponenten x erhalten wir aus den Konzentrationen x_2 und x_1 der Phasen wiederum nach derselben arithmetischen Regel

$$x = \gamma(x_2 - x_1) + x_1,$$

hieraus:

$$\gamma = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Setzen wir γ in die Gleichung (**), so erhalten wir leicht

$$(***) \qquad v = \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 v_1 - x_1 v_2}{x_2 - x_1}.$$

Bestimmen wir die Gleichgewichtskurven $x_1 = f_1(T)$ und $x_2 = f_2(T)$ experimentell und setzen sie anstatt x in die Formel (*), indem wir auch $v' = F_1(T)$ und $v'' = F_2(T)$ setzen, so erhalten wir: $v_1 = \varphi_1(T)$, $v_1 = \varphi_1(T)$ ohne zu differenzieren und zu integrieren. Nehmen wir in der Formel (***) $T = \text{const.}$ an, so sind auch x_1, x_2 und darum v_1 und v_2 konstant; die einzige Variable bleibt x, was geometrisch eine Gerade darstellt. Anstatt diese einfache Formel zu entwickeln, differenziert Hr. Hollmann die Formel (**). Bei der weiteren Entwickelung kommt er zu der Gleichung (11), deren Integration die Gleichung (***) geliefert hätte. Anstatt dessen stellt Hr. Hollmann eine neue Formel (12) auf und nach vielen Vereinfachungen gelangt er zur Formel (15), welche sogar Hr. Hollmann nicht gebrauchen kann. Auch hier ist das Differenzieren, um zu integrieren, unnötig. Also von allen Formeln des Hrn. Hollmann sind nur drei nötig, welche die oben erwähnte Regel darstellen. Erhalten wir die Gleichung (***), so gibt sie alles, was von Hrn. Hollmann gefunden wurde. Alles Differenzieren, um späterhin zu integrieren, ist unnötig, da wir auf diese Weise bekanntlich wieder zur Ausgangsformel gelangen.

Jurjew (Dorpat), 13. Februar 1904.

(Eingegangen 18. Februar 1904.)

14. *Bemerkung zu der Abhandlung: J. M. Eder und E. Valenta, Das ultraviolette Funken- und Bandenspektrum des Schwefels; von G. Berndt.*

Trotz des Einwandes von Eder und Valenta[1]) muß ich meine Angabe[2]), daß für das Spektrum des Schwefels im *Ultraviolett* noch keine Wellenlängenmessungen vorliegen, aufrecht erhalten. Ihre bis zur Wellenlänge λ 3301 reichenden genauen Messungen waren mir wohl bekannt und im Gebiet des sichtbaren Spektrums auch zum Vergleich herangezogen (wie mein Hinweis auf die Schwefellinie λ 4153,269 beweist). Das Gebiet des Ultraviolett wird für gewöhnlich erst von der Wellenlänge λ 3600 ab gerechnet. Wenn nun von der Wellenlänge λ 3300 bis zu der durch die Absorption der Luft und der Gelatine der photographischen Platte gezogenen Grenze von λ 2000 Messungen im Schwefelspektrum fehlen, so darf man wohl meiner Angabe, daß „für Schwefel noch keine Wellenlängenmessungen im *Ultraviolett* vorliegen, so daß hier eine Vergleichung nicht möglich ist" die Berechtigung nicht absprechen.

Im sichtbaren Spektrum habe ich, wie gesagt, meine Messungen des Selenspektrums mit denen von Eder und Valenta[3]) für Schwefel verglichen. Ich habe auch das Schwefelspektrum (kondensierte Funken zwischen auf Platin geschmolzenem Schwefel) selbst photographiert, bin aber auch nicht über λ 3300 hinaus gekommen. Auch dieser direkte Vergleich der beiden Spektren bewies in dem angegebenen Gebiet das Fehlen von Schwefellinien.

1) J. M. Eder u. E. Valenta, Ann. d. Phys. **13.** p. 640. 1904.
2) G. Berndt, Ann. d. Phys. **12.** p. 1115. 1903.
3) J. M. Eder u. E. Valenta, Denkschriften der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math.-naturw. Klasse **67.** p. 98. 1898.

Wenn ich Selen im Vakuum destillierte, zeigte sich im Rohr ein ganz winziger Schwefelbeschlag. Wenn dieser — allerdings sehr geringe — Schwefelgehalt spektralanalytisch nicht nachweisbar ist, kann dies zwei Gründe haben: entweder ist diese geringe Menge bei Gegenwart von Selen überhaupt durch die Spektralanalyse nicht zu erkennen, indem sein Spektrum durch das des Selens unterdrückt wird, oder der Schwefel ist bei dem Anschmelzen des Selens auf die Platindrähte verdampft.

Cöthen, Physik. Labor. d. Techn. Inst., Februar 1904.

(Eingegangen 24. Februar 1904.)

15. *Über spontane Desozonisierung, Berichtigung; von E. Warburg.*

Hr. Clement in Göttingen hat mich freundlichst auf einen numerischen Rechenfehler in meiner in der Überschrift genannten Arbeit[1]) aufmerksam gemacht. Die Division der p. 1291 verzeichneten Werte von D durch 32 liefert nämlich Werte für $n = D/32$, welche nur 0,1 mal so groß sind als die dort stehenden. Dadurch werden die Werte von β und β_1, welche die Geschwindigkeit der spontanen Desozonisierung bestimmen, 10 mal so groß, als die hier und da in der Arbeit, insbesondere in der Zusammenstellung p. 1302 angegebenen, während sich an den sonstigen Schlüssen nichts ändert. Die demgemäß berichtigten Werte von β und β_1 (p. 1302) sind folgende:

Temp.	β	β_1
16°	2,36	0,0000492
100	7520	0,157
126,9	85300	1,78

Entsprechend muß es p. 1303 heißen, daß in ursprünglich reinem Ozon bei 16° die Ozonmenge in 1,7 Stunden um 1 Proz., in 167 Stunden auf den halben Betrag sinkt.

Noch bemerke ich, daß die für 126,9° gegebenen Zahlen aus dem p. 1298 gefundenen Temperaturkoeffizienten zwischen 100 und 126,9° (nämlich $\mu \log e = 0{,}0392$) und dem für 100° gefundenen β-Wert 7520, welcher durch die meisten Versuche bestimmt wurde, abgeleitet sind.

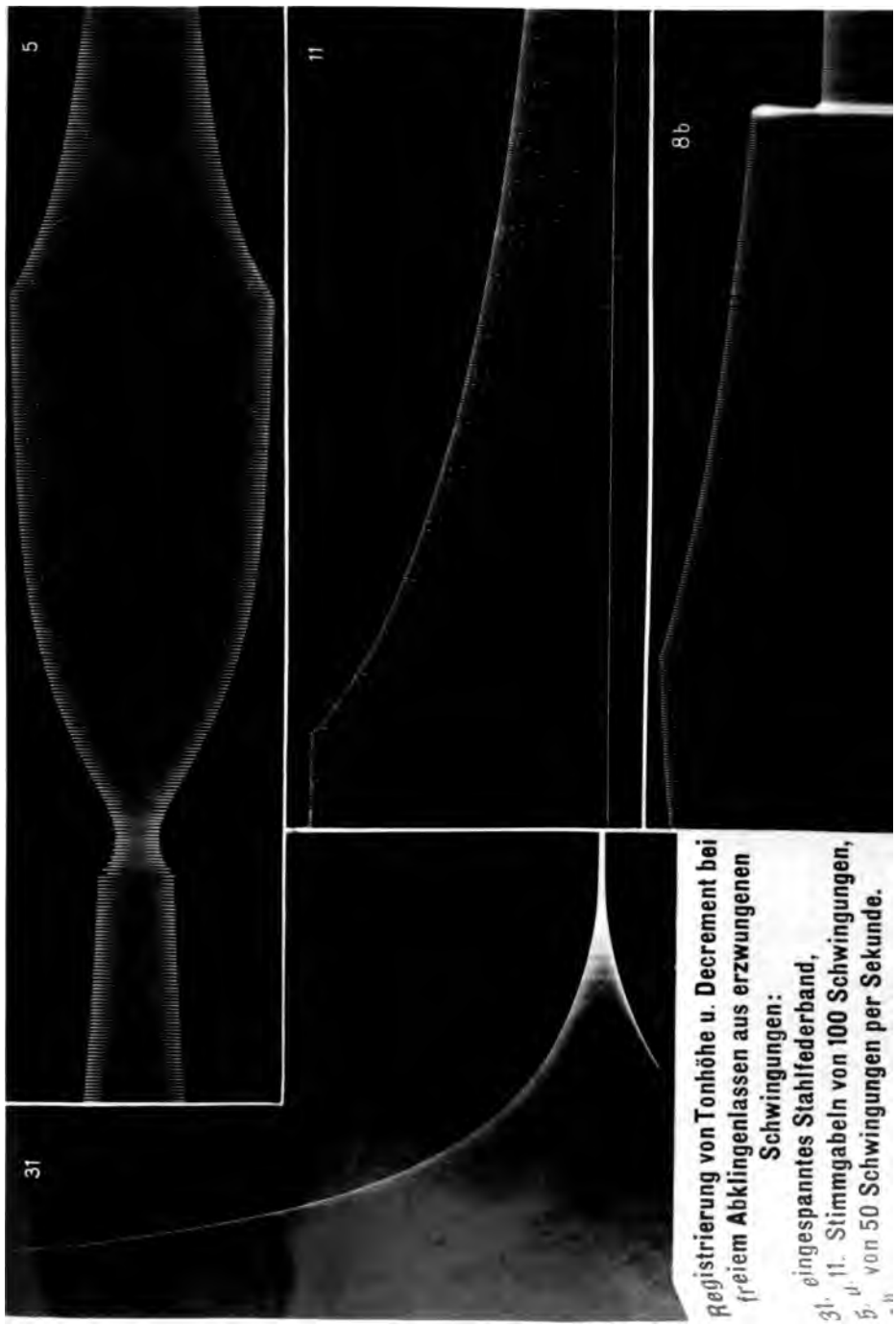
Berlin, Physikal. Institut, 27. Februar 1904.

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 9. p. 1286. 1902.

(Eingegangen 29. Februar 1904.)

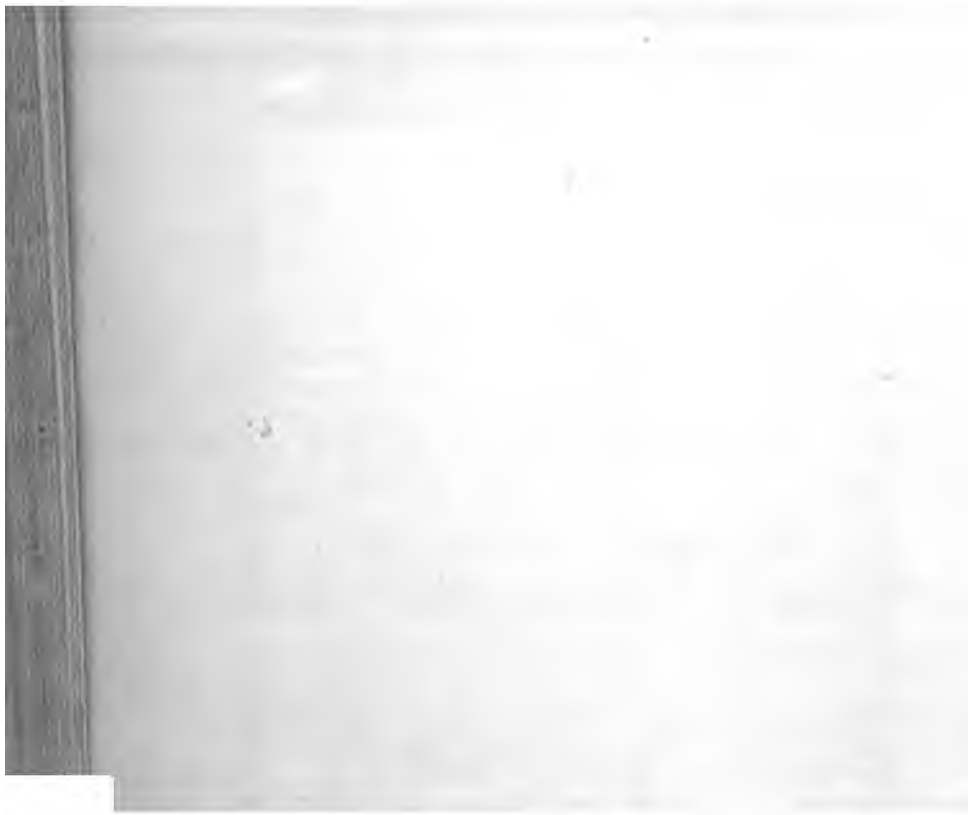
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

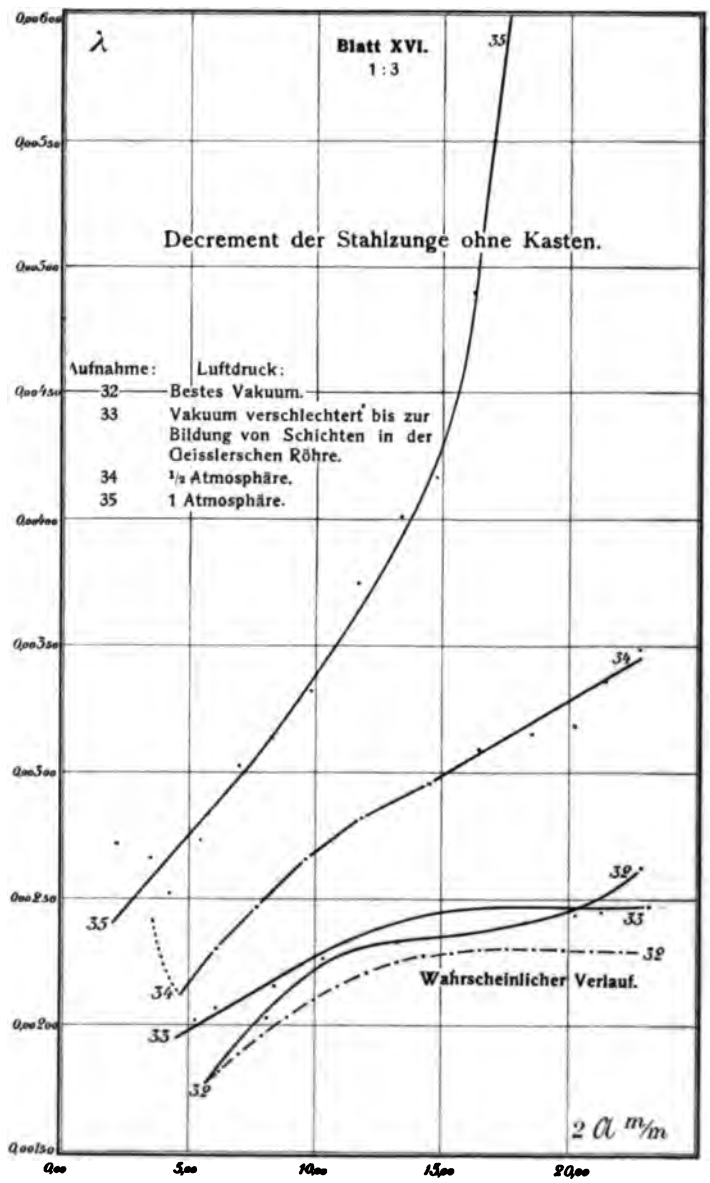
Einfluss der Amplitude auf Tonhöhe u. Decrement



Registrierung von Tonhöhe u. Decrement bei freiem Abklingenlassen aus erzwungenen Schwingungen:
31. eingespanntes Stahlfederband,
5. u. 11. Stimmgabeln von 100 Schwingungen,
8b. von 50 Schwingungen per Sekunde.

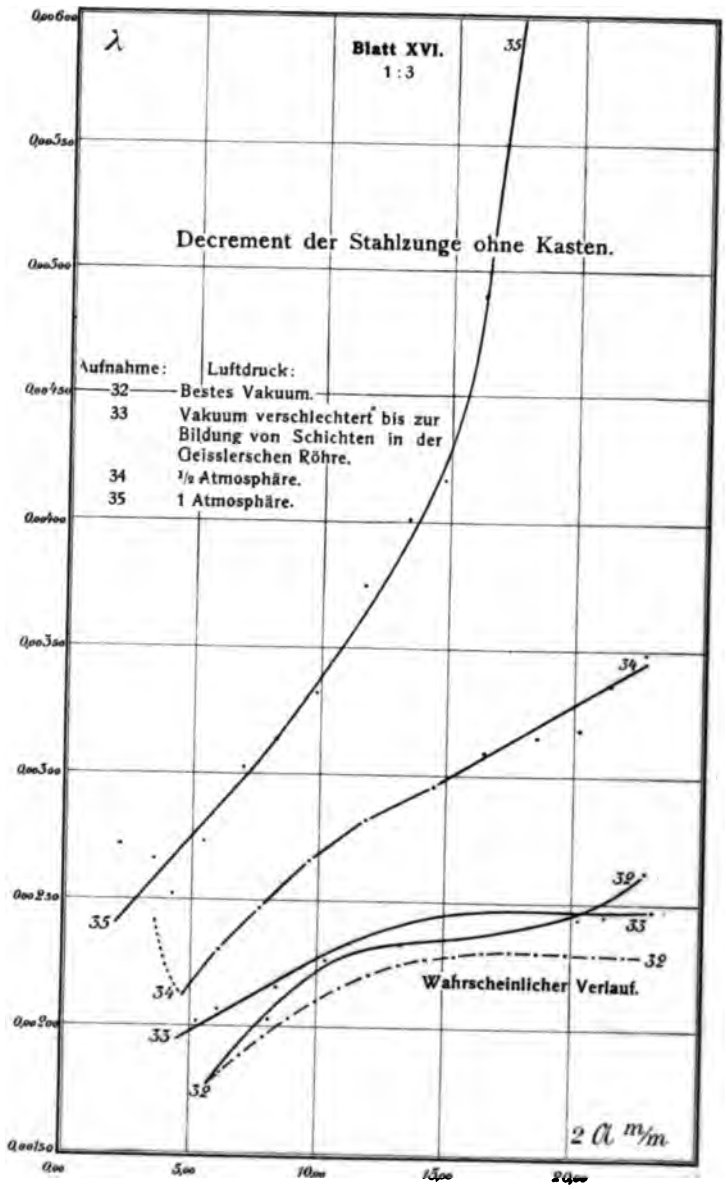
R. Hartmann-Kempf.





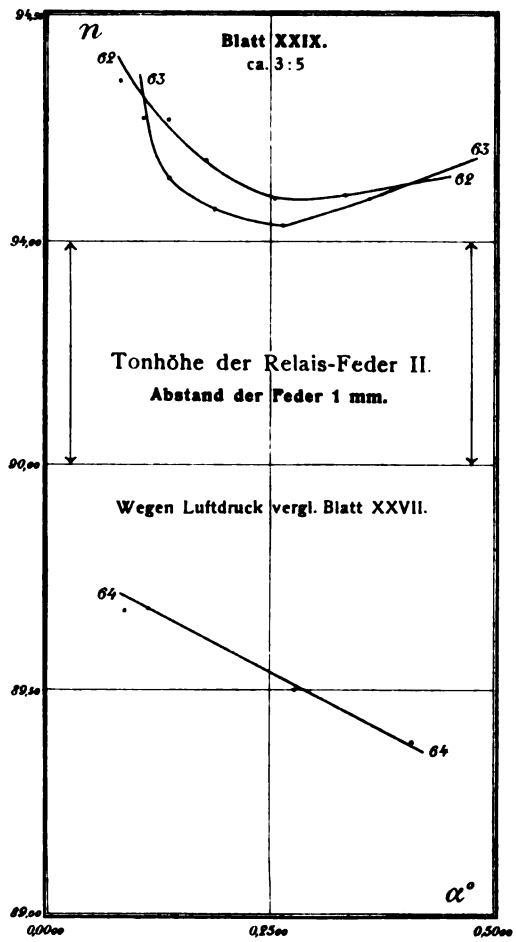
Werner & Winter, Lith. Anstalt, Frankfurt a. M.

Tafel II.



Werner & Winter, Lith. Anstalt, Frankfurt a. M.

uftdruck.



Werner & Winter, Lith. Anstalt, Frankfurt a. M.

92. Resonanz einer schwachen Feder auf Wechselstrom.

94 a. Anklingen einer schwachen Feder. Änderung des Resonanzgrades infolge Verstärkung des permanenten Magnetfeldes.

103. Schwebungen beim Einschalten von Wechselstrom bis zur Ausbildung eines stationären, geringen Resonanzgrades.

)9. Andauernde Schwebungen einer angeblasenen Zunge bei gleichzeitiger Erregung durch unterbrochenen Gleichstrom.

R. Hartmann-Kempf.

A

2,

1,2

1,0

0,5

0,0

2,
1,
1,
0,5
0,0

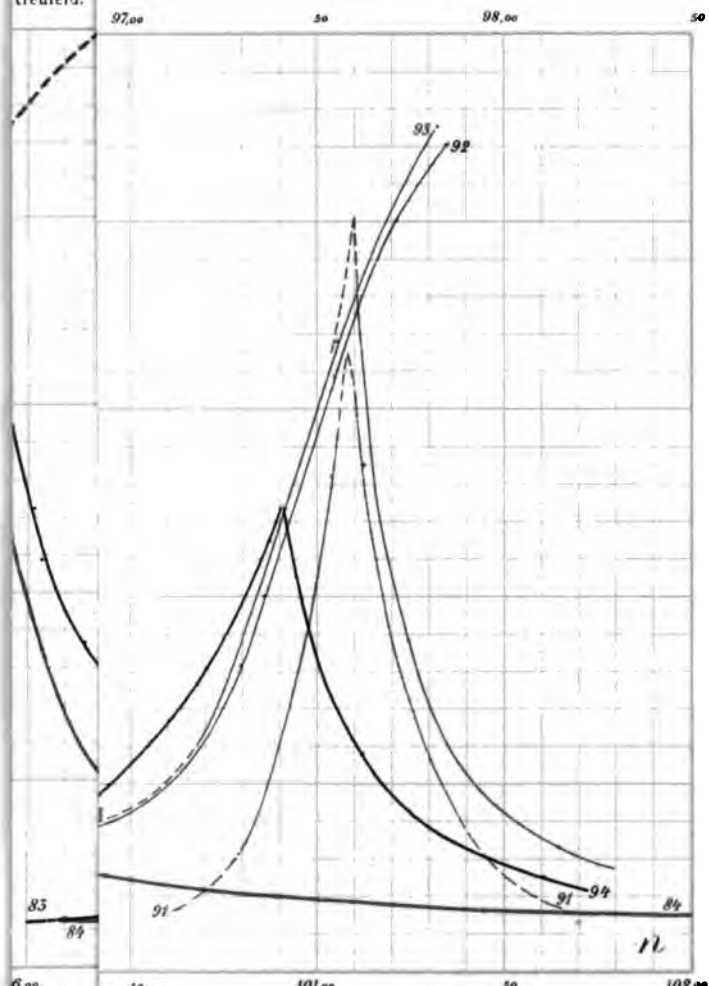
Re

Blatt XXXIV.

nz einer schwachen Relaisfeder

bei verschiedenem Luftdruck.

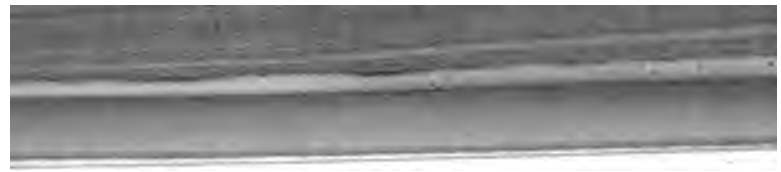
treufeld.



— 0 mm Luftdruck; Erregung durch Wechselstrom.
— 0 mm „ „ „ Gleichstrom.
— 8 mm „ „ „ „ „
— 760 mm „ „ „ „ „

telt.
sphärendr
igt.

Lith. Werner & Winter, Frankfurt a/M.



Aufnahme 22. Resonanzverlauf an einer Stimmgabel von 100 Schwingungen.

Aufnahme 80. Resonanzverlauf an einem zungenförmigen Stahlfederband von 100 Schwingungen.

Das Resonanzmaximum wurde jedesmal zuerst durch steigende, alsdann durch wieder fallende Erregerfrequenz hervorgerufen. Aufnahme 80 hat man sich symmetrisch zur Mittellinie ergänzt vorzustellen. Verkleinerung der Autotypien gegen die Originalaufnahme ca. $^1/_2$.

+n
1
0,5
0
0,5
1
−n
+n
1
0,5
0
0,5
1
−n

Fig. 1.

Fig. 2.

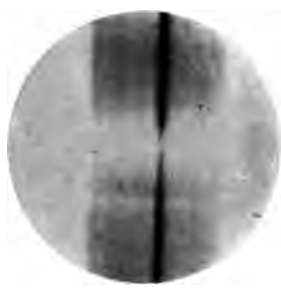


Fig. 3.

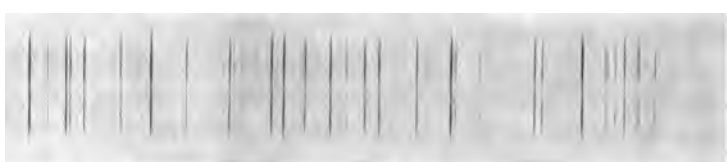
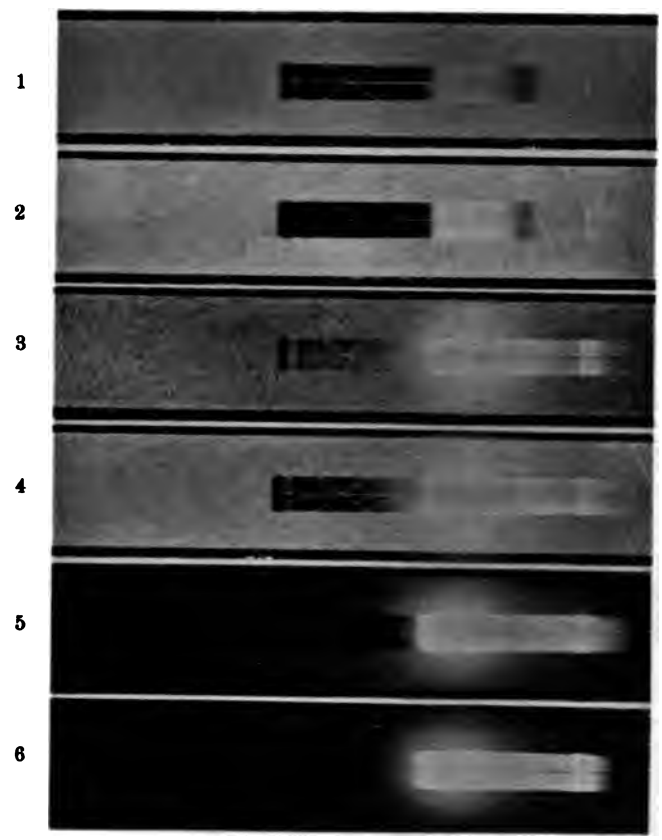
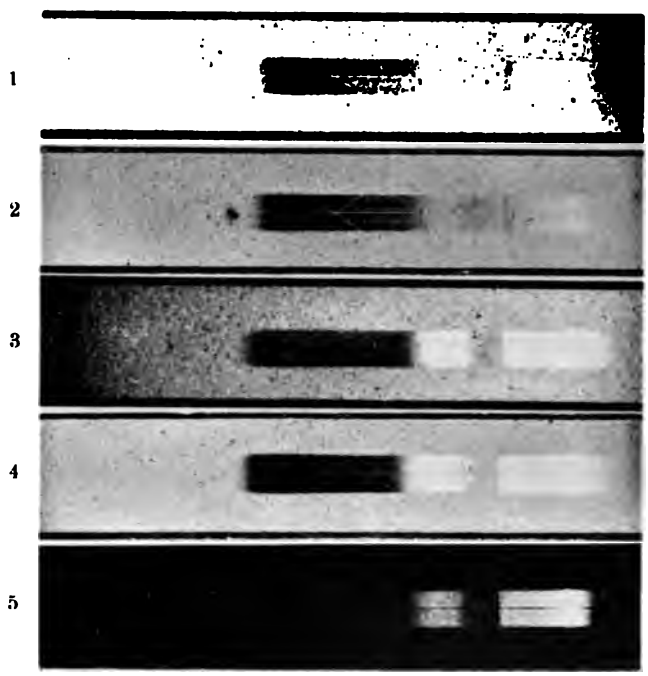


Fig. 4.

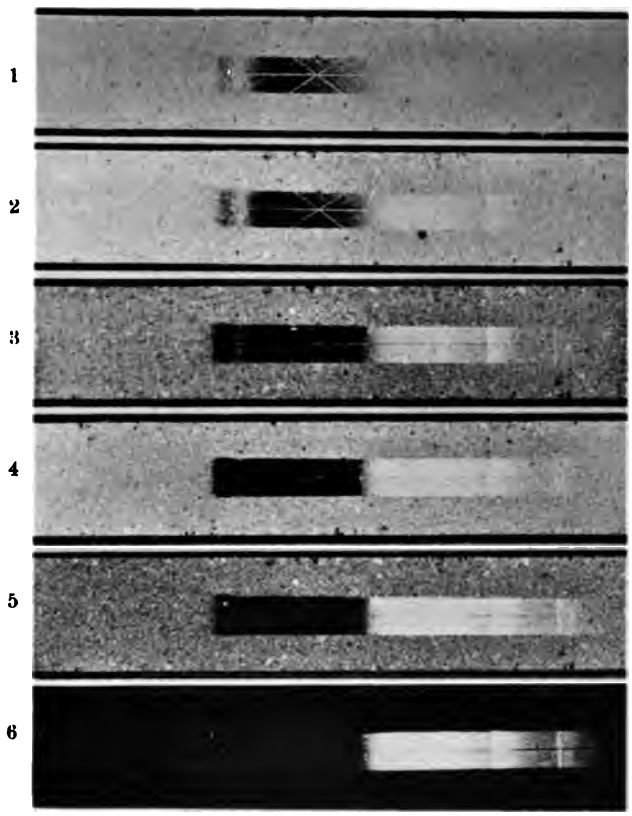
Aug. Hagenbach.



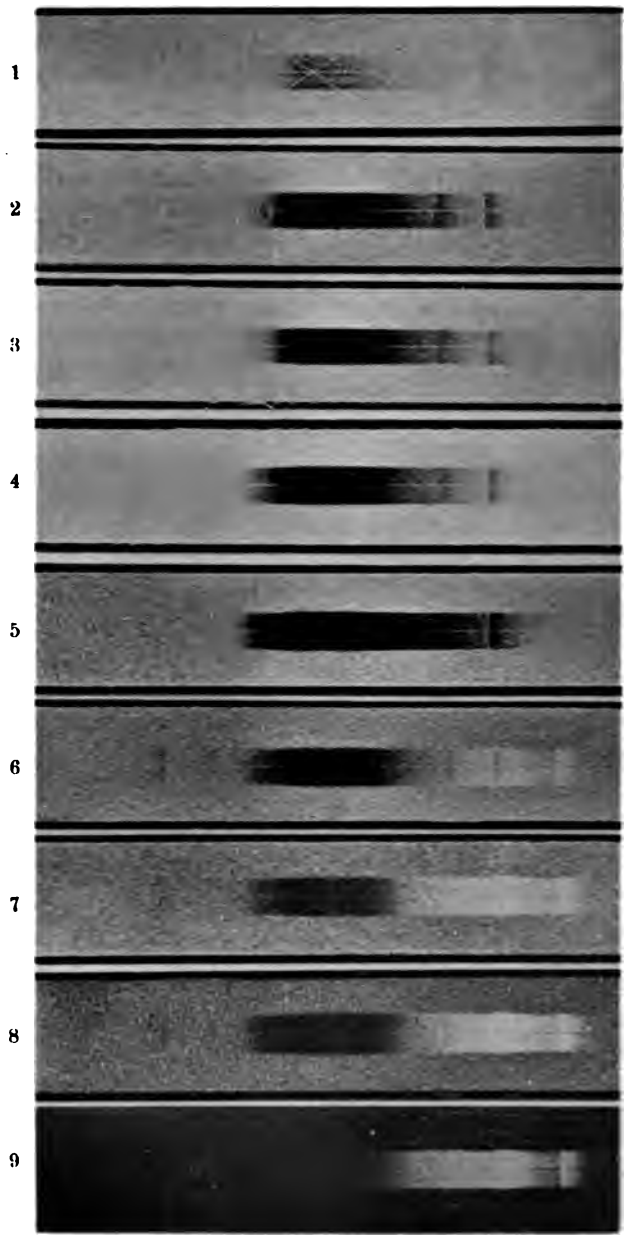
A. Dahms.



A. Dahms.



A. Dahms.



A. Dahms.

PROSPEKT.

FESTSCHRIFT

LUDWIG BOLTZMANN

GEWIDMET

ZUM SECHZIGSTEN GEBURTSTAGE

20. FEBRUAR 1904.

MIT EINEM PORTRÄT, 101 ABBILDUNGEN IM TEXT
UND 2 TAFELN.

VII. 930 Seitch. MK. 18.-

LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Als im Mai 1903 Vertreter der Physik an den österreichischen Hochschulen, die Herren H. Benndorf, P. Czermak, L. Ditscheiner, A. v. Ettingshausen, F. Exner, K. Exner, J. Finger, J. v. Geitler, H. Hammerl, A. Handl, J. Hann, E. Haschek, F. Hasenöhrl, G. Jäger, G. Jaumann, E. Kobald, E. Kohl, A. Lampa, V. v. Lang, E. Lecher, J. Lippich, E. Mach, H. Mache, St. Meyer, J. Moser, A. v. Obermayer, L. Pfaundler, J. M. Pernter, J. Puluj, M. Radaković, E. v. Schweidler, O. Simony, M. v. Smoluchowski, F. Streintz, J. A. Tollinger, W. Trabert, J. Tuma, O. Tumlirz, A. Wassmuth einen Aufruf ergehen ließen, der die Fachgenossen des In- und Auslandes zur Mitarbeit an einer Festschrift zu Ehren Ludwig Boltzmanns aus Anlaß seines sechzigsten Geburtstages am 20. Februar 1904 aufforderte, trafen bald Zusagen so zahlreich ein, daß Redaktion und Verlag, um dem Bande nicht zu ungewöhnliche Dimensionen zu geben, den Umfang der einzelnen Arbeiten beschränken mußten. Obwohl dadurch manche schöne Untersuchung hier nicht Platz gefunden hat, mancher wohl sich überhaupt abhalten ließ, etwas beizusteuern, kann die erfreuliche Tatsache hervorgehoben werden, daß nicht nur deutsche Fachgenossen, sondern auch viele Gelehrte aus Amerika, Australien, Belgien, England, Frankreich, Holland, Italien, Japan, Norwegen, Rußland und Schweden sich an der Festschrift beteiligt haben.

Daß dieser stattliche Band auch eine würdige Ausstattung erhielt, ist selbstverständlich. Die Redaktion

Stefan Meyer.

Das Register der Festschrift wird in Band 15 der Annalen der Physik (Schlußband von 1904) veröffentlicht werden, damit die Arbeiten, die fast durchweg dem Leserkreise der Annalen ganz nahe liegen, hier leichter gefunden werden können und somit ein mehrfach gewünschter Anschluß an die Annalen erreicht wird.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1. J. Frischauf Graz. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen eines starren Punktsystemes aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und aus der Starrheit 1
2. A. Heydweiller-Münster i. W. Über Selbstinduktions- und Permeabilitätsvergleichungen 4
3. P. Duhem-Bordeaux. Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité 13
4. O. Chwolson-St. Petersburg. Notiz über die Vergleichung des Meters mit der Wellenlänge des Lichtes 28
5. K. Zindler-Innsbruck. Über die liniengeometrische Darstellung der Trägheitsmomente eines starren Körpers 34
6. H. Kayser-Bonn. Zur Temperaturbestimmung strahlender Gase 38
7. P. de Heen-Lüttich. Idées fondamentales d'un essai de théorie mécanique de l'electricite et de la chaleur 43
8. J. Andrade-Besançon. Chronométrie: Les régimes limites et la stabilité de la synchronisation 51
9. L. Houllevigue-Caen. Etude des lames minces de cuivre obtenues par ionoplastie 62
10. St. Meyer-Wien. Über Magnetisierung durch Tonerregung . 68
11. L. Pfaundler Graz. Apparate zur Versinnlichung der kinetischen Wärmetheorie 71
12. J. Borgmann-St. Petersburg. Ein besonderer Fall des Leuchtens von verdünntem Gase in einem breiten Glasrohr . 76
13. P. Czermak Innsbruck. Zur Dynamometrie der Klangfarbe 80
14. M. Abraham Göttingen. Die Lichtdruckkraft auf einen [illegible] Spiegel und das Gesetz der [illegible] 85
15. H. B[illegible]-Wien. Über [illegible] Figur [illegible] Figur [illegible] 90

Seite

16. H. C. Jones-Baltimore. The Effect of One Associated Solvent on the Association of Another Associated Solvent . . 105
17. M. Planck Berlin. Über die mechanische Bedeutung der Temperatur und der Entropie 113
18. G. H. Bryan-Bangor (N. W.). The Law of Degradation of Energy as the fundamental principle of thermodynamics . 123
19. H. Mache-Wien. Zur Definition der spezifischen Ionengeschwindigkeit 137
20. L. Matthiessen-Rostock. Gibt es unendlich große Geschwindigkeiten? 141
21. A. Lampa-Wien. Aus der Statistik der Prüfungsstelle für Normalstimmgabeln in Wien 146
22. H. Pellat-Paris. Du rôle des corpuscules dans la formation du faisceau anodique des tubes à gaz raréfiés 150
23. A. Wehnelt Erlangen. Über eine Röntgenröhre mit veränderlichem Härtegrad und über einen neuen Härtemesser . . 160
24. E. Riecke-Göttingen. Elektrische Strömung in einem ionisierten Luftraume, der von zwei konzentrischen Zylinderflächen begrenzt ist 168
25. W. Wien-Würzburg. Theorie eines bewegten leuchtenden Punkte 174
26. M. Le Blanc-Karlsruhe und M. G. Levi-Padua. Über die Passivität des Nickels 183
27. F. Streintz-Graz. Die spezifische Wärme einiger Schwefelmetalle in ihrer Beziehung zum elektrischen Leitvermögen . 190
28. C. Barus Providence. Periodic Color Distributions in Relation to the Coronas of Cloudy Condensation, with a Revision of Coronas 204
29. E. Lampe Berlin. Der schiefe Wurf im luftleeren Raume als Zentralbewegung 215
30. A. V. Bäcklund Lund. Über elektrische Strömungen in [illegible] Leitern 224
31. J. H[illegible] Hoff-Charlottenburg. Einfluß der Änderung der [illegible] Wärme auf die Umwandlungsarbeit . . . 233
32. W. [illegible] Cambridge (England). On some Problems in [illegible] Gas 242
33. [illegible] Über die sogenannte absolute Be- [illegible] 252
34. [illegible] Die thermodynamischen Beziehungen [illegible] 28
35. [illegible] Zur Geometrie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 266
36. [illegible] München Über eine Beziehung [illegible] Volumen und der Ionisationswärme der [illegible] 277

		Seite
37.	Ch. E. Curry-München. A Peculiar Class of Waves . . .	282
38.	O. Lehmann-Karlsruhe. Das Vakuum als Isolator	287
39.	A. v. Obermayer-Wien. Über sogenannte Heiligenscheine und andere gleichen Ursachen entspringende Erscheinungen .	299
40.	J. D. van der Waals-Amsterdam. De verandering van de grootheid b der toestandsvergelijking als quasi-verkleining van het molekuul	305
41.	G. Jäger-Wien. Über die Verteilung einer nicht dissoziierenden Substanz zwischen zwei Lösungsmitteln	313
42.	J. J. van Laar-Amsterdam. Über die spezifische Wärme in flüssigem Zustande bei niedrigen Temperaturen	316
43.	G. Mie-Greifswald. Über eine Methode, das spezifische Gewicht sehr verdünnter Lösungen zu bestimmen	326
44.	C. G. Knott-Edinburgh. Magnetization and resistance in Nickel at high temperatures	333
45.	G. Guglielmo-Cagliari. Intorno ad un igrometro-bilancia ad indicazioni assolute e continue	341
46.	N. Schiller-Charkow. Einige Bedenken betreffend die Theorie der Entropievermehrung durch Diffusion der Gase bei einander gleichen Anfangsspannungen der letzteren	350
47.	R. Wegscheider Wien. Über die Größe der Kristallmoleküle	367
48.	W. Sutherland-Melbourne. The Principle of Dynamical Similarity in Molecular Physics	373
49.	W. Fr. Meyer-Königsberg. Zur Theorie der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen	386
50.	J. Stark-Göttingen. Elektrischer Massentransport in Gasen. Druckerhöhung an der Kathode	399
51.	D. A. Goldhammer-Kasan. Über die Natur der flüssigen Luft	410
52.	E. Kobald-Leoben. Über die allgemeinen Differentialgleichungen der Kristalloptik nach der elektromagnetischen Theorie des Lichtes	422
53.	J. Traube-Berlin. Über den Raum der Atome und Moleküle	430
54.	E. Mach-Wien. Objektive Darstellung der Interferenz polarisierten Lichtes	441
55.	H. Ebert-München. Wirkung der anomalen Dispersion von Metalldämpfen	44[illegible]
56.	V. Bjerknes-Stockholm. Elektrische Kräfte, welche den hydrodynamischen Grundgleichungen [illegible]	[illegible]
57.	L. Grunmach-Berlin. Über [illegible] die Kapillarkonstante [illegible]	460
58.	A. Garbasso-Genua. [illegible]	46[illegible]

Seite

59. L. Graetz-München. Über die elektrische Dispersion der Kristalle 477
60. J. P. Kuenen-Dundee. Zur Theorie der Destillation von Gemischen 485
61. E. Jahnke-Berlin. Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Theorie der veränderlichen Ströme 487
62. J. E. Trevor-Ithaka (N. Y.). The Expansion-Work of a Dissociating gas 493
63. E. Haschek und K. Kostersitz-Wien. Über einen Versuch der Ausmessung von Sternspektrogrammen nach der objektiven Methode der Wellenlängenbestimmung 497
64. P. Cardani-Parma. Sulla dispersione elettrica dei raggi X ottenuti mediante le scariche dei condensatori 501
65. B. Weinstein-Charlottenburg. Entropie und innere Reibung 510
66. J. Grünwald-Wien. Über die Ausbreitung der Wellenbewegungen in optisch-zweiachsigen elastischen Medien 518
67. G. Sagnac-Paris. Lois de la propagation anomale des ondes au voisinage d'un foyer 528
68. W. Feussner-Marburg i. H. Über zwei Sätze der Elektrostatik 537
69. S. H. Burbury-London. On certain theorems in probability 542
70. W. D. Bancroft-Ithaka (N. Y.). Note on the Soret Phenomenon 553
71. A. Wassmuth-Graz. Über die Bestimmung der thermischen Änderungen der Elastizitätskonstanten isotroper Körper aus den Temperaturänderungen bei der Drillung und der gleichförmigen Biegung 555
72. A. Schuster-Manchester. The Propagation of Waves through dispersive Media 569
73. D. B. Brace-Lincoln. On Double Refraction in Matter moving through the Ether 577
74. M. Margules-Wien. Über die Beziehung zwischen Barometerschwankungen und Kontinuitätsgleichung 585
75. J. Larmor-Cambridge. On the Intensity of the Natural Radiation from Moving Bodies and its Mechanical Reaction . 590
76. [illegible] Exner und R. Hofmann-Wien. Über die Potential-[illegible] an Metalle in ionisierten Gasen 606
77. [illegible] Reiben und P. Kichitz-Frankfurt a. M. Bestimmung der [illegible]zität-konstante von Eis in flüssiger Luft mit schnellen [illegible]schwingungen nach Drude 618
78. [illegible] Schetelig-Christiania. Über die Abhängigkeit des os[illegible] Druckes und der Dampfspannung von dem Drucke 618
79. [illegible] Smoluchowski-Lemberg. Über Unregelmäßigkeiten [illegible] Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf [illegible] und Zustandsgleichung 627

Seite

80. F. Hasenöhrl-Wien. Über die Anwendbarkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung in der Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen 642

81. B. Walter-Hamburg. Photographische Abbildungen elektrischer Schwingungen 647

82. Felix M. Exner-Wien. Über das sogenannte „Nachschauen" von Bildern 652

83. G. Frege-Jena. Was ist eine Funktion? 656

84. H. Starke-Berlin. Über den Potentialverlauf bei der unselbständigen Elektrizitätsleitung durch Gase für den Fall des Sättigungsstromes 667

85. E. Kohl-Wien. Über die elektromagnetischen Feldgleichungen innerhalb bewegter elektrischer Massen 678

86. R. v. Sterneck-Czernowitz. Beweis eines in der Akustik verwendbaren arithmetischen Satzes 687

87. H. Benndorf und V. Conrad-Wien. Über Radiumkollektoren 691

88. C. Forch-Darmstadt. Spezifische Gewichte und Wärmeausdehnung von Naphtalinlösungen in verschiedenen organischen Lösungsmitteln. 696

89. F. Richarz-Marburg i. H. Theorie verdünnter Lösungen ohne Benutzung des osmotischen Druckes 706

90. W. Killing-Münster i. W. Der Bau einer besonderen Klasse von Transformationsgruppen 715

91. H. A. Lorentz-Leiden. Bemerkungen zum Virialtheorem . 721

92. A. Righi-Bologna. Sul moto dei ioni nel campo elettrico . 730

93. E. Lecher-Prag. Ein elektrischer Aberrationsversuch . . . 739

94. F. Neesen-Berlin. Über die Frage der gegenseitigen Einwirkung von Kathodenstrahlen 742

95. J. Moser-Wien. Wie ist positive Elektrizität mit negativem Potential und negative Elektrizität mit positivem Potential leicht dar- und vorzustellen? 744

96. J. Finger-Wien. Über die einer allbekannten Kapillarerscheinung analogen Resultate eines bestimmten Problemes der Kinematik starrer Körper 752

97. P. Polis-Aachen. Zur Hydrographie von Ahr, Erft und Roer, ein Beitrag zur Aufschließung der Wasserverhältnisse der nördlichen Eifel 766

98. L. H. Siertsema-Leiden. Magnetische Drehung der Polarisationsebene in verflüssigten Gasen unter atmosphärischem Drucke. Messungen mit Stickoxyd 780

99. G. Melander-Helsingfors. Über Verdichtung der Gase an der Wand der Gefäße 789

Seite

100. O. Berg-Greifswald. Einige Versuche über das Elektrodenpotential von Entladungsröhren 793

101. G. Granqvist-Upsala. Über die Periode und die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung im singenden Flammenbogen 799

102. H. du Bois-Utrecht. Hysteretische Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Verteilungsfunktion 809

103. M. Th. Edelmann-München. Vertikalvariometer für erdmagnetische Messungen im Luftballon 815

104. E. Mathias-Toulouse. Sur la loi de distribution régulière de la composante nord du magnétisme terrestre, en France, au 1er janvier 1896 817

105. E. Wiedemann-Erlangen. Über Verbindungsspektren . . 826

106. W. König-Greifswald. Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität . . 832

107. G. Bredig und F. Weinmayr-Heidelberg. Über die minimale Schichtdicke des katalytisch wirkenden Quecksilbers . 839

108. A. Sommerfeld-Aachen. Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes 848

109. S. Arrhenius Stockholm. Die Anwendung der physikalischen Chemie auf die serumtherapeutischen Fragen 860

110. A. G. Webster-Worcester (Mass.). On the Mechanical Efficiency of the Production of Sound 866

111. M. Reinganum-Münster i. W. Über den von Wirkungssphären freien Raum in einer Flüssigkeit und über das Gesetz der relativen Dampfdruckerniedrigung 876

112. J. Kossonogoff-Kiew. Über mögliche Größe der optischen Resonatoren 882

113. E. L. Nichols und E. Merritt-Ithaka (N. Y.). The Influence of Low Temperatures upon Certain Color Indicators. . . . 890

114. [illegible] Cambridge (Mass.). The van der Waals a in Alkohol and in Ether 899

115. W. Nernst, Göttingen. Chemisches Gleichgewicht und Temperaturgefälle 904

116. [illegible] Tokyo. Mechanische Analogien zwischen Elektrizität und Magnetismus 916

[illegible] Wassmuth-Rostock. Akustische Bestimmung der Dichte [illegible] 923

[illegible] Wiesbaden 929

!! Selen-Zellen und -Apparate !!

für

Telephonie ohne Draht

sowie sämtliche elektrophysikalische Demonstrations-Apparate liefern

CLAUSEN & v. BRONK, Berlin N 4, Chausseestrasse 3.

Man verlange gratis und franco illustr. Preisliste.

Buchhandlung GUSTAV FOCK, G. m. b. H.

Leipzig

bietet in sauberen antiquarischen Exemplaren an:

Annalen der Physik und Chemie. Herausg. v. Poggendorff. 162 Bde. 8 Erg.-Bde. Jubelbd. nebst Fortsetzg. Wiedemann's Annalen. Bd. 1—69 nebst Beiblattern dazu Bd. 1—22. 1824—99. ℳ 3650.—

Annalen der Physik und Chemie. *Neue Folge.* Hrsg. v. Wiedemann Bd. 1—69. 1878—99. Gebunden ℳ 580.—

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 1—26 und Register zu Bd. 1—16. 1877—1902. ℳ 360.—

Fortschritte der Physik. Dargestellt von der Physikal. Gesellschaft in Berlin. Für die Jahre 1845—95. Jahrg. 1—53. 1845—99. ℳ 720.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. von Ohrtmann und Müller Bd. 1—30. 1871—1901. Gebunden ℳ 440.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Hrsg. v. Schlömilch. Bd. 1—47. Mit Suppl. u. Reg. zu Bd. 1—25. 1856—1902. Gebunden ℳ 715.—

Zeitschrift für physikalische Chemie. Hrsg. v. Ostwald u. van't Hoff. Bd. 1—43 u. Reg. zu Bd. 1—24. 1887—1902. Gebunden ℳ 760.—

Physikalischer Handapparat.

Sammlung von 1000 Abhandlungen aus dem Gesamtgebiete der Physik. ℳ 350. —

Schöne reichhaltige, alle Gebiete der Physik umfassende Kollektion, zum Teil aus dem Besitze des † Herrn Professor Hankel, zumeist aus den letzten 20 Jahren stammend.

Anfragen werden prompt beantwortet, Dissertationen- und Bücherlitteratur gern angegeben.

Katalog 230: Mathematik und Physik u. Katalog 232: Chemie, Pharmazie, Technologie etc. gratis und franko.

Wir kaufen

stets einzelne Bände, größere und kleinere Serien von *Annales de chimie et de physique, Gilberts Annalen, Zeitschrift für Elektrochemie* etc. etc.

Perorto

Farbenempfindlichste Momentplatte nach Prof. Dr. Miethe und Dr. Traube.

Otto Perutz, Trockenplattenfabr., München.

Illustrierter Katalog „Ph" für Platten und Apparate gratis.

Man verlange gratis und franko das

Spezialpreisverzeichnis

über

Selen-Zellen und Apparate, System Ruhmer,

von

RUHMERS'

Physikalischem Laboratorium.

Berlin S.W. 48.

D.R.P. 136094, 142871, 146262, 147113, 149853.
D.R.G.M. 161034, 169259, 195160, 201140.

Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist wohl die Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hilfe derselben gelang, eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von 15 km herbeizuführen, ein bisher mittelst Zellen anderen Systems auch nicht nur annähernd erreichter Resultat.

Ein neuer Erfolg: Herr Prof. Dr. A. Korn-München benutzte für seine neuesten erfolgreichen elektrischen fernphotographischen Versuche über

800 km,

unter Mitbenutzung der Leitung: München-Nürnberg-München,

Selenzellen System Ruhmer,

ein weiterer schlagender Beweis für deren unübertroffene Güte.

LEPPIN & MASCHE, Berlin S.O.,

Engelufer 17.

Elektrische Centrifugalmaschine.

D.R.G.M.

Für Anschluß an Starkstromleitungen.
Gleichzeitig Antriebsmotor.
Tourenzahl regulierbar und meßbar.
Vorhandene Nebenapparate verwendbar.

Näheres „Berichte".

Preis Mk. 160.—.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Quecksilberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft. Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M. Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscala etc. etc.

Die neuen Gase

NEON KRYPTON XENON.

Wir sind in der Lage, eine beschränkte Anzahl Spektralröhren genannter Gase zu folgendem Preise zu offerieren:

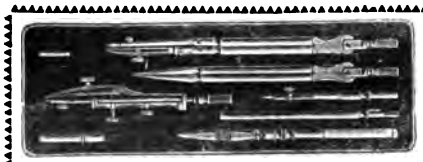
Neon, Krypton oder **Xenon** per Stück 66 *M*.

Die Gase in diesen Röhren sind garantiert rein.

ADAM HILGER LTD, 75 A. Camden Rd., **London N.W.**,

oder bei unsern alleinigen Vertreter für Deutschland

C. E. Müller, Coburg i. Th., Callenberger Str. 18.



PARIS 1900
GRAND PRIX

Illustrirte Preislisten gratis.

Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren,
Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. **München.**
Gegründet 1841.

Gegründet 1876. **J. Wanschaff Sohn** Gegründet 1876.

Wissenschaftliche Instrumente.

Berlin S.O., Elisabeth-Ufer 1.

Insbesondere: Sämtliche Instrumente, welche genauester Kreis- und Längenteilungen bedürfen, als:

Refraktoren (Schweden). **Meridian-Kreise** (Eidgen. Sternwarte, Zürich). **Passage-Instrumente, Univ.-Instrumente, Mikr. Theodolite** für Triangulationen etc. (Kgl. Preuß. Landesaufnahme, Reg. v. Dänemark, Niederland, Belgien, Rußland, Schweden, Amerika). **Spiegelprismen-Kreise, Exzentrizitätsfreie Sextanten** (Kaiserl. Deutsche, Kaiserl. Russ. Marine etc.). **Spektrometer** erster Ordnung (Phys.-Techn. Reichsanstalt, mehrere Priv.). **Goniometer, Photometer** (Kgl. Geod. Institut Potsdam). **Zenithteleskope** (Kgl. Geod. Institut, Intern. Erdmessung, Potsdam. Sternwarten in: Italien, Japan, Niederland, Rußland, Amerika). **Magnetische Theodolite** u. **Registrier-Apparate** jeder Art (Magnet. Observat. Potsdam, viele Bergwerks-Observat.). **Längenteilmaschinen** u. a. m.

Ausrüstungen für Expeditionen.

Illustrierte Kataloge in Deutsch, Englisch, Französisch gratis und franko.

Neukonstruktionen jeder Art. | Paris 1900: Grosser Preis. Golden Medaille: Midwinter, Chicago.

Genauigkeit der Kreisteilungen: 0,1—0,2" Sek. (mittlerer Teilungsfehler).

Instrumente für die Tropen (ohne Stahl).

SOCIETE GENEVOISE

pour la Construction

D'INSTRUMENTS DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE

Genf. 5 Chemin Gourgas.

Kreis- und Längentheilmaschinen, Comparatoren, Kathetometer, Mikrometrische Schrauben, Normalmaasse,

Normalmeter

in verschiedenen Längen, aus Nickelstahl (Invar), Nickel, Bronze, in der H-Form, 5 Meter lang in Invar.

Höchste Garantie der sauberen Ausführung der exaktesten Arbeiten.

Astronomische, optische, elektrische Instrumente.

Vollständige Ausstattung für Universitäten.

Funkentelegraphische Apparate (hohe Frequenz), nach Tesla, Oudin etc.

Kataloge zur Verfügung.

Carl Zeiss, Optische Werkstaette, Jena.

Berlin NW., Dorotheenstrafse 29. II.
London W., 29 Margaret Street, Regent Street.
Wien IX/3., Ferstelgasse 1, Ecke Maximilianplatz.
Frankfurt a. M., Kaiserstrafse 16.
Hamburg, Rathausmarkt 8. St. Petersburg.

Spektrometer und Refraktometer (14 verschiedene Modelle);
Prismen jeder Art und optisch-physikalische Präparate, Spektroskope;
Dickenmesser, Komparatoren, Sphärometer und Fokometer;

Pulfrich's Stereo-Komparator, grofses Modell, für Platten 24 × 30 cm.

Dilatometer, Interferenzmefsapparate, Interferenztischchen etc
Interferenzrefraktometer und Schlierenapparate;
Stereo-Telemeter und Stereo-Komparatoren:
Neues Stereoskop, Stereo-Mikrometer und Stereo-Diapositivbilder:
Abbe'sches Diffraktionsmikroskop (Neukonstruktion).

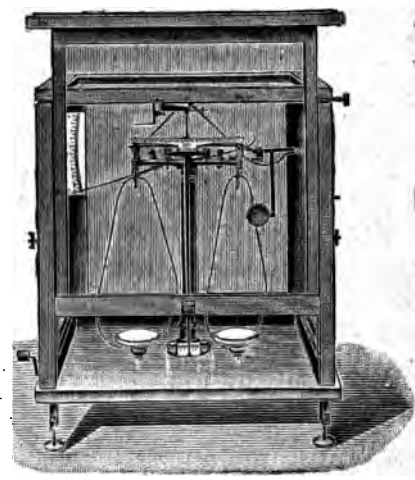
Beschreibungen und Preislisten gratis und franko.
Bei Bestellungen Bezugnahme auf diese Annonce erbeten.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämmtlichen beschickten Ausstellungen.

Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.



Mechanisches Institut,

gegründet 1866.

Specialität:

Physikalische und analytische Waagen

in garantirt vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

Schnellstschwingende

Waagen für Chemiker.

Preislisten kostenfrei.

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20.

Ampèremeter und Voltmeter

nach Deprez-d'Arsonval, D. R.-P.

Funkeninduktoren, Condensatoren, Spiegelgalvanometer.

Thermosäule

nach Angabe des Herrn Prof. Dr. Rubens.

Pyrometer

zum Messen von Temperaturen bis 1600° Celsius.

Galvanometer

zu Linde'schen Kältemessungen.

Preisverzeichnisse **kostenfrei.**

E. LEITZ,

Optische Werkstätte,

Wetzlar.

Zweiggeschäfte: Berlin NW., Luisenstr. 45.

New York 411 W., 59th Str. Chicago 32—38, Clark Str.

Vertreter für München:

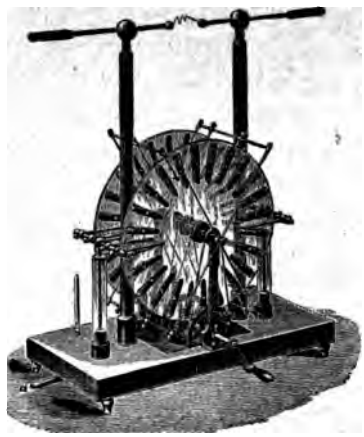
Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Neuestes Modell 1902.

Mikroskope,

Mikrotome, Mikrophotogr. und Projektions-Apparate.

Preislisten kostenfrei.



J. Robert Voss

Mechaniker,

Berlin N.O. 18, Pallisadenstr

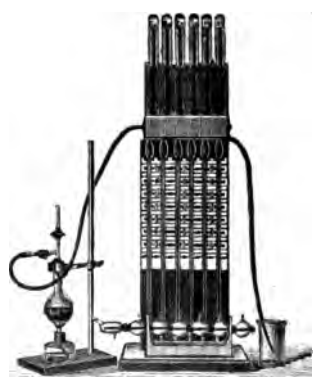
Specialität:

Influenz-Elektrisi
Maschinen
aller Systeme

(auch die dazu gehörigen Nebenapp
und
Metall-Spiral-Hygrom
in allen Ausführungen.

Physikalische Apparat

Projektionsapparate. Modelle jeder Art.
Röntgen-Apparate.



Neu!

Differential- und Doppel-The
skop und **sechsfaches M**
meter nach Kolbe.
Spinthariskop nach Croo
Prospekt zu Diensten.
Apparat für elektrische D
wellen nach Coolig
Blondlot.
Universal Instrumentarium
Seibt-Ernecke für Reso
elektr. Schwingungen, el
Wellen in Spulen, Tesla
suche, Abstimmung in
Marconi-Telegraphie.

Neue Preisliste, über
1000 Nummern und 1600 Abbildungen enthalte
erschienen.

Ferdinand Ernecke,

Hoflieferant Seiner Majestät des Kaisers.

Königgrätzerstr. 112. **Berlin S.W.,** Königgrätzerstr.

Begründet 1858.

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Spezialitäten: Momentplatten für Astronomische und Röntgenaufnahmen, für Aufnahmen fliegender Geschosse, Microphotographie und Spectralphotographie. — Orthochromatische Platten, Abziehplatten für Lichtdruck, Celluloïdfolien. — Rollfilms für Tageslichtcameras.

Trockenplattenfabrik a. Actien
vormals **Dr. C. Schleussner** in **Frankfurt a. M.**

Doppelwandige Glasgefäße
Pentanthermometer bis — 200° C. } zur flüssigen Luft,
einfache und automatische **Quecksilberluftpumpen, Röntgenröhren** mit und ohne **Vakuumregulierung, ff. Glasschliffe** und **-Hähne, Markoniröhren** etc. empfiehlt

R. BURGER, Berlin N. 4, Chausseestr. 2E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke,

sowie **Räder, Triebe, Zeigerwellen, schräge Triebe und Zahnstangen**

fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

A. Eberhard vorm. R. Nippe,

Berlin NW.,

Platz vor dem neuen Thor 1a.

Chemische und physikalische Apparate und Gebrauchsgegenstände.

Glas-Präcisions-Instrumente und volumetrische Messapparate.
Feinste Thermometer von —200 bis +550 Grad.
Quecksilber-Luftpumpen neuester Construction.
Vacuum-Röhren
nach *Braun, Crookes, Geissler, Hittorff, Puluj, Röntgen* etc.
Spectral-Röhren.
Mikroskope, Photometer,
Projectionsapparate, Spectralapparate aller Werkstätten
zu Originalpreisen.
Physikalisch-analytische Waagen und Gewichte aller Systeme.
Complete Einrichtung von Laboratorien u. Vorlesungsräumen.
Sachgemässe Kostenanschläge. Aeusserst billige Preise.
Grosse illustrirte Preislisten kostenlos.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Elemente der theoretischen Physik.

von **Dr. C. Christiansen,**
Professor in Kopenhagen.

Deutsch herausgegeben von **Dr. Johannes Müller** in **Bremen.**

Zweite Auflage.

gr. 8°. VIII, 532 S. u. 160 Fig. im Text. 1908. broch. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—.

Es wird in den beteiligten Kreisen mit Freude begrüfst werden, dafs von dem vortrefflichen Buche eine neue Auflage erscheint, die gegenüber der ersten Auflage erweitert und verbessert wurde, so dafs sie sicher noch mehr begehrt werden wird als die erste. Der bisherige Preis ist beibehalten worden.

Alt, Eberhardt & Jäger,

Ilmenau in Thür.

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläsereien, Glasschleiferei, Holzwarenfabrik, mechanische Werkstatt, Schriftmalerei und Emaillieranstalt.

Fabrizieren:

Glasapparate, -Instrumente und -Utensilien für wissenschaftl. Gebrauch in jeder Ausführung.

Einrichtungen von Laboratorien für Lehranstalten, Universitäten und Fabriken.

Elektrolytische Apparate für Demonstration und praktischen Gebrauch.

Elektrische Röhren jeder Art und allen Autoren und nach besonderen Angaben.

Standgefäfse für Museen.

Dewargefäfse.

Apparate für Pflanzenphysiologie.

Chem. tief- und hochgradige Thermometer von — 200° oder bis + 550° C., prima fein geküht, aus widerstandsfähigem, weifsbelegten Glase, gut ablesbar.

Glasgefäfse aus Spiegelglas für mikroskopischen, spektralanalytischen und speziellen Gebrauch, widerstandsfähig gegen Wasser, Alkohol und Säuren.

Gewissenhafte Anfertigung. ✲ ✲ ✲ **Nachprüfung im eigenen Laboratorium.**

Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante elektromotorische Kraft.

Keine Dämpfe kein Geruch.

Geringer Gasverbrauch.

Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.

Hoher Nutzeffekt.

Betriebsstörungen ausgeschlossen.

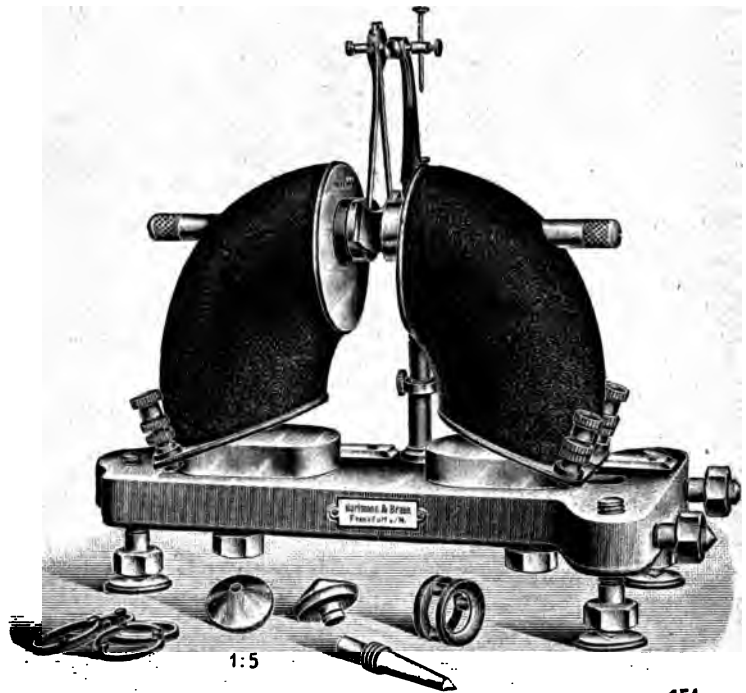
Alleinige Fabrikant: **Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstr. 72/73.**

Niederlage und Lager bei **E. Leybold's Nachf., Cöln a. Rhein.**

Hartmann & Braun, A.-G., Frankfurt a. M.

Elektrische und magnetische Messinstrumente und Hilfsapparate.

Königl. Preussische Goldene Staatsmedaille.

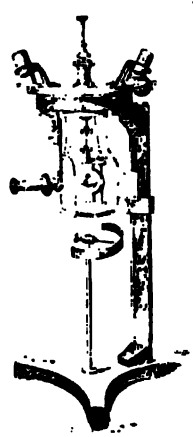


1:5

154

Halbring-Elektromagnet nach **H. du Bois. mit Waltenhofen'schem Pendel.**

Kataloge auf Verlangen zur Verfügung.



W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. DR. M. APEL.

Geschäftsgründung 1808. **Göttingen.** Geschäftsgründung 1808.

Chemische und physikalische Apparate.

Specialität:

Rauchgasapparate, Calorimeter zur Bestimmung des **Brennwertes** der verschiedenen **Brennstoffe** und von **Gasen**, nach Ferd. Fischer.

Thermometer nach Ferd. Fischer. (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach Nernst. (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.)

Totalreflectometer nach Kohlrausch.

Demonstrationsapparate n. Behrendsen und Grimsehl.

Krystallmodelle aus Holz und Glastafeln nach Klein, Naumann und Rose.

Milchprüfungsbestecke nach Tollens.

MEISER & MERTIG,

Dresden-N. 6.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

Physikalische Apparate jeder Art

in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

Funkeninduktoren.

Hochspannungsapparate.

Apparate für drahtlose Telegraphie.

Röntgenapparate.

Chemische Geräte.

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

Neue Preisliste kostenlos.

STRASSER & ROHDE,

Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Auszeichnungen: ***Staatsmedaillen.***

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.

Deutsche Städteausstellung Dresden 1903 Gold. Med.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

Ausführung von Uhrwerken und Apparaten für wissenschaftliche und technische Zwecke. Mikrometerregler $^1/_{100}$—$^1/_{1000}$ mm direkt. Ablas.

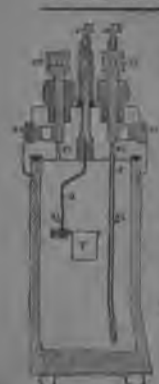
Max Stuhl, Berlin.

Glastechnische Werkstätte

jetzt

130 Friedrichstrasse 130

(früher Philippstr. 22).



Julius Peters, Berlin NW. 21, Thurmstr. 4.

Polarisations-Apparate

in allen Konstruktionen für wissenschaftl. u. technischen Bedarf.

Neu! *Neu!*

Calorimeter

nach Berthelot-Mahler,

verbessert nach Dr. Krecker

(gesetzlich geschützt).

ARTHUR PFEIFFER,
Wetzlar O.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik

—— Gegründet 1890. ——

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der

Patent-Geryk-Öl-Luftpumpen

in Deutschland.

Komplette Pumpeinrichtung für Hand- und Motorbetrieb (1/4 P.S.).

Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt.

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Sämtliche Apparate zu Untersuchungen im hohen Vakuum, darunter Originalkonstruktionen:

Rezipient mit Flüssigkeitslichtung D.R.G.M.
Umschalt- und Vielweghähne D.R.P. a. und D.R.G.M.
Durchgangshähne D.R.G.M.
Trockenröhre mit auswechselbarem Einsatz für P_2O_5 D.R.G.M.

Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs

Darmstadt.

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparat Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer u Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Luftelektrizität und Sonnenstrahlung.

Von **H. Rudolph.**

8°. 24 Seiten. Mit Figuren und Kurven im Texte. ℳ 1.—.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890:

Präcisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt (Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde Juli 1899, Januar, 1900, Nov.-Dezember 19

Normal-Widerstände von 0,001—10000 Oh

— Abzweig-Widerstände von 1—2,0000 Ohm a Feuerlosen- oder Luftkühlung, für Stromst zung bis 5000 Amp. — Rheostaten, Wheatstone sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken für al Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelsch tung, in jeder gewünschten Ausführung. Kompensations-Apparate für genaue Spannung messung in 8 Modellen. — Normal-Elemente beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präcisionswiderstände beglaubigt. — Vorratslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

— *Illustrierte Preisliste.* —

Günther & Tegetmeyer, Braunschweig.

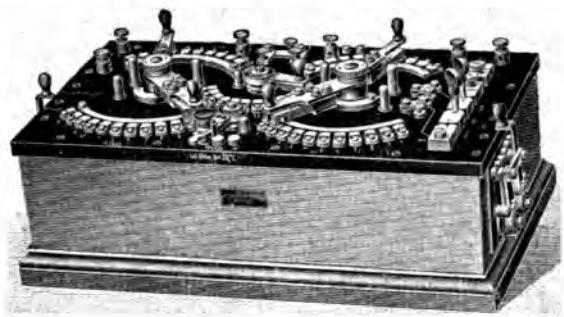
Werkstatt für wissenschaftliche und technische Präzisionsmechanik.

Transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektrizität nach Ebert. **Elektroskope** mit innerer Isolation aus Bernstein, Natrontrocknung und Einrichtung zum parallaxenfreien Ablesen (D.R.G.M.). **Apparate** zur Messung der Elektrizitätszerstreuung in der Luft. **Zamboni'sche Säulen. Hochspannungs-Trockensäulen** (D.R.G.M.). **Instrumentarien** zur Bestimmung der Radioaktivität von Luft und Bodenproben. **Quadrantenelektrometer. Aktinometer** (Neuheiten). **Wasserstrahlkapillarrotoren** nach Elster und Geitel. **Hochspannungselektroskope** (Brannes'sches Prinzip) mit innerer Isolation und Natrontrocknung nach Elster und Geitel. **Transportable Elektronen-Aspirationsapparate** nach Ebert neben Zusatzkondensatoren zur Bestimmung der Beweglichkeiten und des elektrischen Leitvermögens der Luft nach der Methode Gerdien-Marche. **Kondensatoren** nach Harms zur Bestimmung der Kapazitäten von Elektrometern.

SIEMENS & HALSKE A.-G.

Berliner Werk

Berlin SW., Markgrafenstrasse 94.



Kompensationsapparat für genaue Strom- und Spannungsmessungen.

Normalwiderstände für Strommessungen.

Messbrücken für **Thomson**'sche und **Wheatstone**'sche Schaltung.

Widerstände aus **Manganindraht** von 1 und 10 Megohm in je 10 Stufen.

Spiegelgalvanometer nach **Deprez-d'Arsonval.**

Spiegel-Elektrodynamometer.

Panzergalvanometer.

Apparate für Eisenuntersuchungen.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

Specialität:

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschickten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

Vertreter in allen Ländern.

Fabrik-Marke.

Emil Gundelach, Gehlberg i. Thüringen.

Glashütte mit Regenerativ-Gasofen. ❀ Glasbläserei mit eigener Gasanstalt.

Schleiferei. Tischlerei. Dampfbetrieb.

Röhren, Kolben, Becherglüser, Kochflaschen etc. aus Glas von hohem Widerstand gegen chemische Agentien und gegen Temperaturwechsel.

Sämmtliche Glasapparate und Instrumente für wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Doppelwandige Fläschchen nach Dewar für flüssige Luft, versilbert und unversilbert.

Elektrische Vacuumröhren nach *Geissler, Crookes, Hittorf, Tesla, Moore etc.*,

speciell:

Röntgenröhren von hervorragender Qualität.

(Röntgenröhren für Wehnelt-Unterbrecher, D.R.P. No. 100448, Röntgenröhren mit Regenerirvorrichtung, D.R.P. No. 102100.)

Bis jetzt wurden über 25000 Stück Röntgenröhren geliefert.

Die Firma besteht seit 1853.

Neuer Widerstand oder Brücke mit 100- u. 1000-Teilung.
D. R.-Patent a.

Elektrizitätsgesellschaft

Gebr. Ruhstrat,

Göttingen.

Schlitten-, Schiefer- und Porzellanwiderstände von 15 ℳ an.

Schalttafeln
auf Schiefer oder Marmor
für physikalische,
medizinische und technische Zwecke.

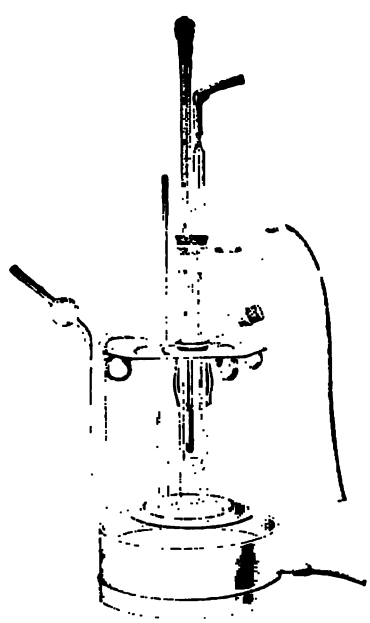
Dynamo-Maschinen, Elektromotoren,
sowie
Messinstrumente jeder Art.

Anfertigung elektrischer Apparate nach Zeichnung oder näherer Angabe.

Hauptkatalog gratis.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.



Thermometer
für
Wissenschaft und Technik,
von —200 bis +575°.

Barometer
mit constantem Nullpunkt,
eigene Construction.

Elektrische Apparate u. Röhren
nach
Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen, Puluj, Hertz, Lenard

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

Induktorien

mit Präcisions-Spiralstaffelwicklung Pat. Klingelfuss
von bisher unerreichter Leistungsfähigkeit und Haltbarkeit.

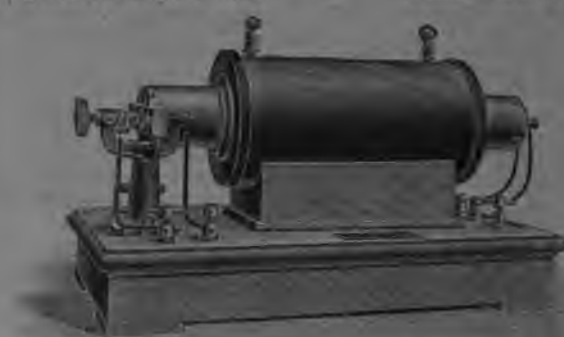
Auf wissenschaftlicher Basis construirt.
Für physikalische Arbeiten, Röntgenapparate, Herz'sche Schwingungen, drahtlose Telegraphie, Teslaströme und zum Laden von Condensatoren

——— auch bei Dauerbetrieb ———

gleich hervorragend. Reich illustrirte Preisliste zu Diensten.
Fabrikanten: Fr. Klingelfuss & Co. Basel (Schweiz).

HANS BOAS B BERLIN O.

Elektrotechnische Fabrik — Krautstraße 52



Funkeninduktoren
von höchster Nutzleistung im Vakuum hergestellt mit keilförmiger Isolation der Sekundärspule eigenen patentierten Systems

Meßinstrumente
Spiegel und Zeiger — Galvanometer, Kondensatoren
Telegraphen- und Telephonapparate. Apparate für Laboratoriumgebrauch.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

Grands-Prix Paris 1889 — Anvers 1894
Expositions Universelles Bruxelles 1897 — Paris 1900

Cabinets de physique complets.

Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet adoptée pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur E. Gaillard**, type 1902, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquences.

Photothéodolittes de M. le Colonel Laussedat.

Vte gérante Dr. A. Vincent.

Paul Kröplin,

Bützow i. M.,

mech. Werkstätte für Lehrmittel,

Motorbetrieb,

liefert als Specialität

Apparate

nach Hertz, Marconi, Tesla. Röntgen, Lodge und Lecher.

Funkeninductoren und polarisirte Relais.

Verlag von Joh. Ambr. Barth, Leipzig.

Kristallisieren

und

Schmelzen.

Von

Dr. Gustav Tammann,

Professor an der Universität Göttingen.

8°. X, 348 Seiten u. 88 Abbildungen. 1903.

broch. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

C. A. Steinheil Soehne,

optisch-astronomische Werkstätte,

Gegründet 1855. **MÜNCHEN.** Gegründet 1855.

Astronomische Fernrohr-Objektive, zwei- und dreiteilig in allen Dimensionen bis 1 Meter Durchmesser, normaler Konstruktion und ohne sekundäres Spektrum.

Okulare, Prismen, Lupen, Plan- und Planparallelgläser.

Komplette astronomische Fernrohre mit und ohne Stativ.

Ablesefernrohre, terrestrische Hand- und Stativfernrohre, Prismenfernrohre.

Spektralapparate verschiedenster Konstruktion, mit und ohne photograph. Einrichtung.

Spektroskope, Spektrographen und Goniometer.

Preislisten frei auf Verlangen, auch über photographische Objektive und Zubehör.

RICH. SEIFERT & CO., Hamburg 13.

Elektrotechnische Werkstatt.

Komplette Röntgeneinrichtungen nach Dr. Albers-Schönberg und Dr. Walter.

Schutzvorrichtungen — gegen Röntgenstrahlen. —

Starkstrom-Dekadenwiderstände,

sind genau nach Zehnern, Einern und Zehntel Ohm abgestuft, ermöglichen eine sehr feine Regulierung, sowie eine genaue Vorausberechnung der Stromstärke und sind besonders für Versuchszwecke zu empfehlen.

Die fahrbaren Reguliertische werden auf Wunsch ebenfalls mit Ohm-Dekaden versehen und können außer zu Röntgenzwecken auch zu allen sonstigen Starkstromversuchen benutzt werden.

Kostenanschläge und Preislisten gratis.

UNGER & HOFFMANN

Gegründet 1878 DRESDEN-A. 16 Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.

Alle Lichtquellen. Laterndiapositive in reichster Auswahl.

Preislisten und Gefl. Anfrage jederzeit zu Diensten.

GEORG WESTPHAL,

Celle (Hannover).

Mechanisches Institut

(gegründet 1860).

Wagen und Gewichte für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke

in vorzüglicher Ausführung und allen Preislagen.

C. M. J. Bodien, Hamburg IV. 200.

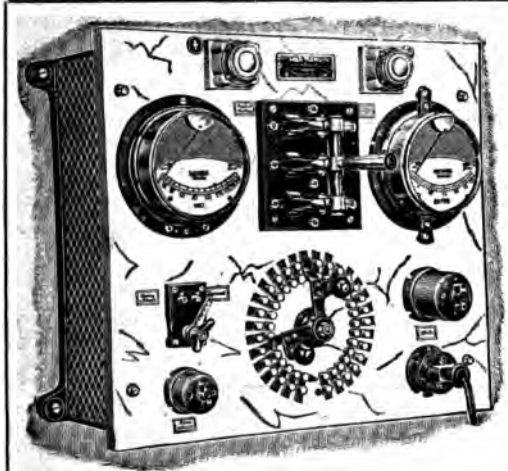
Verfertigt als Specialität feinste Electrische Glühlichtlampen nach Muster oder Zeichnung ferner Geissler-Röhren, Crookes-Apparate &. Glasinstrumente wissenschaftlichen und technischen Gebrauch.

Max Kohl, Chemnitz i. S.

Werkstätte für Präzisionsmechanik,

fertigt als Spezialität:

Funkeninduktoren für Gleichstrom mit veränderlicher Selbstinduktion für jede Spannung bis 250 Volt durch Induktionskommutator nach Kohl; für **Wehnelt-Unterbrecher** mit **einem** oder **mehreren Kontaktstiften; gleichgut** geeignet für **Anwendung weicher, mittelweicher** oder **harter** Röntgenröhren; für **ganz langsame** und **allerschnellste** Unterbrechungen verwendbar; die Einrichtung ermöglicht größte **Schonung** der Röntgenröhren bei sehr geringem Stromverbrauch und liefert **großartige Durchleuchtungen.** Bei Anwendung der **Schaltung** für **mittelweiche Röhren** kann **jeder rotierende Unterbrecher** in **voller Leistung** betrieben werden.



Experimentier-Schalttafeln

A) zum Anschluß a
110—160 Volt fü
Stromstärken bis 1
bezw. 24 Ampere.

B) zum Anschluß a
220 Volt für Stron
stärken bis 10 bezv
20 Ampere.

☛ *Man verlange au*
führlichen Spezia
Prospekt!

Neu! **Wechselstrom-Gleichrichter** *Neu!*

zum **direkten Laden** von **Akkumulatoren** an einer **Wechselstrom-Anlage** und zum **Betrieb von Funkeninduktoren** durch **Wechselstrom, ohne daß ein weiterer Unterbrecher nötig ist.**

Projektionsapparate für Bogenlicht, Gleich- oder Wechselstrom, Kalklicht, Acetylen- oder Zirkonbeleuchtung, mit angesetzter optischer Bank.

Durch Aufsetzen einzelner Ansätze ist es möglich, die Projektions-Apparate für alle Polarisations-, Doppelbrechungs-, Interferenz- und Lichtbrechungsversuche zu verwenden!

Fabrikation physikalischer Instrumente, Apparate nach Tesla, Hertz, Marconi.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen u. chem. Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Neu! Spintharioskope, Neu!

mit Fluoreszenzschirm und einer kleinen Menge Radium auf beweglichem Zeiger, um die außerordentlichen radioaktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen. **Preis Mk. 28.—.**

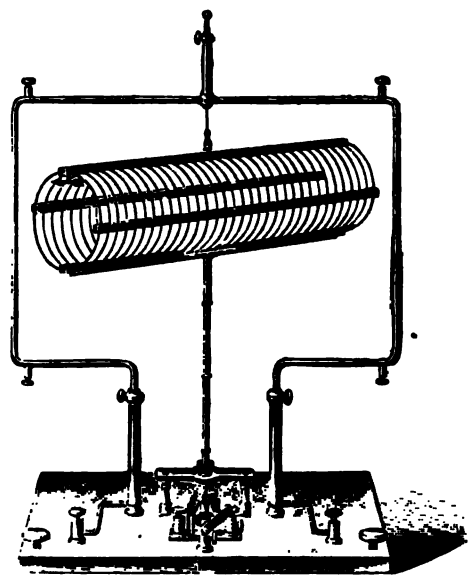
Spezial-Listen auf Wunsch.

E. Leybold's Nachfolger

Mechanische Werkstätten

Köln a. Rh.

Gegründet 1853 Gegründet 1853



Ampère'sches Gestell mit weithin sichtbaren beweglichen Leitern zum direkten Anschluß an eine Starkstromleitung.

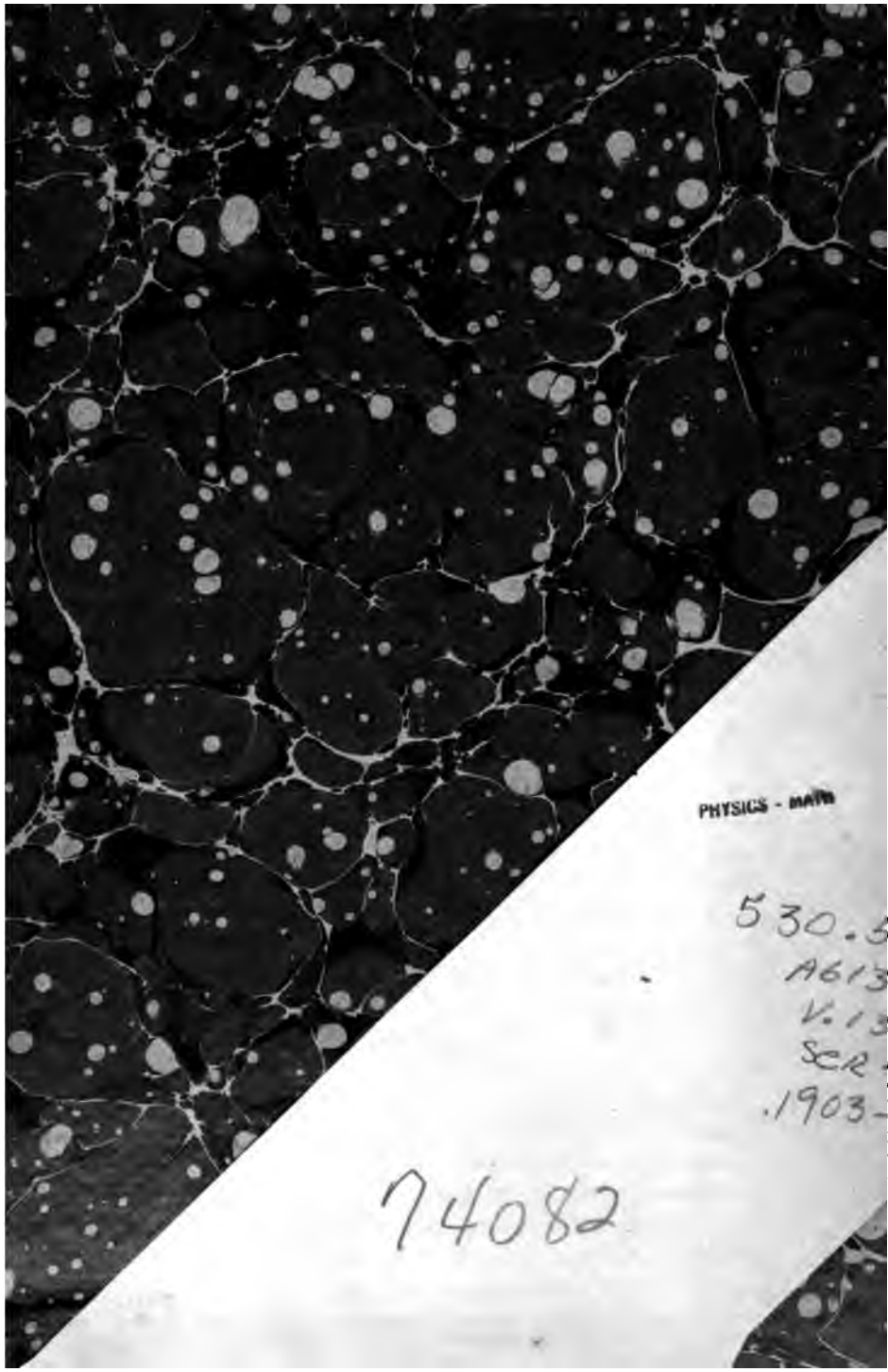
Preisliste
über Neue Apparate und Versuche
auf Verlangen.

Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Böhmestr. 9.**
Mit einer Beilage von: **Siemens & Halske, Berlin.**

Druck von [illegible] in Leipzig.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

JAN 20 1965
OCT 18 1973
FEB. 13 1990
OKTM


PHYSICS - MATH

530.5
A613
V.13
SCR
.1903-4

74082